

# 離散剛要素法における岩の衝撃特性について

藤村 尚\*・木山 英郎\*・勝見 雅\*・岩成 敬介\*

(1983年6月17日受理)

## Impact of Rock by Discrete Block Method

by

Hisashi FUJIMURA\*, Hideo KIYAMA\*, Tadashi KATSUMI\*,  
Keisuke IWANARI\*

(Received June 17, 1983)

This paper presents the result of some studies on the rational determination of significant material constant  $K$  (elastic spring) and  $\eta$  (viscous spring) with regard to Discrete Block Method (DBM) which have been enveloped by Cundall (1971).

We are made use of the newly analysis method (DBM) modified Cundall method.

We will work with the following basic framework.

- (1) convergence and stability of solution by difference scheme
- (2) falling-down, impact test and repulsion coefficient
- (3) in analysis by DBM, falling-down and impact behavior on the slope

### 1. はじめに

近年、いわゆる不連続性岩盤における諸現象を解析するための種々の力学モデルが提案されている。

Ashby, Goodman, Ngoらは従来の連続体としての有限要素法にせん断ばねジョイント要素を導入した逐次解析法を提案している。さらにこれを進めて、川井、竹内らは独自の離散化モデル(剛体-ばねモデル, 有限要素ばねモデル)を提案している。また、斎藤らは剛体結合要素による解析を示している。

以上述べた力学モデルは、いずれも各要素が互いに何らかの形で結合され、固体の極限解析モデルであり、例えば斜面における転倒・滑落破壊のように、周辺の岩盤から独立した任意の要素の回転運動を含む問題については、岩盤を剛体ブロックの集合と仮定し、それらの個々のブロックの運動方程式に基づいて系全体の動力学的な

破壊状態を連立方程式として解くカンドルの方法が適していると思われる。

著者らは、このカンドルの開発した離散剛要素法<sup>1,2,3)</sup>(Discrete Block Method, 以下DBMと略す)の要素形状を円形に簡略化するとともに、弾性スプリングの剛性定数の決定法の提案や変位増分の算定式の修正を行ない、多数の粒子からなるサイロ内の粒状体の重力流動の解析に適用し多大の成果を得た。さらに、進んで実用的な解析法を確立するためには、差分近似による解の収束性・安定性などの材料定数に関する基本的な問題を検討しておく必要がある。

そこで、本報告では、まずDBMによる一球の自由落下運動から解の収束性・安定性について記す。つぎに、岩石ならびに金属の自由落下実験を実施し、得られた結果とDBM解析結果とを対比する。最後に、斜面への自

\* 土木工学科 Department of Civil Engineering

由落下運動の DBM 解析について記す。以上の結果を総合して材料定数の合理的な決定法を図る。

## 2. 材料定数 $K$ , $\eta$ と時間増分 $\Delta t$ の決定法

### 2. 1 運動方程式の減衰特性

Fig. 1 に示す弾性スプリング(剛性定数  $K$ ), ダッシュポ

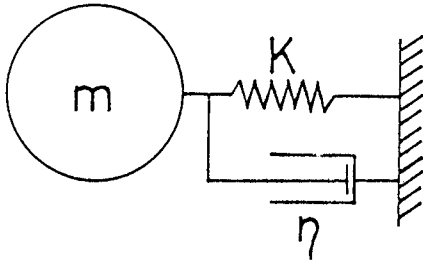


Fig. 1 A simple mass-spring-dashpot system

ット(粘性定数  $\eta$ ) で結ばれた質量  $m$  の円形要素についての並進 ( $u$ ) に関する運動方程式は式(1)の形式に略記される(ただし, 重力の作用は考えないものとする)。

$$m\ddot{u} + \eta\dot{u} + Ku = 0 \dots\dots\dots(1)$$

式(1)において,  $\eta < 2\sqrt{mK}$  のとき, 減衰振動を表わし,  $\eta > 2\sqrt{mK}$  のとき  $t$  の増加とともに一様に減衰する無周期運動を表わす。そして, 両運動の境界である式(2)の関係が満たされるとき, 最も減衰が速い。

$$\eta = 2\sqrt{mK} \dots\dots\dots(2)$$

したがって, 要素間の衝突によって生じる跳ね反り現象をできるだけ, 速かに減衰するために, カンドルは  $\eta$  と  $K$  の決定に際し式(2)の関係を考慮することを提案した<sup>2)</sup>

### 2. 2 差分近似による解の収束性・安定性

運動方程式(1)を差分近似する場合, 解の収束性・安定性を得るためには時間増分  $\Delta t$  に制約条件が必要である。この点に関して, カンドルは式(1)中の粘性効果を無視した, 1つの質点と1つのスプリングからなる1自由度の振動系を用いて以下のように考察している。

Fig. 2 に示す1自由度振動系の運動方程式は式(3)で表わされる。

$$m\ddot{u} + Ku = 0 \dots\dots\dots(3)$$

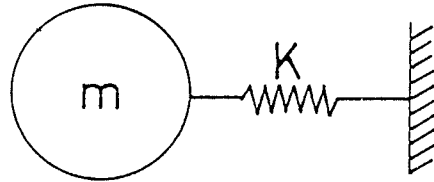


Fig. 2 A simple mass-spring system

このとき, 差分表示式は

$$u_{t+\Delta t} + \left\{ \frac{K}{m} (\Delta t)^2 - 2 \right\} u_t + u_{t-\Delta t} = 0 \dots\dots\dots(4)$$

