Sobolev 空間の性質

栗　林　幸　男*

Yukio KURIBAYASHI : A Few Properties of the Sobolev Space

(1971年4月30日受理)

1 序

Sobolev 空間における境界値問題，固有値問題などの研究は F. Stummel[1], R. Lattès and J. -L. Lions[2] らによってなされている。

Sobolev 空間 $W^k(\Omega)$ の部分空間 $\hat{H}_0^k(\Omega)$ の完備化を $H_0^k(\Omega)$ とする。

一般に $H_0^k(\Omega)\subseteqq W^k(\Omega)$ が成立するが，特に $\Omega=R^n$ の場合には $H_0^k(R^n)=W^k(R^n)$ が成立することが知られている[3]。

本稿は $H_0^k(R^n)\subsetneqq W^k(R^n)$ なる例である $H_0^1((0,1))$ の性質について述べたものである。

2 記　　号

本稿ではつぎの記号を用いる。

Ω　　: R^n の開集合

$W^k(\Omega)$: Sobolev 空間，すなわち $D^S f\in L^2(\Omega)$ なる複素数値関数の集合で，scalar product をつぎのように定義して得られる空間。

$$(f,g)_k=\sum_{|S|\leqq k}\int_\Omega D^S f(x)\cdot\overline{D^S g(x)}dx$$

ここで，$D^S f(x)$ は超関数の意味での導関数 (distributional derivatives) であり，かつ，

$$D^S f(x)=\frac{\partial^{S_1}}{\partial x_1^{S_1}}\frac{\partial^{S_2}}{\partial x_2^{S_2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{\partial^{S_n}}{\partial x_n^{S_n}}$$

$$|S|=S_1+S_2+\cdots\cdots\cdots+S_n$$

である。

$\hat{H}_0^k(\Omega)$: $C_0^k(\Omega)$ に scalar product を

$$(f,g)_k=\sum_{|S|\leqq k}\int_\Omega D^S f(x)\cdot\overline{D^S g(x)}dx$$

によって定義して得られる空間。

$H_0^k(\Omega)$: $\hat{H}_0^k(\Omega)$ の完備化。

* 数学教室

3 $\mathbf{H}_0^1((\mathbf{0},\mathbf{1}))$ について

$H_0^k(\Omega)$ において $n=k=1$，かつ $\Omega=(0,1)$ なる場合を考える。

$f\in H_0^1((0,1))\cap C^1((0,1))$ とし，かつ f は実数値関数とする。

$1>\varepsilon>0$ なる任意の ε に対して

$f_\nu\in\hat{H}_0^1((0,1))$ なる実数値関数 f_ν を適当にとると

$$\|f-f_\nu\|_1<\varepsilon$$

が成立する。

Schwartz の不等式によって，$\frac{1}{2}>\delta>0$ なる任意の δ に対して

$$\left(\int_\delta^{\frac{1}{2}}(f'(x)-f_\nu'(x))dx\right)^2\leqq\int_\delta^{\frac{1}{2}}|f'(x)-f_\nu'(x)|^2dx\int_\delta^{\frac{1}{2}}1^2dx$$
$$<\varepsilon$$

が成立する。

ここで $x_0\in(\delta,\frac{1}{2})$，かつ $f(x_0)=f_\nu(x_0)$

なる x_0 が存在すると仮定してよい*。

この x_0 に対して

$$\left(\int_\delta^{x_0}(f'(x)-f_\nu'(x))dx\right)^2\leqq\int_\delta^{x_0}|f'(x)-f_\nu'(x)|^2dx\int_\delta^{x_0}1^2dx$$
$$\leqq\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(x)-f_\nu'(x)|^2dx\int_0^{\frac{1}{2}}1^2dx$$

