# 義務論理体系と真理様相論理体系の関連

哲学教室　田　畑　博　敏



## はじめに

本論文は，スマイリー•ハンソン型と呼ばれる（Åqvist [1984, 87]）単項義務命題論理体系の基本的性質，特に真理様相論理体系（義務論理との比較で通常の様相論理を真理様相論理と呼ぶ）との形式的な関連に関するサーヴェイを意図する。フォン・ウリクト以来，義務論理は真理様相論理の類比物と見なされているが，他方でアンダーソンによって，義務論理を真理様相論理に還元する研究が始められた (Anderson [1958])。アンダーソン流のやり方では，例えば定項Sを持つ様相論理を考え，「義務」「許可」「禁止」の各義務演算子 **“O” “P” “F”** を次のように定義する：

$\mathbf{O}\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{def.}\ \Box(\neg \mathrm{A} \supset \mathrm{S})$,

$\mathbf{P}\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{def.}\ \Diamond(\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{S})$,

$\mathbf{F}\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{def.}\ \Box(\mathrm{A} \supset \mathrm{S})$。

ここで，Sはある規範体系における何らかの「制裁」「処罰」を意味すると考えられる。こうして，「Aが義務的である」とは，Aを無視すること（Aの不履行）が必然に制裁ないし罰を伴うことを意味し，「Aが許されている」とは，Aの実行と制裁の不在が両立可能であることを意味し，「Aが禁じられている」とは，Aの実行が必然に制裁を伴うということに外ならない。われわれは，Åqvist [1984, 87] に従い，これと双対の形で，「理想の道徳的状態」または「最適性」を意味する定項Qを導入して，「義務」と「許可」と「禁止」を

$\mathbf{O}\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{def.}\ \Box(\mathrm{Q} \supset \mathrm{A})$,

$\mathbf{P}\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{def.}\ \Diamond(\mathrm{Q} \wedge \mathrm{A})$,

$$\mathrm{FA} \Longleftrightarrow \mathrm{def.}\ \Box(Q \supset \neg A)$$

と定義する（本論文§3，5）。すると，「Aが義務的である」とは，理想的・最適な世界では必然にAが成り立つことを意味し，「Aが許されている」とは，最適な世界とAとの両立が可能であることを意味し，「Aが禁じられている」とは，最適な世界では必然にAが成り立たないということに外ならない。しかし，このような定項をどのように解釈して義務論理の中に位置づけるかということは，義務論理の哲学的含意を考える上で大きな問題であり，その応用とも関係してくるものである。しかし，他方で，形式的な側面，すなわち義務論理が論理の公理体系と見られ，真理様相論理との関連が問題にされるときの論理的・数学的な構造の問題がある。本論文は，義務論理の解釈ないし哲学的含意の問題にではなく，形式的側面にもっぱら関心を集中させる。

そこで，本論文の梗概は次のようになる。まず，準備として，今日標準的とされるスマイリー・ハンソン型単項義務論理の体系の記述を行う。すなわち，言語の体系を提示し，いくつかの基本概念を定義した後，証明論と意味論を述べる（I，§1）。ついで，それらの体系の意味論的健全性と完全性を論じ，証明の概要を述べる（I，§2）。次に，本論文の目的である，義務論理体系の真理様相論理との関連に移るために，真理様相体系を記述し（II，§3），健全性と完全性を論じる（II，§4）。最後に，真理様相体系の中で，義務様相体系を表現し定理を分離するという問題の形で，二つの体系の関連を論じる（II，§5）。

## I．スマイリー・ハンソン型単項義務論理体系

### §1．言語，および証明論・意味論

#### 1.1　言　　語

これから，10個のスマイリー・ハンソン型の単項義務論理体系を記述するための言語を定める。

#### 1.1.1　アルファベット

われわれの言語のアルファベットは以下の語彙からなる：

(i)　**命題文字**（**“Prop”** と略記することがある）：$p$，$q$，$r$，$p_1$，$p_2$，$p_3$，…の可算無限集合。

(ii)　**原始論理結合子**（logical connectives）：**T**(恒真)，**F**(恒偽)，$\neg$(否定)，O(義務)，P(許可)，$\wedge$(連言)，$\vee$(選言)，$\supset$(実質含意)，$\equiv$(実質同値)

(iii)　補助記号：（，　）　［括弧］

#### 1.1.2　文（sentences）または整式（well formed formulas: wffs）

われわれの言語に含まれる文の集合Σは，以下の条件を満たす最小の集合Sとして定義される：

(a)　**Prop**中のすべての命題文字はSの要素である。

(b)　**T**，**F**$\in$S

(c)　A$\in$S　ならば　$\neg$A，**OA**，**PA**$\in$S

(d)　A，B$\in$S　ならば，(A$\wedge$B)，(A$\vee$B)，(A$\supset$B)，(A$\equiv$B)$\in$S。

(a)と(b)における文は，この言語の**原子文**（atomic sentences）である。

#### 1.1.3　論理結合子の度数

論理結合子が採るアーギュメント（引数）の数によって，（複雑さの度合いとしての）度数を定義する。

**T**，**F**　の度数は0である。

$\neg$，**O**，**P**の度数は1である。

その他の結合子の度数はすべて2である。

#### 1.1.4 「禁止」の義務演算子の定義

FA $\Leftrightarrow$ def. ¬**P**A（もう一つの表現方法としては**O**¬Aである。）

#### 1.1.5 括弧を省略するための規約

括弧は以下の基準に従って省略できる：

(i) 度数1の結合子は度数2の結合子より強く結びつく。

(ii) 度数2の結合子のうち，∧と∨は⊃と≡より強く結びつく。

(iii) 文全体を取り囲む一番外側の括弧は省略できる。

### 1.2 証明論

以下の二つの推論規則（rules of inference）は，これから考察する10個のスマイリー・ハンソン型単項義務論理のすべてに共通である。

(R1) $\dfrac{A \quad A \supset B}{B}$（モドゥス・ポネンス）

(R2) $\dfrac{A}{\mathbf{O}A}$（**O**必然化）

次に公理図式（axiom achemata）として以下の（A0）―（A7）を採る。

(A0) すべての真理関数トートロジー（われわれの言語で表現されるかぎりでの）

(A1) **P**A≡¬**O**¬A

(A2) **O**(A⊃B) ⊃ (**O**A⊃**O**B)

(A3) **O**A⊃**P**A

(A4) **O**A⊃**OO**A

(A5) **PO**A⊃**O**A

(A6) **O**(**O**A⊃A)

(A7) **O**(**PO**A⊃A)

ここで研究する10個の論理体系は，

① **OK**

② **OM**

③ **OS4**

④ **OB**

⑤ **OS5**

⑥ $\mathbf{OK}^+$

⑦ $\mathbf{OM}^+$

⑧ $\mathbf{OS4}^+$

⑨ $\mathbf{OB}^+$

⑩ $\mathbf{OS5}^+$

と呼ばれる。それらは，上の8個の公理（正確には8種類の）のどれを採用するかによって，以下のように定義される（ただし，推論規則R1，R2はこれらすべての論理体系に対して採られている。）

**OK**＝A0～A2

**OM**＝A0～A2，A6

**OS4**＝A0〜A2，A4，A6

**OB**＝A0〜A2，A6，A7

**OS5**＝A0〜A2，A4，A5（公理A6とA7は論理**OS5**で導出可能である）

さらに，$L$をこれら5個の論理体系のどれかであるとする。そのとき，

$L^{+}=L+\mathrm{A3}$

と定義する。

これら①〜⑩の10個の義務論理のうち，①**OK**はHanson[1965]の体系**F**と同等であり，⑥**OK⁺**はHansonの体系**D**と，⑨**OB⁺**はHansonの体系**DB**と，それぞれ同等である。それに対して，④**OB**はHanson［1965］においても，Smiley［1963］においても議論されていない。残りの6個の体系：**OM，OM⁺，OS4，OS4⁺，OS5，OS5⁺**はSmiley［1963］で扱われている。

### 1.2.1　証明可能性と無矛盾性

$L$を，いま定義された10個の論理体系の任意のどれかであるとする。そのとき，

$L$証明可能（$L$-provable）な文の集合（または$L$定理の集合）

＝def.（i）$L$の公理図式のすべての事例がSの要素であり，

（ii）Sが規則R1とR2の下で閉じているような，そのような最小集合　$\mathrm{S}\subseteq\Sigma$

と定義する。われわれは，

"$\vdash_{L}\mathrm{A}$"

と書いて，「Aが$L$証明可能である」ということを表す。また，

文の集合Sが$L$矛盾である

$\Longleftrightarrow$ $\vdash_{L}(\mathrm{B}_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{B}_n)\supset\mathbf{F}$となる$\mathrm{B}_1$，…，$\mathrm{B}_n$（$n\geqq 1$）がSの要素として存在する，

および，

文の集合Sが$L$無矛盾である

$\Longleftrightarrow$ $\vdash_{L}(\mathrm{B}_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{B}_n)\supset\mathbf{F}$となる$\mathrm{B}_1$，…，$\mathrm{B}_n$（$n\geqq 1$）がSの要素として存在しない，

と定義する。さらに，「文Aが文の集合Sから$L$導出可能である（$L$-derivable)」ということを，"$\mathrm{S}\vdash_{L}\mathrm{A}$"と書いて，次のように定義する：

$\mathrm{S}\vdash_{L}\mathrm{A}$ $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{S}\cup\{\neg\mathrm{A}\}$が$L$矛盾である。

明らかに，

$\vdash_{L}\mathrm{A}$ $\Longleftrightarrow$ $\phi\vdash_{L}\mathrm{A}$

である。すなわち，$L$証明可能な文は，空集合から$L$導出可能である文に外ならない。

## 1.3　意　味　論

### 1.3.1　モ　デ　ル

モデル（model）によって，われわれは以下の条件を満たす順序三組：$\mathfrak{M}=\langle \mathrm{W},\ \mathrm{R},\ \mathrm{V}\rangle$を意味する。その条件は，

(i) Wは非空の集合（直観的には「可能世界」(possible worlds）または「可能状況」(possible situations）の集合）

(ii) $\mathrm{R}\subseteq\mathrm{W}\times\mathrm{W}$：W上の2項関係(直観的・発見的意味としては，「義務的代替性」(deontic alternativeness）または「義務的共可能性」(dentic co-permissibility）の関係である)

