

数と単位をめぐるフレーゲの批判的考察

—『算術の基礎』第2, 3部研究—

哲学教室 田 畑 博 敏

はじめに

『算術の基礎』⁽¹⁾(以下『基礎』と略記)の第1部で、フレーゲは、算術命題の本性を哲学的な観点から考察したが、引き続き第2部で、数の概念が何でないか、どういうものとして理解されてはならないかを論じ、それに関連して第3部で、数詞「一」や単位の理解にまつわる諸困難を検討している。その目的は、数や単位に関するこれまでの代表的な見解の不十分な、または誤った点を指摘し、訂正することによって、十全で妥当な数の一般的定義に到達するための準備とすることである。『基礎』第3部の最後の数節で、フレーゲは、数が概念に対して与えられる、という彼自身の暫定的提案(数の文脈的定義)を行い、これによってそれまでの諸困難がどのように解決されるかの見通しを述べている。不十分で誤った議論を解きほぐすことは、フレーゲにとって、以後も出現しうであろう同様に欠陥のある理解の代表的パターンを示して、不毛な議論の出現を予め防ぐという目的を持っていた。それは、自らの最終的な解答が決定的なものであることを説得的に示すために必要な一段階であった。本稿の目的は、『基礎』第1部を扱った拙論⁽²⁾に引き続き、『基礎』第2, 3部の議論を追跡することによって、フレーゲ自身の本格的な理論展開(それは第4部で実行される)の布石となる数の文脈的定義がどう導かれたか、を明らかにすることである。

フレーゲは『基礎』第2部の冒頭(§18)で、数とは何であるかの解答である、数の一般概念(数の一般的定義)がなぜ必要であるか、を説明している。『基礎』第1部では、算術命題のうち、個々の数を扱う数式と、加法の結合律のような任意の数の間に成り立つ一般法則とが区別され、数式の証明においては個々の数の定義と数の一般法則が両方とも必要であることが示された(『基礎』§6)。そして、個々の数の定義は、数1と「1だけ増やす」という二つの要素によって実現できると見なされた(同)。しかし、数1と「1だけ増やす」ということ自体が明確にならないかぎり、これらの定義が十全であることの説明も明確にはならない。よって、数1というものの本性が一般的な数概念から説明される必要がある。さらに、数の一般法則も、その一般性のゆえに、個々の数の定義から説明されることは期待できない。それゆえ、数の一般法則も数の一般概念から導かれる必要がある。そのような訳で、個々の数ではなく、数の一般概念、数の一般的定義の探究が必要となるのである。

それでは、数とは何か、数とは一般にどういうものとして把握されるべきであろうか？

1. 数は外的事物の特性か？

数とは何かという問いの答としてしばしば候補となるのは、数は外的事物の特性 (Eigenschaft der äußeren Dinge) である、というものである。この解答が正しいものではない、ということもフレーゲはさまざまな観点から論じていく (『基礎』 § 21—§ 25)。本節ではその議論の中心点を追う。

まず、数を外的事物の特性とする理解の由来は言語の現象に求められる、ということが指摘される。数は「二枚の葉」「三本の筆」のように、形容詞または付加語として現れ、その点で「堅い」(hart)「重い」(schwer)「赤い」(rot)等の外的事物の特性を表す語の働きと類比的である。このような数言語の言語上の振る舞いから、数そのものを外的事物の特性とする理解が導かれることは容易に分かる。しかし、例えば、外的事物の特性の一つとしての色が数と同列に置かれるのか？

数学を外的世界の対象から始めるかざりて、数学を経験科学と見なす M. カントール⁽¹⁾はそのように考えるかもしれない。彼にとって数は対象からの抽象によってのみ生じるからだ。また、E. シュレーダー⁽²⁾は、事物の単位が数 1 によって模写されることにより、数が現実 (Wirklichkeit) を模範として、現実から取り出されたものと見なす。すなわち、現実から色や形を度外視して単位の出現の頻度 (Häufigkeit) のみに注目することにより、数が抽象される。こうして、シュレーダーは頻度を数と同一視し、数を色や形と同水準の事物の特性と見る (『基礎』 § 21)。

数を外的事物の特性とする見解に反対する論者として、フレーゲは、外的事物が厳密な単位を表現することはなく、単位に区切るのはわれわれの理解である、とするバウマン⁽³⁾を引用する (『基礎』 § 22)。実際、事物を単位に区切るのは思考の中でわれわれの理解に拠るように思われる。ホメーロスの『イリアス』は一篇の詩とも、二十四篇の歌曲とも、あるいはもっと多数の詩行とも見ることができる。一つの事物の色や形を変えることはできないが、それに異なる数を与えることはできる。また、千枚の緑の葉を持つ樹木があったとして、葉の一枚一枚に「緑」を、当てがうことはできるが「1000」を当てがうことはできない。樹木全体の葉を「葉」という名の下に統合すると、その統合された葉の全体は緑であるが 1000 ではない (千枚の葉ではあるが 1000 ではない)。すると、1000 は何の特性であり、何に当てがわれるのか？一枚一枚の葉か、葉全体か？どちらでもない。外的世界の外的事物に数は本来与えられないのではないのか？