となる。カンドルは式(4)の解の収束性, 安定性を保証する条件として次式の関係を示している。

$$\Delta t < 2\sqrt{\frac{m}{K}} \dots\dots\dots(5)$$

ここに,  $K$  は一つのスプリングの剛性として, 圧縮抗力を与える弾性スプリング  $Kn$  なり, せん断抗力を与える弾性スプリング  $Ks$  なりを考えている。以上はいずれも, 1要素1接点に簡略化した運動方程式から導かれた条件である。実際には1つの要素が周辺要素との接触数だけのスプリングによって支えられているため, 多自由度の振動系と考えなければならないため, 両式を目安にして  $\eta, K$  および  $\Delta t$  の適当な組合せを試行錯誤によって決定するのがよいとしている<sup>2)</sup>

### 2. 3 弾性スプリング定数の決定

DBM では, 要素を剛体と仮定し, 衝突あるいは接触によって生ずる作用力は, 接触点における相対変位量に関連して与える方式を採用し, 両者を結ぶ係数として  $K$  を定義しているが,  $K$  の材料定数としての意味については言及していない。<sup>2)</sup>  $K$  は本来弾性的性質を有する粒状体の変形係数に相当するものと解釈し, その算定法として, 対象とする粒子の弾性接触における荷重-変位曲線の勾配を用いることを提案する。幸い, 円要素の場合には, Fig. 3 に示す H. Hertz (1881) によって解かれた弾性円柱の接触理論解が利用できる。ヤング率  $E$ , ポアソン比  $\nu$  の等しい2つの円柱(半径  $r_1, r_2$ ) が上下から単位厚さ当り荷重  $q$  で圧縮された場合の両中心の接近量  $\delta$  と接触幅  $b$  は次式で与えられる。

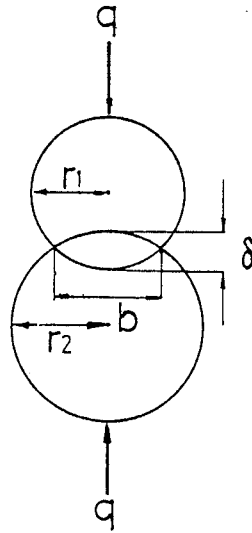


Fig. 3 Elastic contact model of cylinder

$$\delta = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi} \cdot \frac{q}{E} \left( \frac{2}{3} + \ln \frac{4r_1}{b} + \ln \frac{4r_2}{b} \right)$$

$$b^2 = \frac{\delta}{\pi} \cdot \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \cdot \frac{1-\nu^2}{E} \cdot q$$

ここで、簡単のため、 $r_1 = r_2 = r$  とすれば

$$\delta = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi} \cdot \frac{q}{E} \left( \frac{2}{3} + 2 \ln \frac{4r}{b} \right) \dots\dots\dots(6)$$

$$b^2 = \frac{4r(1-\nu^2)}{\pi} \cdot \frac{q}{E} \dots\dots\dots(7)$$

したがって法線方向の剛性定数  $K_n$  は次式のように決定される。

$$K_n = \frac{q}{\delta} = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2) \left( \frac{2}{3} + 2 \ln \frac{4r}{b} \right)} \dots\dots\dots(8)$$

なお、2つの円柱のヤング率  $E_1, E_2$  が異なる場合の  $K_n$  は、式(8)によって  $K_1, K_2$  を算出し、簡便的に次式で定める。

$$K_n = K_1 \cdot \frac{2K_2}{K_1 + K_2} \dots\dots\dots(9)$$

同様な考え方から接線方向の剛性定数  $K_s$  は、2円柱弾性接触におけるせん断荷重—接線方向変位曲線から定めるべきであるが、簡単のため、 $K_n$  に対する逓減率  $s$  を導入

して次式のように仮する。

$$K_s = K_n \cdot s \dots\dots\dots(10)$$

$K_n, K_s$  を式(8, 9, 10)のように定めると、ダッシュポットの粘性定数  $\eta_n, \eta_s$  は式(2)の関係を用いて次式のように定まる。

$$\eta_n = 2\sqrt{mK_n} \dots\dots\dots(11)$$

$$\eta_s = 2\sqrt{mK_s} = \eta_n \cdot s \dots\dots\dots(12)$$

このとき  $\Delta t$  は、式(5)に代えて次のように  $K_n$  と  $\eta_n$  から定めるのが便利である。

$$\Delta t < \eta_n / K_n \dots\dots\dots(13)$$

この時、 $\Delta t$  をできるだけ小さくすれば離散化誤差の減少と安定性もよくなるが、そうすることによって所期の時刻に到るための繰返し数が増加し、演算時間の増大とステップごとの丸め誤差の累積による誤差の増大を招くことに留意する必要がある。

### 3. 1球の自由落下運動

差分法における解の収束性、安定性を明確にしておくことは解析上極めて重要である。そこで、一球の自由落下運動解析を通じて、 $K$  と  $\eta$  および  $\Delta t$  について検討する。

