

中学校における「集合と関数」の指導についての基本的な考え方とその指導の実践*

数学科教育教室 笹田昭三
黒田早苗**)

I 研究の目的

今回の学習指導要領の改訂(昭和52年)で、中学校における関数指導の系統が大きく変更された。昭和44年度版の指導系統が一般から特殊へという形をとっているのに対して、新学習指導要領では、生徒と事象との出会いを大切にしながら関数指導をするという考え方に基づき、その指導系統は特殊から一般への形をとっている。関数が実際の現象と深い関係をもっていることと人間が獲得してきた関数概念の発展史からみて、この新しい指導系統は妥当なものといえよう。このような指導系統の変更は当然その扱い方の変更を要請する。この新しい指導系統の流れからすれば、今後の中学校における関数指導では、

(1) どのような事象を取り上げ、それをどのように考察・処理させることによって、変化や対応の見方・考え方を身につけさせるか。

(2) 具体的な事象との関連で学んできた関数関係を、いかにして2集合の要素間の一意対応に拡張、高めるか。

が、その取り扱いを研究すべき重要な点であると考えている。

そこで、本研究では、(2)に焦点を当てて実践研究を試みた。すなわち、(2)の指導に関しての基本的な考え方の確立と、指導の実践によるその妥当性の検討が、本研究の目的である。

II 中学校の関数指導についての考え方

1. 関数概念の二つの解釈と中学校の関数指導

関数概念の解釈に二つの基本的な方向がある。第1の方向は、古典的と呼ばれるもので、主として数学の物理学や工学への伝統的な応用をめざしたものであり、「変量(変数)」概念に基づいてい

*) この研究の概要は、日本数学教育学会第60回総会(会場宮崎大学)において、「2数量間の対応を2集合の要素間の一意対応に高める指導について」として発表。

***) 鳥取大学附属中学校

る。すなわち、「ある変量の値が他の変量の値に依存して変化するとき、はじめの変量をあとの変量の関数という」。第2の現代的と呼ばれる方向は、あいまいな変量という概念を放棄し、関数を「量」の立場だけから考えないで、「2集合の要素間の一意対応」として関数概念を著しく拡張したものである。この現代的な解釈による関数概念は、古典的解釈より広い範囲の対象を問題にしており、それゆえ、数学の伝統的応用だけでなく、最近生じている多くの新しい応用にも役立ち得るものである。

新学習指導要領においては、中学校第1学年から第3学年まで学習する「関数関係」は第1の解釈による関数概念であり、第3学年の指導内容「集合と関数」における関数概念は第2の解釈によるものである。したがって、中学校第3学年の単元「集合と関数」の指導の主なねらいは、中学校第1学年以来、第1の解釈で学習してきた関数概念を、第2の解釈での関数概念に拡張することである。その際に、関数概念を拡張することの必要性や合理性を、いかにして生徒に理解させるかがこの単元の指導で最も重要な点であり、これがまた本研究の課題である。

2. 事象と中学校の関数指導

自然現象、社会現象やわれわれの日常事象は、大別すれば、決定的な事象と非決定的な事象に分けられる。そして、それぞれの事象を人間が把握、記述するために、関数の考えや確率・統計の考えが生まれてきたのである。



このように、関数の考えも、確率・統計の考えも、自然現象や社会現象を記述するために人間が獲得したアイデア（知恵）である。それだけにその応用範囲も極めて広い。殊に、決定的な事象は生徒の経験する事象に極めて多く、その考察を通して生徒に関数の考え方を指導することは可能である。このような事象の考察を通しての関数指導という行き方は、上述の関数の考えの発生の観点からも、また数学教育における有用性の重視という観点からも、極めて自然な行き方であると考えられる。それゆえ、中学校の関数指導では、生徒と事象との出会いをとくに重視し、その考察に際して、変化と対応の見方・考え方を身につけさせ、問題の解決に役立たせる能力を養うことが肝要である。

また、この「事象との出会いを重視する」という関数指導の行き方は、実用的視点からだけでなく、現行学習指導要領に掲げられている「数学教育の目標」の達成をめざすという観点からも、極めて意義深いものといわなければならない。われわれは、決定事象を分析的に考察することによって、その中に「相伴って変わる2量の関係」を共通に見出し、その抽象として「関数関係」の概念に到達する。さらに、決定事象を2量の依存関係として考察することによって、変化と対応の見方・考え方が生まれ、その考察・処理のし方を帰納し、定式化することによって、変化や対応の見方・考え方に関する一般的な方法「関数の考え方」が確立する。次に、この活用として、いろいろな事象の中に2量の関係を見出し、それを関数関係の具体的なモデルとして扱い、定式化された「関数の考え方」を用いて、論理的に処理する。その結果の解釈については、事象の性格やその考察の目的に応じて、それにふさわしい具体的な意味づけがなされる。

このような「事象との出会い」を重視した関数指導における一連の活動は、現行学習指導要領の中学校数学科の総括目標に掲げる

「事象を数理的にとらえ、論理的に考え、統合的、発展的に考察し、処理する」

ことの具体的実現に他ならない。上述の要点を図解すれば、次のような図式（図1）が得られる。

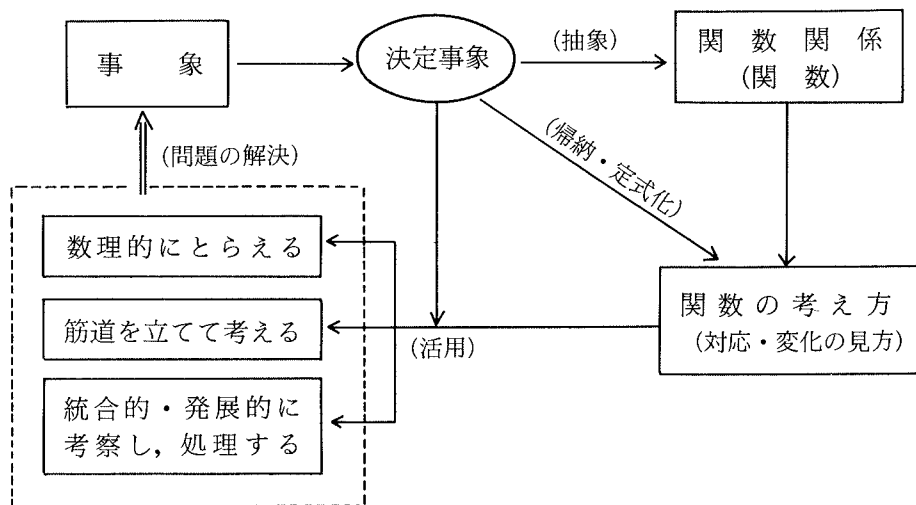


図1 事象と関数の考え

3. 中学校の関数指導について考え方

1, 2 の考え方に基づき, 中学校の関数指導においては, 次の2点がとくに重要であると考ええる。

(1) 事象との出会いの重視

関数は決定事象を把握・考察するために人間が獲得したアイデアである。したがって, その応用は極めて広く, 生徒が経験する身近な事象のなかにも関数関係の事例が極めて多い。そこで, 中学校の関数指導では, 生徒と事象との出会いを大切に, その事象を生徒に考察させることを通じて, 対応と変化の見方・考え方を身につけさせ, 問題解決に役立ち得る能力と態度を養うことを, まず第一の重点としなければならない。なお, この事象との出会いを重視する指導では, 上記の図式(図1)における(抽象), (定式化), (問題の解決)のそれぞれの矢線部の段階の学習指導が極めて重要であると考ええる。

(2) 関数概念の拡張と関数による事象の統合的把握

第3学年では, 中学校における関数指導のまとめとして, これまで事象との関わり合いで学習してきた, 第1の解釈での「関数関係」を集合の立場で見なおし, 第2の解釈で関数の意味を明確にする。すなわち, 既習の具体的な関数関係のいくつかの事例を考察し, そのなかに共通性(伴って変わる2量間の対応)を見出し, さらにこれを純化, 一般化することによって, 「2集合の要素間の一意対応」を関数関係の本質的特性として抽出する。そして, この関数関係の本質的特性に基づき, 集合の立場で関数の意味を明確にする。このように量を捨象し, 集合の立場で関数の意味を見直すことは, それまで関数関係の対象として扱われなかった, 多くの事象を関数の対象として包括でき, いわば関数の視界を大きく拡げることにつながるのである。

このようなことがらに関する一連の学習は, 概念の明確化, 概念の拡張, 数学的思考(抽象化・一般化の考え, 統合の考えなど)の育成, 広汎な事象への関数の考えの適用などの諸点で, 数学教育上極めて大切なことである。このような観点から, 第3学年の「集合と関数」の指導は, 中学校の数学教育においても, 極めて重要な位置を占めるものといわなければならない。

III 「集合と関数」の指導についての基本的な考え方と研究の焦点

本章では、第II章で述べた考え方に基づいて、単元「集合と関数」の指導のねらいを設定し、さらにその指導過程のパターンを図式化することによって、指導の重点を明確にする。また、最後の節では、本研究の課題と研究のねらいを焦点化する。

