



鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education

ISSN : 1881-6134



小学校算数科の問題解決過程における発見
法 (heuristics) についての研究

藤本 渉

vol.9, no.13

Mar. 2007

Site URL : <http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/journal.html>

鳥取大学 数学教育学研究室

小学校算数科の問題解決過程における

発見法 (heuristics) についての研究

藤本 渉

研究の目的

本研究は、小学校算数科の問題解決学習における発見法 (heuristics) について吟味し、これを実証的に検証することを通して、発見法 (heuristics) を取り入れた授業を作成し、児童の問題解決における思考過程の改善を図っていくことが目的である。

過去の指導事例からも、問題解決についての重要性は述べられてはいるが、発見法 (heuristics) を取り入れた問題解決については、考察されていない。筆者は上述の指導が実践されたとき、児童の中での問題解決についての改善が図れると考え、設定することにした。

研究の方法

前節で設定した本研究の目的を達成するための作業課題としては、第 1 にポリアの提唱する発見学を解釈すること、第 2 に発見法 (heuristics) を定義するために筆者の経験とポリアの記述から考察をすすめていくこと、第 3 としては、児童の問題解決過程に着目し授業を作成することである。これらの課題に関して、以下のような方法で取り組んでいく。

第 1 の課題に関しては、ポリアの提唱する発見学を解釈するために、ポリアの先行研究を吟味する必要がある。そのために「いかにして問題をとくか」 (*How To Solve It*) では、発見学に焦点をおいて考察を行う。

第 2 の課題に関しては、発見法

(heuristics) を定義し、授業設計を行なっていくために筆者自ら発見法 (heuristics) を経験的に考察していく必要がある。

考察の方法としては、発見学に着目して問題が設定されている、ポリアの「数学の発見的解き方」の問題を解くことにより行う。そのなかでも三角形の作図の問題を中心に解くことにする。経験から発見法 (heuristics) についての考察をするためには、問題解決過程における筆者の思考の変容の様子を明らかにする必要がある。経験からの考察をした後は、ポリアの発見学と筆者が実際問題を解くことにより考察した発見法 (heuristics) と照合し、吟味することにより、発見法 (heuristics) の定義付けを行う。

第 3 の課題に関しては、児童の問題解決の過程で、どの程度まで発見法 (heuristics) を取り入れた授業設計を行うか吟味する必要がある。

その理由としては、児童の現段階の授業までの知識の量でも、問題を解くことにより、発見法 (heuristics) を経験することで、思考過程の変容を期待する必要があるからである。このような思考の変容がもたらされたとき、児童の問題解決学習における思考過程の改善ができたといえる。

本文は第 2 の課題である、筆者自身が発見法 (heuristics) を経験的に考察した内容を中心にまとめている。

論文の章構成

第1章 研究の目的と方法

- 1.1 研究の動機
- 1.2 研究の目的
- 1.3 研究の方法

第2章 小学校算数科における問題解決学習

- 2.1 問題解決学習における heuristics
- 2.2 <heuristics> と <discover> の差異
- 2.3 実際の指導実践における発見法

(heuristics) の分析

第3章 発見法 (heuristics) についての反省的考察

- 3.1 作図の実際 1
- 3.2 作図の実際 2
- 3.3 作図の実際 3
- 3.4 作図の実際 4
- 3.5 作図の実際 5
- 3.6 作図にみられる発見法 (heuristics)
- 3.7 ポリアの発見学と経験からの発見法 (heuristics) との考察

第4章 問題解決過程における発見法 (heuristics) の学習指導

- 4.1 授業設計 1
- 4.2 授業設計 2

第5章 研究のまとめと課題

- 5.1 研究のまとめ
- 5.2 今後の課題

研究の概要

第2章では、ポリアの提唱する発見学について、ポリアの「いかにして問題をとくか」から考察を行った。またポリアは、原文では発見学を heuristics と表現していたので、そこから同じ発見という意味を持つ discover と比べることにより考察をしていった。後半では、実際の指導実践を発見法 (heuristics) に着目して見ていくこ