要素半径  $r=1.0$  および  $0.5$  cm, 比重  $\rho=2.65$  gf/cm<sup>3</sup>,  $\nu=0.3$ , 線荷重  $q=30$  gf/cm を採用している。これらの数値を式(8), (11), (12)に用いて、種々のヤング率  $E$  に対する法線方向の定数  $K_n, \eta_n$  および  $\Delta t$  の算定値を示したのがTable Iである。 $E$  の増加とともに、 $K_n$  も比例的に増大し、それとともに計算ステップを示す時間増分  $\Delta t$  を小さくする必要のあることがわかる。また、半径が大きくなると  $K_n$  の減少、 $\eta_n$  の増加を示している。

1つの要素をある一定の高さから、平面上に向かって自

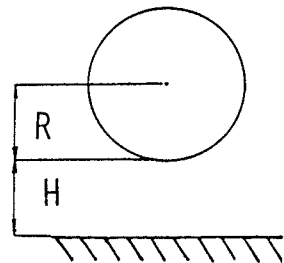


Fig. 4 Element position

Table I Values of  $K_n, \eta_n$  and  $\Delta t$  dependent on  $E$

$R=0.5\text{cm}$					
$E$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	$7.5 \times 10^2$	$1 \times 10^3$	$1 \times 10^4$	$1 \times 10^5$	$1 \times 10^6$
$K_n/\rho g$ (cm)	$3.84 \times 10^4$	$5.01 \times 10^4$	$4.25 \times 10^5$	$3.70 \times 10^6$	$3.27 \times 10^7$
$\eta_n/\rho g$ (cm/s)	$1.11 \times 10$	$1.27 \times 10$	$3.69 \times 10$	$1.09 \times 10^2$	$3.24 \times 10^2$
$\Delta t$ (s)<	$2.89 \times 10^{-4}$	$2.53 \times 10^{-4}$	$8.68 \times 10^{-5}$	$2.94 \times 10^{-5}$	$9.90 \times 10^{-6}$
$R=1.0\text{cm}$					
$E$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	$7.5 \times 10^2$	$1 \times 10^3$	$1 \times 10^4$	$1 \times 10^5$	$1 \times 10^6$
$K_n/\rho g$ (cm)	$3.64 \times 10^4$	$4.06 \times 10^4$	$4.06 \times 10^5$	$3.55 \times 10^6$	$3.16 \times 10^7$
$\eta_n/\rho g$ (cm/s)	$2.16 \times 10$	$2.47 \times 10$	$7.22 \times 10$	$2.13 \times 10^2$	$6.36 \times 10^2$
$\Delta t$ (s)<	$5.94 \times 10^{-4}$	$5.20 \times 10^{-4}$	$1.78 \times 10^{-4}$	$6.01 \times 10^{-5}$	$2.02 \times 10^{-5}$

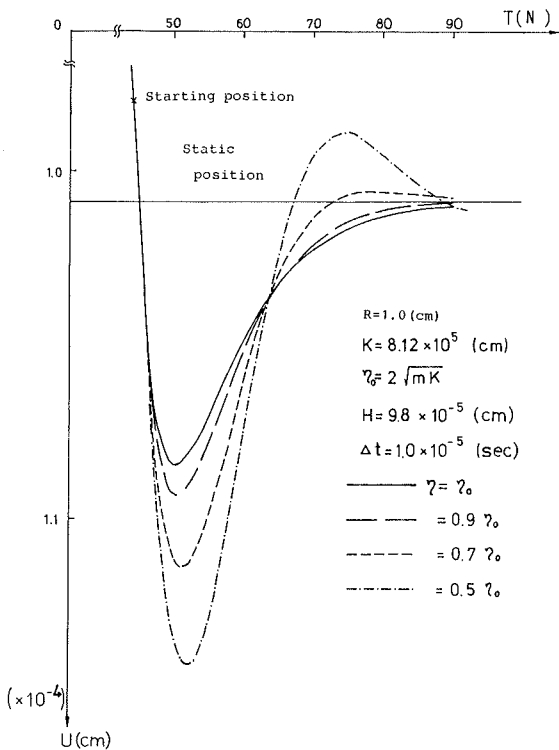


Fig. 5 Element motion varied with viscous constant

由落下させた場合について、種々の定数に対する静止状態に達するまでの挙動について述べる。要素の初期位置は Fig. 4 のように設定し、要素半径  $R$ 、落下距離  $H$  と

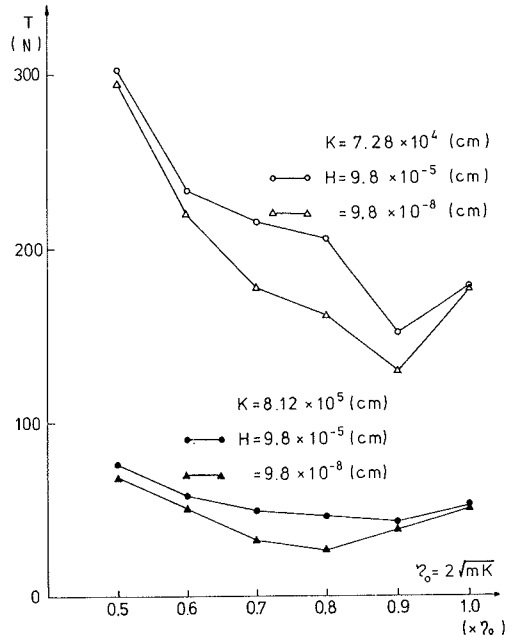


Fig. 6 Relationships between time steps  $T$  and fall distance  $H$

する。Fig. 5 は要素の剛性定数  $K$  を仮定し、粘性定数  $\eta$  をわずかに変えた場合の要素挙動である。縦軸には要素中心の鉛直変位(初期を基準)  $u$  を横軸は時間ステップ数  $T$  ( $N$ :回数)である。さらに、粘性定数  $\eta$  の収束性への影響を落下距離  $H$  と剛性定数  $K$  について調べると Fig. 6 のように示される。

