

不飽和土壌における溶質の分散係数の決定法

筑 紫 二 郎*

A Review on the Method of Determining Hydrodynamic Dispersion Coefficient of Solutes in Unsaturated Soil

Jiro CHIKUSHI*

Summary

Hydrodynamic dispersion of solute in unsaturated soil is an important phenomenon occurring under the problems of transportation of nutrients, leaching, and accumulation of salts in soil. To analyze this dispersion in unsaturated soil we must know the values of the dispersion coefficients which are related to pore water velocity, water content, and others.

In this paper, a review on the determination of the dispersion coefficient in unsaturated soil was presented with experimental methods and expressed as a function of pore water velocity or water content. The necessity for sufficient examination concerning these determinations was pointed out.

1. はじめに

土壌における溶質の分散とは、土壌間ゲキ中において流体の速度分布が不均一になることによって溶液の濃度分布が拡がる現象のことである。分散は、養分の移動、リーチング、塩分の集積等の諸問題において生ずる重要な現象である。

分散現象の基礎式である分散方程式において、分散係数は、最も重要なパラメータであるが、その決定法について整理された文献は、まだ見当たらない。本稿では、畑地における溶質の移動を研究する立場から、不飽和土壌における分散係数を決定する方法を論じ、その特徴について述べる。なお、ここでは溶液の化学反応、溶質の土壌への吸着、溶質の流体

中への溶解は考慮されていない。

2. 分散係数の式による表示

i) Bresler の式¹⁾

土壌中の水分と溶質の同時移動を取り扱う場合、溶質の輸送には、対流による輸送の他に拡散と分散による輸送とがある。拡散と分散による輸送を示す項の係数は、それぞれ分子拡散係数 (coefficient of molecular diffusion) D_p と力学的分散係数 (mechanical dispersion coefficient) D_h であり、それらの和は水力学的分散係数 (hydrodynamic dispersion coefficient) あるいは結合された (combined) 分散係数 D_s と呼ばれる。

Kemper and van Schaik⁵⁾ によると、 D_p と水分

*農学部農地造成学研究室

Laboratory of Land Reclamation, Faculty of Agriculture

量 θ との関係は

$$D_p(\theta) = D_0 a e^{b\theta} \dots\dots\dots (1)$$

で表わされる。ここで、 D_0 は自由水中の分子拡散係数、 a, b は定数であり、Olsen and Kemper によると、 b は10に等しく、 a は0.001から0.005の範囲である¹⁾。力学的分散係数は、飽和の定常流においては平均速度 v に比例する。

$$D_h(v) = \lambda |v| \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 λ は定数である。Bresler は不飽和土壌においても(2)式が成立するものとし、 D_s を(1)式の D_p と(2)式の D_h との和として表わしている。すなわち、

$$D_s = D_0 a e^{b\theta} + \lambda |v| \\ = D_0 a e^{b\theta} + \lambda \left| \frac{q}{\theta} \right| \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 q は流束である。

ii) Harleman and Rumar の式 (Kirda et al.⁶⁾)

Harleman and Rumar は次式を示した。

$$D_s = D_{ef} + \alpha v^n \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 D_{ef} は土壌中の場合に修正された分子拡散係数で、Kirda et al.⁶⁾ や Hillel⁴⁾ は、 $D_{ef} = D_0 \theta \xi$ としている。 ξ は屈曲率 (tortousity) である。 v は平均間ゲキ速度、 α と n は定数である。

iii) Smedt and Wierenga が使用した式¹³⁾

Smedt and Wierenga は、分子拡散係数が一定であることと、力学的分散係数が間ゲキ中の水の速度に比例することを仮定した。すなわち、

$$D_s = D_0 + \varepsilon v \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 D_0 は一定であり、 ε は定数である。

iv) Selim et al. の式¹²⁾

Selim et al. は、Rose and Passioura¹¹⁾ の方法 (これは 3のi) で述べる流出破過曲線から D_s を求める方法の1つであるが説明は省く) に従って2, 4-D 除草剤の不飽和土壌における分散係数を次式のように求めた。

$$D_s = a + b \log_{10} v \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 a と b は定数であり、2, 4-D 除草剤の場合、それぞれ -0.25, 3.45 としている。