1. 指導のねらい

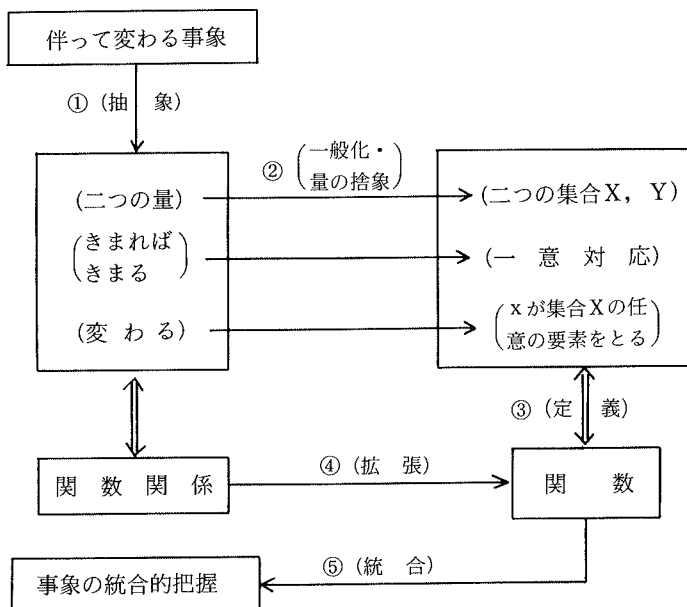
本単元は、中学校の関数指導のまとめの段階であって、次のことを主なねらいとする。

- (1) これまで事象との関わりで考えてきた関数関係を集合の立場で見なおし、関数の意味を拡張する。
- (2) このように関数の意味を拡張することによって、伴なって変わる数量関係だけでなく、多くの事象を関数の対象として扱えることができるようにする。

2. 指導過程のパターン

中学校では、小学校の関数指導の基礎の上に、伴なって変わる二つの数量の関係を「関数関係」としてとらえる。そして、第1学年では比例・反比例など身近にある具体的な関数を、第2学年では1次関数、第3学年では1次式で表わされない身近な関数を、それぞれ取り扱い、具体的な事象についてかなり豊かな体験を与えている。そこで、本単元では、第1学年以来学習してきた「伴なって変わる二つの量」のいくつかの事例を取り上げ、これに次の図式(図2)で示されるような考察や検討を加えることによって、集合の立場に立った関数概念(第2の解釈)を形成する。また、このように量を捨象することによって得られた、新しい意味の「関数」が、数量関係だけでなく多くの事象を関数の対象として包括することも生徒に認識させる。すなわち、本単元の指導過程の主要部は、次の図式(図2)で示される通りであり、その指導に際しては、図式における矢線の段階をとくに重視する。

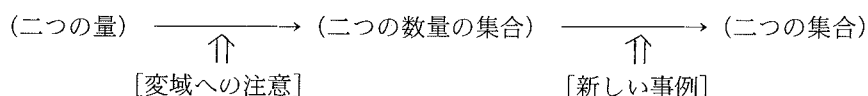
図2 指導過程のパターン



3. 指導過程の重点と指導上の留意点

①の段階の指導 第1学年以来学習してきた「伴なって変わる二つの量」のいくつかの具体的な関係を取り上げ、そのなかにある共通性を探索し、これを抽出する。この場合、片よらない、いろいろの2量の関係を取り上げることが、抽象を容易にする上で大切なことである。

②の段階の指導 ①の段階で抽出した共通性を「2集合の要素間の一意対応」に高めるために、数量間の対応でない事例を提示し、これによってこの共通性を集合の立場で見なおす契機をつくる。さらに、新しく添加した事例にも適合する共通性を求める必要性を生徒に感じさせるとともに、①の段階で提示した事例の変域に注目させるなどをして、次のように生徒の思考の自然な移行を図る。



また、このような基礎のもとに、 $(x \text{ がいろいろの値をとる}) \longrightarrow (x \text{ がある範囲の数値をとる}) \longrightarrow (x \text{ は集合 } X \text{ の任意の要素をとる})$ と緩やかな移行を図って、集合のことばによる変数概念を確立する。

③の段階の指導 ②の段階で量を捨象して一般化した共通性に基づき、関数を集合の立場で定義する。その際、この定義は、第1学年以来学習してきた、「関数関係」に共通にある性質に基づいて、関数の意味を明確にしたものであることを意識させる。

④の段階の指導 「抽象 \longrightarrow 一般化 \longrightarrow 定義」の過程をふり返ることによって、新しい関数の定義は、第1学年以来学習してきた「関数関係」を、数量という制限を捨てて集合のことばで自然に見なおしたものであることを知らせる。また、この集合による見なおしによって、従来の関数関係の枠に入らない、多くの決定事象が関数として扱えられることを知らせる。すなわち、「関数の目」が大きく開かれたことを生徒に認識させる。

⑤の段階の指導 ④段階の認識に基づき、あるいは④段階の理解を促がす意味で、いろいろの決定事象を取り扱い、これらがすべて関数として統一的に把握できることを知らせる。さらに④、⑤段階の学習を通して、関数を集合の立場で見なおすことの意義や良さを生徒に理解させる。

4. 研究の問題点と研究の焦点

(1) 研究の問題点 指導過程のパターンの図式(図2)における②段階の指導と④、⑤の段階の指導をいかにするかが、本単元の指導で最も重要なところであり、本研究の課題である。すなわち、

① 「伴なって変わる二つの量の関係」をいかにして「2集合の要素間の一意対応」に抽象し、高めるか。

② 関数概念の拡張について、その必要性やその良さや意義をいかにして生徒に理解させるか。

(2) 研究の焦点 研究の問題点の①、②に示される課題を解決するために、今回の実践では、次のことに焦点を当てて研究を進めた。

① 指導過程のパターンの確立と指導の重点について

② よりよい題材・事例の選択について

③ 関数を実体化するための図式(ブラック・ボックス)や関数記号の取り扱いについて

④ 指導法の工夫・改善とふさわしい教具の工夫・開発について

IV 実践指導の計画

1. 単元「集合と関数」の指導計画

(1) 単元の指導目標

- ① これまで学んだいろいろな関数関係を、二つの集合の要素間の一意対応として見なおすことにより、関数の定義を明確にし、関数の意味の理解を一層深める。
- ② 関数を記号 $y = f(x)$ を用いて表すことよさを理解する。
- ③ 関数を「何から何への対応」として意識することにより、定義域と値域の意味を理解する。さらに関数は、対応のちがいでだけでなく、定義域、値域のちがいによっても区別されることを知る。
- ④ いろいろな日常事象や数学的事象の対応関係を調べることにより、関数と関係を区別し、関数を広い意味で理解する。また、このような考察を通して、決定事象の対応関係を関数として統一的に把握できるようにする。

(2) 単元の指導計画 (総時数 4時間)

指導目標・内容の概要	配当時間
1. 二つの集合の要素間の一意対応と関数の定義 (1) 具体的な関数関係を対応図に表し、そのなかに共通性を見つける。 (2) 数量間の対応関係を2集合間の対応関係に広げ、高めて関数を定義する。 (3) 新しい関数の定義に基づき、関数であるものと関数でないものを弁別する。	1
2. いろいろな関数 (1) 関数を表わす記号 ① いろいろな関数関係から対応の規則を発見し、それを記号 $y = f(x)$ で表わせば便利なことを理解する。 ② グループで協力して関数づくりをする。また、他のグループの作った関数の対応の規則を発見する。	3 (1)
(2) 定義域と値域 ① 関数では、対応の方向性が重要なことを知り、定義域、値域の区別を理解する。 ② 定義域、値域のちがいによっては、関数が異なることを知る。	(1)
(3) いろいろな対応 ① 事象のなかにはいろいろな対応があることを知り、関数と関係を区別する。 ② 決定事象の対応関係はすべて関数としてとらえられることを知る。	(1)

2. レディネスとしての集合指導の計画

本単元の学習では、レディネスとして、生徒が集合についての基本的な知識・概念を身につけておく必要がある。ところが、新学習指導要領では、内容として「集合」ということばは、

- 第1学年のC「図形」の(2)・イに、「図形を条件を満たす点の集合とみること」
- 第3学年のB「関数」の(2)に、「二つの集合について……」とあり、そのアとして「集合と関数」がある。

の二か所しかない。これは、これらの内容に関してのみ集合を指導するという意味ではないと考えるが、しかし実際の指導では、現行学習指導要領下における集合指導より、内容的にも指導時間数の上からもかなり軽減されるものと思われる。したがって、本単元の指導に先立ち、集合に関する基本的な概念・知識を整理、復習するため、1時間程度の指導を計画することが必要であると考え

る。今回の実践では、対象生徒が現行学習指導要領の下で学習しているので、その必要を認めず特別の時間をさいての集合指導をしていない。ただ、前単元として設定した「いろいろな事象と関数」の指導のなかで、とくに変域を重視して、それぞれの対応における変域としての「数量の集合」を生徒が明確に表現できるように指導した。

3. 事前調査・事後調査の計画とそのねらい

(1) 事前調査

指導計画の各時の細案を立案するにあたって、事前調査の実施を計画した。その実施の意図の一つは、生徒がこれまでの関数教材の学習で、どこでつまづき、どんな点に弱点をもっているかを調べ、その結果によっては、指導計画の一部を修正したり、その弱点を補強するための指導を加えたりするためのものである。もう一つの意図は、事後調査の結果と対比して、実践指導の結果の考察に資するためである。

① 内容面に関する調査

各調査問題ごとにその出題の意図を列举すれば、次の通りである。

調査1 文字が異なっても、変域と対応のしかたが同じであれば、同一の関数関係と生徒が見なすことができるかどうかを調べる。

調査2 関数関係の式表示が明確にできるか、関数で重要な変域のおさえが十分できるか、また関数関係において変化する数量を指摘できるか、などを調べる。

調査3 対応図を見て、関数関係と一般の関係の弁別がはっきりできるかどうかを調べる。

調査4 変域を指摘し、それを明確に表現できるかを調べる。

② 情意面に関する調査

事前調査では、内容面に関する調査とともに、情意面に関する調査をしておくことが極めて重要である。情意面に関する調査では、これまで学習した関数教材について、生徒が興味をもっているかどうか、また関数教材の学習で、生徒がどんな点に困難を感じているか、などを中心に調査する。