これらの結果より, DBM による一球の自由落下運動においては, カンドルの提案する  $\eta_0 = 2\sqrt{mK}$  の値よりも

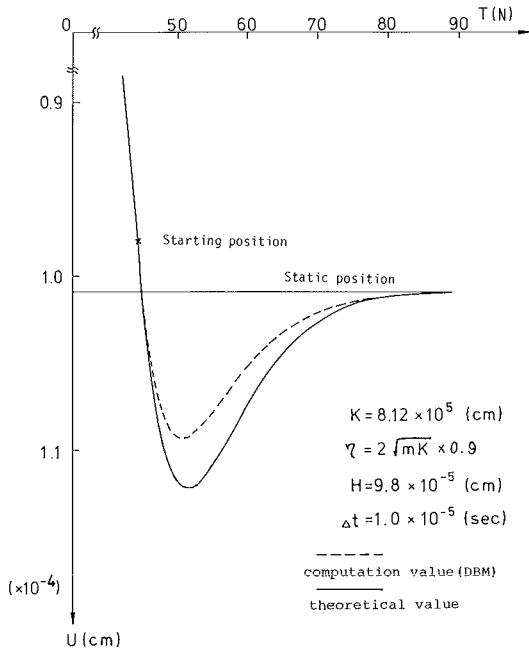


Fig. 7 Comparison with theoretical value and computation value (DBM)

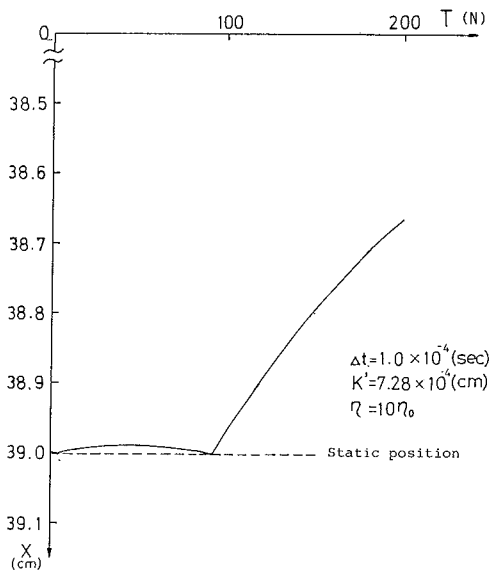


Fig. 8 Element motion

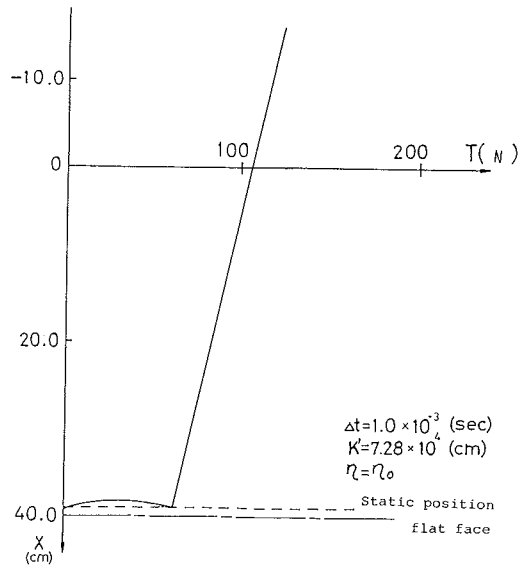


Fig. 9 Element motion

わずかに小さい  $0.7 \sim 0.9 \eta_0$  を用いた方が収束が速いことがわかる。また, 要素の収束性は  $H$  および  $K$  にも影響を受けることが知れる。

ここで, 1自由度の運動方程式は理論解によって解くことができる。Fig. 7は, 要素と平面(床面)との接触後のDBM解析と理論解による運動を示している。両者の変位は僅かに異なるものの, 収束性に関してほぼ一致しているので, DBM解析による誤差は少ないと言える。

一方, Fig. 8は粘性定数を臨界状態以上に大きく与えた場合の結果を示す。また, Fig. 9は, 時間増分  $\Delta t$  を制約条件以上に大きく与えた場合の結果を示す。両者とも, 要素は衝突により新たな運動エネルギーが加わったかのごとき不合理な反撥を示している。

#### 4. 自由落下実験

ここでは, 自由落下装置を試作し, 岩石とベアリング材料に対する実験を行った。この実験を通じて材料の大きさ, 初期高さによる反撥係数の相違について調べる。このようにして得られた反撥係数の値を参考にしてDBM解析に用いた材料定数  $K$  および  $\eta$  の値を検討する。