以上、i) から iv) で述べた各式は、いずれも定数を含んでいる。定数の決定には十分な実験による検証が必要であろう。

3. 定常流の下における方法

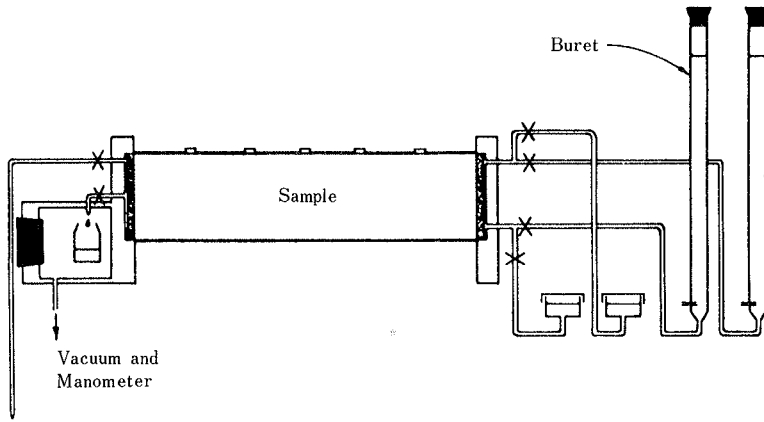
i) 流出破過曲線 (break through curve) から求める方法

実験の装置として、Nielsen and Bigger の装置⁹⁾ (第1図) および Krupp and Elrick の装置⁸⁾ (第2図) がある。2つの装置の主な違いは、土壌にサクシオンを与えるのに、試料の周りの空気を加圧するか吸引するかにある。ここでは、Krupp and Elrick の装置の場合の実験手順について説明を行う。第2図では、圧力チェンバーが秤の上に置かれていて、その内部には土壌試料が設置されている。2つのビューレットには、それぞれ蒸留水と溶液が入っている。分散実験を行う手順は次の通りである。

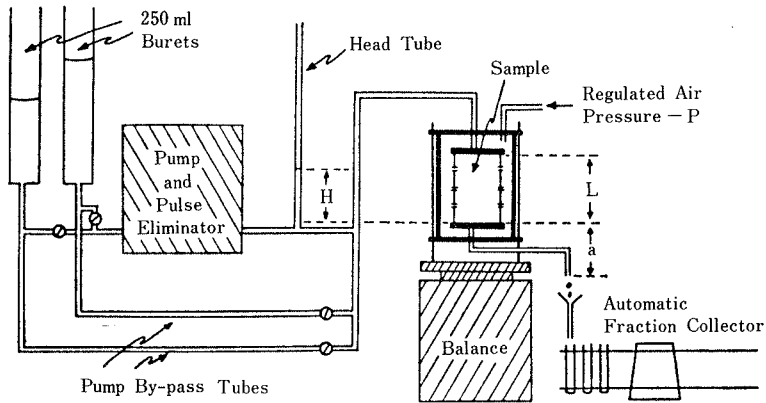
- ①真空ポンプで空気を吸引しながら、ゆっくり蒸留水を加えて試料を飽和させる。
- ②真空ポンプを停止し、試料中の水を自然排水させる。
- ③定容積ポンプを用いて、試料中を流れる流体の流束を一定にする。
- ④試料の上・下端の水頭差 $H+a$ が試料の長さ L に等しくなるようにチェンバーに空気圧を加える。このことは試料の上・下端の水頭勾配を1、つまり圧力勾配をゼロにしている。
- ⑤試料の重量の減少量が記録される。このことによって、試料の水分量が求められる。
- ⑥ビューレットのコックを切り換えることによって、試料に流入する液体を蒸留水から溶液にする。
- ⑦流出水は、一定時間毎に集められ、それぞれの時間に対する流出水の溶液濃度が決定される。

以上の操作によって、ある水分量(あるいは流束)における流出破過曲線が第3図のように得られる。この曲線から分散係数 D_s を決定する方法は、飽和浸透流における分散係数を求める場合と同様である。つぎに、その方法における式の誘導と計算法を示す⁷⁾。

上述の実験の現象を表わす基礎式は



第1図 溶質の分散の実験装置 (試料の不飽和は真空吸引による)
(Nielsen and Bigger, 1961)⁹⁾



第2図 溶質の分散の実験装置 (試料の不飽和は加圧による)
(Krupp and Elrick, 1968)⁸⁾

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_s \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x} \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x-vt}{2\sqrt{D_s t}} \right) + \exp \left(\frac{vx}{D_s} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x+vt}{2\sqrt{D_s t}} \right) \right] \dots\dots\dots (9)$$

