

数学教育における 問題の発展的な取り扱いに関する研究

児玉 正弘

指導教官：溝口達也

I. 研究の目的と方法

今日、授業の中で「問題づくり」をすることは、生徒たちにとって問題を自分のものとして受け止め、積極的に授業に参加でき、問題と問題とのつながりが一層明確になるということが期待できるというような研究がなされたり、具体的な授業の実践例が多く示してあるにも関わらず、実際の授業場面において、そのような授業はあまり見られない。それにはいろいろな要因があるのであろうが、その中でとりわけ教師による発問に着眼した。教師による発問によっては問題の発展が異なってくるのではないかと考えたためである。「問題づくり」に関する発問についての研究がなされていないわけではないが、とりわけ具体的な示唆をするまでには至っていないようである。

よって、本研究の目的は、問題の発展的な取り扱いによる学習指導を行う際、実際の授業場面において問題を発展するためにはどのような発問がふさわしいのかを明らかにし教授への示唆とすることである。

そのために、本研究では以下のような方法をとる。まず、問題を発展的に見ているものを文献の中から調べ、それがどのようなもので、どのような課題や問題を残しているかを明らかにする。次に、原問題からの発展として、先行文献に述べられていた原問題から期待できる多様なバリエーションについて「実際にそのような発展をしていったのか」、「そのような発展をしていっても原問題は成り立つのか」、「そのような発展以外にも他の

発展が考えられるのではないか」という点を明らかにするために、先行研究で述べられていた原問題から期待できる多様なバリエーションを示し、

証明や意図によって考察する。また、問題を発展するためには教師の発問が大きく関係しているのではないかと考え、発展するための発問

に着眼し、

それぞれの問題に発展するための発問の機能を特定する。さらに、「いくつかの目的を達成するための教師と生徒による一連の作用」を move と定義し、特定した発問の機能をもとに move を特定し、move と発展との関係を表すために、特定した move と問題の分類との関係を図に示します。その図から考えられることを本研究における教授への示唆として示す。

II. 本論文の構成

第1章 はじめに

1-1 研究の動機

1-2 研究の目的と方法

1-3 研究の意義：数学の授業における問題の発展的な取り扱い

第2章 先行研究の考察

2-1 問題解決

2-1-1 「オープンエンド アプローチ」の課題と問題点

2-1-2 「問題の発展的な扱いにおける授業」の課題と問題点

第3章 問題の発展的な取り扱いに関する事例的考察：課題の抽出

3-1 原問題（三平方の定理）からの発展

3-2 証明による考察

3-3 意図による考察

第4章 問題の発展的な取り扱いに関する発問について

4-1 発展と発問との関わり

4-2 発展するための発問とその機能

4-2-1 原問題からの発展の特定

4-2-2 発展的問題の分類

4-2-3 発展するための発問

4-2-4 発展するための発問の機能

4-3 move

4-3-1 本研究における move

4-3-2 move の特定

- 4-3-3 問題の発展と move との関係
- 4-4 本研究における教授への示唆
- 第5章 本研究の結論と今後の課題
 - 5-1 本研究から得られた結論
 - 5-2 今後に残された課題
 - (1 ページ40字×36行, 35ページ)

Ⅲ. 研究の概要

私たちは、数学を学習する際、ある一つの問題が教師から与えられ、それを解決できたらそれで終わりというような学習に陥りがちであり、そのような一連の活動では次々と問題が与えられるにも関わらず、生徒たちが問題と問題とのつながりを考えることは困難であると考えます。また、生徒たちが問題を自分のものとして受けとめることもまれであると考えます。しかし、生徒にとって問題が他から与えられるものではなく、問題を自分のものとして受けとめさせ、その問題の理解をより深いものにする必要があります。

そこで私は、問題の扱いを受動的であり完結的であるものから能動的であり発展的であるものへ変換させるために、(石山・佐々木, 1984) 生徒が自ら問題をつくり、解決しようとするものがふさわしいのではないかと考えた。よって、‘他者から与えられるか、問題を解決しようとする者自らが与えるかして設定した最初の問題(本研究では原問題(original problem)と呼ぶことにする)を発展させ、新しい問題を次々とつくるような問題の扱い’を「問題の発展的な取り扱い」と呼ぶことにし、この「問題の発展的な取り扱い」に着眼した。

まず、原問題(三平方の定理)から実際にどのように発展しているのかを証明による考察と意図による考察によって明らかにした。原問題は次のような原問題である。

(原問題)

「直角三角形ABC ($\angle C=90^\circ$) で、 $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$ とするとき a , b を一辺とする正方形の面積の和は、斜辺 c を一辺とする正方形の面積に等しい。」