(2) 事後調査

事後調査は、本単元の指導事項の要点が生徒に理解されたかどうか、またわれわれの指導過程案や指導の重点のおき方が果して妥当であったか否か、などを調べるために実施する。また、事前調査の結果と対比しながら、生徒が当初もっていた関数に関する弱点が補強されたか否か、関数に対する生徒の抵抗感が薄らいだり、新しい興味が生まれたか否か、などを調べるために、内

容的な面と情意的な面の2面についての事後調査を計画した。

① 内容面に関する調査

調査1 関数と一般の関数の弁別ができるかどうか、また非量の2集合間の一意対応を関数としてとらえることができるか否か、を調べる。これは、事前調査の調査3と関連する。

調査2 事前調査の調査1と同質のものである。

調査3 指導過程の①、②の段階の指導の要点が理解されているかどうかを調べる。すなわち、伴なって変わる2量の対応関係から、何を共通性として抽出し、それをどのように一般化して新しい関数の意味としたかを問うたものである。

調査4 関数の定義と、集合の立場で関数を定義したことの良さや意義を生徒がどれほど理解しているかを調べる。すなわち、指導過程の③、④、⑤の段階の指導の要点が理解されているかどうかを調べる。

調査5 関数の式表示 $[y = f(x)]$ ができるか否か、またブラック・ボックスや対応図から x 、 y の対応の規則を見つけて式表示できるか否か、を調べるための問題である。

② 情意面に関する調査

単元「集合と関数」を学習した後、その学習の感想を生徒に書かせ、関数に対する見方・考え方が、学習を通して変わったかどうかを調べるための調査である。

V 指導計画の細案とその指導実践

1. 指導の時期と対象とした生徒

昭和52年度 11月上旬より4時間 本学部附属中学校第3学年(172名)

昭和53年度 7月上旬より5時間 本学部附属中学校第2学年(176名)

(注)本年度は、指導計画に示した第2時の指導(関数を表す記号)に2時間要したため、5時間扱いになった。

2. 事前調査問題とその調査結果

昭和52年度は、上記のように第3学年を対象に、また昭和53年度は、第2学年を対象に事前調査を実施した。ここでは、昭和53年度に実施した事前調査問題とその結果のみ記載する。

(1) 内容面に関する調査

調査1 つぎのなかから、 $y = 5x - 6$ と同じ関数関係を表すものを選び。ただし、文字はすべて実数を表すものとする。

(1) $S = 5t - 6$ (2) $y = 7x + 4$ (3) $m = 5n - 6$

(4) $y = 10t + 1$

58

調査2 200 l 入りのタンクに、あらかじめ水が50 l はいつている。この水そうに、毎分20 l の割合で水を入れるとき、つぎの問いに答えよ。

(1) 入れはじめてから x 分後に y l はいつていたとして、 y を x の式で表せ。

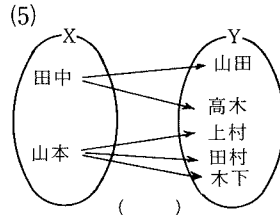
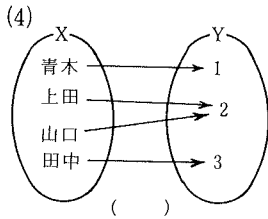
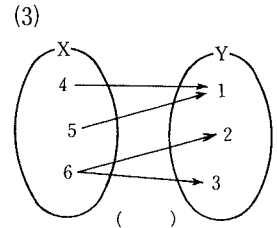
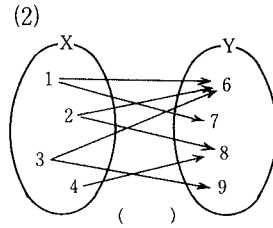
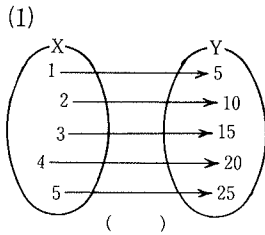
(2) y の変域を書け。

(3) 入れはじめてから、何分後に、水はいつぱいになるか。

(4) 次第に変わっていく数量をすべて書け。

(1)	85
(2)	82
(3)	84
(4)	65

調査3 つぎに対応図を見て、関数であるものには○印を、関数でないものには×印を、() 内に記入せよ。



(1)	89
(2)	82
(3)	72
(4)	65
(5)	74

調査4 1冊60円のノートx冊の値段をY円とする。ノートを5冊以上、10冊以下買うものとして、Yの変域を求めよ。

89

(2) 情意面に関する調査

調査1 関数の学習は、他の分野の学習に比較してどうか。つぎの表の適するところに、○印を記入せよ。

程度 項目	とてもある	ややある	ふつう	あまりない	ほとんどない
興味	6	46	38	6	4
難度	4	30	34	30	2

調査2 関数の学習に困難点があれば、具体的に書け。(回答のおもなもの)

- (1) 対応表が与えられたとき、関数の式の求め方がよくわからない。
- (2) 関数と関数でないものの、見分け方がよくわからない。
- (3) xやYの変域の書き方がよくわからない。
- (4) $y = k$, $x = h$ が、なんで関数なのか疑問をもっている。

3. 指導計画の立案と指導実践で配慮した点

調査1の結果は、正答率58%と予想外に低く、関数が対応づけの働きであることについての生徒の理解は極めて低い。したがって、この点についての意図的な指導が必要である。調査3の結果(正答率65%~89%)を見ると、関数とは、1対1、多対1の対応関係にあるものだということを生徒は漠然とは知っているようだが、2集合間の一意対応として明確に把握しているとは言い難い。したがって、この点の指導は、本単元の指導の重点事項にあげなければならない。また、情意面の調査では、xやYの変域の書き方がよくわからないといっている生徒がいた。この点からも、関数指導では、変域の表示に注意させる指導が重要である。以上のような事前調査の結果をもとにして、指導計画の立案に際しては、とくに、次の点を重視して指導計画の細案を作成した。すなわち、既

習のいくつかの関数関係を考察させ、生徒活動を通して、そのなかにある本質的な共通性を抽出させ、それをもとにして、関数の定義を明確にする。「一意対応」という関数の働きを、ブラック・ボックスの働きという具体的なイメージと結びつけて指導することによって、関数は対応づけの働きであることを印象づける。また、変域を明確にするとともに、定義域、値域を区別することによって、関数の対応の方向性や、関数が2集合間の一意対応であることを明確にする。

4. 指導計画の細案

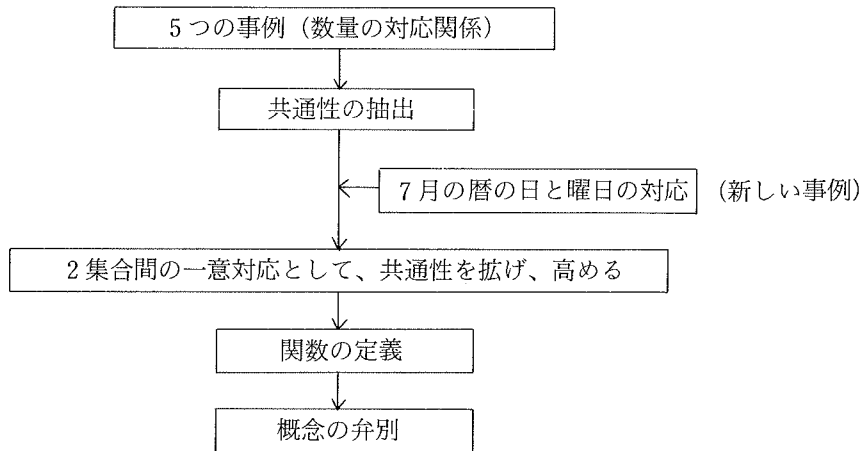
〔1〕第1時の指導計画

(1) 題材名 2つの集合の一意対応と関数の定義

(2) 本時の主な指導目標

- ① あいともなう変わる2つの量を考察することにより、それらの関係における共通性として、つぎのことがらを抽出する。
 - (ア) 2つの数量の集合があること
 - (イ) 2つの数量の集合の間に、一意対応があること
- ② ①の共通性を、「2集合の要素間の一意対応」に一般化することによって、関数を定義し、関数についての理解を拡げ深める。