とで考察をしていった。

ポリアは、発見学を行うのに必要な思考の作業として、『問題の要素を分解、結合させ、あるいは又そこに現れる言葉の定義にたちかえり、一般化、特殊化もしくは類推によって変化させることができる。問題を変化させることによって補助問題をみちびき入れ、或いは又少しやさしい補助問題を発見することもできる。』…引用「いかにして問題をとくか」

と述べていた。しかしポリアは問題を解くときには進歩と成果、記号、数学的帰納も大事だと述べていたので、それらについてもまとめていった。

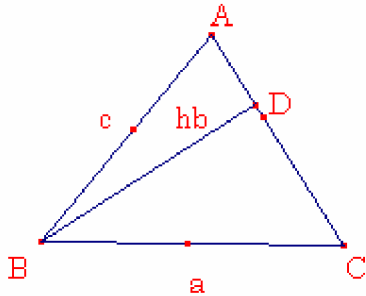
heuristics と discover を英和辞典と英英辞典から考察した結果、discover は、発見の中でもその結果を意味すること、heuristics は、問題解決までの過程や手順を見直すことでさらに分かること。という違いが分かった。

上述からポリアの言っている発見とは、問題を解く際の試行錯誤や手順を見直し、自らの思考の過程を整理していくことであり、また次の学習においても類似の問題が出たときは手順を振り返ることにより、解決していくことだと考える。

また小学校算数科の問題解決過程における考察は、実際の指導事例を見て行くことにより行った。この考察から、児童が自分の考え方を見直し、さらには同様の問題に直面しても同様に考えれば解は求めることができる。というように、児童が自分の考えを理解し、さらには発見することもできるような授業を作ることを授業設計の目標に設定することにした。

第3章では、発見法 (heuristics) についての考察を深めていくために、問題を解くときに、自ら発見法 (heuristics) を行うことに

した。発見法(heuristics)を行うための問題としては、ポリアの「数学の発見的解き方」に掲載されていた、三角形の作図の問題から行うことにした。問題は、 a, h_b, c から三角形を作れ。



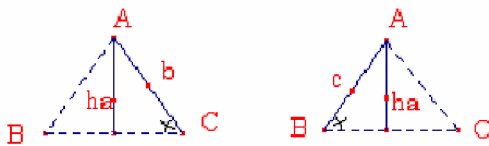
等 6 問である。

これらの解を正確に得るために、4つの条件から3つを選んでできる三角形の作図、220通りをすべて求めることで考察することにした。

この問題を解いた後、問題を解くまでの自分の中での問題解決の過程を見直し、思考に変容をもたらすきっかけについて整理した後、ポリアの発見学と照らし合わせることにより考察をした結果、以下のような結論が得られた。

- ・条件の一部分だけを残してほかの部分捨てよ 与えられた3つの条件から、2つの条件を選ぶことで作図ができるようになった。これはポリアの言葉では分解になる。
- ・220通りすべてを作図しないとイケないのか

例 $c, ha,$ と $b, ha,$



このようにただ回転しただけの図形もある

ので、それらを省き 76通りを作図すればよい。

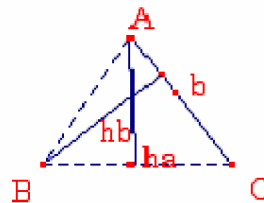
- ・作業をさらに明確に行うことはできないだろうか

与えられている条件	個数	与えられている条件	個数

このように三角形の表と三角形の条件をラベル化することにより、表を見ただけで与えられた条件を見分けられるようにした。

- ・作業の簡略化のために経験からわかったことは

垂線と垂線に垂直な辺が与えられたときは、三角形を作図することができない。などが経験によりわかるようになった。



- ・ 三角形の個数を正確に求めるにはどうしたらよいか

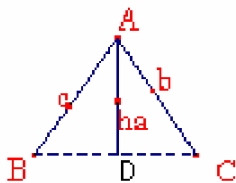
三角形の作図をすすめていくにつれ角の大きさや、辺の長さによって作図することのできる三角形の数が変わることに気が付いた。そこで三角形を正確に作図するために自ら三角形の作図の条件を与えることにした。加えた条件は以下の通りである。