さらに別の例をフレーゲは持ち出す。トランプのカードの束があったとしよう。「この数を決めよ」と言って誰かにその束を手渡しても、彼は何と答えていいかわからない。求められている数がカードの全枚数なのか、五十二枚完全に揃った一組みのカードの数 (組の数) なのか、何かのゲームの役札の数なのか、彼にはわからない。何を事物の単位とするかは我々の恣意的理解に依存して決まる。それに対して色は、われわれの恣意とは独立に事物の表面に属するように見える。色は一定の光線を跳ね返し、他の光線を吸収するある力であり、われわれの把握の仕方に左右されることはない。しかし、トランプのカードの束に数 1 や数 52 等が本来認められる、とは言えない。

こうして、われわれの恣意的取り決めや理解の仕方との関連ではじめて、事物に数が割り当てられる。トランプの束を「一組」と呼ぶのはわれわれの恣意的取り決めの結果であって、束自体はそれについて何も関知しない。そして、数を事物に割り当てるとき、単純に述語としては割り当てられない (葉の全体は千枚とは言えるが、1000とは言えない)。こうして、数を外的事物の特性とすることは正しくないように見える。

物理的・感覚的な仕方でも数を外的事物の特性と考える論者の代表格は、フレーゲが常にその見解

に注目していたJ. S. ミルである。ミルは言う：

「すると、数の名で暗示されるものは何であるか？もちろん、その名でわれわれが呼ぶところの事物の集まりに属するある特性である。そして、その特性とは、その集まりが[全体へ]作り上げられ、部分に分割されうる、その特徴的なやり方 (the characteristic manner) である。」⁶⁾(補足は筆者)

つまり、ミルにとって、数とは事物の集まりの特性であり、その集まり方が数に外ならない。しかし、the characteristic manner (その特徴的なやり方) というミルの語句中の定冠詞の使用は間違いである、とフレーゲは言う (『基礎』 §23)。集まり方や分解の仕方は一通りに決まることなくさまざまであって、数を決定するのにその事は無関係である。百個の砂粒の山にも百本の麦藁の束にも、種々の異なる集まり方と分解の仕方があるが、その何れに対しても同一の数が与えられる。集まり方は数の決定とは無関係なのである。数えるために、あるいは数を与えるために集める必要はなく、集まり方を問題とするにも及ばない。「ドイツ国中の目の不自由な人々」という語の意味を確定するのに、目の不自由な人々をドイツ全土から一堂に集める必要がないのと同様、千個の小麦の粒は一山に集めてもバラバラに撒いても、千個であることに変わりはない。事物がどのように集まっているかは、数の決定にとって問題にならない。事物の集まり方を問題にするのは、数を外的事物の特性とする見解から導かれるのであり、その見解がそもそも正しくないのである。

数を色のような外的事物の特性と同列に置かない別の根拠は、数の適用範囲の広さである (『基礎』 §24)。数は外的事物をはるかに超えて適用される。数は非物質的なもの、非感覚的なものにも適用される。自然現象を超えた多くのものが数えられる。もし数が外的事物から抽象された感覚的特性だとすると、それが非感覚的なもの (例えば、出来事、観念、概念) に適用されるとき、意味の変容を伴うだろう。例えば、

「痛みのある出来事」「青い観念」「塩辛い概念」「堅い判断」

といった語句は、感覚的特性が非感覚的なものに適用された例であるが、比喩的な言い方ではないとすると、このような言い方は理解し難い。少なくとも、「痛みのある」「青い」「塩辛い」「堅い」といった感覚的特性を表す語は、上の適用において意味の変容を余儀なくされる。もし数が同様の特性ならば、

「二つの出来事」「三つの観念」「四つの概念」「五つの判断」

といった数詞の使用においても、上の場合と同様にこれらの数詞は理解し難いものになるか、意味の変容を蒙る筈である。しかし、そのようなことは生じていない。従って、数を事物の感覚的特性と見なすことはできない、と結論しなければならない。

こうして、数を外的事物の特性と見なすことはきわめて難しいことが示された、とフレーゲは考える。

2. 数は主観的なものか？

前節では数を事物の特性と考えることは難しいことが示された。二個のリンゴと三個のリンゴ、二頭の馬と三頭の馬はそれぞれ異なる視覚的・触覚的現象を作り出す物理的なものであるが、そのことから2と3が同様に物理的なものであると結論することはできない。眼に見え触って感じられる同一の現象を生む同じ事物が、一対の長靴とも二個の長靴とも見なされる。ここに、物理的には何も対応するものの無い数の特徴がある。だが、そうすると数は、われわれの恣意的な理解の中に

のみ存在するのか？数とはわれわれの主観に依存するものなのか？確かに、パークリーは言う：

「数は、実際に事物そのものの中に存在する確固たるものでは全くない。……数は完全に精神の創造物である。精神が観念を変化させつつ組み合わせると、単位が変わる。そして単位がそのように変化するに従って、その単位の集まりに外ならない数もまた変化する。窓を一と呼ぶならば、多くの窓を持つ家も一と呼べる。多くの家々が一つの町を作り上げる。」⁽⁷⁾