(3) 授業展開のパターン

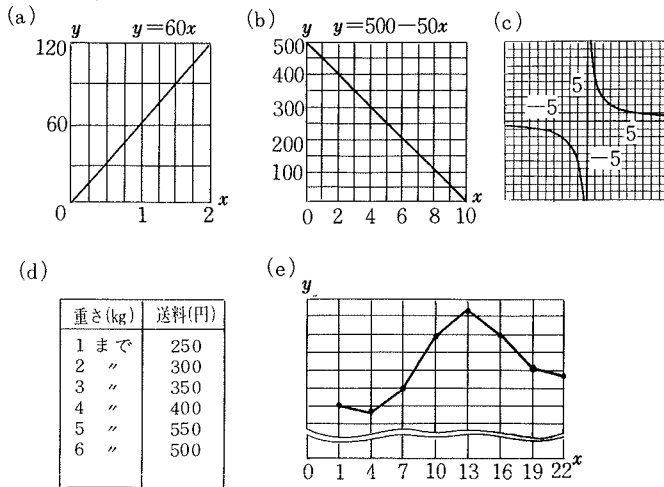


(4) 展開計画

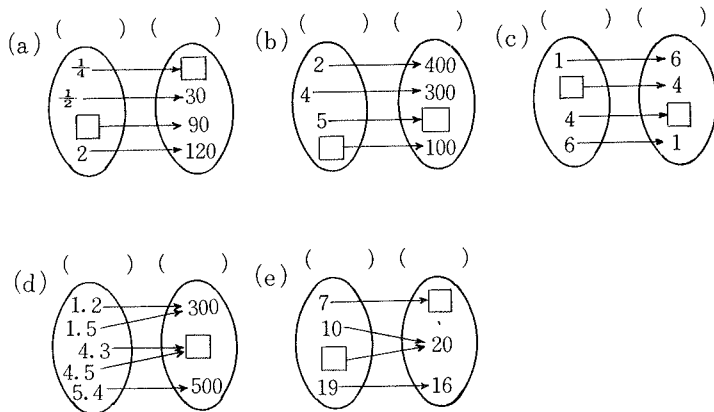
指導の段階とねらい	指導上の留意点と評価の観点	時間配分
1. 本時は、関数の定義について学習することを告げ、関数関係には、どんな表し方があったかを考える。 2. つぎの問題を提示する。	○本時学習事項を把握させ、関数の表し方に、式、グラフ、対応表、対応図があったことを想起させる。 ○問題はプリントして与える。	
〔問題1〕 つぎの(a)~(e)の関係を表した式とグラフや、対応表を見て、下の問いに答えよ。		

- (a) 毎時 60 km の速さで、 x 時間に y km 進んだ。
- (b) 1 枚 50 円の切手を x 枚買って、500 円札をだしたら y 円のおつりがでた。
- (c) 縦の長さが x cm、横の長さが y cm である長方形の面積は 6 cm^2 である。
- (d) 書籍小包の重さ x kg の送料は、 y 円である。
- (e) ある場所の時刻 x 時の気温は、 y 度である。

[式, グラフ, 対応表]



問1 (a)~(c)のグラフに誤りがあれば正せ。
 問2 各グラフや、対応表を見て、つぎの対応図の()のなかには適当な量と、その単位を、また、()のなかには、適当な数値を記入して、対応図を完成せよ。



(1) 問1を解決する。

○グラフの誤りに目をむけさせることに

<p>(2) 問2を解決する。</p>	<p>より、関数関係では、変域を考える必要性のあることを意識させる。</p> <p>○本時は、具体的数量の対応関係をもとに、それを集合の対応関係まで高めることが目標の1つであるので、上記の5つの事例を提示した。</p>	<p>15/50</p>
<p>3. [問題1] で書いた x, y の関係を表す式, グラフ, 対応図を見て, つぎのことを考える。</p> <p>(1) (a)~(e)に, つぎのような共通性があることに気づく。</p> <p>① 2つの数量の集合がある。</p> <p>② 一方の数量がきまれば, 他方の数量もきまる。</p> <p>③ 一方の数量が変われば, 他方の数量も変わる。</p> <p>(2) 共通性が, (a)~(e)のどれにもあてはまる点を確認する。</p>	<p>○共通性の抽出は, できるだけ生徒からでてくるように配慮する。表現が不備な場合には, 生徒との問答を通して, それを純化する。</p> <p>○①の「2つの数量の集合」の抽出が困難な場合は, 2つの数量は, それぞれ範囲の限られた数量であることを意識させることによって, ①の抽出ができるように留意する。</p> <p>○①, ②, ③は, いろいろな関数関係に共通な性質であることを認識させる。</p>	<p>30/50</p>
<p>4. これらの共通性を, 2集合間の一意対応に高める。</p> <p>(1) 今年7月の暦の日と曜日の対応が, 3(1)の共通性を満足するかどうかを考える。</p> <p>(2) 共通性を, 次のように高める。</p> <p>①は, 「2つの集合 X, Y がある。」</p> <p>②は, 「集合 X の各要素に対して, 集合 Y の要素がただ1つにきまる。」</p> <p>③は, 「x は集合 X の任意の要素をとる。」</p>	<p>○曜日が数量でないこと, また, その点でのみ共通性を満たさないことに気づかせる。</p> <p>○(1)の今年7月の暦の日と曜日の対応も, 関数関係としてとらえさせたい。そのためには, 3(1)の共通性をどのように改良すればよいかを考えさせる。</p> <p>○ここが, 本時学習の重点であるので, 充分時間をかけて指導する。</p>	<p>40/50</p>
<p>5. 関数を定義し, その意味を理解する。</p> <p>(1) 4(2)の共通性に基づき, つぎのように関数を定義する。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>一般に, 2つの集合 X, Y があって, X の要素をきめると, それに対応して, Y の要素が, ただ1つにきまる時, この対応を集合 X から集合 Y への関数という。</p> </div>	<p>○関数を定義する際には, 関数関係にあるものの共通性に基づき, 関数の意味を明確にするのだという点を意識させる。</p> <p>○関数を定義するには, 2つの集合の対応のしかた, 対応の方向性に着眼することが大切である。対応の方向性は, 次時に指導するので, ここでは, 簡単にふれる程度にする。</p>	

(2) つぎの問題を提示する		
<p>〔問題3〕 つぎのような対応は関数といってよいか。また、おのおの場合の集合は、なにかを答えよ。(ただし、対応のしかたは、前者から後者へとする。)</p> <p>(1) 円の半径の長さ、その半径をもつ円の面積との対応</p> <p>(2) 今年7月の暦の、曜日と日との対応</p> <p>(3) このクラスの各生徒と、各生徒の身体検査のデータ(身長、体重、胸囲)との対応</p> <p>(4) このクラスの各生徒と、今学期の中間テストの成績との対応</p>		
<p>① 上記の問題を解決する。</p> <p>② 数量関係の対応でなくても、「一意対応」は、関数であることを知る。</p>	<p>○これまで、関数関係と見なかった事象までが、新しい意味での関数であることを知り、関数の意味の拡張の良さに気づかせる。</p>	48/50
<p>6. 本時学習事項のまとめと、次時予告をする。</p>	<p>○本時学習事項の要点をまとめ、次時は関数を表す記号について学習することを告げる。</p>	50/50

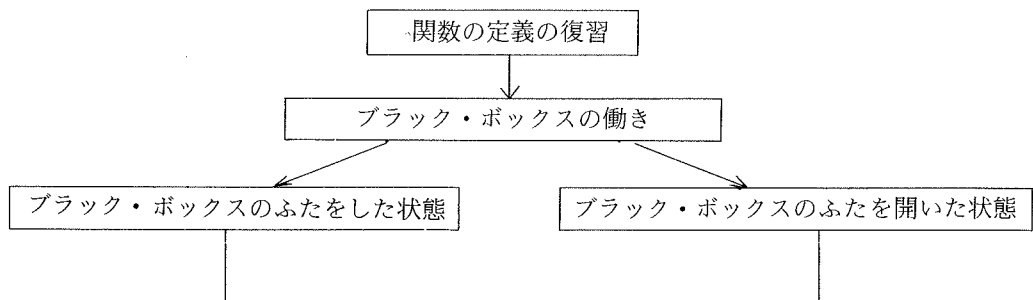
〔2〕第2時の指導計画

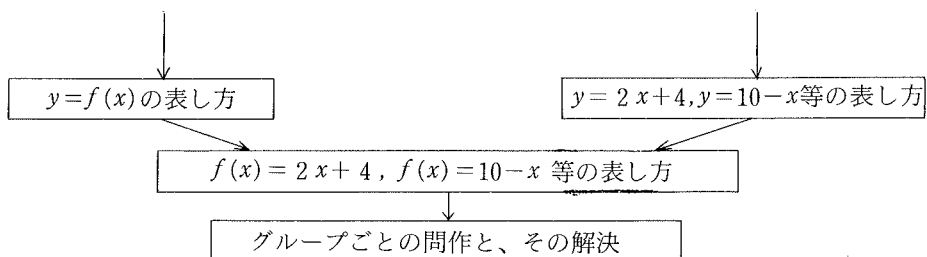
(1) 題材名 関数を表す記号

(2) 本時の主な指導目標

- ① ブラック・ボックスの活用によって、関数の機能(一意対応)の具体的なイメージを得るとともに、関数記号 $y = f(x)$ の意味を理解する。
- ② ブラック・ボックスに、フラッシュカードを入れたり、出したりするとき、その2集合の要素間の対応のきまりを発見する。
- ③ 変数 x と変数 y の対応のきまりを、 $y = f(x)$ 、さらに具体化して、 $y = 2x + 4$ 、 $y = 10 - x$ 等の式で表す。
- ④ グループで協力して、関数の問作したり、他のグループの作った問題を解いたりする。

(3) 授業展開のパターン





(4) 展開計画

指導の段階とねらい	指導上の留意点と評価の観点	時間配分
1. 前時の復習と、本時学習事項の把握 (1) 関数の定義と、関数を集合の立場で見なおした意義について、生徒の理解を確かめる。 (2) 本時は、関数を表す記号について学習することを告げる。	○問答法により、前時学習事項の理解の程度を確かめる。理解不十分な場合には、少し時間をさいて、これを補う。 ○本時学習事項を把握させる。	5 / 50
2. ブラック・ボックスの働きは、関数の一意対応であることに気づく。また、その働きを、「f」で表すことを理解する。 3. ブラック・ボックスに、つぎに示すようなきまりで、対応するフラッシュカードを入れたり出したりするとき、入力の集合X、出力の集合Yの対応のきまりを発見する。 問1 f：入力を3倍する。 問2 f：10より入力をひく。 問3 f：入力を5倍して1を加える 問4 f：入力の小数第1位を四捨五入する。 問5 f：入力を2倍して4を加える	○ブラック・ボックスの働きを、自動販売機の働きと関連させながら理解させる。入れるものを入力、出すものを出力、その働きを、「f」で表すことを約束する。 ○左記の問1～問5の問題について、ある数を入れたら、それに対応して、どんな数がでたかを考えさせ、対応のきまり、「f」を発見させる。また、□にあてはまる数も発見させる。 入れる数を書いたカードは、下記の問題例に示すように、4～5種類とする。 ○(例) 問1 <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"> </div>	18 / 50