(iii) Vは付値関数であり，各順序対（p，x）に真理値1（真）または0（偽）を配分する（ただし，pは命題文字であり，$x\in\mathrm{W}$)。すなわち，

$V : \mathbf{Prop} \times W \rightarrow \{1, 0\}$

### 1.3.2 真理条件

「行為の義務的評価が定まるのは可能状況に依存する」という考え方を盛り込んだ意味論を構成するために，その基礎である真理条件を帰納的に定義する。$\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ を任意のモデルとし，xをWの任意の要素（すなわち任意の可能状況），$A \in \Sigma$とする。文Aがモデル$\mathfrak{M}$の可能状況xにおいて真であることの条件を，文Aの長さに関して帰納的に定義する。

$\mathfrak{M} \models_x p \Longleftrightarrow V(p, x) = 1.$（$p \in \mathbf{Prop}$である任意のpに対して）

$\mathfrak{M} \models_x \mathbf{T}.$

$\mathfrak{M} \not\models_x \mathbf{F}.$

$\mathfrak{M} \models_x \neg A \Longleftrightarrow \mathfrak{M} \not\models_x A.$

$\mathfrak{M} \models_x \mathbf{O}A \Longleftrightarrow (\forall y \in W)(xRy \Longrightarrow \mathfrak{M} \models_y A).$

$\mathfrak{M} \models_x \mathbf{P}A \Longleftrightarrow (\exists y \in W)(xRy \,\&\, \mathfrak{M} \models_y A).$

$\mathfrak{M} \models_x (A \wedge B) \Longleftrightarrow \mathfrak{M} \models_x A \;\&\; \mathfrak{M} \models_x B.$

$\mathfrak{M} \models_x (A \vee B) \Longleftrightarrow \mathfrak{M} \models_x A \text{ or } \mathfrak{M} \models_x B.$

$\mathfrak{M} \models_x (A \supset B) \Longleftrightarrow \mathfrak{M} \models_x A \Longrightarrow \mathfrak{M} \models_x B.$

$\mathfrak{M} \models_x (A \equiv B) \Longleftrightarrow (\mathfrak{M} \models_x A \Longleftrightarrow \mathfrak{M} \models_x B).$

（ここで，／，(∀)，(∃)，⟹，&，or，⟺ はそれぞれ，メタ言語での「…ない」「すべて」「存在する」「ならば」「かつ」「または」「…のときそのときのみ…」を表す。）

### 1.3.3 モデルにおけるRに関する条件

上記5個の公理図式A3～A7に対応して，われわれはいま，モデルにおける関係Rに課す五つの条件を挙げる（変項“x”，“y”，“z”はWを定義域とする）。

(R3) RはWで連続的である（serial）：$(\forall x)(\exists y)\, xRy$。

(R4) RはWで推移的である（transitive）：$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(xRy \,\&\, yRz \Longrightarrow xRz)$。

(R5) RはWでユークリッド的である（euclidean）：$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(xRy \,\&\, xRz \Longrightarrow yRz)$。

(R6) RはWでほとんど反射的である（almost reflexive）：$(\forall x)(\forall y)(xRy \Longrightarrow yRy)$。

(R7) RはWでほとんど対称的（almost symmetric）：$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(xRy \,\&\, yRz \Longrightarrow zRy)$。

### 1.3.4 モデルの分類

さて，われわれは，すべてのモデルの集合をいくつかの種類に下位分類するために，いま挙げたRに課せられた制限を利用する。

**OK**モデルのクラス＝すべてのモデルのクラス（Rにはいかなる条件も課さない）。

**OM**モデルのクラス＝ほとんど反射的なRを持つすべてのモデルのクラス。

**OS4**モデルのクラス＝推移的で，ほとんど反射的なRを持つすべてのモデルのクラス。

**OB**モデルのクラス＝ほとんど対称的でほとんど反射的なRを持つすべてのクラス。

**OS5**モデルのクラス＝ユークリッド的かつ推移的なRを持つすべてのクラス。

$\mathbf{OK}^+$モデルのクラス＝連続的なRを持つすべてのモデルのクラス。

$\mathbf{OM}^+$モデルのクラス＝連続的でほとんど反射的なRを持つすべてのモデルのクラス。

$\mathbf{OS4}^+$モデルのクラス＝連続的で推移的でほとんど反射的なRを持つすべてのモデルのクラス。

**$\mathbf{OB^{+}}$**モデルのクラス＝連続的でほとんど対称的でほとんど反射的なＲを持つすべてのモデルのクラス。

**$\mathbf{OS5^{+}}$**モデルのクラス＝連続的でユークリッド的かつ推移的なＲを持つすべてのモデルのクラス。

これらの定義において，関係Ｒに課せられる条件は，常に可能世界の集合Ｗに相対的である，と理解する。例えば，「連続的である」とは「Ｗにおいて連続的である」という意味である。

### 1.3.5　妥当性と充足可能性

$L$を10個の体系：

**OK, OM, OS4, OB, OS5, $\mathbf{OK^{+}}$, $\mathbf{OM^{+}}$, $\mathbf{OS4^{+}}$, $\mathbf{OB^{+}}$, $\mathbf{OS5^{+}}$,**

のうちの一つとする。われわれは，

文Ａが$L$**妥当である**（$L$-valid）

$\Longleftrightarrow$　$\models_L$A

$\Longleftrightarrow$　すべての$L$モデル$\mathfrak{M}$での，すべてのｘ∈Ｗに対して$\mathfrak{M}\models$xA

と定義する。また，

文の集合Ｓが$L$**充足可能である**（$L$-satisfiable）

$\Longleftrightarrow$　$(\exists\mathfrak{M})(\exists x)$［$\mathfrak{M}$は$L$モデルである＆ｘ∈Ｗ＆$(\forall A)(A\in S \Rightarrow \mathfrak{M}\models xA)$］

と定義する。明らかに，

$\models_L$A　$\Longleftrightarrow$　単元集合｛$\neg$Ａ｝が$L$充足可能でない。

ここで，われわれは，（証明論的）導出可能性の概念と平行的な意味論的概念を導入できる：

文Ａが意味論的に文の集合Ｓによって$L$**内含される**（$L$-entailed）

$\Longleftrightarrow$　S$\models_L$A

$\Longleftrightarrow$　Ｓ∪｛$\neg$Ａ｝が$L$充足可能でない。

このとき，

$\models_L$A　$\Longleftrightarrow$　$\phi\models_L$A（“$\phi$”は空集合を表す）。

このようにして，10個の義務論理体系の証明論と意味論が与えられるとき，これらが基本的な性質としての（意味論的）健全性と完全性を持つことを示す必要がある。これは次の節で行う。

## §2．スマイリー・ハンソン型体系の意味論的健全性と完全性

### 2.1　健全性定理

$L$を体系**OK, OM, OS4, OB, OS5, $\mathbf{OK^{+}}$, $\mathbf{OM^{+}}$, $\mathbf{OS4^{+}}$, $\mathbf{OB^{+}}$, $\mathbf{OS5^{+}}$**のうちの一つとする。そのとき，すべてのＡ∈Σにつき，

$\vdash_L$A$\Rightarrow\models_L$A,

換言すれば，すべての$L$証明可能な文は$L$妥当である。

《証明》（概略）

各体系$L$に対して，われわれは，

(i)　$L$のすべての公理図式のすべての実例が$L$妥当であること，

(ii)　規則R1とR2が$L$妥当性を前提から結論へと伝えること，

を示さねばならない。そのとき，われわれは証明の長さに関する数学的帰納法によって，

$\vdash_L$A$\Rightarrow\models_L$A

であることを確かめることができる。これを行うことは面倒であるがルーティンである。よって，

例示によって証明に代える。

［例］A5：**POA**⊃**OA**のすべての実例が実際に**OS5**妥当である，ということをチェックしたいとしよう。そのとき，そうでないと仮定する。すなわち，ある**OS5**モデル$\mathfrak{M}=\langle W, R, V\rangle$で，ある世界$x\in W$に対して，

(1)　$\mathfrak{M}\models x\mathbf{POA}\supset\mathbf{OA}$が成り立たない

ような文Aが存在する，と仮定する。⊃，¬，**O**，**P**の真理条件によって，(1)より

(2)　$\mathfrak{M}\models x\mathbf{POA}$　&　$\mathfrak{M}\models x\mathbf{P}\neg A$,

が導かれる。**P**の真理条件を適用することによって，われわれは(2)から，

(3)　$(\exists y\in W)$［$xRy$　&　$\mathfrak{M}\models y\mathbf{O}A$］

および，

(4)　$(\exists z\in W)$［$xRz$　&　$\mathfrak{M}\models z\neg A$］

が導かれる。ここで，$\mathfrak{M}$は**OS5**モデルであり，RはWでユークリッド的であるから，

(5)　$yRz$（∵(3)と(4)より$xRy\&xRz$）

を得る。(3)での$\mathfrak{M}\models y\mathbf{O}A$に対して**O**の真理条件を適用して，(5)より

(6)　$\mathfrak{M}\models zA$

を得る。これは(4)と矛盾する。というのは，(4)から，¬の真理条件により，

(7)　$\mathfrak{M}\not\models zA$

であり，これは(6)と矛盾するからである。

(Q.E.D.)

### 2.1.1　系

$L$をこれまで通り10個の論理体系の一つとし，$S\subseteq\Sigma$を任意の文の集合とせよ。そのとき，

Sが$L$充足可能である$\Longrightarrow$Sは$L$無矛盾である。

《証明》

背理法による。そうでない，すなわち，Sが$L$充足可能であるにも関わらず，Sが$L$無矛盾でないとせよ。そのとき，$L$矛盾性（$L$-inconsistency）の定義によって，ある文$B_1$，$B_2$，…，$B_n$がSの中に存在して，

$$\vdash_L(B_1\wedge\cdots\wedge B_n)\supset\mathbf{F}.$$

これから健全性定理により，

$$\models_L(B_1\wedge\cdots\wedge B_n)\supset\mathbf{F}.$$

この$L$妥当性は，Sが$L$充足可能であることによって保証されるあるモデル$\mathfrak{M}$，その中のある世界$x\in W$に対して，

$$\mathfrak{M}\models xB_1\wedge\cdots\wedge B_n\supset\mathbf{F}\quad\text{かつ}\quad\mathfrak{M}\models xB_1\wedge\cdots\wedge B_n$$

を導く。よって，⊃の真理条件より，

$$\mathfrak{M}\models x\mathbf{F},$$

である。しかし，これは**F**の真理条件と矛盾する。

(Q.E.D.)