パークリーの主張通り、数がわれわれの精神の創造物であり、主観的なものであるならば、数の説明においてわれわれの心理過程の記述が重要となるが、そのようなものは数の概念規定に代わることはできない、とフレーゲは言う（『基礎』 §26）。フレーゲにとって数は客観的なものであり、その客観性は、例えば北海の存在の客観性と変わるところはない。地理的・地質学的な存在としての北海がそうでないのと同様に、数も心理学の対象でも、心理過程の結果でもない。なるほど、地球の水面のある一部分を他の部分と区別して「北海」という名で呼ぶことには恣意的選択の余地があるが、そのことは、「北海」の名で呼ばれ確保された海域が厳として客観的に存在することに影響しない。数も同様に客観的である。

フレーゲにとって客観性は、手で掴み得るとか空間的であるという意味での現実性（Wirklichkeit）を必ずしも含意しない。地軸や太陽系の重心は、地球が現実的である（wirklich）のと同様の意味では現実的ではないが客観的である、とフレーゲは言う（『基礎』 §26）。地球の赤道も恣意的に創作された線ではなく、客観的なものである。地軸や太陽系の重心や赤道は思考によって生み出されたもの、精神過程の産物というよりは、（感覚によってではなく）思考によってのみ把握され知られるものである。しかし、それらは主観的なものではなく客観的なものである。

数の客観性を説明するために、フレーゲはさらに「客観的」ということを「直観」との対比によって論じる。フレーゲは、空間が現象界に属し、直観の形式としてわれわれの認識の側にある、というカントの説を、議論の出発点として一先ず承認する。その場合、現象としての空間は他の理性的存在者に対して、われわれとは全く別の姿で現れることが可能となる。一人の人間に空間がどのような現象として直観されるか、というその感性的直観内容（線がどう曲がって見え、面がどう歪んで見えるか等）は他の人間には知ることができない。それを知るには、一人の人間の空間的直観を別の人間に移し替えねばならないが、それは不可能だからである。直観の形式としての空間にはある客観的なものが含まれる。それは数学的にはユークリッド幾何学によって記述される空間の構造である。そのような客観性は概念により捉えられ、判断され、言葉で表現されるものである。フレーゲにとって純粋な直観は伝えられることはできない。直観によらず概念（または言葉）により空間の構造が伝えられるもっと明瞭な場合を、フレーゲは射影幾何学を例に取って説明する。思考実験として、射影的特性と射影的關係しか直観できない理性的存在者の存在を仮定する。彼らは、「点」や「平面」に対してわれわれが有するユークリッド的直観は持たず、三点が直線上にあるとか、四点が平面上にあるという関係しか直観しない。しかも、一方の存在者に点として直観されるものは、他の存在者には平面として直観され、その逆も成り立つ、とする。そして、一方の存在者にとって点と点を結ぶ線であるものが、他方の存在者にとっては平面と平面の切断線であるように、常に空間構造が双対的に対応している、とする。このような場合、彼らは直観の違いに気づかないにも関わらず、十分に意思の疎通が可能である。なぜなら、射影幾何学では双対の原理により、双対的な空間構造の一方が成り立てば必ず他方も成り立つからである。よって、幾何学的定理に関して、彼らは完全に一致する。「点」という言葉に一方はある直観を結びつけ、他方はまったく違っ

た直観を結びつけたとしても、混乱は起こらない。彼らは直観は異なったままで言葉だけ翻訳する。しかし、「点」に関する幾何学的定理は彼らにとって客観的である。彼らにとって「点」が客観的であるのと同様、地軸や太陽系の重心はわれわれにとって客観的である。数もこのような意味で客観的である。

このような思考実験による客観性の説明の要点は、数が感覚や表象（観念）や直観といった主観的なものではなく、伝達可能な概念的なものである、ということの強調にある。フレーゲは言う：

「私 [フレーゲ] は、客観性という言葉で、われわれの感覚、直観、表象からの、および以前の感覚の記憶による内的像の形成からの独立性、を意味する。しかし、それは理性からの独立性ではない。というのは、どういう事物が理性から独立であるのか、という問いに答えることは、判断せずに判断すること、湿らせずに毛皮を洗うこと、に外ならないからだ。」(『基礎』 §26)

フレーゲにとって、数はこのような意味での客観性を持つものでなければならない。

3. 数詞 “Ein” は対象の特性を表現するか？

前節までにおいて、数が外的事物の特性でもなく、主観的なものでもないこと、が論じられた。以後、『基礎』第3部でフレーゲは、単位 (Einheit) や数詞「一」(Ein) と関連した数の規定について検討する。というのは、数を単位の集まりである、とする見解は根強く支持されているからである。

さて、数を単位の集まりとする考えは、既にユークリッドに見られる。『原論』第7巻の冒頭でユークリッドは単位と数を次のように定義している⁽⁴⁾：

「単位とは存在するものの各々がそれによって1と呼ばれるものである。」

Μονάς ἐστίν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἐν λέγεται.