##### 4. 1 実験装置および方法

自由落下実験装置は試料保持機構に工夫が必要であり, ベアリング用には電磁石と定電圧電源を用いたが, 一方

岩石試料にはソレノイドを用いた側面からの支圧による方法を採用している。両法とも、落下開始時の試料に外力、回転が加わらないことが必要である。試料が衝突する床版材はS45Cの構造用硬鋼を用いたので試料の硬さと等しいか、それ以上の硬さをもっている。試料の落下挙動は写真から判読し求める。

実験に用いた試料は、 $\phi 2.5\text{ cm}$ と $\phi 1.0\text{ cm}$ の精選されたベアリング(1)、(2)と岩石試料として Table II に示す花崗

Table II General rock properties

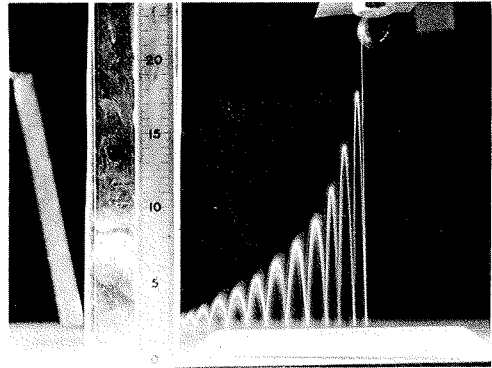
	Granite	Quartz diorite
Width (cm)	0.6	0.6
Diameter (cm)	4.99	4.99
Young modulus $E$ ( $\text{Pa}$ )	$6.468 \times 10^{10}$	$7.301 \times 10^{10}$
Poisson's ratio $\nu$	0.24	0.27
Density $\rho$ ( $\text{g/cm}^3$ )	2.09	2.08
Compression strength $\sigma_c$ ( $\text{Pa}$ )	$2.45 \times 10^9$	$< 4.90 \times 10^9$

(1)  $\phi = 2.5\text{ cm}$ , (2)  $\phi = 1.0\text{ cm}$

岩と石英閃緑岩である。石英閃緑岩のヤング率  $E$ 、ポアソン比  $\nu$ 、密度  $\rho$  および圧縮強度  $\sigma_c$  の各値は花崗岩のものに比べていずれもわずかに大きい、両試料とも健全な岩石である。

4. 2 実験結果・考察

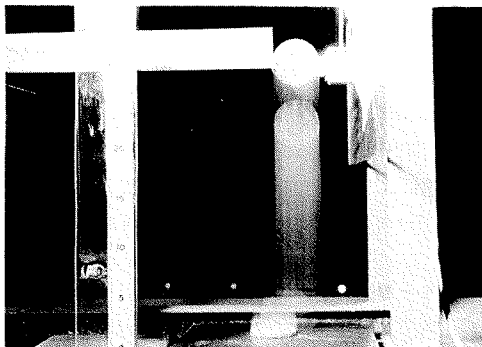
Photo. 1, 2 は自由落下実験における両試料の挙動を撮影したものである。この写真から初期高さ  $h_0$  と反撥につづく跳ね反り最高点の高さ  $h_1$  を読取って、反撥係数  $e =$



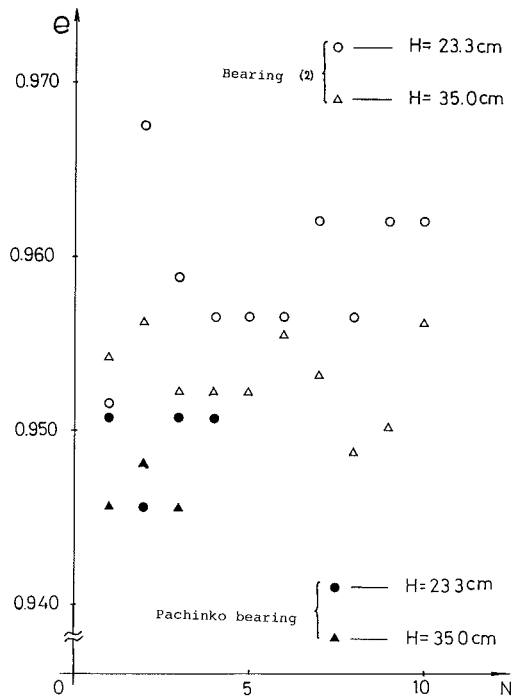
(b) metal

Photo. 1 Impact test

$\sqrt{h_1/h_0}$  が得られる。両試料の反撥係数  $e$  と跳ね反り回数  $N$  の関係を Fig. 10 に示す。これらの図から、両試料とも反撥係数は 0.9 付近にあることがわかる。しかしながら、この反撥係数と  $E$  や  $\sigma_c$  などの物理定数との関係は明らかでない。また、試料の初期高さや直径が増すにつれて、反撥係数は小さくなっている。さて、試作の両