## 2.2　完全性定理

**完全性定理：ヴァージョンⅠ（強い完全性）**

$L$を10個の義務体系のどれかとし，$S\subseteq\Sigma$とする。そのとき，

Ｓが$L$無矛盾ならば，Ｓは$L$充足可能である。

**完全性定理：ヴァージョンII（弱い完全性）**

$L$を10個の体系のどれかとし，$A \in \Sigma$とする。そのとき，

$\models_L A \Rightarrow \vdash_L A$。

（言い換えると，$L$妥当な文はすべて$L$証明可能である。）

《証明の準備》

まず最初に，弱いヴァージョンがいかにして強いヴァージョンの系として得られるか，を見る。（背理法による。）強いヴァージョンは前提した上で，弱いヴァージョンに反して，ある文Aに対して，$\models_L A$，しかし，$\not\vdash_L A$と仮定する。そのとき，$\{\neg A\}$は$L$無矛盾である。（さもなければ，$\{\neg A\} \vdash_L \mathbf{F}$，よって$\vdash_L \neg A \supset \mathbf{F}$，ゆえに$\vdash_L A$。しかし，われわれは$\not\vdash_L A$と仮定していた。）従って，強いヴァージョンにより，$\{\neg A\}$ は$L$充足可能である。つまり，ある$L$モデル$\mathfrak{M}$と，そこでのある世界$x \in W$が存在して，$\mathfrak{M} \models^x \neg A$。よって，$\mathfrak{M} \not\models^x A$。これは，$\models_L A$という仮定に矛盾する。

こうして，完全性定理のヴァージョンＩを確立することにわれわれの努力を集中することが正当化される。そこで，われわれは，以下の定義と補題に注目することから始める。

**2.2.1　文の$L$飽和（$L$極大無矛盾）集合の定義**

$L$を10個の論理体系のどれかであるとする。また，ｘを，$x \subseteq S$である文の集合とする。そのとき，

ｘが**$L$飽和している**（$L$-saturated）

$\Leftrightarrow$ (i)　ｘは$L$無矛盾であり，

(ii)　各文Aにつき，$A \in x$または$\neg A \in x$である。

と定義する。

**2.2.2　$L$飽和集合に関する補題**

ｘを，文の飽和集合とする。そのとき，以下の補題が成り立つ：

(i)　すべての$L$証明可能な文がｘに含まれる。

(ii)　ｘはモドゥス・ポネンスに関して閉じている。すなわち，

$(\forall A, B \in \Sigma)\ (A \in x \ \&\ A \supset B \in x \Rightarrow B \in x)$。

(iii)　$\mathbf{T} \in x$。

(iv)　$\mathbf{F} \notin x$。

(v)　$\neg A \in x \Leftrightarrow A \notin x$。

(vi)　$A \wedge B \in x \Leftrightarrow A \in x \ \&\ B \in x$。

(vii)　$A \vee B \in x \Leftrightarrow A \in x$ or $B \in x$。

(viii)　$A \supset B \in x \Leftrightarrow A \in x \Rightarrow B \in x$

(ix)　$A \equiv B \in x \Leftrightarrow (A \in x \Leftrightarrow B \in x)$

《証明》略[1]。

**2.2.3　リンデンバウムの補題**

（$L$が10個の体系のどれかであるとき）任意の$L$無矛盾な文の集合ｘは，$x \subseteq x^+$であるような$L$飽和した集合$x^+$に拡大できる。

《証明》　略[2]。

**2.2.4　メイキンソンの補題**

$L$を10個の論理体系のどれかであるとし，ｘを，任意の$L$飽和した文の集合とする。Aを，$\neg\mathbf{O}A$

$\in$ x であるような，任意の文とする。そして，$x_A = \{B \in \Sigma : \mathbf{O}B \in x\} \cup \{\neg A\}$ とする。そのとき，$x_A$は$L$無矛盾である。

《証明》(3)

背理法による。$x_A$が$L$無矛盾でないと仮定する。そのとき，あるn（n≧0）が存在し，かつそのnに対して，各i（1≦i≦n）につき，$\mathbf{O}Bi \in x$であり，

$$\vdash_L (B_1 \wedge \cdots \wedge B_n \wedge \neg A) \supset \mathbf{F}$$

であるような，文$B_1$，…，$B_n$（n≧0）が存在する。公理図式A0（トートロジー）がすべて$L$に含まれるから，トートロジー変形により，

$$\vdash_L (B_1 \wedge \cdots \wedge B_n) \supset A \cdots\cdots (*)。$$

ここから矛盾が導かれることを，nについての数学的帰納法で示す。

(i) 最初に，n＝0の場合を考える。これは，(∗) で，$\vdash_L A$である場合である。そのとき，すべての$L$に共通な規則R2（O必然化）によって，$\vdash_L \mathbf{O}A$である。これから，飽和集合の補題(i)により，$\mathbf{O}A \in x$。ところが，仮定により$\neg\mathbf{O}A \in x$。よって，xは$L$矛盾となる。これは，xが飽和集合であり，それゆえ$L$無矛盾であるという仮定と矛盾する。

(ii) 次に，n≧1の場合を考える。$\vdash_L (B_1 \wedge \cdots \wedge B_n) \supset A$であるから，公理図式A0の下で，トートロジーとR1により，$\vdash_L B_1 \supset (B_2 \supset \cdots (B_n \supset A) \cdots)$。それゆえ，R2により，$\vdash_L \mathbf{O}[B_1 \supset (B_2 \supset \cdots (B_n \supset A) \cdots)]$。よって，(われわれの体系$L$のすべてに共通な公理図式A2と規則R2，および適当なトートロジー（A0）をn回用いて，

$$\vdash_L \mathbf{O}B_1 \supset (\mathbf{O}B_2 \supset \cdots (\mathbf{O}B_n \supset \mathbf{O}A) \cdots)$$

を得る。これより，$L$飽和集合に関する補題(i)によって，

$$\mathbf{O}B_1 \supset (\mathbf{O}B_2 \supset \cdots (\mathbf{O}B_n \supset \mathbf{O}A) \cdots) \in x。$$

ところが，各$\mathbf{O}Bi \in x$，それゆえ，再び$L$飽和集合に関する補題(ii)を用いて，

$$\mathbf{O}A \in x。$$

こうして，$\mathbf{O}A$と$\neg\mathbf{O}A$がともにxに含まれるから，xは$L$矛盾である。これは仮定と矛盾する。

(Q.E.D.)

### 2.2.5　キャノニカル$L$モデルの定義

$L$をわれわれの10個の論理体系のどれかであるとし，Sを任意の$L$無矛盾な文の集合とする。すると，リンデンバウムの補題により，Sの$L$飽和拡大$S^+$（$S \subseteq S^+$）が存在する。そのとき，Sにより生成されたキャノニカル$L$モデル（canonical $L$-model）を，構造：

$$\mathfrak{M}_L = \langle W_L, R_L, V_L \rangle$$

と定義する。ここで，

(i) $W_L$＝以下の条件を満たす，$L$飽和集合から成る最小の集合族U

(a) $S^+ \in U$

(b) もし$x \in U$かつAが$\neg\mathbf{O}A \in x$であるような文ならば，そのとき

$(x_A)^+ \in U$.

（ここで$x_A$はメイキンソンの補題で定義された文の集合，すなわち

$x_A = \{B \in \Sigma : \mathbf{O}B \in x\} \cup \{\neg A\}$)

(ii) $R_L$＝$W_L$上の二項関係であり，$W_L$のすべてのx，yに対して，

$$xR_L y \Longleftrightarrow (\forall A)(\mathbf{O}A \in x \Longrightarrow A \in y)$$

であるもの。

(iii) $V_L$＝以下のように定義される付値関数：
各命題文字p，各世界$x \in W_L$に対して，
$V_L(p, x)=1 \iff p \in x$.

2.2.6　**確認補題**（verification lemma）

いま定義されたキャノニカル$L$モデル$\mathfrak{M}_L=\langle W_L, R_L, V_L\rangle$は$L$モデルである。

2.2.7　**一致の補題**（coincidence lemma）

各文A，および上で定義された$W_L$中の各xに対して，
$\mathfrak{M}_L \models_x A \iff A \in x$.

われわれはこれら二つの補題の証明は後回しにして，それらが完全性定理のヴァージョンIをどのように導くかを先に見る。

2.2.8　**完全性定理の証明**（ヴァージョンI）

$L$を，これまで通り，10個の体系のどれかであるとして，Sを任意の$L$無矛盾な文の集合とする。示すべきことは，Sが$L$充足可能である（$L$-satisfiable）ということである。さて，確認補題により，（上で定義された）$\mathfrak{M}_L$は$L$モデルである。一致の補題により，特に各文Aに対して，
$\mathfrak{M}_L \models_{s^+} A \iff A \in S^+$（定義により$S^+ \in W_L$）。

$S \subseteq S^+$であるから，$A \in S$であるすべての文Aに対して，
$\mathfrak{M}_L \models_{s^+} A$

である。言い換えると，Sを任意の$L$無矛盾な文の集合と仮定することによって，われわれは$L$モデル，つまり$\mathfrak{M}_L$を作ったが，それは，$W_L$中のある世界x（つまり$S^+$）に対して，
$(\forall A \in S)(\mathfrak{M}_L \models_x A)$

となる。すなわち，われわれは，文の集合Sが$L$充足可能であることを示した。

(Q.E.D.)