「数とは単位から合成された多である。」

Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

フレーゲは、このユークリッドの単位 (μονάς) の定義に、数えられる対象と言う意味と、そういった対象の特性という意味の両方の混在を認め、それが Einheit (単位) というドイツ語の多義性と対応している、と言う(『基礎』 §29)。そこには、事物を単位という一つのまとまりと捉え、それらの集まりを数と見なすという考え方がある。同時に、事物を単位と命名することによって、その事物に〈一つのもの〉という特性が与えられた、と考える。これは言語の現象の理解と対応した理解である。すなわち、「一つの都市」(Eine Stadt) を「賢い男」(weiser Mann) と類比的に捉え、「賢い」が「男」の特性を表すように、「一つの」が「都市」の特性を表すと見なされる。ここで、単位は〈一つ〉という特性がそこに認められる対象である。しかし、あらゆる事物が何らかの観点から見て一つのまとまりを持っているゆえに、〈一つ〉という特性を持つと言いうるが、そのような対象の規定は役に立たない、とフレーゲは言う(『基礎』 §29)。「賢くない」という可能性があって初めて、「ソロンは賢い」という規定が意味を持つのであって、あらゆる事物を一つと見なすことは、対象の詳しい規定に寄与しない。

数詞 “Ein” (一、一つの) を特性の表現と見なして、「一人の人間」(Ein Mensch) を「賢い人間」(weiser Mensch) と同様な仕方理解するならば、“Ein” は述語としても用いられよう。よって、「ソロンは賢かった」(Solon war weise) と同様に、「ソロンは一であった」(Solon war Ein) また

は「ソロンは一人であった」(Solon war Einer)とすることができる、と考えねばならない。しかし、最後の表現は、仮に文法的に正しいとしても、例えば「ソロンは一人の賢い人であった」(Solon war ein Weiser)のように文脈から補完されなければ、それ自体としては理解し難い、とフレーゲは言う。“Ein”(一、一つの)をそれだけで述語と見なすことが難しいのは、複数形の場合に明らかとなる。一方で、「ソロンは賢かった」と「タレスは賢かった」は

「ソロンとタレスは賢かった」

と一つの文に纏めることができるのに対して、

「ソロンとタレスは一であった」(Solon und Thales war Ein)

とは言えない。もし「賢い」と同様に、「一つ」がソロンとタレスの特性を表現しているのであれば、この不可能性は理解し難い。ある言語現象は、数詞“Ein”が事物の特性を表すことを支持するが、そうではない言語現象も存在するのである。

事物を一まとまりのものと見なすところに、単位や数詞「一」の起源があることは確実であるが、「一まとまり」と見なすということはわれわれの恣意的理解に依存するのか？どのような観点であれ「一まとまり」と見なすことが可能でさえあれば、それによって単位や一が成り立つのか？それとも、そこに何か客観的な基準や特徴が見出されるのか？バウマン⁹⁾は概念〈一〉の特徴として分割不可能性(Ungetheiltheit)と分離限定性(Abgegrenztheit)を考えているようである。しかし、そのような特徴は事物の特性であり、動物でさえ見分けることができる、とフレーゲは言う(『基礎』§31)。犬は他の犬や自分の主人を見分け、身を守るべき敵が多数の犬か一匹の犬かを区別するが、犬はそれらの区別を外的・物理的な特徴を手掛かりとして得た分割不可能性と分離限定性に基いてなすであろう。しかし、例えば、より大きな犬から咬まれる場合と、一匹の猫を追いかける場合において、それらに共通する〈一〉という意識が犬が持てるか否かが問題である。それは難しい、とフレーゲは見なす。いずれにせよ、分割不可能性や分離限定性は事物の特性でしかなく、〈一〉という概念の本質的特徴ではない、とフレーゲは考える(『基礎』§31)。

なるほど、分割不可能性・分離限定性と概念〈一〉および単位との結びつきは、言語においても支持されるように見える。数詞「一」(Ein)から「統一した」(einig)が言語的に導かれるのは容易に分かる。そして、後者は、内部での相違が外部との相違より重要でなくなり、思考において外に対して分離限定された状態を表すであろう。しかし、国の政治的単一[統一](politische Einheit des Landes)や芸術作品の単一性[統一性](Einheit des Kunstwerks)について語られるとき、Einheit(単位・単一性・統一性)は「統一された」(einig)や「統一的」(einheitlich)と結びつく一方で、〈一〉との結びつきは希薄となるように見える。また、「地球は月を一つ持つ」(Die Erde hat Ein Mond)と言うとき、月は分離限定され、分割不可能なものとして説明されているというより、金星や木星や火星に生じている状況(月がない、多数の月、一つの月等)と比較されている、とフレーゲは言う。こうして、概念〈一〉と分割不可能性・分離限定性との結びつきは絶対的なものではない、と考えられる。

分割不可能性を原理的な分解不可能性にまで高め、分解できないものを個体(ein Einzelnes)と呼び、数えられるべき諸個体を諸々の「一」(Einse)と見なすという行き方がある(『基礎』§33)。この場合、個体としての「一」は単位(Einheit)の意味で使われる。その単位が恣意的理解から独立した「一つのまとまり」に根ざしたものであることにより、この試みは単位の客観性を確保しようとする試みと理解される。しかし、事物の特性の中に原理的な分割不可能性があることがどのように保証されるのか疑問である。この場合も、「原理的に分割不可能と考えられる」という形で、