(a) rock,



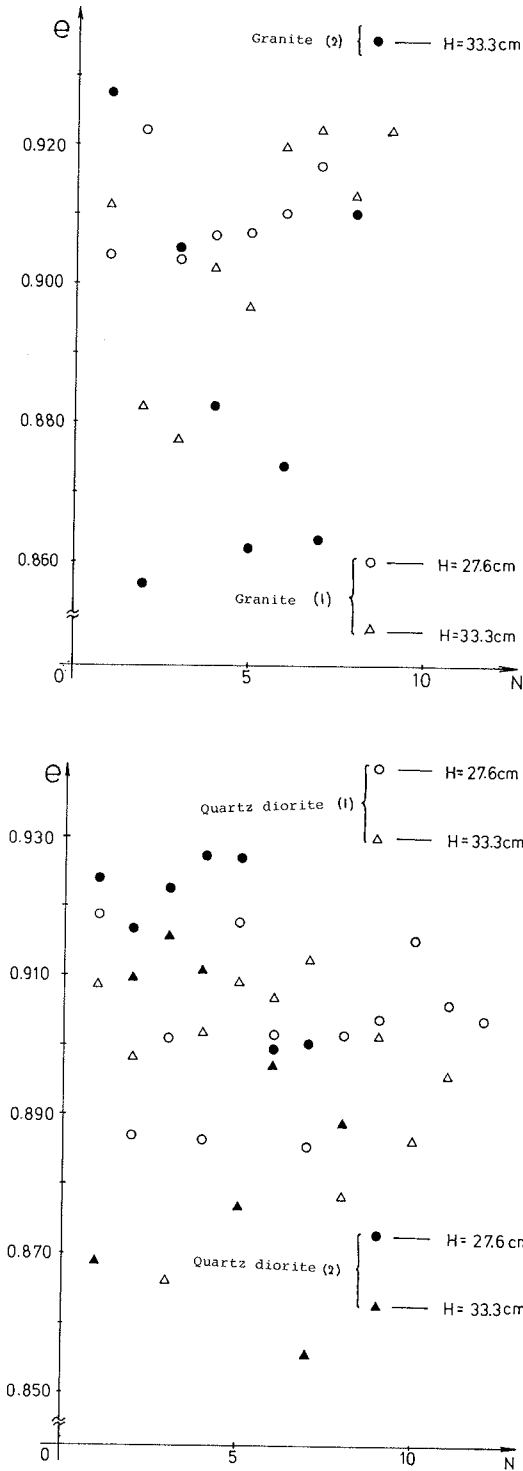


Fig. 10 Repulsion of metals and Rocks

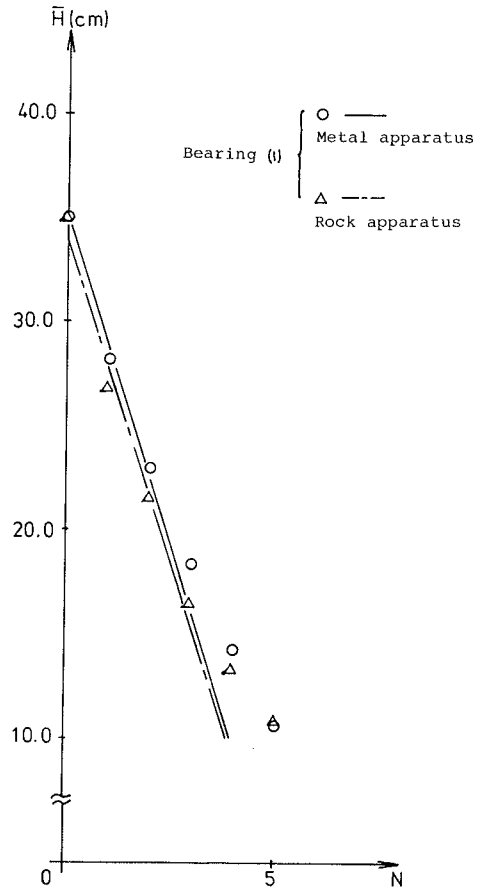


Fig. 11 Comparison with metal and rock apparatus

装置について、ベアリング(1)を用いた実験結果を Fig. 11 に示す。両者はほぼ一致し、岩石保持機構の信頼性が得られたものと思われる。

#### 4. 3 DBM と反撥係数

自由落下実験結果を念頭におき、DBM による一球の自由落下運動の解析について述べる。3. 節では差分法における解の収束性、安定性を追求したが、ここではむしろ実験で得られた反撥係数との対応に重点をおいた、 $K$  および  $\eta$  の材料定数について記す。

自由落下運動の解析例として、要素半径  $R=0.5$  cm,  $K_n/\rho g=7.68 \times 10^4$  cm,  $\eta_0 = \eta_n/\rho g=1.57$  (cm/s),  $\Delta t=10^{-5}$  (s) として、初期高さ  $H=9.8 \times 10^{-4}$  cm から平面上に落下させた時の要素の跳ね反り最高点の位置  $\bar{H}$  と時間  $t$