さて，確認補題と一致の補題を確立することができるためには，あと一つの補題が必要である。

2.2.9　**キャノニカル$L$モデルに対する飽和補題**（saturation lemma for canonical $L$-models）

$L$：10個の体系のどれか，
S：$L$無矛盾な，文の任意集合
$\mathfrak{M}_L=\langle W_L, R_L, V_L\rangle$とする。

そのとき，$W_L$は，すべての文Aと$W_L$中のすべての世界xに対して，以下の性質を持つ：
(i)　$\mathbf{O}A \in x \iff (\forall y \in W_L)(xR_Ly \Rightarrow A \in y)$
(ii)　$\mathbf{P}A \in x \iff (\exists y \in W_L)(xR_Ly \,\&\, A \in y)$.

《証明》

(i)に対して：

(⇒)：この部分は容易である。任意のx，$y \in W_L$に対して，
1．$\mathbf{O}A \in x$ ……………………………………………仮定
2．$xR_Ly$ ……………………………………………………仮定

そのとき，
3．$(\forall B)(\mathbf{O}B \in x \Rightarrow B \in y)$ ………………………2から$R_L$の定義により
4．$A \in y$ ……………………………………………………1，3，普遍例化，モドゥス・ポネンス
5．$\mathbf{O}A \in x \Rightarrow (xR_Ly \Rightarrow A \in y)$ ………………1～4，条件化規則，1，2を解除
6．$(\forall y \in W_L)(\mathbf{O}A \in x \Rightarrow (xR_Ly \Rightarrow A \in y))$ …5，普遍汎化

7．$\mathbf{O}A \in x \Rightarrow (\forall y \in W_L)(xR_L y \Rightarrow A \in y)$ ……6，述語論理

($\Leftarrow$)：逆に，任意の $x \in W_L$ につき，

1．$\mathbf{O}A \notin x$ ……………………………………………仮定

そのとき，

2．$\neg \mathbf{O}A \in x$ ……………………………………………1，飽和集合に関する補題(v)

3．$\neg A \in x_A$ ……………………………………………メイキンソンの補題における $x_A$ の定義

4．$\neg A \in (x_A)^+$ ……………………………………………$x_A \subseteq (x_A)^+$（リンデンバウム拡大）

5．$A \notin (x_A)^+$ ……………………………………………4，飽和集合に関する補題

6．$(x_A)^+ \in W_L$ ……………………………………………2，$W_L$ の定義

7．$(\forall B)[\mathbf{O}B \in x \Rightarrow B \in (x_A)^+]$ ……………………メイキンソンの補題における $x_A$ の定義

8．$xR_L(x_A)^+$ ……………………………………………7，$R_L$ の定義

9．$(\exists y \in W_L)[xR_L y \,\&\, A \notin y]$ ……………………5，6，8，$(x_A)^+$ を存在汎化

10．$\mathbf{O}A \notin x \Rightarrow (\exists y \in W_L)[xR_L y \,\&\, A \notin y]$ ……1～9，条件化規則，1を解除

11．$(\forall y \in W_L)[xR_L y \Rightarrow A \in y] \Rightarrow \mathbf{O}A \in x$ ……10，対偶

(ii)に対して：公理図式（A1），すなわち $\mathbf{P}A \equiv \neg\mathbf{O}\neg A$ がすべての$L$飽和集合に含まれることを用いて，(i)の場合と同様に証明できる。

これで，キャノニカル$L$モデルに対する飽和補題の証明が完了した。

(Q.E.D.)

さて，これより，未証明の補題の証明に移る。証明が容易な方から始める。

### 2.2.10　一致の補題の証明

証明すべきことは，

各文A，各世界 $x \in W_L$ に対して，

$\mathfrak{M}_L \models_x A \Leftrightarrow A \in x$，

ということである。

《証明》

証明は文Aの長さに関する数学的帰納法による。

基底部分：

Aは，(a) **T** か，(b) **F** か，(c)ある命題文字 p であるか，のどれかである。

(a)　“**T**” に対する真理条件により，$\mathfrak{M}_L \models_x \mathbf{T}$。また$L$飽和集合に関する補題(iii)より，$\mathbf{T} \in x$。よって，$\mathfrak{M}_L \models_x \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T} \in x$ がトリヴィアルに成り立つ。

(b)　同様に，$\mathfrak{M}_L \not\models_x \mathbf{F}$ かつ $\mathbf{F} \notin x$ であるから，$\mathfrak{M}_L \models_x \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F} \in x$。

(c)　$\mathfrak{M}_L \models_x p \Leftrightarrow V_L(p, x) = 1 \Leftrightarrow p \in x$．

（命題文字に対する真理条件1.3.2とキャノニカル$L$モデルの $V_L$ の条件2.2.5(iii)）

帰納の部分：

$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\supset$ および $\equiv$ に対する帰納のケースはトリヴィアルである（$L$飽和集合に関する補題を使えばよい）。そこで，$A = \mathbf{O}B$ の場合を考える。

$\mathfrak{M}_L \models_x \mathbf{O}B$

$\Leftrightarrow (\forall y \in W_L)(xR_L y \Rightarrow \mathfrak{M}_L \models_y B)$ ………………“**O**B” の真理条件1.3.2

$\Leftrightarrow (\forall y \in W_L)(xR_L y \Rightarrow B \in y)$ ………………帰納法の仮定

$\Leftrightarrow \mathbf{O}B \in x$ ……………………………………………キャノニカル$L$モデルに対する飽和補題

こうして，証明できる。A＝**PB**の場合も類比的に証明される。こうして，一致の補題は証明された。

(Q.E.D.)

### 2.2.11　確認補題の証明（一部）

示すべきことは，

キャノニカル$L$モデルの定義（2.2.5）で定義された構造：

$\mathfrak{M}_L = \langle W_L, R_L, V_L \rangle$

は$L$モデルである，

ということである。

$L \in$ {**OK**, **OM**, **OS4**, **OB**, **OS5**,

**OK**$^+$, **OM**$^+$, **OS4**$^+$, **OB**$^+$, **OS5**$^+$}

であるから，論理$L$を10個の体系のどれと同一視するかにより，さまざまなケースがある。ここでは，$L$＝**OS5**と，$L$＝**OK**$^+$の場合だけを扱う。

【$L$＝**OS5**の場合】

示すべきことは，構造$\mathfrak{M}_{OS5} = \langle W_{OS5}, R_{OS5}, V_{OS5} \rangle$が**OS5**モデルであることであるが，1.3.4節でのモデルの下位分類の定義によって，$R_{OS5}$がユークリッド的で，かつ推移的であることを示せば十分である。このことは確かめ得る[4]。

【$L$＝**OK**$^+$の場合】

示すべきことは，**OS5**の場合と同様の理由により，$R_{OK^+}$が$W_{OK^+}$で連続的であることである。いま，任意の$x \in W_{OK^+}$につき，

1．**PT**$\in x$ ……………………体系**OK**で**PT**≡(**O**A⊃**P**A)が証明でき[5]，しかも，公理図式A3が**OK**の公理である。

2．$\exists y$ ($xR_{OK^+}y$ & **T** $\in y$) ……………………キャノニカル$L$モデルに対する飽和補題の(ii)

3．$\forall x \exists y$ ($xR_{OK^+}y$) ……………………$x$が$W_{OK^+}$の任意の要素であることと量化理論

他の体系の場合にも，同様な証明が実行できる[6]。よって，確認補題は証明される。

こうして，10個のスマイリー・ハンソン型単項義務論理体系の完全性定理が成り立つことが確かめられる。

## II．真理様相論理による単項義務論理の表現

### §3．真理様相論理

本節で，われわれは，命題定項Qを持つ真理様相論理体系（alethic modal logic）である以下の10個の体系を定義する：

**KQ**, **MQ**, **S4Q**, **BQ**, **S5Q**, **KQ**$^+$, **MQ**$^+$, **S4Q**$^+$, **BQ**$^+$, **S5Q**$^+$。

これらの体系はすべて，これから記述する共通の形式言語に基づいている。それのアルファベットは，次のことを除いて，スマイリー・ハンソン体系の言語のアルファベットと同一である。

(i)　度数1の原始論理結合子のなかで，□（必然性）と◇（可能性）とが**O**と**P**にそれぞれ取って替わる。

(ii)　Q（「最適性」(optimality) または「許容性」(permissibility)）が度数0の原始論理結合子

に加えられる。

われわれの新しい言語のすべての文（sentences）の集合Σは，そのとき，以前の言語の場合と同様に定義される。ただし，(b)節は

(b)　**T**，**F**，Q∈S

と読まれ，(c)節は，

(c)　A∈Sならば，¬A，□A，◇A∈S，

となる。

われわれはここで，新しい真理様相言語の集合**Prop**が以前の義務論理体系の**Prop**と<u>同一である</u>こと，を明確に指摘せねばならない。さらに，次の定義をおく：

<u>**定義**</u>

**OA**　⟺　def.　□(Q⊃A)……「義務」の概念に対応

**PA**　⟺　def.　◇(Q∧A)……「許可」の概念に対応

**FA**　⟺　def.　□(Q⊃¬A)……「禁止」の概念に対応

われわれの10個の真理様相体系の**証明論**（proof　theory）に関しては，以下の二つの**推論規則**（rules of inference）が，それらすべての体系に共通している。

(R1) $\dfrac{A,\ A\supset B}{B}$ (モドゥス・ポネンス)

(R2′) $\dfrac{A}{\Box A}$ (□必然化)

公理図式（axiom schemata）の以下のリストB0〜B7を与える。

(B0)（新しい言語での）すべての真理関数的トートロジー

(B1)　◇A≡¬□¬A

(B2)　□(A⊃B) ⊃ (□A⊃□B)

(B3)　◇Q

(B4)　□A⊃□□A

(B5)　◇□A⊃□A

(B6)　□A⊃A

(B7)　◇□A⊃A。

命題定項Qを持つ10個の真理様相論理のすべてが推論規則R1とR2′を採用するとして，われわれは，上のどの公理図式を採るかによって，それらの体系を以下のように定義する：

**KQ**＝B0〜B2

**MQ**＝B0〜B2，B6

**S4Q**＝B0〜B2，B4，B6

**BQ**＝B0〜B2，B6，B7

**S5Q**＝B0〜B2，B5，B6（B4とB7は**S5Q**で導かれる。）

さらに，$K$をこれら五つの体系の任意の体系とする。そのとき，

$K^{+}=K+\mathrm{B3}$

と定義する。

真理様相論理の言語において，Qが出現することを別にすれば，最初の5個の体系は様相論理に関する文献においてよく知られている（例えば，Kripke [1963]，Makinson [1966]，Hughes and

