

非線形力学系の極限集合

(2) 逆問題による解析

山本 祥弘*・棚瀬 隆文**・奥山 佳史*・岩花 善衛*

(1981年5月30日受理)

Limit Sets of Nonlinear Dynamical Systems

(2) Analysis via an Inverse Method

by

Yoshihiro YAMAMOTO*, Takafumi TANASE**, Yoshifumi OKUYAMA*,
and Zenei IWAHANA*

(Received May 30, 1981)

An inverse problem means a determination of the system equation of a dynamical system for which characteristics of trajectories are partly prescribed beforehand. In the previous paper, construction methods for this inverse problems are reported.

This paper deals with an application of an inverse method to an ordinary problem which is an analysis of limit sets for a given dynamical system. A method for obtaining many piled limit sets successively is proposed, and some numerical applications are indicated to show the ability of a proposed method.

1. 結 言

力学系（微分方程式系）を考えると、先に、得られる解の性質を一部指定し、そのような解をもつ微分方程式系を求める問題を、逆問題とよぶことにする。そこで、 n 次元状態空間において、任意に与えられた有限個の超曲面が、適当な安定性をもつように指定をし、この性質をもつ力学系の微分方程式を構成する問題に対して、その一般的方法を前報¹⁾において示した。これは、2次元システムに対しては、物理的実現可能な範囲での、任意な安定性のリミットサイクルを、多重に含むシステムの構成問題となっており、発振回路などの設計問題に対する1

つの解答となっている。このようなリミットサイクルに対する研究は、振動問題として、あるいは、力学系の問題として、古くから研究され続けている問題である。

本論では、前報の結果を用いて、与えられたシステムの、多重にあらわれるリミットサイクル、あるいは、 n 次元システムではリミットサイクルの1つの拡張概念であるところの、ある種の極限集合を、 n 次元状態空間で求めることができるための条件式を導いた。さらに、この条件式を、極限集合の存在領域を推定したり、あるいは、その極限集合の近似解法として、実際に用いることができることを、例題を用いて、具体的に説明する。

* 生産機械工学科

** 松下電器産業

2. 準備

n 次元状態空間 R^n において, 超曲面

$$V(x) = c$$

が与えられ, これが, あるシステムの極限集合となるとき, この集合の安定性により, 次の4つに分類される。

- (1) 漸近安定極限集合。
- (2) 不安定極限集合。
- (3) 漸近半安定極限集合。
- (4) 半不安定極限集合。

これらの厳密な定義は前報¹⁾において記されているが, これを2次元システムに対して, 従って, 極限集合がリミットサイクルとなる場合について説明すると, 第1図のようになる。

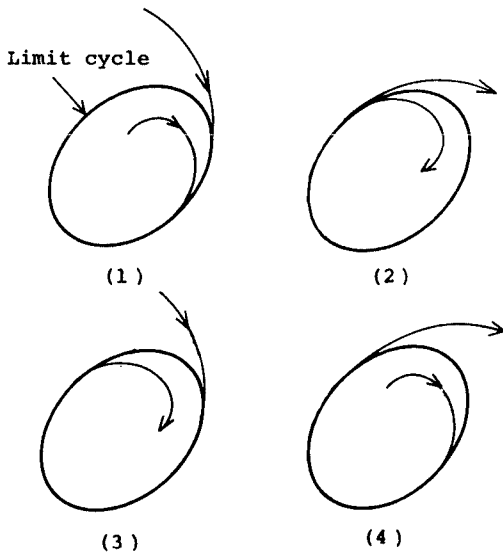


Fig.1 Classification of Limit Sets.