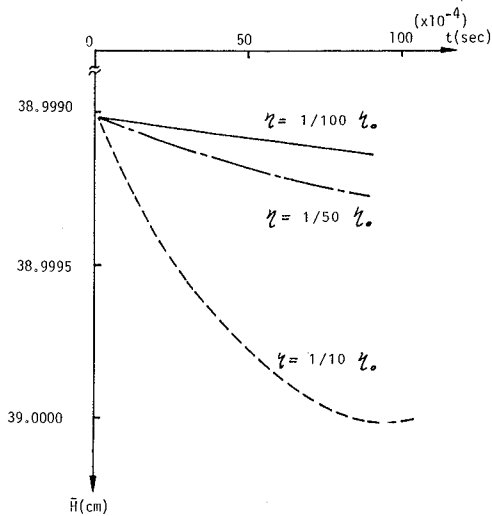


Fig. 12 Element motion

(s) の関係を Fig. 12 に示す。要素の跳ね反りは、粘性定数  $\eta$  の減少とともに、大きくなり、収束性が遅いことがわかる。ここで、時間が小さい、初期の直線部において、反撥係数  $e$  を算定すると  $0.96 (\eta_0/100)$ ,  $0.92 (\eta_0/50)$ ,  $0.62 (\eta_0/10)$  が得られる。3. 節の実験結果によると  $e \approx 0.9$  であったので、両者を対比すれば粘性定数  $\eta = \eta_0/50$  の曲線が対応すると言えよう。また、種々の  $K_n$  および  $H$  に対して反撥係数を算定すると Table III のようになる。この表から、 $K_n$  および  $H$  の増加とともに反撥係数が大きくなるのがわかる。

## 5. 斜面への自由落下運動

前節では、平面上への自由落下運動について取扱った、その運動は平面に鉛直な直線運動である。ここでは、斜面上への自由落下運動について検討する。要素は斜面上への衝突に伴って起きる回転運動ならび衝突後の非接触状態における曲線あるいは直線運動などその挙動は極めて複雑である。解析結果の一例を Fig. 13 に示す。主な結果をまとめると次のようである。

(i) 時間増分  $\Delta t$  が大きくなるにつれて斜面上での転りは大きい。しかし、 $\Delta t = 10^{-7}$  (s) 以下では要素の運動は一致している。このことは解の収束性とも関係し、要素と斜面の接触時には少なくとも  $\Delta t = 10^{-7}$  (s) の時間ステップが必要であることを示している。

(ii) 粘性定数  $\eta = \eta_0$  の場合には、要素は斜面を転がり落ちるが、 $\eta$  の僅かな減少 ( $0.1 \eta_0 \sim 0.9 \eta_0$ ) で大きく跳ね返る。しかし、 $\eta$  を  $0.1 \times \eta_0$  より小さく取れば要素は不合理 ( $e > 1$ ) な跳ね返りが起っている。

(iii) 剛性定数  $K_n$  の増加にとともに、要素は鉛直および水平方向の跳ね反りを増している。このような要素の運動を通じて、 $K$ ,  $E$  を逆算することも可能であろう。