<p>4. 3で発見した対応のきまりを式表示するために、次のような表し方をすればよいことを知る。</p> $f(\quad) = 2 \times (\quad) + 4$ $f(\quad) = 10 - (\quad) \quad \text{など}$ <p>5. 関数を表す記号として、$y = f(x)$および、$f(x) = 2x + 4$、$y = x - 10$等の表し方のあることを、ブラック・ボックスの入力の代表元をx、出力の代表元をyとして、x、yの対応関係をもとにして理解する。</p>	<p>○問5の対応のきまりの式表示を考えさせ、(\quad)をつかって、$f(\quad) = 2 \times (\quad) + 4$とすればよいことに気づかせる。他の問題は、これにならって、生徒に式表示させ、問4は式表示できないことに気づかせる。</p> <p>○式表示 $f(\quad) = 2 \times (\quad) + 4$ において、(\quad)の中に、いろいろな数値が入り得ることから、これに変数xを入れて表せばよいことに気づかせる。</p> <p>○ブラック・ボックスのふたをした状態は $y = f(x)$、ふたを開いた状態は、$y = 2x + 4$と表せることを示し、他の問題の式表示は生徒に考えさせる。</p>	28/50
<p>6. グループで、教師の提示した条件にあう問題を、1グループ1題ずつ協力して作成して提示する。問題作成、提示の順序は、つぎの通りにする。</p> <p>(1) グループで協力して問作する。</p> <p>(2) 作成した問題の妥当性を、グループで検討する。</p> <p>(3) 代表者が、問題を黒板に提示する。</p> <p>7. 他のグループの作った問題を、各グループが協力して解決する。</p>	<p>○作成する問題が、むつかしくならないようにするために、あらかじめグループ長を呼び、問題はグループ内でよく検討し、やさしい問題を作成するように注意しておく。</p> <p>○時間節約のため、模造紙を各グループに与え、それに作成した問題は記入して提示させるように配慮する。</p> <p>○他のグループの作成した問題を解決するにあたっては、グループ内で、十分話しあって解決するように指示する。</p>	48/50
<p>8. 本時学習事項の重点のまとめと、次時予告をする。</p>	<p>○本時は、関数を表す記号 $y = f(x)$ と関数の働きの発見のしかたについて学習した。次時は、定義域と値域について学習することを告げる。</p>	50/50

〔3〕第3時の指導計画

(省略)

〔4〕第4時の指導計画

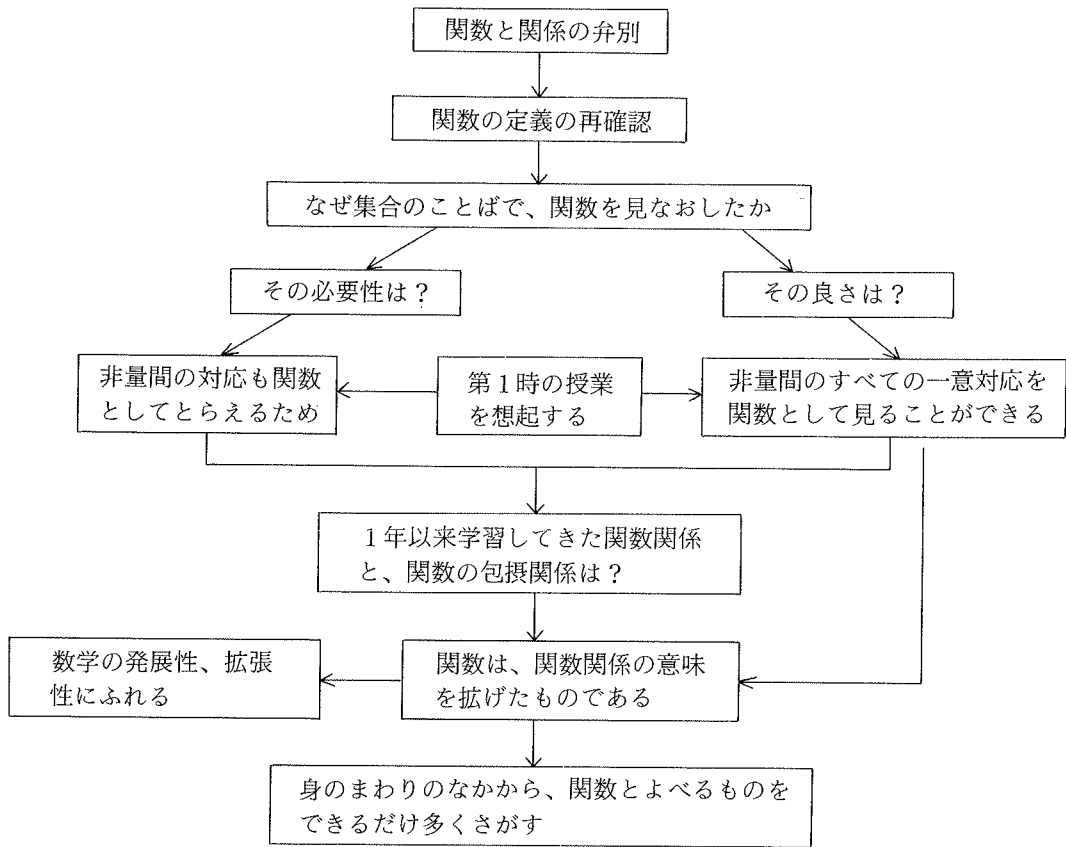
(1) 題材名 いろいろな対応

(2) 本時の主な指導目標

- ① いろいろな日常事象や、数学的事象の対応関係を調べることにより、いろいろな対応関係のあることを知り、関数と関係を区別する。
- ② 関数を集合の立場で定義することの必要性、また、そのよさを、第1時の授業を想起しながら再確認し、1年以来学習してきた関数関係と、関数の包摂関係を理解する。

- ③ 決定事象の対応関係は、すべて関数として、とらえられることを理解する。
- ④ グループで協力して、諸事象のなかから関数をさがすことにより、関数の理解を一層深める。

(3) 授業展開のパターン



(4) 展開計画

指導の段階と指導のねらい	指導上の留意点と評価の観点	時間配分
1. 前時の復習と本時学習事項の把握 (1) 定義域と値域について生徒の理解程度を確かめる。 (2) 本時は、いろいろな対応について学習することを告げる。 2. つぎの問題を提示する。	○問答法により、前時学習した事項の理解程度を確かめる。理解不十分な点は補う。 ○本時学習事項を把握させる。 ○問題は、模造紙に書いて提示する。	

<p>〔問題〕 つぎのなかから、関数を選べ。ただし、対応の方向は、前者から後者へとする。</p> <p>(1) 多角形の辺の数と、内角の和の対応 (2) 三角形の底辺の長さ、その面積との対応 (3) 定形外の郵便物の送料と、その重量との対応 (4) タクシーの相乗りで、乗る人数と、1人あたりの料金との対応 (5) 自然数の集合で、各自然数と、その約数との対応</p>		
<p>上記の問題を、その対応関係を調べて解決する。</p>	<p>○上記の問題の対応関係を調べることに より、(1), (4)が関数であることを理解させる。</p>	<p>10/50</p>
<p>3. 第1時の関数の定義を再確認し、つぎのことを考える。</p> <p>(1) 1年で定義した関数関係の意味を、なぜ集合の立場で見なおしたかを、つぎの2つの観点から考える。</p> <p>① その必要性について考える。 非量の2集合間の一意対応も、関数としてとらえるために、集合の立場で見なおした。</p> <p>② その良さについて考える。 集合の立場で見なおすことによって、非量間のすべての一意対応をも、関数としてみるができる。</p> <p>4. 1年以来学習してきた関数関係と、集合の立場で定義した関数の包摂関係について考える。</p> <p>(1) 関数とこれまで学習してきた関数関係を、下記のようなベン図に表記する。</p> <div data-bbox="353 1470 546 1657" style="text-align: center;"> </div> <p>(2) これまで学習した数式教材や、図形教材等のなかから、意味の拡張さ</p>	<p>○生徒に関数の定義を発表させ、それをもとにして、関数の要点をつぎのように板書する。</p> <p>(1) 二つの集合X, Y (2) xがきまれば、yがきまる (3) xは集合Xの任意の要素をとり得る</p> <p>○本時は、集合と関数のまとめの時間であるので、関数を集合の言葉で定義することの必要性や、その良さを、第1時に学習した「暦の日と曜日の対応」や、本時提示した問題をもとにして、再考させる。</p> <p>○このような考察により、関数を集合の立場で定義することは、「2量間の対応以外の対応も、関数と見られるように関数の視界を大きく広げる」ことにつながる、ということを理解させる。</p> <p>○3年の「集合と関数」で定義した関数は、1年以来学習した関数関係を否定したのではなく、これをなかに含めて、関数の意味を拡張したものであることを、生徒に気づかせる。この点を、とくに強調する。左のベン図において、×印に相当する事例を生徒に発表させ、関数の意味の拡張についての理解を深めさせる。</p> <p>○これまで学習した数学の内容のなかから、上記のような拡張の事例をさがさ</p>	