であり、初期および境界条件は

$$\left. \begin{aligned} c(x=0, t > 0) &= c_0 \\ c(x=\infty, t \geq 0) &= 0 \\ c(x \geq 0, t=0) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

となる。 $p=vt/L$ とすると、(9)式は

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(1-p)/\sqrt{2D_s p/(vL)}} \exp(-w^2/2) dw + \frac{\exp(vL/D_s)}{2}$$

である。その解は

$$+ \frac{\exp(vL/D_s)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(1+p)/\sqrt{2pD_s/(vL)}} \exp(-w^2/2) dw \dots\dots\dots (10)$$

である。(10)式を p で微分し、 $p=1$ とおくと

$$\frac{d(c/c_0)}{dp} \Big|_{p=1} = \frac{1}{2\sqrt{\pi D_s/(vL)}} \dots\dots\dots (11)$$

(11)式の左辺の値を S とすると、結局、分散係数は、

$$D_s = vL/(4\pi S^2) \dots\dots\dots (12)$$

となる。 S の値は、定常不飽和浸透流における分散実験から得られる流出破過曲線の $p=1$ の点における勾配として求められる。それを(12)式に用いれば、その不飽和の水分量に対する分散係数 D_s が求められる。以上の操作を水分量（あるいは流速）を変えて繰り返すと、結局、 D_s と θ （あるいは v ）との関係が得られる。

D_s の計算に(12)式を使用する代りに、以下に述べる式 (15)式に相当) を用いても計算が可能である³⁾。

分散の基礎式の解である(9)式において、第1項に比べて第2項を無視すると、

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x-vt}^{\infty} \frac{\exp(-\mu^2/2)}{2\sqrt{D_s t}} d\mu \dots\dots\dots (13)$$

となる。これは、期待値 $m=vt$ 、標準偏差 $\sigma=\sqrt{2D_s t}$ を持つ正規分布 $1-N[(x-m)/\sigma]$ である。正規分布関数 $N[(x-m)/\sigma]$ の特性は

$$\left. \begin{aligned} N(1) &= 0.8413 \approx 0.84 \\ N(-1) &= 0.1587 \approx 0.16 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

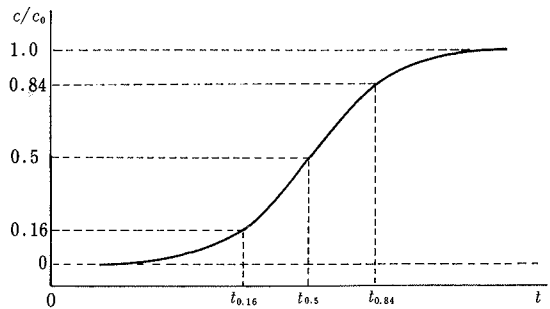
である。 $X_i = (x-vt_i)/(2D_s t_i)^{1/2}$ とすると、(13)、(14)式の関係から

$$\begin{aligned} X_{0.16} - X_{0.84} &= 1 - (-1) \\ &= (x-vt_{0.16}) / (2D_s t_{0.16})^{1/2} \\ &\quad - (x-vt_{0.84}) / (2D_s t_{0.84})^{1/2} \end{aligned}$$

ゆえに、 $x=L$ とすると、

$$D_s = \frac{1}{8} \left[\frac{L-vt_{0.84}}{\sqrt{t_{0.16}}} - \frac{L-vt_{0.84}}{\sqrt{t_{0.84}}} \right]^2 \dots\dots\dots (15)$$

となり、 D_s と v との関係が得られる。ここで、 $t_{0.16}$ 、 $t_{0.84}$ はそれぞれ相対濃度 (c/c_0) が 0.16、0.84 のときの時間である (第3図)。



