

# 文字式に関する生徒の認識とその指導 についての一考察

山本 浩二

指導教官：矢部敏昭

## I. 研究の目的・方法

文字式の学習は、中学校数学の中でも重要な内容であるといえる。そのため、文字式の学習に関しては、様々な指導の改善が行われてきたように思う。しかしながら、文字および文字式に対して苦手意識を持っていたり、文字式の活用に困難さを感じたりする生徒は少なくないといえる。このことは、中学第1学年だけでなく、中学第2学年、中学第3学年についても同様である。

そこで、本研究の目的は、第一に文字式の問題に関する生徒の困難点をみることである。そのための方法として、IEAの調査結果を分析・考察した。

第二に、問題解決および数学的表現における文字および文字式の意義や役割について明らかにすることである。そのための方法として、和田義信氏の論文をもとに、文字および文字式の意義や役割についての考察を行った。

第三に、上記の2つの目的をふまえて、実際の生徒の様相を捉えることである。その方法として、調査問題を作成し、考察を行った。調査問題を作成するにあたっては、熊倉氏らの論文をもとに、本研究における調査問題の意図および分析・考察の視点を設定した。調査問題は、定数・未知数・変数としての文字式の問題を作成し、それぞれの生徒の様相を捉えようとした。この調査結果を分析・考察することによって、一般に指摘されている文字式に関する生徒の困難点が実際の問題解決の場面で文字式を活用する様相としてどのように表れるのかを明らかにしていったものである。

これらを通して、生徒の問題解決の様相から生徒の文字式の捉え方や文字式に関する困難点を把握することができ、文字式の指導における課題が明らかにできるのではないかと考えるも

のである。

## II. 論文の構成

### 第1章 本研究の目的

#### 1-1 研究の動機

#### 1-2 研究の目的と方法

### 第2章 国際数学教育調査の分析と考察

#### 2-1 第1回、第2回の調査結果の分析と考察

#### 2-2 第3回の調査結果の分析と考察

#### 2-3 文字式の問題における生徒の困難点の指摘

#### 2-4 論証の問題における生徒の困難点の指摘

#### 2-5 ノン・ルーチンな問題における生徒の困難点の指摘

### 第3章 調査問題の作成に向けて

#### —文字及び文字式に焦点を当てて—

#### 3-1 文字式に関する熊倉氏らの先行研究の分析と考察

#### 3-2 文字の役割についての考察

##### 3-2-1 本研究における文字および文字式の捉え方

##### 3-2-2 本研究における文字式の役割の捉え方

#### 3-3 文字式の意義についての考察

#### 3-4 「文字の役割」の視点にたったIEAの調査問題の考察

### 第4章 未知数・定数・変数に関する調査問題の作成

#### 4-1 調査問題

#### 4-2 調査問題の意図について

##### 4-2-1 問題1に関して

##### 4-2-2 問題2に関して

##### 4-2-3 問題3に関して

#### 4-3 調査問題の解答類型について

4-3-1 問題1に関して

4-3-2 問題2に関して

4-3-3 問題3に関して

## 第5章 調査問題の結果と分析・考察

### 5-1 生徒の実際の様相

5-1-1 問題1- (1) に関する生徒の様相

5-1-2 問題1- (2) -問1に関する生徒の様相

5-1-3 問題1- (2) -問2に関する生徒の様相

5-1-4 問題2に関する生徒の様相

5-1-5 問題3-問1に関する生徒の様相

5-1-6 問題3-問2および問3に関する生徒の様相

### 5-2 生徒の様相の分類

5-2-1 問題1- (1) に関する生徒の様相の分類

5-2-2 問題1- (2) -問1に関する生徒の様相の分類

5-2-3 問題1- (2) -問2に関する生徒の様相の分類

5-2-4 問題2に関する生徒の様相の分類

5-2-5 問題3-問1に関する生徒の様相の分類

5-2-6 問題3-問2および問3に関する生徒の様相の分類

### 5-3 調査結果の分析・考察

5-3-1 問題1に関する分析・考察

5-3-2 問題2に関する分析・考察

5-3-3 問題3に関する分析・考察

## 第6章 本研究のまとめと課題

### 6-1 本研究のまとめ

### 6-2 課題

## 引用・参考文献

(1 ページ 40 字×40 行, 114 ページ)

## Ⅲ. 論文の概要

まず, IEA (国際教育到達度評価学会) が実施した第1回から第3回までの数学教育調査の分析・考察を行った。その結果, 生徒にとって難しい問題として, 「文字式の問題」, 「論証に関する問題」, 「ノン・ルーチンな問題」を取り上げることとした。

そこで, これらの問題に関して, 生徒が感じている困難点を明らかにした。

特に, 「文字式の問題」に関する生徒の困難点として, 以下のような事柄を指摘した。ここでは指摘したそれらの中から2点をあげておく

ものとする (第2章)。

1) 数学的な記号や表現の認識が十分でないために問題文を十分に理解できないこと。

2) 数学では, 文字はいろいろな意味と用法を持つが, 生徒は, それぞれの場面において文字がどのように使われて, どのような役割をもつのかを正確に認識することができていないこと。