Cresswell [1968, 96], Chellas [1980]を参照。)残りの論理，すなわち“+”の付いた体系は，Smiley [1963]と同様，Qに対する無矛盾性公理，すなわちB3を追加することによって得られる。

*K*を，いま定義した10個の体系のどれかであるとする。そのとき，スマイリー・ハンソン型義務論理に対して定義された対応する*L*概念と完全に類比的に，

*K*証明可能性（*K*-provability）

*K*矛盾性（*K*-inconsistency）

*K*無矛盾性（*K*-consistency）

*K*導出可能性（*K*-derivability）

の概念を導入する。また，われわれは，

“$\vdash_K A$” および “$S \vdash_K A$”

と書いて，各々，「文Aは*K*証明可能である」「文Aは文の集合Sから導出可能である」を表示する。

われわれの10個の真理様相体系に対する**意味論**(semantics)に向かうとき，われわれは，明らかに，モデルの新しい概念を必要とする。**真理様相モデル**（alethic model）により，われわれは次の順序四組を意味する：

$\mathscr{M} = \langle W, R^*, opt, V \rangle$

ここで，

(i)　Wは非空の集合，

(ii)　$R^* \subseteq W \times W$：すなわち$R^*$はW上の二項関係(「真理様相代替」または「真理様相接近可能性」)

(iii)　$opt \subseteq W$：(発見的意味づけとして，optは，W上の何らかの選好順序に応じた「最適の」または「最善の」「十分に善い」Wの要素の集合)

(iv)　V：**Prop**$\times W \rightarrow \{0, 1\}$

さて，$\mathscr{M}$を任意の真理様相モデル，xをWの要素，AをΣの要素である任意の文とする。モデル$\mathscr{M}$における，世界xでの真理（truth at x）の定義において，義務体系の場合に対応して，以下の変更が必要である：

$\mathscr{M} \models_x \Box A \iff (\forall y \in W)\ (xR^*y \Rightarrow \mathscr{M} \models_y A)$

$\mathscr{M} \models_x \Diamond A \iff (\exists y \in W)\ (xR^*y\ \&\ \mathscr{M} \models_y A)$。

さらにこれに，われわれは定項Qを支配する節を追加する：

$\mathscr{M} \models_x Q \iff x \in opt$。

<u>R*上の条件と真理様相モデルにおける最適世界</u>（opt）

先の5個の公理図式B3～B7に対応して，われわれは真理様相モデルにおける$R^*$とoptに関する次の五つの条件を設定する：

r3．$R^*$はWでopt連続である：$(\forall x \in W)(\exists y \in W)(xR^*y\ \&\ y \in opt)$

r4．$R^*$はWで推移的である：$(\forall x \in W)(\forall y \in W)(\forall z \in W)(xR^*y \& yR^*z \Rightarrow xR^*z)$

r5．$R^*$はWでユークリッド的である：$(\forall x \in W)(\forall y \in W)(\forall z \in W)(xR^*y \& xR^*z \Rightarrow yR^*z)$

r6．$R^*$はWで反射的である：$(\forall x \in W)(xR^*x)$

r7．$R^*$はWで対称的である：$(\forall x \in W)(\forall y \in W)(xR^*y \Rightarrow yR^*x)$

<u>**真理様相モデルの分類**</u>

われわれは真理様相モデルの特徴を，$R^*$とoptに課される条件の違いによって与える：

**KQ**モデル：いかなる条件も$R^*$にもoptにも課さない。

**MQ**モデル：$R^*$が（Wで）反射的である。
**S4Q**モデル：$R^*$が推移的かつ反射的である。
**BQ**モデル：$R^*$が対称的かつ反射的である。
**S5Q**モデル：$R^*$がユークリッド的かつ反射的である。
**KQ**$^+$モデル：$R^*$が（Wで）opt連続的である。
**MQ**$^+$モデル：$R^*$がopt連続的かつ反射的である。
**S4Q**$^+$モデル：$R^*$がopt連続的かつ推移的かつ反射的である。
**BQ**$^+$モデル：$R^*$がopt連続的かつ対称的かつ反射的である。
**S5Q**$^+$モデル：$R^*$がopt連続的かつユークリッド的かつ（Wで）反射的である。

**妥当性と充足可能性**

$K\in$ {**KQ**, **MQ**, **S4Q**, **BQ**, **S5Q**, **KQ**$^+$, **MQ**$^+$, **S4Q**$^+$, **BQ**$^+$, **S5Q**$^+$}
とする。このとき，$K$**妥当性**（$K$-validity），$K$**充足可能性**（$K$-satisfiability），**意味論的**$K$**内含**（semantic $K$-entailment）の概念が，対応する$L$概念と完全に類比的に定義される。そして，

$\models_K A$　　および　　$S\models_K A$

の表記法を，いまの$K$妥当性，$K$内含の意味を持たせて用いる。

## §4．真理様相体系の意味論的健全性と完全性

### 4．1　健全性定理（soundness theorem）

$K$を10個の体系**KQ**, **MQ**, **S4Q**, **BQ**, **S5Q**, **KQ**$^+$, **MQ**$^+$, **S4Q**$^+$, **BQ**$^+$, **S5Q**$^+$，のどれかであるとする。そのとき，すべての$K$**証明可能**な文は$K$**妥当**である。

《証明》単項義務論理の$L$体系の場合と同様に行われる。

例

われわれは例として，公理B3（$=\Diamond Q$）が実際に**KQ**$^+$妥当であることを示す。背理法でこれを行うために，まず，そうではない，と仮定する。すなわち，ある**KQ**$^+$モデル$\mathfrak{M}=\langle W, R^*, opt, V\rangle$に対して，ある世界$x\in W$で，

(1)　$\mathfrak{M}\not\models_x \Diamond Q$

と仮定する。すると，◇とQに対する真理条件（§3参照）によって，

(2)　$(\exists y\in W)(xR^*y \,\&\, y\in opt)$ でない。

しかし，**KQ**$^+$モデルでは$R^*$はopt連続的であるから，

(3)　$(\exists y\in W)(xR^*y \,\&\, y\in opt)$。

よって，矛盾である。従って，公理図式B3は**KQ**$^+$妥当である。

### 4．2　完全性定理：ヴァージョンⅠ（強い完全性）

$K$を10個の真理様相体系のどれかとし，$S\subseteq\Sigma$とする。そのとき，Sが$K$無矛盾ならば，Sは$K$充足可能である：

$$\mathrm{Con}_K S \Rightarrow (\exists\mathfrak{M})\,[\mathfrak{M}\text{は}K\text{モデル}\,\&\,(\exists x \text{ in } \mathfrak{M})(\forall A\in S)(\mathfrak{M}\models_x S)]。$$

**ヴァージョンⅡ（弱い完全性）**

$K$を上と同様のものとする。そのとき，$K$妥当な文はすべて$K$証明可能である：

$$(\forall A)\,[\models_K A \Rightarrow \vdash_K A]。$$

《証明》（概略）

弱いヴァージョンは強いヴァージョンからその系として導けるので，われわれは強いヴァージョンに向かう。$L$飽和集合に関する補題の定義は，重大な変更なしで$K$体系に対しても述べ直すことができる。リンデンバウムの補題についても同様である。メイキンソンの補題においては，**O**への言及を□への言及で置き換え，R2とA2の代わりにR2′とB2を用いる。すると，新しい形でのメイキンソンの補題は$K$体系に対しても成り立つ。

### 4.2.1 キャノニカル*K*モデルの定義

$K$を10個の真理様相体系のどれかであるとし，Sを文の$K$無矛盾な集合とする。われわれは，**Sによって生成されたキャノニカル*K*モデル**（canonical $K$-model generated by S）を，以下の条件を満たす構造：

$$\mathfrak{M}_K = \langle W_K,\ R^*_K,\ opt_K,\ V_K \rangle$$

として定義する。

〈条件〉(i) $W_K$＝次の(a)(b)を満たす$K$飽和集合から成る最小の集合族U

(a) $S^+ \in U$

(b) $x \in U$かつAが$\neg\Box A \in x$であるような文ならば，$(x_A)^+ \in U$。（ここで，$x_A$は修正されたメイキンソンの補題において定義されるもの：$x_A = \{B \in \Sigma : \Box B \in x\} \cup \{\neg A\}$）

(ii) $R^*_K$はW上の二項関係（$R^*_K \subseteq W \times W$）で，

$(\forall x \in W_K)(\forall y \in W_K)\ [xR^*_K y \Leftrightarrow (\forall A)(\Box A \in x \Rightarrow A \in y)]$

(iii) $opt_K = \{x \in W_K : Q \in x\}$

(iv) $V_K$＝以下のように定義される，命題文字と世界との対（ペア）に対する真理値配分：

すべての$p \in \mathbf{Prop}$，すべての$x \in W_K$について，

$V_K(p, x) = 1 \Leftrightarrow p \in x$

### 4.2.2 確認補題

上で定義された$\mathfrak{M}_K = \langle W_K, R^*_K, opt_K, V_K \rangle$は$K$モデルである。

### 4.2.3 一致の補題

各文A，各世界$x \in W_K$に対して，

$\mathfrak{M}_K \models_x A \Leftrightarrow A \in x$。

これらの補題を証明する前に，われわれは，$L$体系との関連で使われた論証と完全に類比的な論証によって，それらの補題が体系$K$の強い完全性を生み出す，ということを認めておく。

さらに，キャノニカル$K$モデルに対する飽和補題の重要な節は次のものである：

(i) $\Box A \in x \Leftrightarrow (\forall y \in W_K)\ (xR^*_K y \Rightarrow A \in y)$

(ii) $\Diamond A \in x \Leftrightarrow (\exists y \in W_K)\ (xR^*_K y \,\&\, A \in y)$