3. 逆問題

n 次元状態空間において, c を正の実数, x を n 次元ベクトル, $V(x)$ を x の連続関数として,

$$V(x) = c \dots\dots\dots (1)$$

で表わされる超曲面が与えられたとき, 微分方程式系

$$\dot{x} = f(x) \dots\dots\dots (2)$$

が, (1)を閉不変集合としてもつための必要十分条件は, ある交代行列 K が存在して,

$$f(x) = K \text{grad } V(x) \dots\dots\dots (3)$$

となることである。従って, 求めるシステムは,

$$\dot{x} = K \text{grad } V(x) \dots\dots\dots (4)$$

で表わされる。

次に, 次式で表わされるシステムを考える。

$$\dot{x} = h(V(x))g(x) + K \text{grad } V(x) \dots\dots\dots (5)$$

ここに, $h(\cdot)$, $g(\cdot)$ は, 各々, スカラー値, n 次元ベクトル値の連続関数である。

このとき, 曲面(1)の法線ベクトルと, システム(5)の速度ベクトルとの内積は, K が交代行列より,

$$h(V(x))(\text{grad } V(x), g(x)), \dots\dots\dots (6)$$

となる。すなわち, システム(5)の, 超曲面(1)の近傍での安定特性は, (6)の符号によって支配される。たとえば, 有限個の超曲面

$$V(x) = c_i, \quad i=1, 2, \dots, m, \dots\dots\dots (7)$$

$$0 < c_1 < c_2 < \dots < c_m,$$

に対して, その各々が, 前節で述べた4つの安定性のどれかを備えた(ただし, その組み合わせは, 物理的実現性のある範囲内)極限集合となるようなシステムとしては,

$$h(V(x)) = (-1)^p \prod_{i=1}^m (V(x) - c_i)^{d_i}, \dots\dots\dots (8)$$

$$d_i = 1 \text{ 又は } 2, \quad p = l - 1 \text{ 又は } l,$$

$$l = \sum_{i=1}^m d_i,$$

を用いた時の(5)式で与えられる。ここに, $g(x)$ としては,

$$(\text{grad } V(x), g(x)) > 0 \dots\dots\dots (9)$$

なる正定条件を満たすように選ばれるものとする。

これらの結果の詳しい説明と例題は, 文献¹⁾に記されている。

4. 順問題への応用

前節の結果は, 先に極限集合とその性質を指定し, そのような特性をもつシステムの構成法を述べたものであ

り、システムの設計に利用可能であるが、一方、古くから調べられているリミットサイクルの存在とその求め方、あるいは、漸近安定領域の求め方、等の、いわゆる順問題への応用も可能である。特に、極限集合（リミットサイクル）を多重に含むシステムの解析について、その研究は、筆者らの知る限り、未解決の問題であり、その点が本研究の1つの特徴である。

いま、 n 次元オートノマスシステム

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \dots\dots\dots (10)$$

が与えられたとする。ただし、原点を平衡点とする。このとき、原点近傍の安定性は、よく知られた線形近似による方法で、容易に求めることができる。従って、本論では、システム(10)の原点近傍は漸近安定とする。このとき(8)においては、 $p = l - 1$ 、が対応する。原点近傍が不安定な時は、(8)において、 $p = l$ 、とするか、あるいは、式(9)の不等号の向きを逆にすれば、以下の議論は全く同様に進めることができる。そこで、原点近傍が漸近安定なシステム(10)が、 m 個の極限集合である超曲面をもつとし、それらが、

$$V(\mathbf{x}) - c_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ c_1 < c_2 < \dots < c_m$$

で表わされているとすると、前節の結果より、この性質をもつシステムは、

$$\dot{\mathbf{x}} = (-1)^{l-1} \prod_{i=1}^m (V(\mathbf{x}) - c_i)^{d_i} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ + K \text{grad } V(\mathbf{x}) \quad \dots\dots\dots (11)$$

で表わされることができる。これが(10)式と一致するためには、 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ を

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - K \text{grad } V(\mathbf{x})}{(-1)^{l-1} \prod_{i=1}^m (V(\mathbf{x}) - c_i)^{d_i}}$$

と選べばよい。ただし、この $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ は、正定条件(9)を満たさなければならない、従って、

$$\frac{(\text{grad } V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}))}{(-1)^{l-1} \prod_{i=1}^m (V(\mathbf{x}) - c_i)^{d_i}} > 0$$

なる条件が、ほとんどあらゆる \mathbf{x} (すなわち、 $V(\mathbf{x}) - c_i = 0$ 、となる点を除いて)に対して成立しなければならない。結局、

$$(-1)^{l-1} \prod_{i=1}^m (V(\mathbf{x}) - c_i)^{d_i} (\text{grad } V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x})) > 0 \quad (12)$$