IEAの調査問題の分析・考察から, 「文字式の問題」, 「論証に関する問題」, 「ノン・ルーチンな問題」に関する生徒の様相を捉えたが, それらの生徒の様相や認識から実際の生徒の文字式に関する認識を考察するには不十分であると考えた。そこで, 調査問題を作成し, 実際の生徒の文字および文字式に関する様相や認識を調査し, さらに本研究に位置づけたものである。

そこで, 本研究においては, とりわけ「文字式」を取り上げ, 文字式に関する調査問題を作成することにした。その中では, 「論証」についても取り上げ, 「文字式の論証」という形で問題を作成したものである。

調査問題を作成するにあたって, 本研究における調査問題の意図および分析・考察の視点を設定するために, 熊倉氏らの文字式に関する先行研究を検討した。その結果, 生徒は文字を用いた問題において, 文字式を形式的な処理によって扱うような問題は比較的得意であるといえる。その理由として生徒は, 形式的操作や文字計算のきまりといったものをすべて暗記しようとし, この暗記に少しでもズレが生じた場合, 計算間違いを起こしていることがわかった。だが, 文字式は計算のためだけに学習するのではなく, それを用いて事物を考察することが目的であると考えた。そこで生徒にとって問題場面の中で実際, 文字式がどのように捉えられているのかを考察するために, 具体的な問題解決の場面を通して考察することを考えた。また, 和田義信氏の論文をもとに, 文字および文字式の役割や意義についても考察を行った。

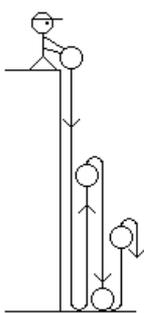
本研究においては, 文字の用いられ方として特に, 「定数」, 「未知数」, 「変数」を取り上げ, 文字式の意義に関しては, 「①言葉の文章によって表現されている数量, 数量関係や事柄を文字および文字式によって簡潔・明瞭にしかも一般的に表現することができること」, 「②文字式によって数量や数量関係を表現することによって, 表現された数量や数量関係の本質的な特徴を明確にすることができること」等

を中心に分析・考察をした。

その後、「文字の役割」の視点に立ち、再びIEAの調査問題を分析し、文字がどのような役割として用いられているのかを考察した(第3章)。

調査問題の実施は、鳥取県内の中学校で行い、対象を中学3年生(計105名)とした。実施した調査結果から、すべての生徒の様相を抽出し、その様相をカテゴリーごとに分類し、考察を行った。

**〔問題1〕**



あるゴムボールを落とすと、その高さの半分はね返ります。

(1) このボールをある高さのビルの上から落とすとき、3回めに地面にあたるまでにボールが動く距離の合計は、そのビルの高さの何倍になっていますか。

上に示した問題1は、調査問題の一つである。これは、「定数」としての文字の活用を意図した問題である。この問題に関する生徒の様相を分類したものが、以下の表1である。

表1 〔問題1〕 - (1)に関する生徒の様相の分類

<b>A</b>	A1: 割合の見方をもとに、もとにする数量を1としている生徒の様相
	A2: 割合の見方をしていて、もとにする数量を文字を用いて表しているが、数量関係の把握が不十分な生徒の様相
	A3: 割合の見方をしていて、もとにする数量を文字を用いて表しているが、等式の意味が不十分な生徒の様相
	A4: その他(文字を用いているが、問題解決に関わっていない)の生徒の様相
<b>B</b>	B1: 割合の見方をもとに、もとにする数量を1としている生徒の様相
	B2: 割合の見方をもとに、もとにする数量を10m, 20m, 30m, 100mとしている生徒の様相
	B3: 数量関係を図的にとらえ、割合の見方をしていない生徒の様相
	B4: 割合の見方をもとに、もとにする数量を2としている生徒の様相

Aは文字を用いた生徒の様相、Bは文字を用いない生徒の様相である。

A1に分類した生徒の様相(〔S14〕, 〔S17〕)は次のようなものである。

〔S14〕

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x = \frac{5}{2}x$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$$

Ans. 2.5倍

〔S17〕

$$\textcircled{1} 60 + 30 + 30 + 15 + 15 = 150$$

$$150 \div 60 = 2.5 \quad 2.5 \text{ 倍}$$

$$\textcircled{2} x + 2\left(\frac{x}{2}\right) + 2\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{5}{2}x \quad 2.5 \text{ 倍}$$

$$\textcircled{3} 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = 2.5 \quad 2.5 \text{ 倍}$$

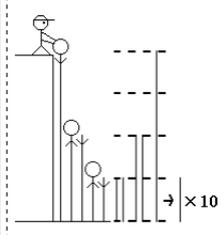
A1は、ビルの高さを10mとするといったように具体的な数値を設定するのではなく、文字の一般性を捉え、ビルの高さを文字xを用いて表現している。