この補題の証明は，$L$の場合に与えた証明（§2の2.2.9）と平行する。ただし，**O**を□で，**P**を◇で置き換える。

### 4.2.4 一致の補題の証明

帰納の基底段階において，新しいケースがある：

<u>A＝Qの場合</u>。示すべきことは，

$\mathfrak{M}_K \models_x Q \Leftrightarrow Q \in x$

である。Qの真理条件により，$\mathfrak{M}_K \models_x Q \Leftrightarrow x \in opt_K$である。ところが，キャノニカル$K$モデルの定義の(iii)節より，$x \in opt_K \Leftrightarrow Q \in x$である。よって，$\mathfrak{M}_K \models_x Q \Leftrightarrow Q \in x$が導かれる。

帰納の段階での新しいケースは，A＝□B，A＝◇Bという場合である。それらは，$L$体系での対応する証明において完全に類比的に取り扱うことができる。

4.2.5　**確認補題の証明**

$K$∈{**KQ**, **MQ**, **S4Q**, **BQ**, **S5Q**}の場合はよく知られている(例えば，Makinson[1966]，Chellas[1980]，p. 171 以下参照)。これら五つの場合に確認されねばならない唯一の新しい事柄は，われわれが定義した$opt_K$が$W_K$の部分集合である，ということである。そのことは，キャノニカル$K$モデルの定義の(iii)節からトリヴィアルに言える。

$K$＝**KQ**$^+$の場合

われわれは，関係$R^*_{KQ^+}$が$W_{KQ^+}$で，$(\forall x \in W_{KQ^+})(\exists y \in W_{KQ^+})(xR^*_{KQ^+}y \,\&\, y \in opt_{KQ^+})$の意味でopt連続的であることを示さねばならない。さて，任意の$x \in W_{KQ^+}$に対して，

1．$\Diamond Q \in x$ ……………… **KQ**$^+$に対する公理B3
2．$(\exists y \in W_{KQ^+})(xR^*_{KQ^+}y \,\&\, Q \in y)$ ……………… 1，キャノニカル$K$モデルに対する飽和補題の(ii)節
3．$(\exists y \in W_{KQ^+})(xR^*_{KQ^+}y \,\&\, y \in opt_{KQ^+})$ ……………… 2，$opt_{KQ^+}$の定義
4．$(\forall x \in W_{KQ^+})(\exists y \in W_{KQ^+})(xR^*_{KQ^+}y \,\&\, y \in opt_{KQ^+})$ ……………… 3，普遍汎化

(Q.E.D.)

残りの4個のケースには新しい要素はない。よって，確認補題の証明は完了した。こうして，10個の真理様相体系の完全性が証明される。

## §5．$K$体系での義務様相断片の分離

### 5.1　分 離 問 題

Σを，($K$体系に共通な)**真理様相**言語の文の集合とする。また，$\Sigma_0$を，(スマイリー・ハンソン体系に共通な)**義務様相**言語の文の集合とする。さて，$K$を，定項Qを持つ10個の真理様相体系のどれかであるとする。そのとき，

**OとPの$K$定義を用いるならば，$\Sigma_0$中の正確にどの文が$K$で証明できるのか？**

**O**と**P**の$K$定義とは，

$$\mathbf{O}A \Leftrightarrow \text{def.}\ \Box(Q \supset A)$$
$$\mathbf{P}A \Leftrightarrow \text{def.}\ \Diamond(Q \wedge A)$$

である。言い換えると，問題は，

**各$K$に対して，これら二つの定義を基礎として，$K$で証明可能な義務的文の集合を特徴づけること，**

となる。(ここで，義務的文(deontic sentences)とは，$\Sigma_0$の任意の要素のことである。)われわれの仕事の第三の定式化はこうである：

**各$K$に対して，$K$の義務断片を分離すること。**

さて，これらの定式化において現れる「**O**と**P**の定義を基礎として$K$で証明可能な$\Sigma_0$の文」という言い方は必ずしも明確ではない，少なくとも，もっと正確なものにしうる。その目的のために，**O**と**P**の定義が，事実上，われわれの義務様相言語を真理様相言語へと写像(翻訳)するある関数が存在する，ということを以下で示すことにする。

### 5.2　$\Sigma_0$から$\Sigma$への翻訳$\phi$の定義

$\Sigma_0$中の任意の文Aに対して，以下の帰納的条件によって，$\phi(A) \in \Sigma$を定義する。

(i)　$\phi(p)=p$.　　　（各命題文字pに対して）

(ii)　$\phi(\mathbf{T})=\mathbf{T}$.

(iii)　$\phi(\mathbf{F})=\mathbf{F}$.

(iv)　$\phi(\neg A)=\neg\phi(A)$.

(v)　$\phi(A\wedge B)=\phi(A)\wedge\phi(B)$.

(vi)　$\phi(A\vee B)=\phi(A)\vee\phi(B)$.

(vii)　$\phi(A\supset B)=\phi(A)\supset\phi(B)$.

(viii)　$\phi(A\equiv B)=(\phi(A)\equiv\phi(B))$.

(ix)　$\phi(\mathbf{OA})=\Box(Q\supset\phi(A))$.

(x)　$\phi(\mathbf{P}A)=\Diamond(Q\wedge\phi(A))$.

この定義において最も興味深い唯一の節は(ix)と(x)である。なぜなら，文Aの長さに関する帰納法によって，もしAが**O**と**P**を含まないならば$\phi(A)=A$であることを，容易に確認できるからである。これらの節(ix)(x)が**O**と**P**の定義にどのように対応するかに注目する必要がある。また，真理様相言語と義務様相言語が共通な命題文字の集合**Prop**を有することも重要である。以下では，簡潔さのため，$\phi(A)$を$\phi A$と書くことがある。

さて，問題の正確な定式化のために，われわれはもう一つの定義を必要とする。

### 5.3　$\phi$の下での$K$の義務様相断片の定義

$K$をこれまで通りのもの（10個の真理様相体系のどれか）として，$\phi$をいま定義したような，$\Sigma_0$から$\Sigma$への翻訳（翻訳関数）とする。$\phi$の下での$K$の義務様相断片（記号で$\mathbf{DF}(K,\phi)$と表す）を，われわれは，$\phi A$が$K$で証明可能であるような，$\Sigma_0$の要素である文Aの集合，と定義する。すなわち：

$$\mathbf{DF}(K,\phi)=\{A\in\Sigma_0 : \vdash_K \phi A\}.$$

翻訳$\phi$を固定することによって，われわれは$\phi$への言及を落として，通常の$K$に対して，

$$\mathbf{DF}(K)=\mathbf{DF}(K,\phi)$$

の規約の下で，単に$K$の義務様相断片（deontic fragment）：$\mathbf{DF}(K)$について語ることができる。

そこで，この§5の冒頭で提示した問題の正確なヴァージョンは次のものとなる。

### 5.4　問題の再定式化

$K$をわれわれの10個の真理様相体系の任意のものとする。$L$を10個のスマイリー・ハンソン型義務論理体系の任意のものとし，

$$L=\{A\in\Sigma_0 : \vdash_L A\}$$

であるように，$L$を定理の集合と同一視する。そのとき，

> **どのような$L$に対して，$L=DF(K)$であるか？**

再定式化された問題の意味を具体的事例で考えてみる。**OM**（の定理の集合）が実際に**MQ**の義務様相断片と同一視できると主張したい，と仮定する。そのとき，われわれは何を主張しているのか？われわれの定義によれば，それは以下のことである：

(1)　$\mathbf{OM}=\{A\in\Sigma_0:\vdash_{\mathrm{OM}}A\}=\{A\in\Sigma_0:\vdash_{\mathrm{MQ}}\phi A\}=\mathbf{DF}(\mathbf{MQ})$。
これよりもっと分かりやすい言い方は次のものである：

(2)　$\Sigma_0$における各文Aに対して，$\vdash_{\mathrm{OM}}A \Longleftrightarrow \vdash_{\mathrm{MQ}}\phi A$,
すなわち，

AがOMで証明可能であるとき，かつそのときにかぎり，Aの翻訳$\phi$AがMQで証明可能である（任意の義務文Aに対して)。

実際，Smiley［1963］はこの結果(2)，つまり**OM**＝**DF**（**MQ**）を証明している。彼はまた，特に以下の事柄を代数的手法を用いて証明した：

$\mathbf{OS4}=\mathbf{DF}(\mathbf{S4Q})$,
$\mathbf{OS5}=\mathbf{DF}(\mathbf{S5Q})$,
$\mathbf{OM}^+=\mathbf{DF}(\mathbf{MQ}^+)$,
$\mathbf{OS4}^+=\mathbf{DF}(\mathbf{S4Q}^+)$,
$\mathbf{OS5}^+=\mathbf{DF}(\mathbf{S5Q}^+)$。

これからわれわれは，これらのスマイリーの結果を再度取り上げ，上で提起した問題の十分な解決を得るためにそれらを拡張する。われわれはスマイリーによって使われたマトリクス・メソッドの代わりに，飽和集合を使うヘンキン流モデル理論の手法によって，単項義務論理に対する翻訳定理がどう証明されるかを示すことにする。そうすることによって，単項義務論理そのものの理解が容易となるのみならず，それらと（条件的義務を扱う）二項義務論理との結びつきがより明確になるものと期待できる（ただし，本論文では二項義務論理そのものは扱わない)。

そこでまず第一に，真理様相体系から義務様相体系の上への1対1写像**c**を定義することによって，われわれの真理様相体系を義務様相体系へと関連づける。**c** の定義は以下の対応表によって与えられる：

| 真理様相体系$K$ | 義務様相体系 $\mathbf{c}(K)$ |
|---|---|
| **KQ** | **OK** |
| **MQ** | **OM** |
| **S4Q** | **OS4** |
| **BQ** | **OB** |
| **S5Q** | **OS5** |
| $\mathbf{KQ}^+$ | $\mathbf{OK}^+$ |
| $\mathbf{MQ}^+$ | $\mathbf{OM}^+$ |
| $\mathbf{S4Q}^+$ | $\mathbf{OS4}^+$ |
| $\mathbf{BQ}^+$ | $\mathbf{OB}^+$ |
| $\mathbf{S5}^+$ | $\mathbf{OS5}^+$ |