なる条件が求めた。

しかしながら一般に、システム(10)が与えられたとき、極限集合の個数 m 個が既知であることは稀であり、未知であることが普通である。従って、 m が未知でも、多数の極限集合を内側から順に求めていく漸化式が求まれば、実際的である。原点は、縮退した1つの極限集合であり、その近傍の安定性の判別は容易である。ここでは漸近安定と仮定している。いま、

$$V(\mathbf{x}) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, k-1$$

まで求めたと仮定し、次に $V(\mathbf{x}) = c_k$ を求めてみよう。極限集合を m 個もつと仮定して導いた条件(12)は、いわゆる、極限集合を少なくとも m 個もつシステムに対する条件であり、それ以上のことについては、何ららの制限をつけていない。言い換えれば、 m 個以上もつシステムに対しても、条件(12)は有効である。従って、この場合、(12)式において、 m を k とおき換えた式、

$$(-1)^{p-1} \prod_{i=1}^k (V(\mathbf{x}) - c_i)^{d_i} (\text{grad } V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x})) > 0$$

$$p = \sum_{i=1}^k d_i$$

が成立しなければならない。書き換えると、

$$\prod_{i=1}^k (-1)^{d_i} (V(\mathbf{x}) - c_i)^{d_i} (\text{grad } V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x})) < 0, \quad (13)$$

となる。この式が有効となる \mathbf{x} の範囲は、

$$V(\mathbf{x}) < c_{k+1}$$

を満たす \mathbf{x} の範囲である。ただし、 c_{k+1} は未知である。さらに、この範囲を狭めて、

$$c_{k-1} < V(\mathbf{x}) < c_{k+1}$$

なる \mathbf{x} に限定すると、この範囲内での \mathbf{x} に対しては、

$$V(\mathbf{x}) - c_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1,$$

であり、これらを考慮すると、(13)式は、

$$\prod_{i=1}^k (-1)^{d_i} (V(\mathbf{x}) - c_i)^{d_i} (\text{grad } V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x})) < 0$$

となる。以上をまとめてみると、

$$\begin{cases} c_{k-1} < V(\mathbf{x}) < c_{k+1} \text{ をみたす } \mathbf{x} \text{ に対して,} \\ \prod_{i=1}^k (-1)^{d_i} (V(\mathbf{x}) - c_k)^{d_i} (\text{grad } V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x})) < 0 \quad (14) \\ k=1, 2, \dots, m, \text{ ただし, } c_0=0, c_{m+1}=\infty \end{cases}$$

これが、システム(10)がもつ、極限集合としての超曲面を、順次内側から求めていくための条件式である。ただし、これは原点が漸近安定の場合であり、不安定な場合は、不等号の向きが反対となる。

以下、この結果によるいくつかの応用を、数値例でもって示すことにする。

(応用例1) 漸近安定領域の推定

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_1^2 \end{cases} \dots\dots\dots (15)$$

で表わされるシステムを考える。明らかに、原点は、その近傍に対し漸近安定である。この漸近安定領域の限界曲線が、 $x_1 - x_2$ 平面の上半平面において

$$x_2 = D(x_1)$$

なる式で表わされるとし、下半平面において

$$x_2 = -E(x_1)$$

なる式で、ともに x_1 の1価関数で表わされるとする。この場合は、 $D(-x_1) = E(x_1)$ 、である。このとき安定限界曲線の方程式は、

$$\{x_2 - D(x_1)\} \{x_2 + E(x_1)\} = 0$$

で表わされる。展開すると、

$$\begin{aligned} x_2^2 + 2A(x_1)x_2 + B(x_1) - c &= 0, \\ 2A(x_1) &= E(x_1) - D(x_1), \\ B(x_1) - c &= -D(x_1)E(x_1), \end{aligned}$$

これより、

$$V(\mathbf{x}) - c \equiv x_2^2 + 2A(x_1)x_2 + B(x_1) - c = 0, \dots\dots(16)$$

とおくことができる。いま、条件式(14)において、 $m = k = 1$ の場合を考えればよく、また、漸近安定領域内では、 $V(\mathbf{x}) - C < 0$ 、より、結局、

$$\begin{aligned} (\text{grad } V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x})) \\ = 2(A'(x_1) - 1)x_2^2 + (B'(x_1) - 2x_1 + 2x_1^2 \\ - 2A(x_1))x_2 + 2A(x_1)x_1^2 - 2A(x_1)x_1 < 0, \quad (17) \end{aligned}$$