<p>れた事例をさがす。さらに、数学の発展性、拡張性について簡単にふれる。</p>	<p>せることにより、数学は固定的なものでなく、必要に応じて拡張され、発展するものであることを知らせる。</p>	<p>30 / 50</p>
<p>5. 各グループで、身のまわりのなかから、関数とよべるものを、下記のような順序でさがし、それが妥当かどうかを、クラス全員で検討する。</p> <p>(1) 各グループで、関数をできるだけ多くさがす。</p> <p>(2) さがしたものが、関数であるかどうかを、グループ内で検討する。</p> <p>(3) 代表者が、関数の例を黒板に提示する。</p> <p>(4) 他のグループのさがした関数が妥当かどうかを、クラス全員で検討する。</p>	<p>○関数の定義を確実に理解させ、関数の考えをいろいろな事象に適用できるようにするために、生徒に、身のまわりの事象のなかから、関数の事例をさがす学習活動をさせる。</p> <p>○関数をさがす場合の配慮事項は、机間巡視しながら指導する。</p> <p>○時間節約のために、各グループに模造紙を与え、それに、各グループでさがした関数を書きこませ、黒板にはって提示させるように配慮する。</p>	<p>47 / 50</p>
<p>6. 本時学習事項のまとめと、本単元学習事項のまとめ</p> <p>本時は、「いろいろな対応」について学習した事柄の要点をまとめるとともに、集合の立場で、関数を定義したよさを皆で確認する。</p>	<p>○本時が、本単元学習の最終時間になるので、ここでは、本時学習事項の要点のまとめとともに、本単元で学習した要点をまとめ、「集合と関数」の理解を深める。</p>	<p>50 / 50</p>

5. 事後調査問題とその調査結果

事後調査は、昭和52年度、昭和53年度の両年度とも実施したが、ここには昭和53年度に実施した事後調査問題とその結果のみを記載する。

(1) 内容面についての調査

調査1 つぎの対応のなかから、関数であるものを選び、関数であるものには、()内に○印を、また、関数でないものには、()内に×印を記入せよ。

- (1) ある中学校の担任の先生と、担任の生徒との対応関係で、
- ① 先生から、担任の生徒への対応 ()
- ② 生徒から、担任の先生への対応 ()
- (2) 1辺の長さが x cmのひし形の面積を Y cm^2 とすると、 x から Y への対応 ()
- (3) ある人が、50円切手1枚と、20円切手を x 枚買ったとき、支払った金を Y 円とする。このとき、 x から Y への対応 ()
- (4) $X = \{2, 3, 4, 5\}$ と、 $Y = \{8, 15\}$ で、 Y は x の倍数であるという関係があるとき、 x から Y への対応 ()

(5) A町のある日の時刻 x 時の気温を y 度とすると、 x から y への対応 ()

(1)		(2)	(3)	(4)	(5)
①	②				
92	94	88	94	82	86

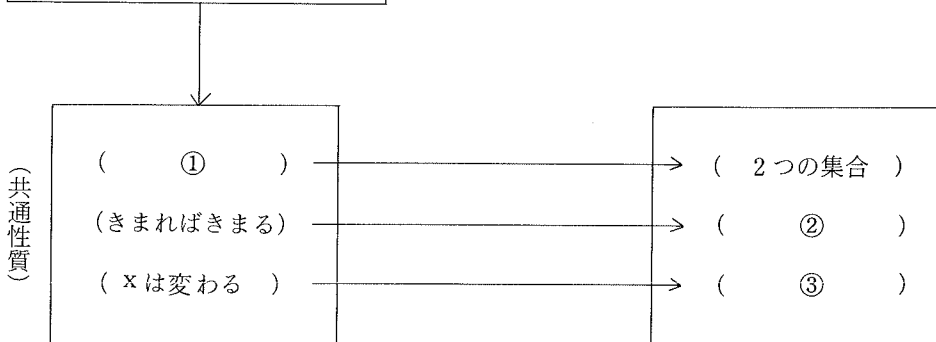
調査2 つぎの式で表される関数のなかから、 $y = 3x + 4$ で表される関数と同じものを選び。ただし、式中の文字は、すべての実数とする。

- (1) $y = 2x - 3$ (2) $n = 3m + 4$ (3) $S = 3t + 4$
 (4) $y = 5x - 4$

96

調査3 つぎの図式は、関数の定義をしたときの授業の要点を示したものである。関数の定義をしたときのことを想起して、() のなかを適当にうめよ。

ともなって変わる事象の対応関係



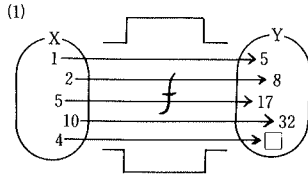
①	②	③
92	86	78

調査4

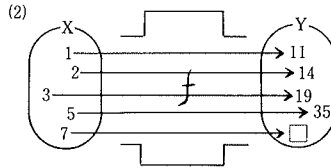
- (1) 関数の定義を書け
- (2) (1)のように関数を定義することは、どのような意味をもつか。つぎの項目から、最もよいと思うものを選んで答えよ。
- ① 集合は数学の基礎だから、集合を用いて関数を定義した。
 - ② 数量の間の対応関係だけでなく、多くの対応関係を関数としてみることができる。
 - ③ 集合を考えると、変域(定義域、値域)が明確になる。
 - ④ 集合を用いて、関数の意味を明確にただけである。
 - ⑤ わからない。

(1)	(2)				
	①	②	③	④	⑤
74 (86)	8	57	19	13	3

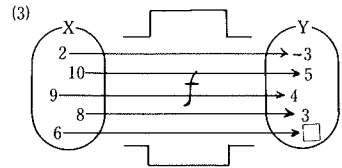
調査5 つぎの(1)~(3)の対応のきまりを見つけて、に適する数を入れよ。また、入力の実数代表元を x 、出力の実数代表元を y で表すとき、 x 、 y の関係を、つぎの場合について式に表せ。



- ふたをした状態
 $y =$
- ふたを開いた状態
 $y =$



- ふたをした状態
 $y =$
- ふたを開いた状態
 $y =$



- ふたをした状態
 $y =$
- ふたを開いた状態
 $y =$

(1)	(2)	(3)
85	82	78

調査6 関数 $y = 2x + 7$ において、定義域 A を、 $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ とするとき、値域 B を求めよ。

(2) 情意面についての調査

調査 集合と関数を学習して、感じた点を自由に書け。(生徒の書いたおもな感想は、つぎの通りである。ただし、重複分も含む。)

- (1) このたびの授業で、1年で学んだときよりも、関数の定義がよくわかった。
- (2) 身のまわりのいろいろな事柄のなかに、関数関係にあるものが沢山あることがわかった。
- (3) 集合で関数を定義することの意味が、よくわかったような気がする。
- (4) 関数であるか、関数でないかを調べるには、対応図を書いて見分ければよいことに気づいた点はよかった。
- (5) ブラック・ボックスを利用して出題された x 、 y の対応のきまりを見つける問題は、直観でわかる問題はよいが、直観でわからない問題は、どのようにして解決したらよいかわからない。しかし、 $y = f(x)$ の表現方法の意味は、ブラック・ボックスを使って授業を進められたのでよくわかった。
- (6) グループで話しあって問作したので、楽しく授業を受けることができた。
- (7) グループで問作したり、他のグループの作った問題を解いたりすることは、他のグループに負けまいという気持ちが出て、やる気がおこる。
- (8) 1年のときは、関数はあまり得意でなかったが、このたびの授業で関数が好きになった。
- (9) 2量の対応としての関数関係と、2集合間の対応としての関数の関係が、ベン図で表すことによってはっきりした。またそれによって、関数の意味が拡張されたのだ、ということもよくわかった。

VI 指導結果の考察

1. 第1時の指導について

(1) 問題1で、グラフの誤りを指摘させた。この意図は、二つの数量の関係を二つの集合の関係に拡げて考えさせるためには、生徒に変域を意識させることが必要だと考えたからである。生徒は(b), (c)のグラフの誤りを容易に指摘した。また、このような扱いが、我々の意図通り、指導過程の②の段階の指導に有効に働いたように思われる。

(2) 指導過程の①の段階の指導、すなわち本時展開計画の段階2（五つの関数関係の事例から共通性を抽出する）の指導では、昨年度の場合、時間に比して教材が多すぎたため、やや授業が上すべりに流れた感があり、共通性の抽出にかなりの抵抗があった。そこで本年度は、問題1を家庭学習にまわし、共通性の抽出のための時間を十分とった。そのためか、学習活動は活発に展開され、下記に示すようないろいろな共通性質が抽出された。

- x の値が一つきまると、 y の値も一つきまる。
- x 、 y の対応のしかたが1対1か多対1である。
- どの関係も対応図に表せる。
- x 、 y はともに数量を表す数値である。
- x 、 y はそれぞれ二つの集合の要素である。
- x が変われば y も変わる。

このように、生徒によって関数関係の多様な共通性質が抽出されたが、授業者は、生徒との問答を通して、これらを整理・統合し、本質的な共通性として、次の三つの事柄を抽出した。

- ① 二つの数量の集合がある。
- ② x の値がきまれば、 y の値がきまる（一方がきまれば他方がきまる）。
- ③ x は変わる（ x はある範囲の数量の数値を自由にとる）。