このことを証明しなさい。

次に、問題を発展させるための発問に着眼した。そこで、問題を発展させるためにはどのような発問がふさわしいかを特定するために発問

の機能に着眼し、Henderson の提案した “move” に働く機能をなるべく適切に表現したものを、概念の示している用語を内包的な使い方と外延的な使い方の点から区別し、分析カテゴリーとして取り入れた。そこで、原問題からの発展を図1のように特定し、‘発展的問題の分類’(吉澤, 1998) に分類し、それぞれの発展にふさわしいのではないかとと思われる発問を考えた。吉澤(1998)の‘発展的問題の分類’は次のようなものである。

[発展的問題の分類]

- [1] 最初の問題の条件を変えた問題
- [2] 最初の問題の条件の一部を保存した問題
- [3] 命題の逆の問題
- [4] 複合した問題
- [5] 似た構造を持つ別の問題

また、それぞれの発展にふさわしいのではないかとと思われる発問は以下のようなものである。

(発展1) 「この問題(原問題)が成り立つのは直角三角形の各辺の上の図形は正方形以外には考えられないのだろうか。」

(発展2) 「正三角形, 正多角形で原問題が成り立つならば他にどんな図形で原問題が成り立つと考えられるか。」

(発展3) 「円の面積を半分にしても成り立つか。成り立つならどんな図形ですか。」

(発展4) 「この図形の特徴は何ですか。」

(発展5) 「この問題(原問題)が成り立つのは直角三角形の各辺の上の図形は正方形以外には考えられないのだろうか。」

(発展6) 「正三角形, 正多角形に共通の特徴は何ですか。」

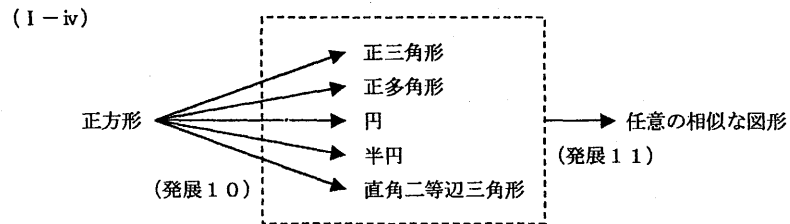
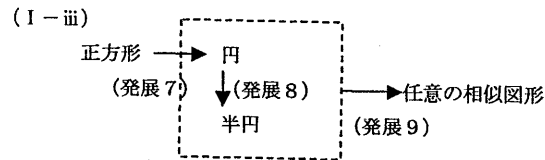
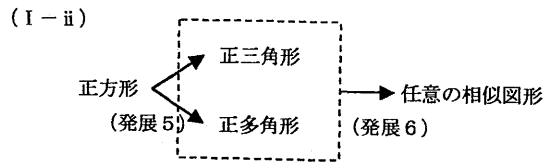
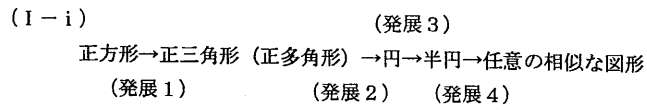
(発展7) 「この問題(原問題)が成り立つのは直角三角形の各辺の上の図形は正方形以外には考えられないのだろうか。」(発展8) 「円の面積を半分にしても成り立つか。成り立つならどんな図形ですか。」

(発展9) 「円, 半円に共通の特徴は何か。」

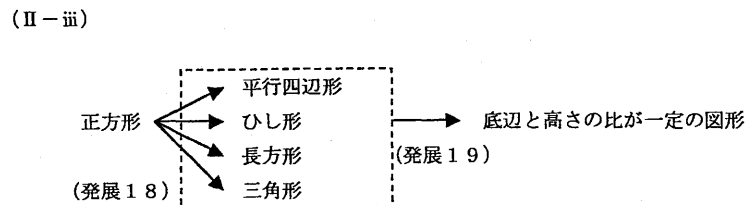
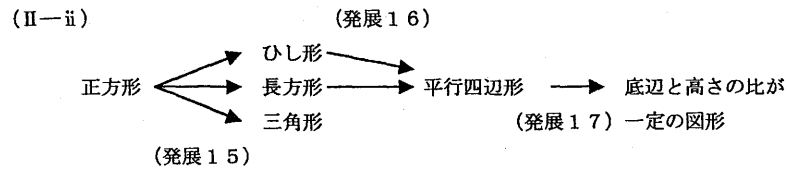
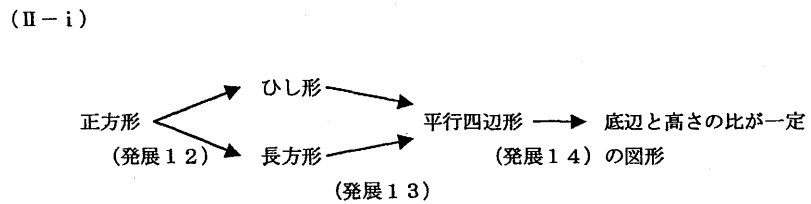
(発展10) 「この問題(原問題)が成り立つのは直角三角形の各辺の上の図形は正方形以外には考えられないのだろうか。」