ここで、

$$A'(x_1) = 1, \quad B'(x_1) = 2A(x_1)$$

とおくと、

$$A(x_1) = x_1, \quad B(x_1) = 2x_1^2$$

を得る。このとき(17)式は、

$$2x_1^2(x_1^2 + x_1x_2 - 1) < 0,$$

従って

$$x_1^2 + x_1x_2 - 1 < 0$$

の条件を考慮すると、

$$x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1^2 = x_2^2 + 2(x_1^2 + x_1x_2) < 2$$

で得られる領域は、完全に、システム(15)の漸近安定領域の内部に含まれている。言いかえれば、この求めた領域は、安定限界曲面の内側からの近似となっている。これを図示すると第2図のようになる。なお、この結果は、E.F.Infanteらの結果²⁾と同じである。

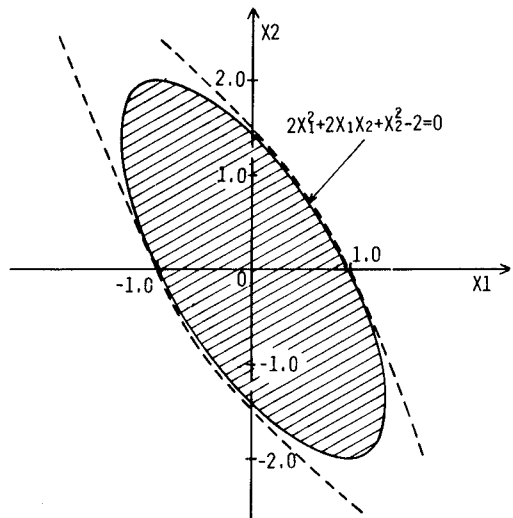


Fig.2

次に、3次系の例として、

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -2x_2 - 3x_3 - x_2^3 \end{cases} \dots\dots\dots (18)$$

なるシステムを考えると、求める限界曲面を

$$\{x_3 - D(x_1, x_2)\}\{x_3 + E(x_1, x_2)\} = 0$$

と置くことにより、前と同様な方法で解くことができる。
その結果

$$2x_3^2 + 12x_2x_3 + 22x_2^2 + 4x_1^2x_2 + 3x_1^4 = c$$

を得る。ここに、 c は、 $|x_1|$ の最大値が $\sqrt{2}$ をこえないように定められる。この結果は、G.P.Szegöの結果³⁾と同じである。

(応用例2) 複数の極限集合の推定

ここで考察するのは、2個の極限集合をもつ2次元のシステムであり、内側に漸近安定な、外側に不安定な極限集合(リミットサイクル)をもつ例である。従って、原点は不安定である。システムの方程式は、

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \epsilon(x_1^4 - 10x_1^2 + 9)x_2, \epsilon > 0, \end{cases} \dots\dots\dots (19)$$

とする。システム(15)に対すると同様に、このシステムに対するリミットサイクルの状態空間における曲線方程式を、

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) - c_i &\equiv x_2^2 + 2A(x_1)x_2 + B(x_1) - c_i = 0, \\ 0 < c_1 < c_2, & \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

とおく。このとき、条件式(14)に対しては、原点が不安定であることを考慮して、

イ)

$$\begin{aligned} 0 &< c_0 < V(\mathbf{x}) < c_2, \text{ なる } \mathbf{x} \text{ に対して,} \\ (-1)^{d_1} (V(\mathbf{x}) - c_1)^{d_1} (\text{grad } V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x})) &> 0 \end{aligned}$$

これは、 $d_1 = 1$ の時のみ意味をもち、

$$\begin{aligned} &(x_2^2 + 2A(x_1)x_2 + B(x_1)) \{2[A'(x_1) \\ &+ \epsilon(x_1^4 - 10x_1^2 + 9)]x_2^2 + [B'(x_1) - 2x_1 \\ &+ 2\epsilon A(x_1)(x_1^4 - 10x_1^2 + 9)]x_2 - 2A(x_1)x_1\} \\ &< 0, \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

これを、 $x_2^2 + 2A(x_1)x_2 + B(x_1) - c_1 < 0$ の \mathbf{x} に対して

$$\begin{aligned} &2[A'(x_1) + \epsilon(x_1^4 - 10x_1^2 + 9)]x_2^2 + [B'(x_1) \\ &- 2x_1 + 2\epsilon A(x_1)(x_1^4 - 10x_1^2 + 9)]x_2 \\ &- 2A(x_1) > 0, \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