$$\therefore\quad(-f(\delta)+f_\nu(\delta))^2<\varepsilon$$

$\varepsilon\ (>0)$ は任意であるから

$$f_\nu(\delta)\longrightarrow f(\delta)\qquad(\nu\to\infty)$$

が成立する。

一方，δ を十分小にとれば，$f_\nu\in C_0^1((0,1))$ であるから

$$f_\nu(\delta)=0$$

$$\therefore\quad f(\delta)^2<\varepsilon$$

$$\therefore\quad\lim_{\delta\to+0}f(\delta)=0$$

従って $f(0)=0$ とする。

Schwartz の不等式によって

$$\left(\int_0^\delta(f'(x)-f_\nu'(x))dx\right)^2\leqq\int_0^\delta|f'(x)-f_\nu'(x)|^2dx\int_0^\delta 1^2dx$$

$$\therefore\quad\frac{1}{\delta}\left(f(\delta)-f_\nu(\delta)\right)^2\leqq\int_0^\delta|f'(x)-f_\nu'(x)|^2dx$$

---

* 備考 (1)

$$\therefore \quad \lim_{\delta \to +0} \frac{f(\delta)^2}{\delta} = 0$$

同様にして

$$\lim_{\delta \to 1-0} \frac{f(\delta)^2}{1-\delta} = 0$$

が成立する。

従って $g(x)=C$ $(x \in (0,1))$ なる関数は，$H_0^1((0,1))$ には属しない。しかし，$W^1((0,1))$ には属するから $H_0^1((0,1)) \subsetneqq W^1((0,1))$ である。

なお　$h(x)=0 \quad (0<x \leqq \frac{1}{2})$

$\qquad\quad =1 \quad (\frac{1}{2}<x<1)$

なる関数は，導関数が関数ではないから，$W^1((0,1))$ に属しない。

さらにつぎの命題が成立する。

命題　$f \in C^1((0,1))$ なる 実数値関数 $f(x)$ が

(a) $\displaystyle \lim_{x \to +0} \frac{f(x)^2}{x} = 0$

(b) $\displaystyle \lim_{x \to 1-0} \frac{f(x)^2}{1-x} = 0$

(c) $|f'(x)| \leqq M \quad (x \in (0,1))$

を満足するならば，$f \in H_0^1((0,1))$ となる。

この命題を証明する前につぎの補題(1)，(2)を証明する。

補題 (1) $f(x)$ は命題における条件 (a)，(b)，(c) を満足するものとする。

$$\begin{aligned} \alpha_n^0(x) &= 0 && \left(x<\frac{1}{2n}\right) \\ &= 1 && \left(x>\frac{1}{n}\right) \\ &= 2nx-1 && \left(\frac{1}{2n} \leqq x \leqq \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

によって $\alpha_n^0(x)$ を定める。（ここで $n \geqq 10$ としておく）

$$\alpha_n(x) = \alpha_n^0(x)\,\alpha_n^0(1-x)$$

とおくと

$$\|f - f\alpha_n\|_1 \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

が成立する。

証明

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)^2(1-\alpha_n(x))^2 dx = \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)^2(1-\alpha_n(x))^2 dx \leqq \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)^2 dx \longrightarrow 0 \ (n \to \infty)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (f'(x)-(f(x)\alpha_n(x))')^2 dx \leqq \int_0^{\frac{1}{n}} f'(x)^2 dx + 2\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} |f(x)f'(x)|\,2n dx + \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} f(x)^2 4n^2 dx$$

ここで $F(x) = \max\limits_{0 \leqq x_0 \leqq x} |f(x_0)|$ とおくと

$$\leqq M^2 \frac{1}{n} + 2MF\left(\frac{1}{n}\right) + F\left(\frac{1}{n}\right)^2 2n \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)^*$$