われわれの恣意的理解に退却せざるを得ないのではないか？こうして、事物の特性としての分割不可能性を概念〈一〉の本質的特徴とすることは難しい、とフレীগは診断する。

4. 単位は互いに同一か、異なるか？

さて前節において、数詞「一」(Ein)を対象の特性(Eigenschaft)の表現と見なすことはできそうにない、ということが明らかとなった。「一」を対象の特性の表現とする考えは、一まとまりの事物を単位と捉えることによって、その事物に〈一つ〉という特性を与える、という理解に基づいていた。そこで、再び、単位について、事物は何らかの仕方で単位と見なせるのか、なぜ事物をわざわざ単位と呼ぶ必要があるのか、と改めて問い直されよう。

シュレーダー⁽¹⁰⁾は、事物が数えられるために「事物」(Ding)や「対象」(Gegenstand)と呼ばれただけでは不十分で「単位」と呼ばれねばならないのは、「数え得る対象が同一でなければならない」からだ、と主張する。しかし、なぜ数え得る対象が同じものでなければならないのか？ホップズ⁽¹¹⁾は、「数学において、絶対的な意味での数は、その構成要素として同一の単位を前提している」からだと答える。ヒューム⁽¹²⁾も「数と量の構成要素をまったく同種のもの」と見なし、トマエ⁽¹³⁾も「単位は互いに同一だ」と言う。

しかし、単位が何から何まで同一であればそれらをどのようにして区別するのか？単位が多数あると言い得るには、単位の間は何らかの差異がなければならないだろう。多数性は事物の相違から発生するように思えるからだ。ジェヴォンズは言う⁽¹⁴⁾：

「しばしば、諸単位は、それらが互いに完全に類似しているかぎりでは単位である、と言われる。しかし、……それらは少なくとも一つの点で異なっていないてはならない。さもなければ、多数性の概念が単位に適用できない。もし三つの硬貨が同じ時間に同じ空間を占めるほど似ているならば、それらは三枚の硬貨ではなく一枚の硬貨となる。」

しかし、単位が異なるものである、という見解も困難を孕む。なるほど、単位は区別されなければ数えられない。1+1が1ではなく2であるためには、最初の「1」と二番目の「1」が区別されねばならない。ジェボンズは、「5という記号を書くとき、本来は

$$1+1+1+1+1$$

を意図しており、これの単位「1」が互いに異なることは明らかだから、その差異を明示するため

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''$$

と書いてもよかった」と言う⁽¹⁵⁾。しかし、もしそのように単位が互いに異なることが本質的に重要なことならば、なぜ、上の表記法に変えて、もっと明確に

$$a+b+c+d+e$$

と書かないのか、とフレীগは疑問を呈する(『基礎』 §36)。一方で、単位がまったく同一であれば、数えられない、または多数性の説明不可という困難が生じるが、他方で、単位がある程度異なる程度類似している、という説明も役には立たない。単位という概念に伴う「同一」と「差異」、これらをいかに調停すべきかが問題である。

そこで、混乱の根を断つために、単位と数1を区別する必要がある(『基礎』 §38)。数1 (die Zahl Eins) は定冠詞を伴うその言語形式に示されるように、唯一の対象である。さまざまな1があるのではなく唯一の1があるだけである。しかし、単位はどうか？「単位」は1 (Eins)⁽¹⁶⁾と異なり、複数を許す概念語と理解される。困難が生じるのは、単位の集まりとして数を捉えようとする

場面においてである。多数の単位を考えると、差異を表現しようとして、例えばジェヴォンズ流に単位を表す「1」にプライムを付すとする。そして、 $3-2$ を

$$(1' + 1'' + 1''') - (1'' + 1''') = 1'$$

と表現する。しかし、単位が基本的に互いに区別されるべきであれば、

$$(1' + 1'' + 1''') - (1'''' + 1''''') = 1'$$

と書くべきだ、とも言えよう。しかし、後者が何を意味するかは理解し難い。いずれにせよ、二つの2、すなわち $1'' + 1'''$ と $1'''' + 1'''''$ が現れているように見える。これは、単位の差異を事物の差異と同様に扱い、数を事物の積み重なりのようなものと捉えてはならない、ということを教える。異なる対象を、異なる特徴を残したままでも統合しようとしても数は得られない。対象の集積はそのまま数とはならないからである。しかし、完全に同一なるものを統合しても常に同一なままであり、多数性へは至らない。このディレンマをどう解くべきか？何がこのディレンマをもたらしているのか？

フレーゲの考えでは、単位と（唯一で同一なものとしての）数1が知らず知らずのうちに同一視されてしまうことによって、このディレンマはもたらされ、そして「単位」という語の多義性によりそのことが覆い隠されている（『基礎』 §39）。数え得る対象を単位と呼ぶ場合、対象の差異性は引き継がれる。しかし、概念語としての「単位」は、ある「まとまり」という観念と結びつき、「統合」「連合」等の意味がプラス記号と結びついて、いつの間にか固有名「1」へと変化する。こうして、単位（Einheit）が（唯一にして同一の）1（Eins）と同一視されることで、単位にまつわる矛盾が生じる。しかし、これは真の矛盾ではなく、見掛けの矛盾である。上のディレンマは解かれる筈である。そのための第一歩として、概念語としての「単位」と固有名としての「1」が区別されねばならない。