* これは原点に対する漸近安定領域に対応する意味で用いるものとし、厳密には不適切な用語である。

として解いてみる。いま、

$$\begin{aligned} A'(x_1) &= -\epsilon(x_1^4 - 10x_1^2 + 9) \\ B'(x_1) &= 2x_1 - 2\epsilon A(x_1)(x_1^4 - 10x_1^2 + 9) \end{aligned}$$

と選ぶと、

$$\begin{aligned} A(x_1) &= -\epsilon\left(\frac{1}{5}x_1^5 - \frac{10}{3}x_1^3 + 9x_1\right) \\ B(x_1) &= x_1^2 - \epsilon^2\left(\frac{1}{5}x_1^5 - \frac{10}{3}x_1^3 + 9x_1\right)^2 \\ &= x_1^2 + A^2(x_1) \end{aligned}$$

を得る。ここに、積分定数は0とする。このとき(22)式は、

$$\begin{aligned} 2\epsilon x_1^2(3x_1^4 - 50x_1^2 + 135) &> 0, \\ (x_1^2 - \alpha)(x_1^2 - \beta) &> 0, \\ \alpha &= \frac{25 - 2\sqrt{55}}{3} \doteq 3.389, \beta = \frac{25 + \sqrt{55}}{3} \doteq 13.277 \end{aligned}$$

これより

$$x_1^2 < \alpha, \text{ 又は } \beta < x_1^2$$

が得られるが、 $\beta < x_1^2$ は、いま考察している \mathbf{x} の領域に対し不適である。従って、 $x_1^2 < \alpha$ の条件のもとで得られる

$$\begin{aligned} &x_2^2 + 2A(x_1)x_2 + B(x_1) \\ &= x_2^2 + 2A(x_1)x_2 + x_1^2 + A^2(x_1) \\ &= x_1^2 + (x_2 + A(x_1))^2 < \alpha, \end{aligned}$$

なる領域は、原点に対する不安定領域*に含まれ、さらに、曲線、

$$x_1^2 + (x_2 + A(x_1))^2 = \alpha \dots\dots\dots (23)$$

は、内側のリミットサイクルを内側から近似するものとなっている。

ロ) 次に、 $c_1 < V(\mathbf{x}) < c_3 = \infty$ なる \mathbf{x} に対して、

$$(-1)^{d_1+d_2} (V(\mathbf{x}) - c_2)^{d_2} (\text{grad } V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x})) > 0.$$

このときもまた、 $d_2 = 1$ の時のみ意味をもち、

$$\begin{aligned} &(x_2^2 + 2A(x_1)x_2 + B(x_1) - c_2) \{2[A'(x_1) \\ &+ \epsilon(x_1^4 - 10x_1^2 + 9)]x_2^2 + [B'(x_1) - 2x_1 \\ &+ 2\epsilon A(x_1)(x_1^4 - 10x_1^2 + 9)]x_2 - 2A(x_1)x_1\} \\ &> 0, \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

これを, $x_2^2 + 2A(x_1)x_2 + B(x_1) - c_2 < 0$, なる x に対して,

$$2[A'(x_1) + \epsilon(x_1^4 - 10x_1^2 + 9)]x_2^2 + [B'(x_1) - 2x_1 + 2\epsilon A(x_1)(x_1^4 - 10x_1^2 + 9)]x_2 - 2A(x_1)x_1 < 0$$

を解くと, (22)に対すると同様に $A(x_1)$, $B(x_1)$ を選び, かつ(22)に対する結果を考慮すると, 2番目の領域は,

$$\begin{cases} x_1^2 + (x_2 + A(x_1))^2 > \alpha \\ x_1^2 + (x_2 + A(x_1))^2 < \beta \end{cases} \dots\dots\dots (25)$$

で与えられ, さらに, 曲線

$$x_1^2 + (x_2 + A(x_1))^2 = \beta \dots\dots\dots (26)$$

は, 外側のリミットサイクルを内側から近似するものとなっている。

内側のリミットサイクル $V(x) = c_1$ は, いま求めた2つの曲線(23), (26)にはさまれた部分, すなわち, (25)で示される領域に含まれていることは, 構成から明らかであるが, 又, (23), (26)の各々の曲線上での軌道の方向を調べるにより, 同じ結論が, Poincare—Bendixsonの定理⁴⁾によって導かれる。