区間 $[\frac{1}{2}, 1)$ においても同様であるから，補題(1)の成立することがわかる。

補題 (2) 点 $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n^3},\ 0\right)$, $\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{n^3},\ 2n\right)$, $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3},\ 2n\right)$, $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3},\ 0\right)$, $\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3},\ 0\right)$, $\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3},\ -2n\right)$, $\left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^3},\ -2n\right)$, $\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^3},\ 0\right)$, $(1,0)$ を順に結んで得られる折線をグラフとする関数を

$$\beta_n^0(x) \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

とする。（たとえば $n \geqq 10$ のようにとる）

$$\beta_n(x) = \int_0^x \beta_n^0(t)\,dx \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

とおくと

$$\|f\alpha_n - f\beta_n\|_1 \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

が成立する。なおこの場合も $f(x)$ は条件 (a), (b), (c) を満足するものとする。

証明 $|f'(x)| \leqq M$ $(x \in (0,1))$ であったが，条件 (a), (b) より，同時に $|f(x)| \leqq M$ $(x \in (0,1))$ が成立するものとしてさしつかえない。

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)\alpha_n(x) - f(x)\beta_n(x)|^2 dx = \int_{\frac{1}{2n}-\frac{1}{n^3}}^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}} |f(x)|^2 |\alpha_n(x) - \beta_n(x)|^2 dx$$

$$\leqq \int_{\frac{1}{2n}-\frac{1}{n^3}}^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}} M^2\,dx \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |(f(x)\alpha_n(x))' - (f(x)\beta_n(x))'|^2\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(x)(\alpha_n(x) - \beta_n(x))$$

$$+ f(x)(\alpha_n'(x) - \beta_n'(x))|^2\,dx = \int_{\frac{1}{2n}-\frac{1}{n^3}}^{\frac{1}{2n}+\frac{1}{n^3}} |f'(x)(\alpha_n(x) - \beta_n(x))$$

$$+ f(x)(\alpha_n'(x) - \beta_n'(x))|^2\,dx + \int_{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}} |f'(x)(\alpha_n(x) - \beta_n(x))$$

$$+ f(x)(\alpha_n'(x) - \beta_n'(x))|^2\,dx \leqq \int_{\frac{1}{2n}-\frac{1}{n^3}}^{\frac{1}{2n}+\frac{1}{n^3}} M^2 \{|\alpha_n(x) - \beta_n(x)|^2$$

$$+ 2|\alpha_n(x) - \beta_n(x)||\alpha_n'(x) - \beta_n'(x)| + |\alpha_n'(x) - \beta_n'(x)|^2\}\,dx$$

$$+ \int_{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}} M^2 \{|\alpha_n(x) - \beta_n(x)|^2 + 2|\alpha_n(x) - \beta_n(x)||\alpha_n'(x) - \beta_n'(x)|$$

---

* 備考 (2)

$$+ \ |\alpha_n'(x)-\beta_n'(x)|^2\}\,dx \leqq \int_{\frac{1}{2n}-\frac{1}{n^3}}^{\frac{1}{2n}+\frac{1}{n^3}} M^2\,(1+4n+4n^2)\,dx$$

$$+\int_{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}} M^2\,(1+4n+4n^2)\,dx \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

区間 $[\frac{1}{2},\ 1)$ においても同様である。

従って補題(2)が成立する。

命題の証明

$$\|f-f\beta_n\|_1 \leqq \|f-f\alpha_n\|_1 + \|f\alpha_n - f\beta_n\|_1$$

であり，補題(1)，(2)によって右辺の各項は 0 に収束するから

$$\|f-f\beta_n\|_1 \longrightarrow 0 \qquad (n\to\infty)$$

が成立する。 $f\beta_n\in C_0^1((0,1))$ であるから $f\in H_0^1((0,1))$ が成立する。

また複素数値関数については，実部と虚部にわけることによって上の性質がそのまま利用できる。

備考 (1) $x_0\in(\delta,\frac{1}{2})$，かつ $f(x_0)=f_\nu(x_0)$ なる x_0 が存在すると仮定してよいことの証明。