本時の授業では、上記のように生徒から多様な共通性が出されることが、後の指導展開にとって極めて重要である。したがって、問題1の扱いについては、本年度の実践のような配慮が必要である。

(3) 共通性の抽出の段階で、両年度とも「二つの数量」がなかなか出ず、先に「二つの集合」が抽出された。これは、実践対象の生徒が現行学習指導要領の下で第1学年に関数の定義を学習していることと、もう一つは、生徒にとっては二量の存在は当然であって、それを改めて共通性として意識するに至らないためと思われる。前者は新学習指導要領下の指導では解消される問題であるが、後者については、第1学年における「関数関係」の意味の指導の際に留意すべき点である、と考える。

(4) 二つの数量を二つの集合に高める指導の段階（指導過程の②の段階）で、今年7月の暦における日と曜日の対応の事例を提示し、これを最初の五つの事例と比較させ、その違いを生徒に気づかせた。このことは、数量の集合を一般の集合まで拡げて考えることの必要性を、生徒に感じさせる上で極めて効果的であったと考える。

2. 第2時の指導について

(1) 抽象的な関数の働きのイメージを実体化（視覚化）したり、関数記号の導入や、関数の規則の発見を促すために、ブラック・ボックスを利用した。このブラック・ボックスの利用には、

生徒は非常に興味を示して積極的に学習し、授業者の意図通りに、授業が展開した。また、関数作りとその規則の発見の指導は、生徒を8グループに分け、各グループごとに関数作りをし、その関数の規則の発見を他グループが行うという形式で展開した。この形式による授業展開は、グループごとの競争心を刺激して活気ある学習活動を生み、関数の意味の理解を深めたり、関数の規則の発見や生徒の柔軟な思考を促す上で、極めて効果的であった。

- (2) 上記の関数作りの学習活動で、あるグループから定値関数が提出された。その関数の規則を式表示する場合に、それを $y = 0 \cdot x - 59$ と書くべきか、それとも $y = -59$ と書くべきかが熱心に討議された。授業者は、この場面を利用して、関数記号 $y = f(x)$ の有用性にふれた。すなわち、ブラック・ボックスのふたをした状態が $[y = f(x)]$ であり、ふたを開いた状態が $[y = 0 \cdot x - 59$ または $y = -59]$ である。この両者より、 $[y = f(x) = 0 \cdot x - 59$ または $y = f(x) = -59]$ と表されるから、 $y = -59$ の表現のなかにも実は x が隠されているのだ、ということ指摘した。このような指導によって、生徒は、関数の表現として $y = -59 (x \in X)$ は正しい表示であり、関数記号を用いれば、その関数をもっとも鮮明に $y = f(x) = -59$ と表現できることを納得した。この意味で、このような議論がされたことは極めて有意義であったし、また、その誘発の因となった、ブラック・ボックスの利用、グループごとの関数作り、関数記号の導入などは、本時の授業において有効であり、かつ適切であったと考える。

3. 第4時の指導について

- (1) 本時が、単元のまとめの段階でもあるという点から、第1時に学習した、集合の立場による関数の定義(第2の解釈)を想起させ、関数を集合によって定義することの必要性(契機)と合理性(良さ)を再確認させた。この扱いによって、生徒の「集合の立場で関数を見なおし、関数の意味を拡張する」ことに対する理解が、一層深まったように思われる。このことは、事後調査における生徒の感想のなかに多く見うけられた。
- (2) 第1学年から第3学年の前単元まで学習してきた関数関係と、この単元で学んだ関数との包摂関係を生徒に考えさせ、これをベン図式で表した。また、このベン図式において、大円に含まれて小円に含まれない×印に相当する関数の事例を生徒に挙げさせた。これらの学習活動は、生徒にとって何ら抵抗なく、授業者の意図通りに進められた。このように、両者の関係をベン図式で視覚的に表現したことは、新しく定義した関数が「関数関係」を否定したものでなく、これをなかに含めて関数の意味を著しく拡張したものであることを生徒に鮮明に印象づけた。本時における、包摂関係のベン図式表現は極めて有効・適切であったと考える。
- (3) 関数の意味の拡張に関連して、数学的概念や数学の理論の拡張について簡単にふれた。十分な解説ではなかったが、数学は固定的なものでなく、できるだけ多くの事柄を考察の対象にできるように、常に拡張され、発展する、という印象を与える上で少しは効果があったものと思われる。
- (4) 最後に、第2時の関数作りとその規則の発見の場合と同様に、生徒を8グループに分け、各グループごとに新しい意味の関数の事例をいろいろの事象のなかから探させ、その当否を他のグループに検討させた。この意図は、学習活動を活気あるものにするとともに、関数の弁別を意識的に行い、さらに新しい関数の対象が実に広汎な事象におよぶことを自覚させるためである。この学習活動は第2時の関数作りの場合と同様に活気を呈し、また各グループが提示した関数の事例の豊かさも授業者の予想を上回るものであった。したがって、第4時のこの場面での扱いとして、上記のような形式による学習活動は有効であると考えられる。

4. 事後調査の結果について

- (1) 調査1で、関数の弁別をさせた。調査の結果は、各問いともかなりの正答率を示した。これは、第1時、第4時の指導の効果によるものと考ええる。
- (2) 調査2は、関係式の文字が異なっても、変域と対応のしかたが同じであれば同一の関数と見なすことができるか否か、を問うたものである。正答率は96%で、極めて高かった。事前調査の調査1で同様の調査をしたが、その正答率は58%であった。このように正答率が上昇したのは、第2時でブラック・ボックスを活用し、関数の本質は対応とそのきまりにあるということを強調した結果と考ええる。
- (3) 調査3では、問①が高い正答率を示した(92%)。これは、第1時で、五つの具体的な関数関係から共通性を抽出し、さらに量を捨象してこの共通性を一般化する段階の指導にかなりの時間をかけ丁寧に指導したためと考ええる。しかし、問②、③の正答率は予想より低かった(②86%、③78%)。これは、生徒にとって表現のむずかしさもあり、誤答の主要因はその記述の不完全さによるものが多かった。
- (4) 調査4の問①は、関数の定義を問うもので、その正答率は74%であった。しかし、表現が不完全でも関数の意味をとらえていると思われるものを含めると86%となり、一応指導の効果があつたものと考えられる。また、問②は、集合の立場で関数を定義したことの良さや意義に関して問うたものである。その回答の結果は正答、誤答と分類して整理すべきものでないが、指導者が最も期待した項目(イ)を選んだ者が最も多く57%であったことは、授業者の意図が生徒にかなり反映して受けとめられたものと思われる。
- (5) 調査5では、ブラック・ボックスを図式化し、対応の規則を見つけさせる問題を与えた。正答率は78%~85%で、大体予想通りであった。
- (6) 調査6は、定義域、値域の意味に関する設問である。正答率は82%で、通常のテストの評価と比べその定着度はよいと考える。

VII 結 語

今回の学習指導要領の改訂で、中学校における関数指導の系統が大きく変更された。指導系統の変更は当然その扱い方の変更を要請する。この新しい指導系統の流れからすれば、今後の中学校の関数指導では、(1)事象との出合いを重視した関数指導(第1、2学年)、(2)具体的な事象との関連で学んできた関数関係を集合の立場に立って見なおし、関数の意味を拡張する指導(第3学年)、がその取り扱いを研究すべき最も重要な点であると考ええる。

そこで、本研究では、上記の(2)に焦点を当て、第II、III章で展開した基本的な考え方にに基づき、その実践研究を試みた。

1. 単元「集合と関数」の指導過程や指導の重点に対するわれわれの考え方は第III章の図式(図2)に示されているが、その図式のなかで②の段階の指導と④、⑤の段階の指導をいかにするかが、本単元の指導で最も重要な点であり、本研究の課題である。この課題を解決するために、今回の実践では、次のことに焦点を当てて研究を進めた。

- (a) 指導過程のパターンの確立と指導の重点について
- (b) よりよい題材・事例の選択について
- (c) 関数を実体化するための図式(ブラック・ボックス)や関数記号の取り扱いについて

(d) 指導法の工夫・改善とふさわしい教具の工夫・開発について

2. 以上のような考え方にに基づき、本単元を授業時数4時間分に区分して、各時の指導計画細案を作成し、1977年と1978年の2回にわたって、その指導の実践を試みた。各年度の指導実践の対象生徒は、

○ 1977年度 鳥取大学教育学部附属中学校 第3学年 (172名)

○ 1978年度 同 校 第2学年 (176名)

である。また、指導実践の結果の考察に資するため、事前調査と事後調査(内容面の評価テストと情意面の調査)を行なった。

3. 実践指導の結果を要約すれば次の通りである。

(1) 生徒は、われわれが計画した全指導過程を、興味をもって積極的に学習した。また、事前調査と事後調査の結果の考察ならびに実際の授業におけるクラスの雰囲気からみれば、生徒の指導内容に対する理解度もその定着度も高く、われわれの所期の指導のねらいがほぼ達成されたものとする。したがって、われわれの指導計画は、中学校の「集合と関数」の指導計画として、無理のない妥当なものであり、かつ指導の際に提示した題材・事例は指導内容の理解を助ける上で効果的なものであったと考える。

(2) 指導過程のパターンの①～⑤の各段階において、生徒は、それぞれ焦点化された学習活動を行うことによって、抽象化の考え、一般化の考え、拡張の考え、統合の考えなど数学的な考えの学習を意識的に体験した。これによって、生徒は、関数の意味を拡張することの必要性や有効性を理解するとともに、数学の特徴としての数学の発展性、統合性についてもかなりの理解が得られたように思われる。このことについては、事後の情意面の調査結果にも認められたことである。この意味で、われわれの指導過程の5段階のパターンとその指導の重点化は適切なものであった、と考える。