5. 困難を克服しようとするフレーゲ以前の試みの不十分さ

数の一般概念をどう捉えるか、単位の持つ同一性と差異性をどう調停するかがこれまでの課題であった。『基礎』 §45以下のフレーゲ自身の解決策を論じる前に、本節では、これらの困難を克服しようとする、フレーゲ以前のこれまでの試みを二点に絞って検討し、それらが未だ不十分であることを確認する。

まず、「単位」という語のもつ多義性に結びついた、単位の持つ同一性と差異性をどう調停するかの問題である。単位に区切るときの手段として、数えられる事物の時間・空間上の特性に訴えるということが、例えばホップズやトマエにより提案されている。すなわち、「数えられるものの空間における異なる位置と時間におけるそれらの互いに異なる継起が単位を区別する特徴（Merkmal）となる」⁽¹⁷⁾というのである。しかし、これに対しては、数えられるものは空間的・時間的なものに限られるのか、という疑問が生じる。フレーゲは、すでにライブニッツが非物質的事物に数は適用できないというスコラ哲学者の見解に反駁している⁽¹⁸⁾ことを指摘し、多数性の源である事物の差異は時間・空間の相違ではなく事物の持つ性質にあることを説くジェヴォンズ⁽¹⁹⁾を引用する（『基礎』 §40）。フレーゲによれば、時間は数概念とは直接の関係はない。なるほど、われわれが数えるという操作を実行するためには時間と空間が必要である。そこで、非時間的・非空間的なものを時間点と空間点で代表させることは、数えることの実行にとって有効な方法である。しかし、そのとき、数概念が非時間的・非空間的なものに適用され得る、ということが前提されている。問

題は、そのような適用がなぜ可能かが説明できるような数と単位の定義を与えることである。時間的・空間的な特性によって単位を区切るというやり方では、そのような定義は与えられないし、単位の持つ同一性と差異性の調停という課題も残される。

単位に関する以上のような試みは、事物の空間的・時間的な識別特徴から数を抽象するという議論と結びつく。しかし、このような数の抽象理論は、数えられるものの数の決定と数そのものの決定とを混同している、とフレーゲは診断する（『基礎』§44）。具体的な時間・空間内の事物、例えば月から数1（地球の衛星である月は唯一のものだから）へは、どのようにすれば抽象によって到達するのか？以下のような抽象の系列を考えよう：

月→地球の衛星→惑星の衛星→固有の光を持たない天体→天体→物体→対象

この系列中には数1は出現しそうにはない。数1は月という対象が帰属する概念ではないからだ。（「月は一である」とは言えない。）さらに、数ゼロの場合、抽象の出発点である対象が存在していないから抽象そのものが成り立たなくなる。抽象理論では、「いくつ？」という問いに答えるものとして数を捉えている。「この惑星はいくつの衛星を持っているか？」という問いに対して、2, 3という答えが抽象によって与えられるとしても、数ゼロが与えられることは難しい。すると、数ゼロが数から除外されねばならない。しかし、そのような帰結を持つ数の説明は、数の説明としては失格であると見なければならぬだろう。

6. 困難の解決へ向けて

さて、これまでの議論をフレーゲに従って⁽²⁰⁾まとめてみよう。

- (1) 数は、色・重さ・堅さ等とは異なり、事物から抽象された事物の特性（Eigenschaft）ではない。（本稿第1節）
- (2) 数は事物の積み重なりのような物理的なものではなく、表象や観念のような主観的なものでもない。（本稿第2節）
- (3) 数詞“Ein”（「一」）は対象の特性を表すことはなく、分割不可能性、分離限定性および分解不可能性は「一」で表現されるものの有用な特徴にはならない。（本稿第3節）
- (4) 数えられる事物が単位であるならば、単位が完全に互いに同一であるということは誤りであるが、ある観点から単位は異なるということも説明としての価値はない。こうして、単位は同一性と差異性という矛盾する特徴を持たざるを得ない。この困難を解くために、単位（Einheit）と数1（Eins）とを区別すべきである。（本稿第4節）

フレーゲは、『基礎』§46で、これらの困難の解決へ導く方法として、数詞の本来の用法が現れる判断という関連（文脈）で数を考察すべきである、といういわゆる「文脈原理」を採用する。そして、同一の現象が、「これは一群の木である」とも「これは五本の木である」とも表現でき、また「ここに四つの会社がある」とも「ここに五百人の人がいる」とも表現できることを例として挙げ、この言い方の変化が概念の置き換えに基づくことを指摘することにより、数に関する言明には概念についての陳述が含まれる、ということをも主張する。すなわち、

《数は概念に対して与えられる》

言い換えると、

《数を担うのは概念である》

ということをも、フレーゲは主張する。これは、「数とは何か」という数の一般的定義を直接に与え

るものではないが、数が何でないかを説明し、数が何でなければならぬを示す方向へ大きく前進する提案である。以下、このフレーゲの提案が、上の(1)~(4)の四項目をどのように説明し、そこに含まれる困難をどう解決するかを見ることにする。

まず、数に関する言明が概念についての主張であることを確認しよう（『基礎』 §46）。例えば、

「金星は零個の月（衛星）を持つ」

という言明に対応して、それについて何事かが主張される月や月の集まりは存在しない。この言明で主張されているのは、「金星の月」という概念に一つの特性（Eigenschaft）、すなわち〈何物もその下に包含しない〉（nichts unter sich zu befaßen）という特性が与えられる、ということである。同様に、言明：