- ・ 辺の長さで分ける。
 - 辺 a, b が与えられているとき, $a > b$
 - 辺 a, b が与えられているとき, $a < b$
 - 辺 a, b が与えられているとき, $a = b$
- ・ 角の大きさで分ける。
 - 角が鋭角のとき ($0 < x < 90$)
 - 角が直角のとき ($x = 90$)
 - 角が鈍角のとき ($90 < x < 180$)

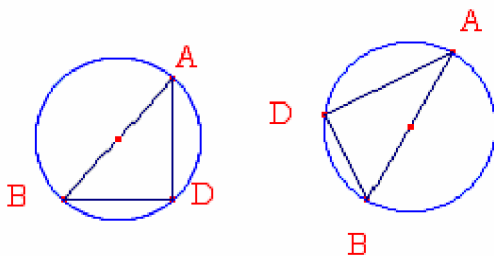
これらの条件を与えることにより、より正確に三角形の作図できる個数を求めることができるようになった。

これらの作業過程から性格に作図できるようになった作図の仕方は以下の通りである。

b, c, h_a

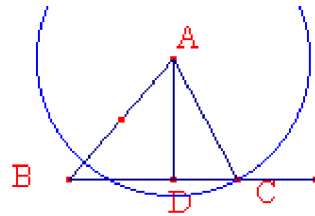


辺 AB を直径として円を作る。次に A を支点にして h_a の奇跡を描く。そのとき AB との交点が D になる。

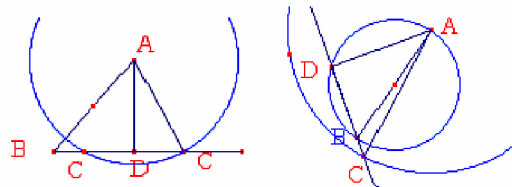


次に半直線 BD と点 A を支点にした b の軌跡との交点が C になる。

このとき三角形 ABC が作図できる。



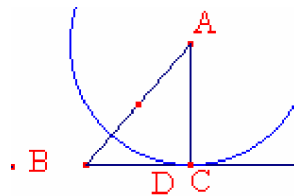
$h_a < AC$



このとき三角形は作図できる。しかし点 C が線分 BD の間に来たときは三角形として成立しない。

しかし 2 つめの図形は三角形 ADC を作図することができた。

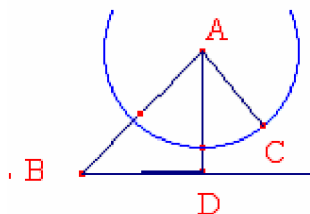
$h_a = AC$



このとき点 D と点 C が一緒になってしまい三角形を作図することができない。

2 つめの図形も作図することはできない。

$h_a > AC$



このとき交点 C の位置が決定できず，三角形 ABC は作図できない。

2 つめの図形も作図することはできない。

これらの作図経験から発見法 (heuristics) とは，「問題の未知を求めるとき，試行錯誤していくなかで，自ら条件を与えることにより，問題解決の中で導きやすい形にもっていく。また，自分の経験から似ている問題に結びつけ，活用する等の問題解決の過程を経て，自らの思考過程を確認し理解していく。そのあとに，新しく問題を提示されても問題解決の方法を発見することができ，問題の未知のものを求めることができること。」と設定した。

この作図経験をもとに第 4 章では発見法 (heuristics) を取り入れた授業設計を行った。児童が自分の解法を見直し，更には同様の問題に出くわしたときに，自ら解法を発見できる内容にした。

授業設計の問題と，問題の発見法 (heuristics) は以下の通りである。

授業設計 1

人工衛星が，ある衛星のまわりをまわるのに，最初の 1 周は 2 分かかり，次の 1 周は 4 分かかり，そのつぎの 1 周は 8 分かかるといのように，每周そのまへの周の 2 倍時間がかかるとき，20 周つづけてまわるにはどれだけの時間がかかりますか。

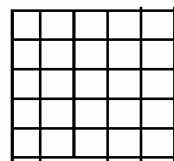
この問題からの発見法 (heuristics) は児童に問題を部分から考えさせることで，問題の解き方が分かる。問題の解き方が分かったら，表を使うことで一般化をすることにより問題の解法が発見することができる。このとき問題が解ける。