第3図 流出破過曲線

本方法が次に述べる ii) の場合に比べて有利な点は、流出破過曲線が、ある時間における土壤中の濃度分布を求めるよりも比較的簡単な装置で容易に得られることにある。なお、流出破過曲線から D_s を計算する方法には、上述した2つの方法の他に Rose and Passioura¹¹⁾ の示した方法があるが、ここでは説明を省く。

ii) ある時間における濃度分布から求める方法

不飽和定常浸透流による蒸留水と溶液の置換実験において、ある瞬間の濃度分布が得られれば、分散係数が求められる。このような濃度分布を得るためには、置換の途中で液体チッ素等で試料を凍結し、切断して試料の各位置の濃度を測定する直接的な方法か、あるいは溶液の特性に応じて試料円筒の側壁で抵抗、熱伝導、光度、放射線量、誘電率等を測定する間接的な方法が採られる。

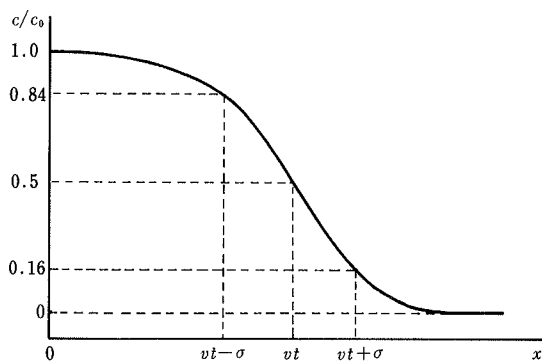
ある与えられた時間における濃度分布 (第4図) において、移行帯の幅 e は(14)式から、

$$e = 2\sigma = x_{0.16} - x_{0.84} = 2\sqrt{2D_s t} \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 $x_{0.16}$ 、 $x_{0.84}$ は相対濃度 (c/c_0) がそれぞれ 0.16、0.84 の値となる x の値である。ゆえに D_s は

$$D_s = (x_{0.16} - x_{0.84})^2 / (8t) \dots\dots\dots (17)$$

となる³⁾。第4図における濃度分布の曲線から、 $x_{0.16}$ 、 $x_{0.84}$ を読み取ると、(17)式からそのときの水分量に対する D_s が求まる。



第4図 t 時における濃度分布

本方法による D_s の計算においても、3(i)の場合と同様、飽和浸透流における解析解が用いられるので、計算が比較的容易にできる。しかし、その使用に当たっては、不飽和土壌における精度の高い濃度測定を必要とする。

4. 非定常流の下における決定法

i) Smiles et al. の方法¹⁴⁾

Smiles et al. は溶質と水の流れの基礎式

$$\theta \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_s(\theta) \frac{\partial c}{\partial x} \right] - v \frac{\partial c}{\partial x} \quad (\text{溶質}) \dots\dots\dots (18)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \quad (\text{水分}) \dots\dots\dots (19)$$

(D: 水分拡散係数)

と初期および境界条件

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta_n, c = c_n ; x > 0, t = 0 \\ \theta &= \theta_0, c = c_0 ; x = 0, t > 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (20)$$

からボルツマン変換 $\lambda = xt^{1/2}$ を用いて次式を求めた。

$$D_s(\theta) = -\frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dc} \int_{c_n}^c g(\lambda) dc \dots\dots\dots (21)$$

ここで、 g は

$$g = \theta \lambda - \int_{\theta_n}^{\theta} \lambda d\theta \dots\dots\dots (22)$$

であり、(21)式から不飽和土壌における D_s が求められる。

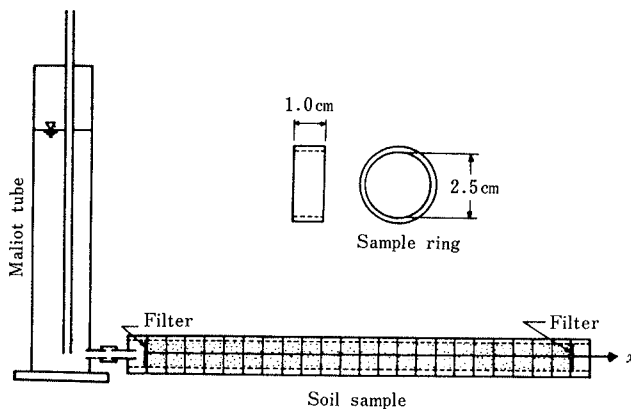
実験装置は、水分拡散係数 $D(\theta)$ を求める Bruce and Klute 法の装置と同じである(第5図)。ある時間浸潤後の水分および濃度分布は、第6図のようになる。 θ に対する $D_s(\theta)$ を求めるには、次の手順に従う。