「皇帝の馬車は四頭の馬によって牽かれている」

において、概念「皇帝の馬車を牽く馬」に数4が与えられている。これによって、上の第一の項目、(1)数は事物の特性ではない、ということが説明し直される。すなわち、数が概念に対して与えられるということは、概念にある特性が与えられる、または概念が高次の概念（第二階の概念：『基礎』 §53）に帰属する、ということに対応する。

さらに、上の第二の項目である、(2)数が物理的なものでも主観的なものでもないということも、数が概念に与えられるものである、といういうことにより説明できる。数概念、一般に概念を表象ないし観念のような主観的なものと考えことはできない。われわれが〈物体〉という概念を〈重さを持つもの〉という概念に従属させるとき、また概念〈鯨〉を概念〈哺乳類〉に従属させるとき、主観的なものが介入する余地は何も無い。なるほど、後者の事態を言語によって表現した文：

「すべての鯨は哺乳類である」 (※)

は、一見すると、概念についてではなく動物について何事かが主張されている文のように見えるかもしれない。しかし、そうだとすると、どの動物についての主張なのか判然としにくい。目前にある動物がいるとして、それについて哺乳類であると主張されている訳ではない。その動物が鯨に分類されるかどうか決まらなければ、それが哺乳類かどうか断言することも難しいであろう。しかし、この文(※)は目前の動物について、それが鯨であるとも鯨でないとも主張しないのである。対象について何事かを語るには、それを名づけたり指示したりする必要がある。この文(※)が個別的な動物の観察を通してしかその真偽を判定できないとしても、この文(※)の主張内容は、個別的な動物を主題とするものではない。そして、概念についての陳述は、その概念が客観的なものであれば、客観的なもの・事実的なものを含むのである。

数の真の担い手が概念であることから、数の担い手を事物または対象としたことから生じた間違った印象、例えば同一の事物に異なる数が認められる（属する）、といった印象は払拭される（『基礎』 §48）。同一のトランプの束が与えられたとき、それらを一組と見なすことにより数1がそれに認められ、それらを一枚一枚のカードの集まりと見ることにより数52が認められる。（そこから、数が主観的であるという見解も導かれる。）この場合、実際には、事物そのものではなく、事物が帰属する別々の概念、つまり概念「(カードの)組」と概念「(一枚一枚の)カード」に、別々の数が与えられたのである。

また、数が事物からの抽象であるとする数の抽象理論（本稿第5節）が唱えられる理由も説明できる（『基礎』 §48）。事物の抽象によって得られるのは概念である。そしてわれわれは概念において数を見出す。こうして、抽象は数についての判断形成に先立たねばならない。ところが、そのようにして得られた概念語と固有名がしばしば混同される。概念について、何らかの対象がそれに帰

属するかどうかを問うことは有意味であるのに対して、固有名が表すものにそれを問うことは意味がない。概念語を個々の事物の名とすることは不適切である。しかし、概念語を固有名と混同することにより、概念に見出される数が対象（固有名が表現するもの）に見出されるかのような印象が作られる。つまり、数が事物の特性であるような印象が作られるのである（『基礎』 §51）。

最後に、本節冒頭でまとめられた項目(3)と(4)、すなわち数詞「一」は対象の特性を表さないこと、および単位の持つ同一性と差異性の調停の問題に対してどのような光が当てられるか、を確認しよう。

フレーゲは、数についての言明の主語を単位と呼ぶことを提案する（『基礎』 §54）。フレーゲによれば、数の本来的な担い手は概念であった。そこで、その概念を単位と呼ぶのである。それにより、単位や数詞“Ein”（「一」）にまつわる困難が解消する。まず、数を担うに相応しい概念は、その下に帰属する対象を確然と限界づけ、いかなる恣意的分割も許さないような、そういう概念でなければならない。そのような概念だけが有限数に関連した単位である。例えば、概念「語 Zahl の文字」は、“a”を“Z”から区別し限定づけ、“h”を“a”から限界づけ、等々により、“Z” “a” “h” “l” という四つの文字のみをそれに帰属させる。概念「語 Zahl の音節」は、分割不可能なものとして“Zahl”だけを自らに帰属させる。しかし、「赤いもの」はそのような帰属すべき対象を鋭利に限界づける概念ではない。このような、自らに帰属させるべき対象を鋭利に限界づけ得る概念だけを単位と呼ぶとすると、単位との関連で数詞“Ein”（「一」）に要求されていた分割不可能性と分離限定性が新しい意味を持って単位と結びつく。

また、単位をこのように理解することにより、単位が持つ同一性と差異性の調停の問題も解決される。つまり、「単位」という語は二重の意味で用いられていたのである。単位は、数の担い手である概念であるという上で述べられた理解において、同一なものである。例えば、文：