教師の支援から，児童がなぜ表を使ったのかということを理解させることにより，似た問題を解くときにも同様の方法により問題を解くことができる。

授業設計 2

5 行 5 列の道をスタートからゴールまで行くのに，遠回りせずに行くには何通りあるでしょうか。

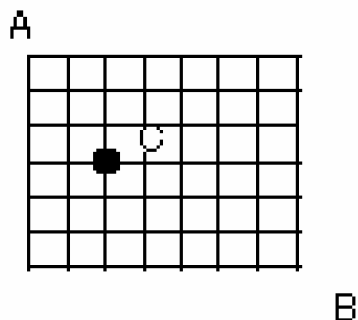
ス



ゴ

この問題は，まず道の角に自らラベル化をすることで問題を部分から考えることができるようになる。そしてそれぞれ部分に分けることで，道に行き方を数えて言った結果を表で表す。この表で表すという一般化をすることにより，決まりを見つけることができる。そして教師は児童に，なぜ自分の分解した結果を表に並べることで決まりを見つけることができたのか，と問いかけることにより，児童が自分の解法を理解することができる。自らの解法を理解するし，問題を解くことができれば，発展的問題を評価問題として与えられても，児童は同様の解法を行うことにより，評価問題を解くことができると考える。

評価問題 AからBまで行くまでに必ずCを通っていくには何通りになるでしょうか。



研究からの考察

実際の作図の作業から、自らの思考に変化をもたらすことになったきっかけごとに整理することによって、自分の問題解決過程におこった思考の変容を明確に把握することができた。この自分の経験とポリアの提唱する発見学と照らし合わせることにより、発見法 (heuristics) についての考察を深めていった。

授業設計ではまず未知の物が何かを、児童のなかではっきりとさせてから、取り組ませるようにした。児童が問題を解くために、部分から考えるようにさせたり、児童が一般化で考えるには、どのような支援が有効なのかに気をつけて考察した。中でも特に一番気をつけたのが、児童が自分の解決の様子を見直し、理解し、さらに他の問題に取り組んだとき、この経験を活かすには、どのような展開を行えば良いのかという点である。これらのことを意識しながら授業設計を行った。

また小学生が解くには少し難しい問題を設定したので、小学生でも考え、思いつくこ

とのできる授業の展開になるように気をつけて考察を進めていった。特に考察で気をつけたことは、先生側が一般化を行い考えたときに、児童にどこまで一般化を要求すべきかという点である。この視点から、児童の様相を頭に入れながら考察していくことを大事にしていった。

今後の課題

発見法 (heuristics) をもとに研究を進めていった。自ら考える発見法 (heuristics) は、一般化や特殊化や記号化ラベル化などを取り入れながら考えていったが、ポリアが提唱する発見学のように、さらに帰納や類推なども取り入れていくと考察ももっと満足に行えると思われる。

また授業設計の方だが、問題の展開は自分の作図の経験に沿った展開の仕方となっている。今後は実際の授業の単元の中でも発見法 (heuristics) を取り入れた授業の展開ができるように検討していきたい。

主要参考文献

ポリア G (1954). いかにして問題を解くか 丸善 .

ポリア G (1964). 数学の発見的解き方 みすず書房 .

鳥取大学数学教育研究 ISSN 1881-6134

Site URL : <http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/journal.html>

編集委員

矢部敏昭 鳥取大学数学教育学研究室 tsyabe@rstu.jp

溝口達也 鳥取大学数学教育学研究室 mizoguci@rstu.jp

(投稿原稿の内容に応じて、外部編集委員を招聘することがあります)

投稿規定

- ❖ 本誌は、次の稿を対象とします。
 - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文、またはその抜粋・要約・抄録
 - 算数・数学教育に係わる、理論的、実践的研究論文／報告
 - 鳥取大学、および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
 - その他、算数・数学教育に係わる各種の情報提供
- ❖ 投稿は、どなたでもできます。投稿された原稿は、編集委員による審査を経て、採択が決定された後、随時オンライン上に公開されます。
- ❖ 投稿は、編集委員まで、e-mailの添付書類として下さい。その際、ファイル形式は、PDFとします。
- ❖ 投稿書式は、バックナンバー（vol.9以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551 鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX 0857-31-5101（溝口）

<http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/>