A1は、文字および文字式を活用することができ、数量関係の把握や文字式に関する等式の意味も理解できている生徒であるといえる。

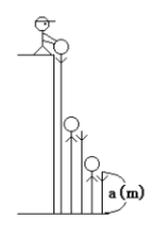
特に、〔S17〕は、文字だけでなく、具体的な数値や1とおいて考えている。この様相は、文字xがいろいろな数の代表を表しているという理解に達している様相とみることができる。

(2) 3回めに地面にあたるまでにボールが動く距離の合計が100mのとき、何mの高さのビルの上から落としたと考えられますか。この問題をA君とB君とC君は次のように考えた。

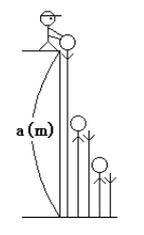
・A君の解答



・B君の解答



・C君の解答



上に示した問題は、「未知数」としての文字の活用を意図したものである。この問題から、以下の表2に分類したような様相をみることができた(第5章)。

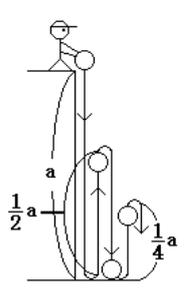
表2 〔問題1〕 - (2) - 問1に関する生徒の様相の分類

<b>A</b>	A1: 問題解決の手段として文字を用いて、直接的に解を求めようとする生徒の様相
	A2: 問題解決の手段として文字を用いて、間接的に解を求めようとする生徒の様相
	A3: 文字式を問題の解決過程を説明する・表現する手段の一つとして捉えている生徒の様相
<b>B</b>	B1: 文字式に関して抵抗を感じているため、問題の解法において、できるならば文字式は使いたくないという生徒の様相
	B2: 文字式の理解が十分でなく、文字式による問題解決ができない生徒の様相
	B3: その他の生徒の様相

本論文の第3章で指摘した文字および文字式の意義については、第5章での調査問題の考察から、生徒は、文字式の活用と文字および文字式の意義との関わりから、様々な文字および文字式の捉え方をすることがわかったものである。

また、生徒の文字式の活用に関する特徴的な誤りや間違っただけの活用例として以下のような様相をあげることができる。

[S6]



ビルの高さを  $a$  とすると、

$$a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}a = 2a + \frac{1}{2}a$$

$$= \frac{4}{2}a + \frac{1}{2}a = \frac{5}{2}a$$

A.  $\frac{5}{2}a$  倍

$\frac{1}{2}a$  と  $\frac{1}{4}a$  が 2 回足してあるのは、  
上がって下がっての  
往復があるから。

〔S6〕は、解が  $5/2$  となることを  $5a/2$  としている。つまり、文字を用いた問題解決はできているが、解としての表現に誤りがある。

[S8]

$$x \times \frac{1}{2} = \frac{x}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{x}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{x}{8} \quad \text{A. } \frac{1}{8} \text{ 倍}$$

〔S8〕は、等式の意味が理解できていない。

[S10]

ビルの高さを  $a$  として、

$$a \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{4} = \frac{3a}{6} = \frac{a}{2}$$

$$a \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{4} = \frac{a^3}{6} \quad \text{A. } \frac{a^3}{6}$$

〔S10〕は、文字式の計算に誤りがある。

他の調査問題に関しても、以下のような生徒の誤りの様相がみられた。

[S1]

二桁の整数を表す文字式	三桁の整数を表す文字式
$ab$	$abc$

〔S1〕は、文字式の表現の捉え方に誤りがある。

[S2]

二桁の整数を表す文字式	三桁の整数を表す文字式
$10a + b$	$100a + 10a + a$

〔S2〕は、 $100a + 10b + c$  を  $100a + 10a + a$  としている。

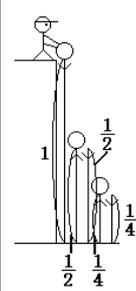
このように、特徴的な誤りを行ったり、間違っただけの文字式の活用を行ったりする生徒に対して、

どのような支援や指導を行っていくのかということは、文字式の学習における課題の一つであるといえる。

さらに、未知数の問題では文字を用いた問題解決より図的解決をはかる生徒が多くみられた。それに比べて、定数の問題では、生徒は文字を積極的に用いようとしていた。

また、文字を用いていない生徒の中にも、文字式の意義を理解していると思われる生徒の様相（〔S1〕）もみられた。

[S1]



ビルの高さを 1 とする。

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4+2+1+1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

答  $\frac{5}{2}$  倍

B1（表1参照）に属する生徒の様相は、ビルの高さを割合の見方をもとに 1 と表すことで、数量関係の本質的な特徴を明確にしようとしている。ビルの高さを 1 とみられることから、〔S17〕のような文字の認識に達しつつあるといえる。

これらに属する生徒に対しては、文字が具体的な数値（1, 60）の代表を表しているという認識に高める指導が必要であるといえる（第6章）。

### 主要引用・参考文献

- ・熊倉啓之・鈴木裕・国宗進 ほか 4 名、「文字式による論証（第5次報告）」,1994年
- ・和田義信,「和田義信 著作・講演集2 論文集」, 1997年12月20日