「木星は四つの衛星を持つ」

において主張されているのは、木星の衛星の数が4であること、すなわち概念「木星の衛星」に数4が与えられるということである。よって、単位についての上のような理解に従うと、ここでの単位は「木星の衛星」である。衛星Ⅰ、衛星Ⅱ、衛星Ⅲ、衛星Ⅳがすべて同一の概念「木星の衛星」に帰属する。ここで同一の概念「木星の衛星」が単位となることにより、単位の同一性が確保される。しかし、単位の差異性が強調されるとき、単位そのものではなく、単位である概念に帰属する事物の差異性が考えられていたのである。つまり、衛星Ⅰの衛星Ⅱ、Ⅲ、Ⅳとの差異、衛星Ⅱの衛星Ⅰ、Ⅲ、Ⅳとの差異、等々が考えられていたのである。単位の持つ同一性と差異性の調停の問題はこれで解決された。単位が同時に同一性と差異性を持つという矛盾は実は見掛けの矛盾であった、ということがこれによって説明できたのである。

* * *

すでに述べたように、数についての言明は概念に関する陳述を含む（または、数は概念に対して与えられる）という提案は、フレーゲにとって「数とは何か？」の最終的な解答ではない。数とは何であるかが最終的に答えられるには、個々の数が対象であると見なされるべき場面を考慮に入れた数の定義が提案されねばならない。どのような理由でそういった場面が考慮されねばならないか、またそれにはどのような概念の洗練が必要であるか、等の細かい議論は『基礎』の第4部で実行される。われわれが検討した『基礎』第2、3部の議論はそれに向かうための準備であった。しかし、練り上げられた最終的な解答ではないとはいえ、文脈的に数を概念の特性、すなわち第二階の概念と捉えることは、先行の諸家が与えた不十分な見解に伴う困難を統一的に解くために相当に貢献で

きた。よって、このような数の把握について論じることは、数の定義を求めるフレーゲの探究の過程において、通過せねばならない必要な一段階であったのである。

註

- (1) 『算術の基礎』のテキストとしては、Gottlob Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik, Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Mit ergänzenden Texten kritisch herausgegeben von Christian Thiel, Felix Meiner (1986), およびオースティンによる独英対訳本, G. Frege, *The Foundations of Arithmetic*, Translated by J. L. Austin, 2nd. rev. ed. Northwestern U. P. (1953) を用いる。
- (2) 田畑博敏「算術命題の本性に関する諸家の見解のフレーゲによる批判的考察——『算術の基礎』第1部研究——」鳥取大学教育学部研究報告, 人文・社会科学, 第48巻第1号 (1997) 参照。
- (3) Moritz Cantor, *Grundzüge einer Elementararithmetik als Leitfaden zu academischen Vorträgen*, Bangel und Schmitt (1855), S. 2f.
- (4) Ernst Schröder, *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende*, Teubner (1873), S. 6, 10 u.11.
- (5) Johann Julius Baumann, *Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie nach ihrem ganzen Einfluß dargestellt und beurtheilt*, I. Band, Reimer (1868), II. Band, *ibid* (1869), Bd. II, S. 669.
- (6) John Stuart Mill, *A System of Logic Ratiocinative and Inductive*, in J. M. Robson (ed.), *Collected Works of John Stuart Mill*, vol. VII, University of Toronto Press (1974), Book III, ch. xxiv, § 5, p. 611.
- (7) George Berkley, *A New Theory of Vision*, Nelson (1948), § 109.
- (8) *EVCLIDIS ELEMENTA*, vol. II, hrsg. von I. L. Heiberg, Teubner (1970), p. 103.
- (9) Baumann, *op.cit.* Bd. II, S.669.
- (10) E. Schröder, *op.cit.* S.5.
- (11) Thomas Hobbes, *Examinatio et Emendatio Mathematicae Hodiernae*, in *Opera philosophica quae latine scripsit omnia*, ed. by G. Molesworth, vol. IV, Scientia (1961), p.18.
- (12) David Hume, *An Enquiry concerning Human Understanding*, Sect. XII, Pt. III, § 131.
- (13) Johannes K. Thomae, *Elementare Theorie der Analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen*, Nebert (1880), S.1.
- (14) William Stanley Jevons, *The Principles of Science: A Treatise on Logic and Scientific Method*, Macmillan (1874), p. 157.
- (15) W. St. Jevons, *op. cit.* p. 162.
- (16) フレーゲのドイツ語の“Eins”を「1」または「数1」で翻訳し, “Ein”を「一」と表して区別する。フレーゲは, <数>としての「1」を強調するときに“Eins”を用い, 特性を連想させる述語・付加語としては“Ein”を用いて, 両者を区別しているように見える。なお「数」に関して, フレーゲは, 通常「基数」(cardinal number)と翻訳される“Anzahl”と, 「数」と翻訳される“Zahl”の両方を用いている。いままでの議論では, この両者の区別が重要な鍵を握る文脈はなかったし, 以後もないと考えられるので, 本稿では「数」で一貫する。オースティンの前掲書²のオースティンによる脚註を参照。
- (17) J. Thomae, *op. cit.* S. 1.
- (18) Gottfried Wilhelm Leibniz, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, in *Die Philosophischen Schriften von G. W. Leibniz*, 4, hrsg. von C. J. Gerhardt, Olms (1978), S.35.
- (19) W. St. Jevons, *op.cit.* p. 157.
- (20) フレーゲは『基礎』§45で本稿よりもっと細かく分けているが, あまりに煩瑣になりすぎているきらいがあるので, 筆者は, 基本的に重要であると判断されるかぎり本文のように四項目に纏めることにする。