交点が存在しない場合には

$g_\varepsilon(x)$ は C^1 級，$g_\varepsilon(x)\geqq 0$，$\mathrm{car}(g_\varepsilon)\subset(\delta,\frac{1}{2})$

$$2\varepsilon < \int_\delta^{\frac{1}{2}} g_\varepsilon^2(x)\,dx < 3\varepsilon,\ \text{かつ}$$

$$\int_\delta^{\frac{1}{2}} |g_\varepsilon'(x)|^2 dx \longrightarrow 0 \qquad (\varepsilon\to 0)$$

なる条件を満足する関数 $g_\varepsilon(x)$ を加減して考えればよい。

これらの性質をもつ関数はたとえばつぎのようにして求められる。

$h\in C^1((0,1))$，かつ $\mathrm{car}(h)\subset(\delta,\frac{1}{2})$ なる $h(x)\geqq 0$ が存在することは明白である。

$$\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)^2 dx = A,\qquad \int_\delta^{\frac{1}{2}} h'(x)^2 dx = B$$

とおく。

そこで $g_\varepsilon(x)=\sqrt{\dfrac{4\varepsilon}{3A}}\,h(x)$ とおけば

$$\int_\delta^{\frac{1}{2}} g_\varepsilon(x)^2 dx = \frac{4}{3}\varepsilon,\qquad \int_\delta^{\frac{1}{2}} g_\varepsilon'(x)^2 dx = \frac{4B}{3A}\,\varepsilon$$

であるからこの $g_\varepsilon(x)$ は条件を満足する。

(2) $\dfrac{f(x)^2}{x} \longrightarrow 0\ (x\to+0)$ ならば $\dfrac{F(x)^2}{x} \longrightarrow 0\ (x\to+0)$ が成立する。

証明 成立しないと仮定する。すなわち，適当に $\varepsilon(>0)$ をとれば任意の n に対して $x_n\geqq 0$

が存在して

$$x_n < \frac{1}{n}, \text{ かつ } \frac{F(x_n)^2}{x_n} \geqq \varepsilon$$

が成立するとする。

各 n に対して

$$F(x_n) = f(x_n^0) \qquad (0 < x_n^0 \leqq x_n)$$

なる x_n^0 が存在する。この x_n^0 に対して

$$\varepsilon \leqq \frac{F(x_n)^2}{x_n} \leqq \frac{f(x_n^0)^2}{x_n^0}$$

となるから，これは $\dfrac{f(x)^2}{x} \longrightarrow 0 \quad (x \to +0)$ であることに反する。

なお本稿は，昭和45年度日本数学会中国・四国支部会（昭和46年1月31日）において発表した内容に加筆したものである。

文　　献

1) F. Stummel, Rand- und Eigenwertaufgaben in Sobolewschen Räumen, Springer, (1969), 230-256.
2) R. Lattès and J.-L. Lions, The Method of Quasi-Reversibility Applications to Partial Differential Equations, Elsevier, (1969), 15-18.
3) K. Yosida, Functional Analysis, Springer, (1967), 58.

Summary

The subspace $H_0^1((0, 1))$ of the Sobolev space $W^1((0, 1))$ has been studied, from which the followings were obtained as the main results:

(i) Let f be an element of the set $H_0^1((0, 1)) \cap C^1((0, 1))$.
Then f satisfies the following conditions:

(a) $\lim_{x \to +0} \dfrac{f(x)^2}{x} = 0$

(b) $\lim_{x \to 1-0} \dfrac{f(x)^2}{1-x} = 0$

(ii) Let f be an element of the set $C^1((0, 1))$ with the following properties:

(a) $\lim_{x \to +0} \dfrac{f(x)^2}{x} = 0$

(b) $\lim_{x \to 1-0} \dfrac{f(x)^2}{1-x} = 0$

(c) $|f'(x)| \leqq M \ (x \in (0, 1))$.

Then f is an element of the space $H_0^1((0, 1))$.