さて，われわれは義務論理に関する結果を述べることができる。

### 5.5　単項義務論理に対する翻訳定理（Smiley［1963］)

$K$を，10個の真理様相体系**KQ**，**MQ**，…，**S5Q**のどれかであるとし，$\mathbf{c}(K)$ を上の対応表に基づく10個のスマイリー・ハンソン型体系中の対応物とする。われわれは，$\mathbf{c}(K)$ を定理の集合と同一

視する。そのとき，

$\mathbf{c}(K)=\mathbf{DF}(K)$。

すなわち，$\Sigma_0$の各文Aに対して，

$\vdash_{\mathbf{c}(K)}\mathrm{A} \Longleftrightarrow \vdash_K \phi\mathrm{A}$。

われわれの問題を解決する証明は相当に長い。よって，Åqvist [1984，87] に従い，その概略を与えるに止める。

## 5.6　翻訳定理の証明の概略

### 5.6.1　$K=\mathbf{KQ}$，$\mathbf{c}(K)=\mathbf{OK}$の場合

（$\Longrightarrow$）の部分：

われわれは，$\vdash_{\mathrm{OK}}\mathrm{A} \Longrightarrow \vdash_{\mathrm{KQ}}\phi\mathrm{A}$を$\mathrm{A}\in\Sigma_0$に対して示さねばならない。われわれはこれを，仮定されたAの**OK**証明の長さに関する帰納法で行う。

基底部分

仮定された**OK**証明の長さを1とする。そのとき，Aは公理図式A0～A2のどれかの事例である。いま，Aが公理A0，すなわち義務様相言語でのトートロジーであるとする。そのとき，$\phi$Aは真理様相言語でのトートロジーである。それゆえ，$\phi$Aは公理図式B0の事例である。よって，$\vdash_{\mathrm{KQ}}\phi\mathrm{A}$。

次に，Aが公理A1の場合。そのとき，ある$\mathrm{B}\in\Sigma_0$に対して，

$\mathrm{A}=(\mathbf{P}\mathrm{B}\equiv\neg\mathbf{O}\neg\mathrm{B})$,

$\phi\mathrm{A}=(\Diamond(\mathrm{Q}\wedge\phi\mathrm{B})\equiv\neg\Box(\mathrm{Q}\supset\phi(\neg\mathrm{B})))$,

である。$\phi$Aの**KQ**証明は次のようになる：

1．$\Diamond(\mathrm{Q}\wedge\phi\mathrm{B})\equiv\neg\Box\neg(\mathrm{Q}\wedge\phi\mathrm{B})$ ……………公理B1

2．$\neg\Box\neg(\mathrm{Q}\wedge\phi\mathrm{B})\equiv\neg\Box(\mathrm{Q}\supset\neg\phi\mathrm{B})$ ………公理B0，B2，R1，R2′からいくつかの初等ステップにより

3．$\Diamond(\mathrm{Q}\wedge\phi\mathrm{B})\equiv\neg\Box(\mathrm{Q}\supset\phi(\neg\mathrm{B}))$ …………1，2，B0，R1，$\phi$の定義

ここで，3＝$\phi$A。こうして，$\vdash_{\mathrm{KQ}}\phi\mathrm{A}$。

さらに，Aが公理A2の事例であるとき。そのときは，あるB，$\mathrm{C}\in\Sigma_0$に対して，

$\phi\mathrm{A}=\Box(\mathrm{Q}\supset(\phi\mathrm{B}\supset\phi\mathrm{C}))\supset(\Box(\mathrm{Q}\supset\phi\mathrm{B})\supset\Box(\mathrm{Q}\supset\phi\mathrm{C}))$

$\vdash_{\mathrm{KQ}}\phi\mathrm{A}$は，B0，B2，R2′，R1から容易に得られる。

帰納の段階

長さが1より大きいAの**OK**証明が存在し，(i)Aは，ある**OK**定理B，B⊃Aに規則R1を適用して得られたか，または(ii)Aは，**O**Bという形をしており，ある**OK**定理Bに規則R2（**O**必然化）を適用して得られたか，のいずれかである。

場合(i)：帰納法の仮定により，$\vdash_{\mathrm{KQ}}\phi\mathrm{B}$，$\vdash_{\mathrm{KQ}}\phi(\mathrm{B}\supset\mathrm{A})$である。しかし，$\phi$の定義により，$\phi(\mathrm{B}\supset\mathrm{A})=\phi\mathrm{B}\supset\phi\mathrm{A}$だから，R1により，$\vdash_{\mathrm{KQ}}\phi\mathrm{A}$。

場合(ii)：帰納法の仮定により，$\vdash_{\mathrm{KQ}}\phi\mathrm{B}$。そのとき，$\vdash_{\mathrm{KQ}}\phi(\mathbf{O}\mathrm{B})$ は次のようにして得られる：

1．$\mathrm{Q}\supset\phi\mathrm{B}$ ……………………………………………$\vdash_{\mathrm{KQ}}\phi\mathrm{B}$，B0，R1

2．$\Box(\mathrm{Q}\supset\phi\mathrm{B})$ ………………………………………1，R2′

3．$\phi(\mathbf{O}\mathrm{B})$ ……………………………………………2，“$\phi$” の定義(ix)

（$\Longleftarrow$）の部分：

われわれは，義務様相言語における任意の文Aに対して，$\vdash_{\mathrm{KQ}}\phi\mathrm{A} \Longrightarrow \vdash_{\mathrm{OK}}\mathrm{A}$またはその対偶であ

る$\nvdash_{OK}A \Rightarrow \nvdash_{KQ}\phi A$を示さねばならない。この部分は，証明論的方法が不自然に見えるので，やっかいである。しかし，*L*および*K*体系に対する健全性・完全性の観点からはすれば，それほど困難ではない。

戦略的論証：われわれは次のように論じる：

1．$\nvdash_{OK}A$ ……………………………………………仮定

2．$\nvDash_{OK}A$ ……………………………………………1とOKに対する完全性定理

3．あるOKモデル$\mathfrak{M}$＝〈W，R，V〉に対して，
　　あるx∈Wにおいて，$\mathfrak{M} \nvDash xA$ ……………………2と，OK妥当性の定義により

ここで，OKモデル$\mathfrak{M}$を考える。このモデルに対して，われわれは，すべての$B \in \Sigma_0$，およびすべての$y \in W$に対して，$\mathfrak{M} \vDash yB \Leftrightarrow \mathfrak{M}^* \vDash y\phi B$という望ましい特性を持つところの，対応するKQモデル：

$\mathfrak{M}^*$＝〈W，$R^*$，opt，V〉

を構成できる（詳細は以下で論じる）。

4．$\mathfrak{M}^* \nvDash x\phi A$ ……………………………………3から，上でのべた構成により$\mathfrak{M}^*$が存在するから

5．$\nvDash_{KQ}\phi A$ ……………………………………………4で，$\mathfrak{M}^*$がKQモデルであり，そのある世界x∈Wで$\phi A$が成り立たないから，KQで非妥当

6．$\nvdash_{KQ}\phi A$ ……………………………………………5から，KQの健全性による

ここで，6がわれわれが目指した結論である。

さて，上の議論の最重要点は，与えられたOKモデル$\mathfrak{M}$からKQモデルを構成すること，およびそれが上で示した望ましい特性を持つことを示すこと，である。そこで，モデル$\mathfrak{M}^*$を構成し，それが当該特性を持つことを証明すれば，3から4への重要なステップが十分に正当化され，従って，(⇐)の部分がいまのケースで成り立つことが分かる。よって，残されたことは，$\mathfrak{M}^*$の定義を与え，いくつかの望ましい補題を証明することである。

$\mathfrak{M}^*$の定義

$\mathfrak{M}$＝〈W，R，V〉を任意のOKモデルとする。そのとき，$\mathfrak{M}^*$を，構造：

$\mathfrak{M}^*$＝〈W，$R^*$，opt，V〉

として定義する。ここで，

(i)　$R^* = R$

(ii)　$opt = \{y \in W : (\exists x \in W)(xRy)\}$

WとVが$\mathfrak{M}$と$\mathfrak{M}^*$で共通であることに注意する。Vに関しては，真理様相言語と義務様相言語が命題文字の同一集合**Prop**を持つというわれわれの仮定によって，このことが可能となる。また，optは，OKモデルにおける関係Rの「逆定義域」(converse domain) として知られるものとして，ここでは定義されていることに注意する。

簡単な補題

定義された$\mathfrak{M}^*$モデルはKQモデルである。

《証明》

KQモデルの定義（§3）によれば，$R^*$やoptに真理様相モデルとしてそれ以上の制限は課されないから，(i)$R^* \subseteq W \times W$，(ii)$opt \subseteq W$を示せば十分である。これは，構造$\mathfrak{M}^*$の上の定義の(i)と(ii)から直

ちに言える。

(Q.E.D.)

**<u>関係についての補題</u>**

$\mathfrak{M}$と$\mathfrak{M}^*$を，$\mathfrak{M}^*$の定義で定義されたものとする。そのとき，W中のすべてのx，yに対して，

$xRy \Longleftrightarrow xR^*y \,\&\, y \in opt$。

《証明》（$\Longrightarrow$）の部分：

1．$xRy$ ……………………………………………仮定
2．$\exists x\ (xRy)$ ……………………………………1，存在汎化
3．$y \in opt$ …………………………………………2，$\mathfrak{M}^*$でのoptの定義
4．$xR^*y$ ……………………………………………1，$\mathfrak{M}^*$での$R^*$の定義
5．$xR^*y \,\&\, y \in opt$ ……………………………4，3

（$\Longleftarrow$）の部分：

こちらは$R^*$の定義により，直ちに成り立つ。

(Q.E.D.)