以上の結果を図示したのが, 第3図である。ただし, $\epsilon = 0.03$ を用いている。

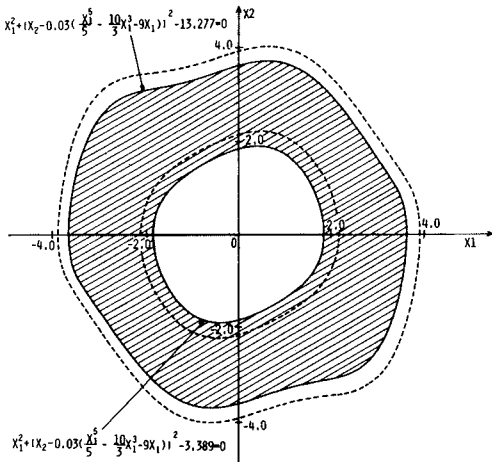


Fig.3

(応用例3) 級数展開による近似

前の例では, 2つのリミットサイクルを各々, 内側から近似している点において, それなりの意味をもってい

るが, リミットサイクルそのものの近似としては精度の点で十分でない。従って, 近似曲線の精度を上げ, かつその曲線を解析的に表現することができれば, これも面白い結果の1つといえる。その方法として市川による2次系の漸近安定領域を求める方法⁵⁾を, 拡張利用することが可能である。その概略をシステム(19)に対する例で述べれば, 未知の $A(x_1)$, $B(x_1)$ を x_1 の多項式近似により, 条件式(2), (24)を, いかに精度よく解くことができるかという問題に帰着される。第4図はその数値結果であり, 内側のリミットサイクルは, x_1 の次数が4で十分精度よく近似されているが, 一方外側は, 次数14でも若干の誤差を含んでいることを示している。詳しくは, 文献⁶⁾を参照。そこでは, 市川の方法の改良がみられ, さらに, 別の方法による結果との比較検討がなされている。

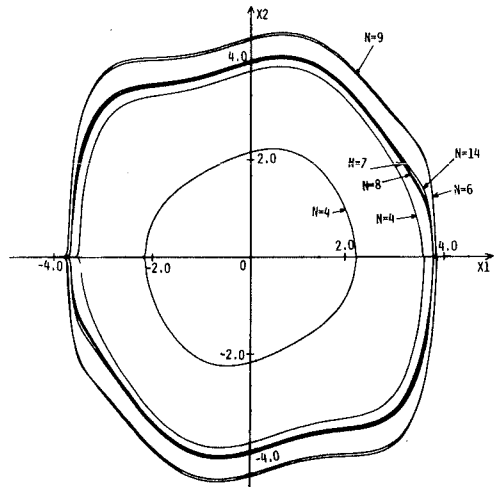


Fig.4

5. 結 言

超曲面で表わされるところの極限集合を, 多重に含むシステムが与えられたときに, この極限集合の存在領域, あるいは, その極限集合を解析的表現で近似するための手法を提案した。

任意に指定された安定特性をもつ極限集合を含む力学系のシステム方程式を求める, いわゆる逆問題に対する解法を前報において示したが, その結果を利用して, 極限集合である超曲面を含むシステムが満たさなければならない条件を導き, さらに, 多重に含まれる超曲面を, 内部から逐次求めていくことができる条件式を誘導した。

そして、その結果の有効性を示すために、いくつかの数値例によって、その具体的解法手順を示した。

非線形システムは、その対象が広汎であり、本手法によって解決されるシステムは、そのほんの一握りであることは、想像に難くないが、こうした流れの研究は、今までそんなに多くなく、2次元のリミットサイクルに限定しても、それを多重に含むようなシステムに対する研究報告を見い出すことは、困難である。この意味においても、本研究が、古い歴史をもつ非線形問題の研究に対し、1つの捨石となれば幸いである。

文 献

- 1) 山本他, 鳥取大学工学部研究報告, 11, 41/48, 1980,
- 2) E.F.Infante, et al., J.of Applied Mechanics, 31, 3
15/320, 1964.
- 3) G.P.Szegö, J.of Basic Engineering, 84, 571/577, 1962.
- 4) M.W.Hirsh, et al., Differential Equations,
Dynamical Systems, and Linear Algebra,
Academic Press, 1974.
- 5) 市川, 計測自動制御学会論文集, 4, 250/254, 1969.
- 6) 棚瀬, 鳥取大学工学部修士論文, 1980.