- ①水分分布から θ に対応する λ の値を求める。
- ②(22)式の積分を近似的に Σ の形で表わし、 $g(\lambda)$ を求める。つまり

$$g(\lambda) \approx \theta \lambda - \sum_{i=1}^N \lambda_i \Delta \theta_i \quad (23)$$

ここで、 λ_i は $\Delta \theta_i$ の中央値に対する値であり、 $\sum_{i=1}^N \Delta \theta_i = \theta - \theta_n$ である。

- ③次に λ に対する $d\lambda/dc$ を濃度分布から求める。
- ④ λ に対する c の値を求める。



第5図 Bruce and Klute 法の実験装置

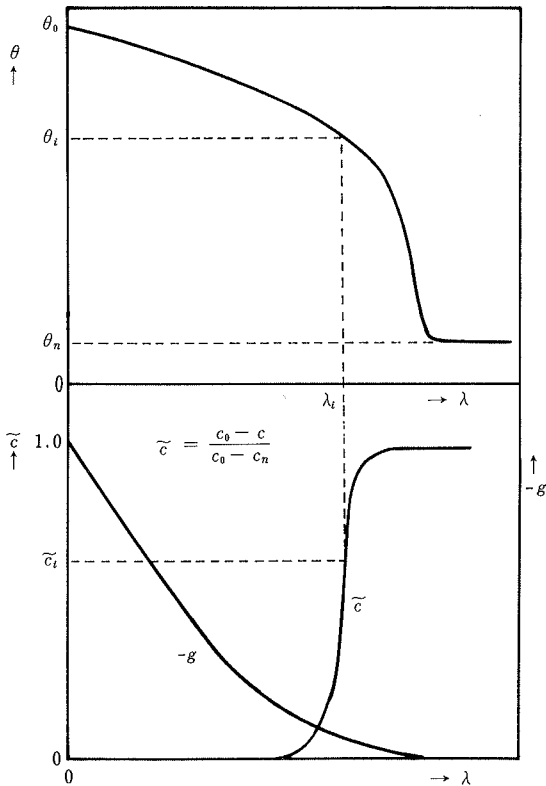
$$\int_{c_n}^c g(\lambda) dc \approx \sum_{i=1}^M g(\lambda_i) \Delta c_i \dots\dots\dots (24)$$

として積分値を求める。 Δc_i は c と c_n との間で区切られた微小間隔であり、 $\sum_{i=1}^M \Delta c_i = c - c_n$ である。 $g(\lambda_i)$ は、 Δc_i の中央値に対する λ_i の値か

ら求められる $g(\lambda)$ の値である。

⑥(21)式に $d\lambda/dc$ と $\int_{c_n}^c g(\lambda) dc$ を代入して $D_s(\theta)$ が求められる。

本方法は、実験装置および操作が比較的簡単であり、データの解析も上述の手順を踏めば容易で、1回の実験から D_s と θ との関係が得られる。しかし、Smiles *et al.* によると、 $\theta = 0.20$ 辺りで D_s の最小値が現われたり、 $\theta = 0.18 \sim 0.28$ の範囲で D_s が θ に独立であったりして、 D_s と θ との関係が一定の傾向が示されないで、まだ検討の余地があると思われる。



第6図 λ の関数としての水分、濃度、 g の分布

ii) Paetzold and Scott の方法¹⁰⁾ (half-cell technique)

本方法による分散係数を求めるための実験手順は次の通りである。

まず、溶液を含む土壌コラムと溶液を含まない土

壤コラムを用意する。これら2つのコラムの水分量は、わずかに異なる値(含水比で5%以内)にしておく。コラムは互いに結合され、その境界は、テープで接合される。それを適当な時間の間、恒温のチェンバー内に置く。ある時間経過後、コラムをチェンバーから取り出し、分離し、さらに液体空気で凍結した後、試料を薄くスライスする。スライスされた切片は試料ビンに入れられ、重量と濃度が測定される。その結果、2つのコラムの境界面からの距離と濃度との関係が曲線で示される。境界面をゼロとする座標を x とすると、分散式は、

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_s \frac{\partial c}{\partial x} \right) \dots\dots\dots (25)$$

であり、初期および境界条件は

$$\left. \begin{aligned} c(x, 0) &= c_0, & x > 0 \\ c(x, 0) &= 0, & x < 0 \\ c(+\infty, t) &= c_0, & t > 0 \\ c(-\infty, t) &= 0, & t < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