(iv) 要素の初期高さを 3 cm とするような大きい衝撃力に対しても解析できる。以上のことから、この斜面の解析結果は現実の落石に対して十分応用できる。

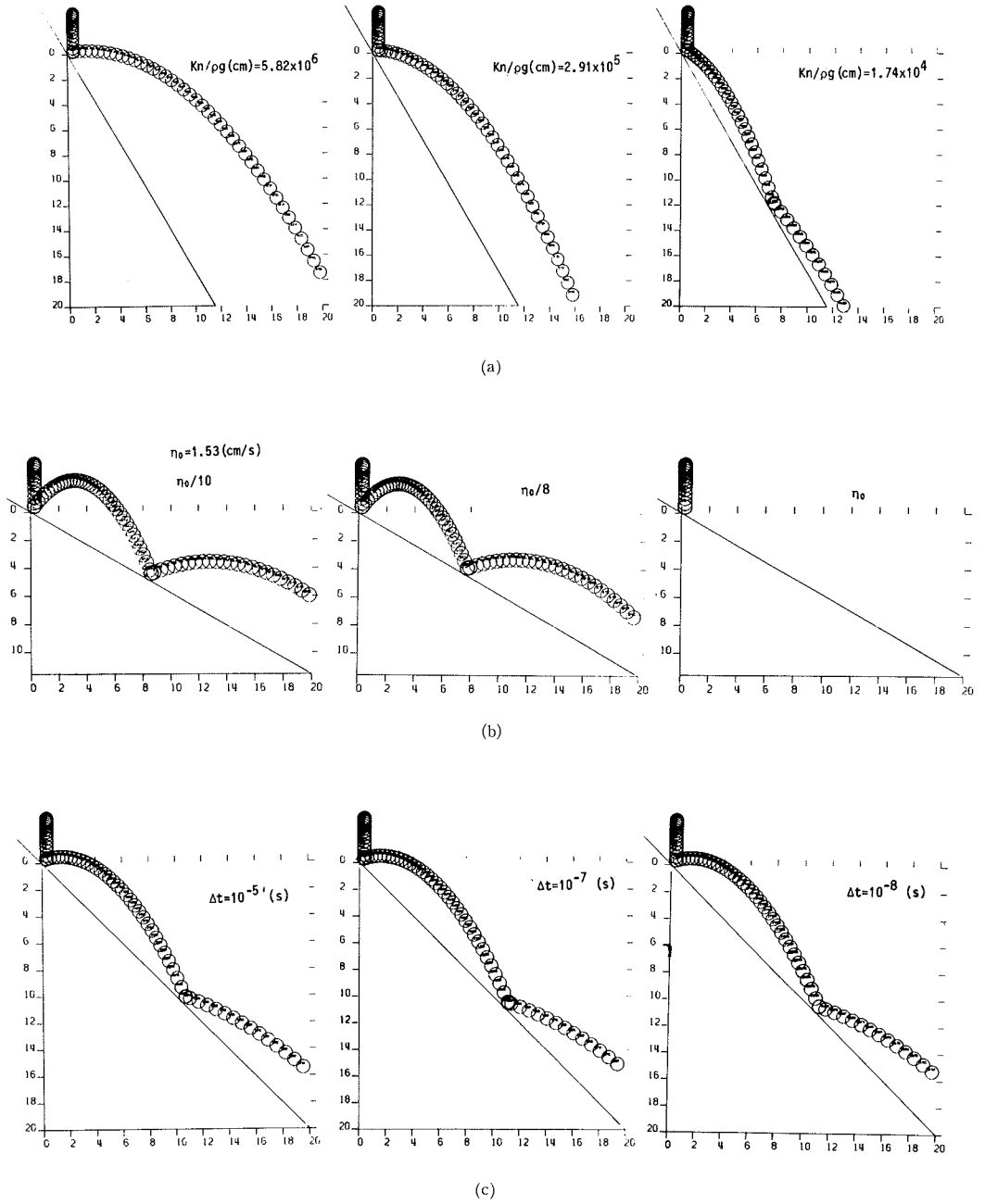
## 6. 結 語

離散剛要素法 (DBM) を実用に供する場合には、剛性定数や粘性定数および時間増分を合理的に決定すること

Table III Results of analytical model

$R$ (cm)	0.5				1.0			
$K_n/\rho g$ (cm)	$7.68 \times 10^4$	$7.28 \times 10^4$	$3.84 \times 10^4$	$1.74 \times 10^4$	$7.28 \times 10^4$			
$\eta_n/\rho g$ (cm/s)	1.569	1.527	1.109	$7.468 \times 10^{-1}$	$0.01 \eta$			
$\Delta t$ (s)	$1.0 \times 10^{-5}$				$1.0 \times 10^{-4}$			
$H$ (cm)	$9.8 \times 10^{-5}$				$9.8 \times 10^{-5}$	$9.8 \times 10^{-4}$	$9.8 \times 10^{-3}$	$9.8 \times 10^{-2}$
$H_0$ (cm)	$9.8 \times 10^{-5}$				$9.8 \times 10^{-5}$	$9.8 \times 10^{-4}$	$9.8 \times 10^{-3}$	$9.8 \times 10^{-2}$
$H_1$ (cm)	$3.82 \times 10^{-5}$	$3.81 \times 10^{-5}$	$3.12 \times 10^{-5}$	$1.77 \times 10^{-5}$	$8.5 \times 10^{-5}$	$8.85 \times 10^{-4}$	$9.76 \times 10^{-3}$	$9.84 \times 10^{-2}$
$e$	0.624	0.623	0.564	0.424	0.931	0.950	0.998	





(a) :  $R=0.5$  cm,  $H=2.75$  cm,  $\alpha=60^\circ$ ,  $\eta=\eta_0/8$ ,  $\Delta t=10^{-7}$  s

(b) :  $R=0.5$  cm,  $H=2.93$  cm,  $\alpha=30^\circ$ ,  $K_n/\rho g=7.28 \times 10^{-4}$  cm,  $\Delta t=10^{-7}$  s

(c) :  $R=0.5$  cm,  $H=2.85$  cm,  $\alpha=45^\circ$ ,  $\eta=\eta_0/8$ ,  $K_n/\rho g=7.28 \times 10^{-4}$  cm

Fig. 13 Element motion on the slope by DBM

が早急の問題である。

そこでまず、剛性定数  $K$  の決定に際して、弾性接触理論による方法を提案した。つぎに、DBM による一球の自由落下運動を解析し、解の収束性と剛性定数  $K$ 、粘性定数  $\eta$  および初期高さ  $H$  などとの関係を明らかにした。

さらに、自由落下実験から岩石の反撥係数を求め、その値を DBM 解析で算定したが、収束性を無視した材料定数を採ることになった。最後に斜面への自由落下解析から回転運動や衝撃力が加われば、材料定数、時間増分の選択が複雑になることがわかった。

なお本計算は鳥取大学電子計算機センターの HITAC M-150、京都大学大型計算機センターの FACOM M-200 で行った。

最後に、本研究を実施するに際し、実験データの集積と整理に多大の労力を煩わした本学院生西村強および本学卒業生丸山弘文（現・自営）、谷口浩章（現・鳥取市役所）の各氏をはじめ土質工学研究室の諸氏に対して感謝の意を表する次第である。

## 参 考 文 献

- 1) Cundall, P. A. : A Computer Model for Simulating Progressive, Large Scale Movements in Blocky Rock Systems, Symp. ISRM, Nancy, France, Proc. Vol. 2, pp. 129~136, 1971.
- 2) Cundall, P. A. : Rational Design of Tunnel Supports—A Computer Model for Rock Mass Behavior Using Interactive Graphics for the Input and Output of Geometrical Data, Technical Report MRD-2-74, Missouri River Division, U. S. Army Corps of Engineers, 1974.
- 3) Cundall, P. A. : Explicit Finite-Difference Method in Geomechanics, Numerical Methods in Geomechanics (edited by Desai, C. S.), Vol. 1, pp. 132~150, 1976.
- 4) 本山・藤村：カンドルの離散剛要素法を用いた岩質粒状体の重力流動の解析, 土木学会論文報告集, No. 333, pp. 137~146, 1983.