<考えられる発展パターン>

I. 直角三角形の斜辺上の正方形を他の相似な図形に変える。



II. 直角三角形の各辺上の正方形を他の相似でない図形に変える。



III. 直角を鋭角や鈍角に変える。(発展20)

IV. 逆の定理をつくる。(発展21)

V. 原問題の一部以外を他の問題に変える。(発展22)

図1

- か。」
- (発展11) 「これらの図形に共通の特徴は何か。」
- (発展12) 「直角三角形の各辺の上の正方形が任意の相似図形でないとするならばどのような図形のときに原問題は成り立つか。」
- (発展13) 「ひし形、長方形と同じような特徴を持つ図形は他にはないだろうか。」
- (発展14) 「どのようなとき (条件を加えたら) 原問題が成り立つだろうか。」
- (発展15) 「直角三角形の各辺の上の正方形が任意の相似図形でないとするならばどのような図形のときに原問題は成り立つか。」
- (発展16) 「ひし形、長方形と同じような特徴を持つ図形は他にはないだろうか。」
- (発展17) 「どのようなとき (条件を加えたら) 原問題がなりたつだろうか。」
- (発展18) 「直角三角形の各辺の上の正方形が任意の相似図形でないとするならばどのような図形のときに原問題は成り立つか。」

- (発展19) 「どのようなとき (条件を加えたら) 原問題が成り立つだろうか。」
- (発展20) 「直角三角形ABCが直角三角形でなければどうなるか。」
- (発展21) 「仮定と結論が原問題と逆であったらどうか。」
- (発展22) 「この原問題の一部を別の問題に変えてみたらどうなるか。」

上のような発問が必ずしも正しいとは限らないが、私はこのような発問がふさわしいのではないかと考えた。

そして、分析カテゴリーをもとに、それぞれの発問にはどのような機能が働いているのかを特定した。さらに、「いくつかの目的を達成するための教師と生徒による一連の言葉による作用」を“move”と定義し、原問題 (三平方の定理) からの発展それぞれにはどのような move が行われているかを示した。

最終的に、‘発展的問題の分類’と“move”との関係を図2のように示し、その関係をもとに教授への示唆とした。

	[1]最初の問題の条件を変えた問題	[2]最初の問題の条件の一部を保存した問題	[3]命題の逆の問題	[4]複合した問題	[5]似た構造を持つ問題
内包的	特徴move 十分条件move 分類move	必要条件move	同一化move		
外延的	列挙move 正事例move			列挙move	

図2

教授への示唆としては、吉澤 (1998) の ‘発展的問題の分類’ における [1] 最初の問題 (本研究では原問題) の条件を変えた問題に発展させるためには、まず、列挙 move がこのましいのではないかと考える。そこから、さらに問題を発展させようとするれば、正事例 move や分類

move が好ましいのではと考える。さらに、それぞれの発展した問題を一般化した問題に発展するためには特徴 move や十分条件 move が好ましいのではないかと考える。最初の問題の条件を変えた問題に発展させるための move をモデル化すれば図3のようになる。