である。結局、 D_s は次式で与えられる(Crank²⁾)。

$$\left. \begin{aligned} D_s(c/c_0) &= -\frac{1}{2t} \frac{dx}{d(c/c_0)} \int_0^{c/c_0} \\ &xd(c/c_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

あるいは

$$\left. \begin{aligned} D_s(c/c_0) &= \frac{1}{2t} \frac{dx}{d(c/c_0)} \int_{c/c_0}^1 \\ &xd(c/c_0) \end{aligned} \right\}$$

平均流速は

$$\bar{v} = \frac{\Delta \bar{W}/\rho}{A t \theta} \dots\dots\dots (28)$$

で示される。ここで、 $\Delta \bar{W}$ は2つのコラムの試料の平均重量変化、 ρ は水の密度、 A は2つの試料の断面積である。実験で求めた $x \sim c/c_0$ 曲線と(27)式から c/c_0 の5つの値(0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8)の値に対して D_s を計算し、その平均値を2つのコラムの平均水分量に対する分散係数とする。

本方法では、2つのコラムの水分量差が小さく、

間ゲキ流速が小さいので、S字型曲線ができるまで、かなりの時間が必要とされる。また、コラムを結合した境界面のS字型曲線への影響について考慮する必要がある。D₀の計算において、(27)式を用いた結果が(18)式を用いた結果とよく一致することが示されている。

5. あとがき

不飽和土壌における溶質の分散係数の種々の決定法について簡単に記述した。これらの方法の妥当性

については、今後十分な検討がなされるべきである。分散係数は、土壌の種類、水分量の範囲、浸透速度、置換される（あるいは置換する）濃度によって変化する。したがって、分散係数を求める際これら分散係数に影響を及ぼす因子を考慮して、どの方法が好ましいかを判断することが必要である。また、土壌によっては、分散現象が吸着や不動水によって影響を受けることがあり、その場合には、それらを考慮して分散係数を決定する必要がある。

引用文献

1. Bresler, E. 1973. Simultaneous transport of solutes and water under transient unsaturated flow conditions. *Water Resour. Res.* 9 : 975-986.
2. Crank, J. 1975. *The Mathematics of diffusion*. Oxford Univ. Press, Oxford, England : 230-231.
3. Fried, J. J., and M. A. Combarous. 1971. Dispersion in porous media. *Advan. Hydrosci.* 7 : 221-222.
4. Hillel, D. 1977. *Computer simulation of soil water dynamics*. IDRC, Ottawa, Canada : 155-198.
5. Kemper, W. D., and J. C. van Schaik. 1966. Diffusion of salts in clay-water systems. *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.* 30 : 534-540.
6. Kirda, C., D. R. Nielsen, and L. W. Bigger. 1973. Simultaneous transport of chloride and water during infiltration. *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.* 37 : 339-345.
7. Kirkham, D., and W. L. Powers. 1971. *Advanced soil physics*. Wiley-Interscience a Division of John Wiley & Sons, Inc. : 379-427.
8. Krupp, H. K., and D. E. Elrick. 1968. Miscible displacement in an unsaturated glass bead medium. *Water Resour. Res.* 4 : 809-815.
9. Nielsen, D. R., and J. W. Bigger. 1961. Miscible displacement in soils. I. Experimental information. *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.* 25 : 1-5.
10. Paetzold, R. F., and H. D. Scott. 1978. Determination of the apparent dispersion coefficient of solute in unsaturated soil. *Soil Sci. Soc. Amer. J.* 42 : 874-877.
11. Rose, D. A., and J. B. Passioura. 1971. The analysis of experiments on hydrodynamic dispersion. *Soil Sci.* 111 : 252-257.
12. Selim, H. M., R. S. Mansell, and Atef Elzeftawy. 1976. Distribution of 2,4-D and water in soil during infiltration and redistribution. *Soil Sci.* 121 : 176-183.
13. Smedt, F., and P. J. Wierenga. 1978. Solute transport through soil with nonuniform water content. *Soil Sci. Soc. Amer. J.* 42 : 7-10.
14. Smiles, D. E., J. R. Philip, J. H. Knight, and D. E. Elrick. 1978. Hydrodynamic dispersion during absorption of water by soil. *Soil Sci. Soc. Amer. J.* 42 : 229-234.