(3) 抽象的な関数概念のイメージを実体化したり、関数記号の導入や関数の規則の発見を促すために、「ブラック・ボックス」を活用した。このブラック・ボックスの利用には、生徒は非常に興味を示し、授業者の意図通りの学習活動が展開された。集合の立場に立った関数概念の把握とその関数の働きを実体的に把える上で、ブラック・ボックスの活用と関数記号の導入は極めて効果的であった、と考える。

(4) 以上のように、われわれが研究の焦点としてあげた、(a)、(b)、(c)の3項については、研究の所期の目的がほぼ達成されたものとする。しかし、実際の指導展開は、現行の学習指導要領下の生徒を対象として指導したことにもよるが、必ずしも計画通りにすべてうまく展開されたとはいえない。指導法に関しての細部にわたっての工夫・改善や指導効果をあげる上での教具の開発・工夫、題材・事例提示の際の教育機器の利用など、残された問題点も少なくない。これらについては、今後の課題として研究を進めていきたい。

なお、本研究の指導計画の立案ならびに指導実践の段階で、本学倉信敏教授からいろいろと貴重な御助言をいただいた。ここに厚く感謝の意を表するものである。

参 考 文 献

- (1) 文部省： 中学校学習指導要領（数学編），大蔵省印刷局（1970）.
- (2) 文部省： 中学校指導書（数学編），大阪書籍（1970）.
- (3) 文部省： 小学校学習指導要領，大蔵省印刷局（1977）.
- (4) 文部省： 中学校学習指導要領（数学編），大蔵省印刷局（1977）.
- (5) 大野・川口・中野・原（編）： 中学校数学教育現代化全書 5（関数），金子書房（1971）.
- (6) 岡森博和： 中学校における関数教育，数学教育研究（大阪教育大学数学教室），5（1975），pp.81—99.
- (7) 笹田昭三：「二つの集合についてその要素間の対応関係を考察し，関数の意味についての理解を深める指導」，新中学校数学指導講座（金子書房），4（1978），pp.209—223.
- (8) 笹田昭三・黒田早苗：「2数量間の対応を2集合の要素間の一意対応に高める指導」，日本数学教育学会誌，60 臨時増刊号（1978），p.200.
- (9) A.ストリャール： 数学教育学，明治図書（1976）.
- (10) 王木和之： 中学校新学習指導要領の解説と展開，新数社（1977）.
- (11) 遠山啓編： 関数の指導，明治図書（1967）.
- (12) 松宮哲夫・中田孟邦： 中学校における関数指導についての考察——関数の具体的指導例とその考察——，数学教育研究（大阪教育大学数学教室），4（1974），pp.89—96.

（昭和53年9月14日受理）

On the Fundamental Thinking of the Teaching of "Sets and Functions" and Its Practical Teaching in a Lower Secondary School

Shōzō SASADA and Sanae KURODA

In the recent revision of the course of study, the system of the teaching of functions in a lower secondary school has been greatly changed. It was treated *a priori* (i.e. from the general to the particular) in the previous course of study published in 1969. But in the new and revised course of study, it comes to be treated *a posteriori* (i.e. from the particular to the general) and a high value is put on the pupils' contact with phenomena. This change is reasonable, when it is viewed from the development of the notion of functions, and from the fact that functions are closely connected with actual phenomena. The change of the system naturally requires that of the treatment of teaching contents. So the important points of its treatment in the new system are as follows:

- (1) how to familiarize the pupils with the views and concepts of variables and correspondence by making them examine the phenomena carefully.
- (2) how to make the pupils understand the meaning of univalent correspondence between the two sets by generalizing the functional relation they learned in relation to concrete phenomena.

And the present study is focussed on the above (2) and is about the practical teaching based on the following fundamental thinking.

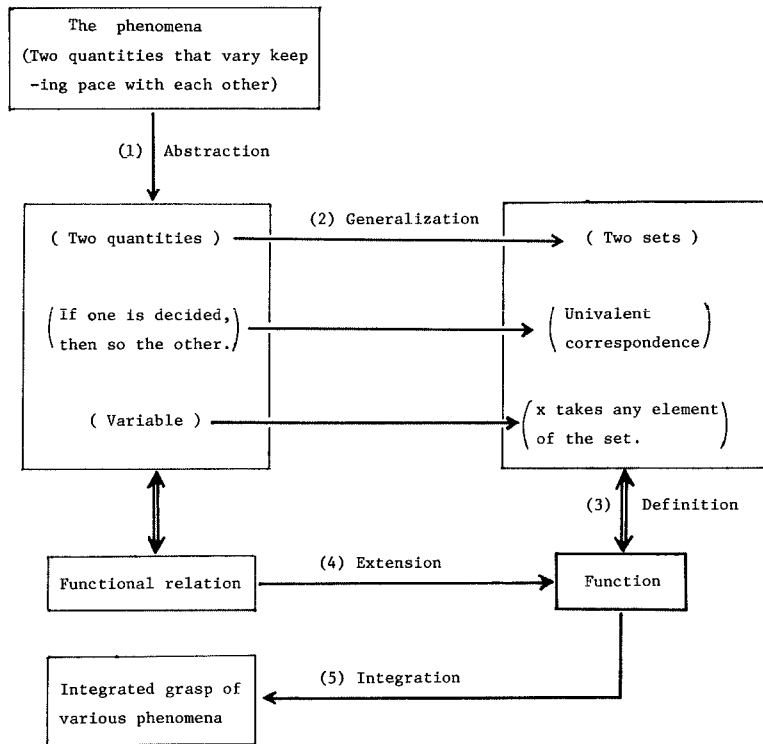
1. The fundamental thinking about the teaching of "sets and functions"

- (1) The aims of teaching

This unit is the concluding step of the teaching of functions in a lower secondary school, and the chief aims are as follows:

- (a) to make the pupils understand the new and extended meaning of functions by re-considering, from the point of view of sets, functional relations which have been considered in relation to concrete phenomena.
- (b) to enable the pupils to grasp not only the relation of two quantities that vary keeping pace with each other but also many other phenomena as the objects of functions.
- (2) The pattern of the procedure of teaching and the main points of teaching

In this unit the main points of teaching are, first, to make the pupils form the notion of the function from the point of view of sets by taking up some cases of the relation of two quantities that vary keeping pace with each other which they have been learning since the seventh grade and by making such an examination of them as mentioned below in a diagram, and, secondly, to make them recognize the possibility of grasping many phenomena as the object of functions by this extension of the meaning of functions. That is to say, the main parts of the procedure of teaching in this unit are shown as follows, and the present writers set great importance on teaching of the steps shown by 'arrow'.



2. The problems and the focuses of the present study

In the diagram of the procedure of teaching given above, the way of the teaching in the steps of (2), and of (4) and (5) is most important, and is also the subjects of the present study.

In order to solve the problems mentioned above the focuses are put on the following points in the present study:

- the propriety of the pattern of the procedure of teaching and that of the important points of teaching.
- the selection of better teaching materials.
- the treatment of the diagram and the symbols of the functions for substantiating abstract 'functions'.
- the device and improvement of the teaching method and its appropriate teaching tools.

3. Practical teaching

On the basis of the fundamental thinking mentioned below 1 above, this unit was divided into four school hours, and the plan for teaching was made in detail. The practical teaching was attempted twice, in 1977 and in 1978. For the precise evaluation of this, two investigations were made before and after it. It was tried on the pupils mentioned below:

- * In 1977, the ninth grade of the Lower Secondary School Attached to the University of Tottori.
- * In 1978, the eighth grade of the Lower Secondary School Attached to the University of Tottori.

4. The summary of the results

The results of the practical teaching are as follows:

- (1) The pupils were interested in the whole procedure of teaching, and they learned earnestly. The results of the investigations before and after the practical teaching and the atmosphere of the classes showed that the expected results had been achieved. Both the pupils' understanding of the materials given to them and the fixity of learning were considerably high. Therefore it may be said that the writers' plan was proved to be appropriate for the teaching of 'sets and functions' in a lower secondary school and that the teaching materials given to the pupils were effective in deepening their understanding.
- (2) In every step (1)—(5) of the procedure of teaching, the pupils had a conscious experience of mathematical thinking, such as ideas of abstraction, generalization, extension, and integration, etc., by learning the focussed materials. This seemed to help them to understand the necessity and efficiency of the extension of the meaning of functions, and at the same time to have a considerable understanding of the extensity and integration peculiar to mathematics. It was confirmed by the results of the research of the pupils' impressions after the practical teaching. In this sense the writers' pattern (with five steps) of the procedure of teaching and their emphatic points of teaching were appropriate.
- (3) 'Black boxes' were used for the purpose of substantiating images of abstract functional notions and helping pupils to understand the symbols of functions and to find out their rules. They took a great interest in 'black boxes', and acted in learning, just as the instructor had expected. For the purpose of making the pupils grasp substantially the notion and work of functions, the use of 'black boxes' and the introduction of the symbols of functions are thought to have been very effective.
- (4) As mentioned above, the writers' aims shown under (a), (b) and (c) were achieved. But it is to be admitted that all the writers' aims were not always achieved just as they had expected. It is partly due to the fact that the practical teaching was given to the pupils who had been learning under the previous course of study. The writers must reserve for another opportunity a detailed discussion about the device and improvement of the teaching tools and the profitable employment of teaching machines.