○最初の問題の条件を変えた問題に発展させるための move のモデル

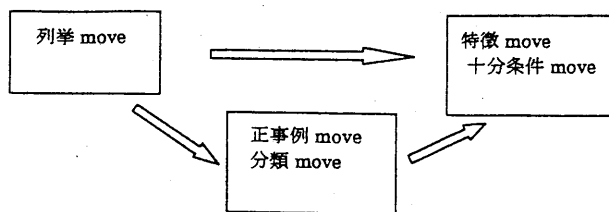
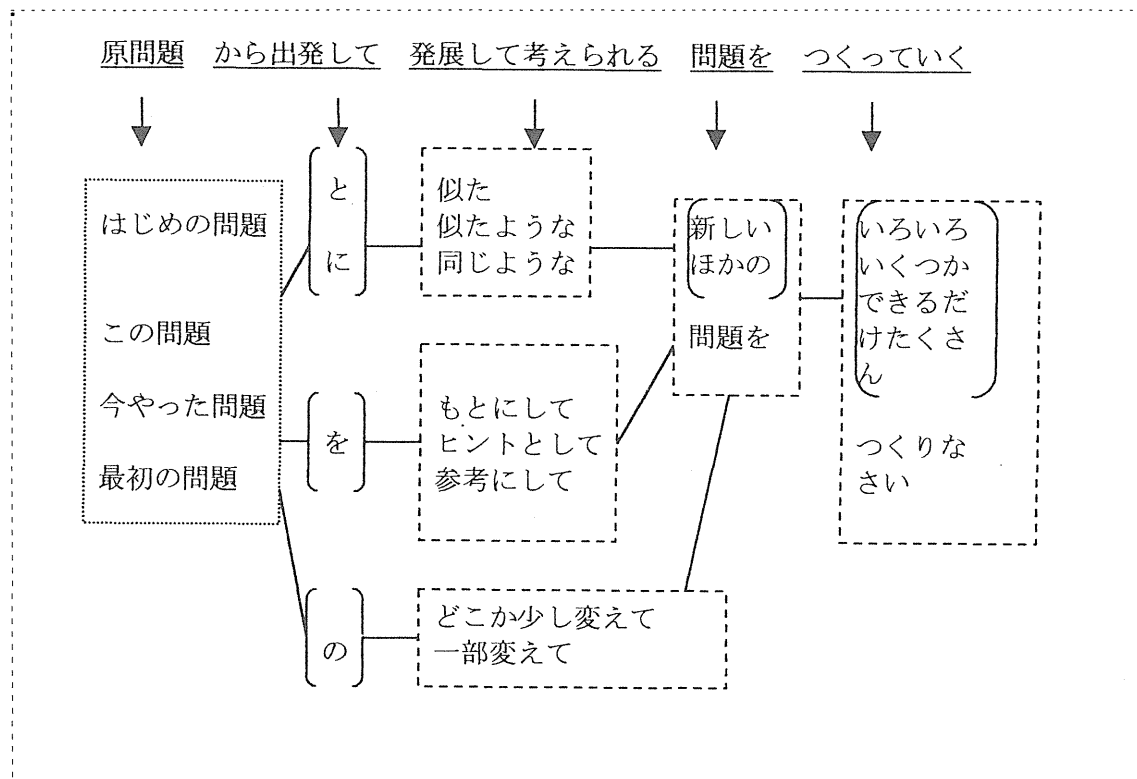


図3

また、[2], [3], [4]に発展するためには、(図2)のような move が好ましいのではないかと考える。

しかし、実際の授業場面において、ある原問題から問題を発展させる際、教師が望むような発展に直接発展するような発問、すなわち、示唆を含むような発問をしては生徒のつくる問題

にバラエティーが見られなくなる恐れがあり、生徒の思考を制限してしまうと考える。そこで、「児童・生徒の思考の自由性をなるべく保障する」ような示唆を含まない発問として、参考文献(竹内・沢田, 1984)の中で、問題づくりをさせる場合、具体的に次のような発問が考えられている。



この発問は、確かに問題づくりをさせる際、まず、最初の発問としては有効な発問であると考えられる。しかし、この発問だけでは、生徒が問題を発展する際に行き詰まってしまうたりするであろう。

そのような場合に、本研究で示したような発問が有効であると考えられる。

IV. 研究の結果

本研究では、原問題(三平方の定理)からの問題の発展を特定し、「発展的問題の分類」に分類し、それぞれの発展にふさわしいのではないかとと思われる発問を考え、それぞれの発問にはどのような機能が働いているかを特定した。さらに、「いくつかの目的を達成するための教師と生徒による一連の言葉による作用」を“move”と定義し、原問題(三平方の定理)からの発展それぞれにはどのような move が行われ

ているかを示した。

最終的に、吉澤(1998)の「発展的問題の分類」と“move”との関係を示し、上で述べたような教授への示唆とした。

また、今後の課題としては以下の点があげられる。

- 原問題(三平方の定理)からの発展パターンを特定したが、実際に生徒からの反応として本研究で示した発展パターン以外の発展パターンが出てくる可能性がある。
- 原問題からそれぞれの問題へ直接発展するための発問を考えしたが、それぞれに発展するためには本研究で示した発問しか考えられないというわけではない。他にも考えられるであろう。
- 本研究では、原問題として三平方の定理を用いたが、別の原問題を用いた場合には別の研究成果が得られるかもしれない。

主要引用・参考文献

- ・ 竹内芳男・沢田利夫 編著 問題から問題へ
－問題の発展的扱いによる算数・数学科の
授業改善－ 東洋館出版社（1984）
 - ・ S. I. ブラウン/M. I. ワルター著 平林
一榮 監訳 いかにして問題をつくるか
－問題設定の技術－ 東洋出版社（1990）
 - ・ Henderson, Kenneth. B. : “ Concepts ”
The Teaching of Secondary School Mathematics
National Council of Teachers of Mathematics, 33
年報（1970）
-