**<u>重要な補題</u>**

$\mathfrak{M}$と$\mathfrak{M}^*$を，$\mathfrak{M}^*$の定義で定義されたものとする。そのとき，すべての文$A \in \Sigma_0$，すべての世界$x \in W$に対して，

$\mathfrak{M} \models_x A \Longleftrightarrow \mathfrak{M}^* \models_x \phi A$。

《証明》

文Aの長さに関する帰納法による。翻訳$\phi$の定義により，帰納の基底における三つの場合（p，**T**，**F**）はトリヴィアルであることが分かる。同じ理由で，真理関数結合子を含む帰納の段階も容易に成り立つ。そこで，実質上重要な，以下の場合を考える。

<u>A＝**O**Bの場合</u>

示すべきことは，$\mathfrak{M} \models_x \mathbf{O}B \Longleftrightarrow \mathfrak{M}^* \models_x \phi(\mathbf{O}B)$である。さて，任意の$B \in \Sigma_0$，任意の$x \in W$に対して，

1．$\mathfrak{M} \models_x \mathbf{O}B \Longleftrightarrow (\forall y \in W)(xRy \Longrightarrow \mathfrak{M} \models_y B)$ …$\mathfrak{M}$での“**O**”の真理条件
2．$\mathfrak{M}^* \models_x \Box(Q \supset \phi B) \Longleftrightarrow (\forall y \in W)$
$(xR^*y \,\&\, y \in opt \Longrightarrow \mathfrak{M}^* \models_y \phi B)$ ………………$\mathfrak{M}^*$での$\Box$の真理条件と，Qを支配する§3での条件：$\mathfrak{M}^* \models_y Q \Longleftrightarrow y \in opt$より，$\mathfrak{M}^* \models_y (Q \supset \phi B) \Longleftrightarrow (y \in opt \Longrightarrow \mathfrak{M}^* \models_y \phi B)$であるから
3．$\mathfrak{M} \models_y B \Longleftrightarrow \mathfrak{M}^* \models_y \phi B$ ……………………………帰納の仮定，yはWの任意の要素
4．（1の右辺）$\Longleftrightarrow$（2の右辺）………………3，関係についての補題
5．$\mathfrak{M} \models_x \mathbf{O}B \Longleftrightarrow \mathfrak{M}^* \models_x \Box(Q \supset \phi B)$ ……………4，“$\Longleftrightarrow$”の推移律
6．$\mathfrak{M} \models_x \mathbf{O}B \Longleftrightarrow \mathfrak{M}^* \models_x \phi(\mathbf{O}B)$ ……………………5，“$\phi$”の定義(ix)

<u>A＝**P**Bの場合</u>

示すべきことは，$\mathfrak{M} \models_x \mathbf{P}B \Longleftrightarrow \mathfrak{M}^* \models_x \phi(\mathbf{P}B)$であるが，**O**，$\Box$，$\supset$，($\forall$)，$\Longrightarrow$から**P**，$\Diamond$，$\wedge$，($\exists$)，&に切り替えて，上と平行して証明できる。

こうして，重要な補題の証明は完了した。

(Q.E.D.)

さて，KQモデル$\mathfrak{M}^*$の定義と，それに関連する三つの補題（簡単な補題，関係についての補題および重要な補題）を与えることによって，「戦略的議論」における，3から4への重要なステップを十分に正当化した。これで，$K$=**KQ**および**c**($K$)=**OK**の場合の翻訳定理の証明における，($\Leftarrow$)の部分の証明が完結した。

### 5.6.2　残りのケース

残る9個のケースについては，証明の新しい要素を持つ部分を取り上げるに止める(7)。それは，"$\Leftrightarrow$"の証明の"$\Leftarrow$"の部分に現れる。そこでは，任意の**c**($K$)モデルが与えられたとき，われわれは「適切な」性質を持つ対応する$K$モデルを構成せねばならない。こうして，一般に，われわれは以下の形の定義を定める：

<u>$\mathfrak{M}^*$の定義</u>

$\mathfrak{M}=\langle W, R, V\rangle$ を任意の**c**($K$)モデルとし，Rが適切な制限を満たすものとする。対応する$K$モデル$\mathfrak{M}^*$を，構造：

$\mathfrak{M}^*=\langle W, R^*, opt, V\rangle$

として定義する。ただし，

(i)　$R^*$=W上の二項関係であり，任意のx，y∈Wに対してxR*y $\Leftrightarrow$ [……].

(ii)　opt= $\{y\in W:(\exists x\in W)(xRy)\}$

　　=WにおけるRの逆定義域 (converse domain)

この(i)節でのブランク［……］を各々の場合に特定の仕方で塡めることにより，次の二つの補題の記述と証明が与えられる：

<u>簡単な補題</u>：上のように定義された$\mathfrak{M}^*$は$K$モデルである。

<u>関係についての補題</u>：$\mathfrak{M}$と$\mathfrak{M}^*$を上で定義されたものとする。そのとき，

$(\forall x\in W)(\forall y\in W)(xRy \Leftrightarrow xR^*y \,\&\, y\in opt)$.

<u>重要な補題</u>

$K$=**KQ**，**c**($K$)=**OK**の場合と同様に，(上で述べた$\mathfrak{M}$および$\mathfrak{M}^*$，Aとx∈Wに対して)

$\mathfrak{M}\models xA \Leftrightarrow \mathfrak{M}^*\models x\phi A$.

再び，$K$モデル$\mathfrak{M}^*$の定義と，それに関する上の三つの補題で武装することにより，翻訳定理の証明の（$\Leftarrow$）の部分の戦略的議論における3から4への決定的段階を正当化できる。これによって，残る9個のケースでの翻訳定理の証明が完成する。

さて，われわれは，いくつかのケースにおいて，$\mathfrak{M}^*$の定義の(i)節中のブランクの塡め方を指示する。

$K$=**MQ**かつ**c**($K$)=**OM**の場合：

　ブランクに条件：（x = y　or xRy）を満たす。

$K$=**S4Q**かつ**c**($K$)=**OS4**の場合：

　ブランクに上と同じ条件を満たす。

$K$=**BQ**かつ**c**($K$)=**OB**の場合：

　ブランクに条件：（x = y　or xRy or yRx）を満たす。

$K$=**S5Q**かつ**c**($K$)=**OS5**の場合：

　ブランクに条件：$(\exists n\geq 1)(xR^{\#n}y)$ を満たす。

ここで，$R^{\#}$はW上で，$xR^{\#}y \Leftrightarrow x = y$ or xRy or yRxとして定義される関係であり，$R^{\#n}$は，関係積によって通常の帰納的方法で定義される$R^{\#}$のn重巾（n-th power）である。

<u>残る5個の“＋”のケース</u>

対応する，“＋”の無いケース，すなわち公理体系が公理図式A3を欠いており，接近可能性関係が関連するモデルにおいてopt-連続的である必要のないケース，の場合と同様に，

$R^*$

を定義する。

こうして，単項義務論理に対する翻訳定理の証明の概略は完了した。

## 註

(1) 例えば，Chellas [1980]，pp. 53-55など参照。

(2) Chellas [1980]，pp. 55-57，Makinson [1966]，pp. 381-382など参照。

(3) Makinson [1966]，p. 382参照。

(4) $R_{OS5}$がユークリッド的であることは以下のように証明できる。

1．$xR_{OS5}y$ ……………………………仮定

2．$xR_{OS5}z$ ……………………………仮定

そのとき，

3．$A \notin z$ ……………………………仮定

4．$OA \notin x$ ……………………………2，3，キャノニカル$L$モデルの定義

5．$\neg OA \in x$ ……………………………4，$L$飽和集合に関する補題(v)

6．$\neg OA \supset O\neg OA \in x$ …………公理図式A5，A1により，

7．$O\neg OA \in x$ ……………………………5，6，$L$飽和集合に関する補題(viii)

8．$\neg OA \in y$ ……………………………1，7，キャノニカル$L$モデルの定義

9．$OA \notin y$ ……………………………8，$L$飽和集合に関する補題(v)

10．$A \notin z \supset OA \notin y$ ……………3－9，条件化規則，3を解除

11．$OA \in y \supset A \in z$ ……………10，対偶

12．$xR_{OS5}y \supset [xR_{OS5}z \supset (OA \in y \supset A \in z)]$ ……………………………1，2－11，条件化規則，1，2を解除

13．$(\forall x \in W_{OS5})(\forall y \in W_{OS5})(\forall z \in W_{OS5})[xR_{OS5}y \supset (xR_{OS5}z \supset yR_{OS5}z)]$

……………………………………………………………………………12，キャノニカル$L$モデルの定義，普遍汎化

(Q.E.D.)

次に$R_{OS5}$が推移的であることを証明する。

1．$xR_{OS5}y$ ……………………………仮定

2．$yR_{OS5}z$ ……………………………仮定

そのとき，

3．$(\forall A)(OA \in x \supset A \in y)$　1，キャノニカル$L$モデルの定義

4．$(\forall A)(OA \in y \supset A \in z)$　2，キャノニカル$L$モデルの定義

5．$OA \in x$ ……………………………仮定

6．$OA \supset OOA \in x$ ………………公理図式A4

7．$OOA \in x$ ……………………………5，6，$L$飽和集合に関する補題(viii)

8．$OA \in y$ ……………………………7，3

9．$A \in z$ ……………………………8，4

10．$OA \in x \supset A \in z$ ……………5－9，条件化規則，5を解除

11．$xR_{OS5}y \supset (yR_{OS5}z \supset (OA \in x \supset A \in z))$ ……………………………1，2－10，条件化規則，1，2を解除

12．$(\forall x \in W_{OS5})(\forall y \in W_{OS5})(\forall z \in W_{OS5})[xR_{OS5}y \supset (yR_{OS5}z \supset xR_{OS5}z)]$

……………………………………………………………………………キャノニカル$L$モデルの定義，普遍汎化

(Q.E.D.)

(5) 体系**OK**は対応する真理様相論理体系では，**K**または正規体系 (normal system) と呼ばれ，そこでは，◇**T** ≡ (□A⊃◇A) が成り立つ。Chellas [1980]，p. 123参照。
(6) Åqvist [1987]，pp. 101-105参照。
(7) 詳細な展開はÅqvist [1987]，13.5.2-10に見られる。

## 参考文献


Anderson, A.R.: 1958, "A reduction of deontic logic to alethic modal logic", *Mind* **67**, pp. 100-103.

Åqvist, L.: 1984, "Deontic logic", in D. Gabbay and F. Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. II, pp. 605-714, Reidel.

Åqvist, L.: 1987, *Introduction to Deontic Logic and the Theory of Normative Systems*, Bibliopolis.

Chellas, B.F.: 1980, *Modal Logic: An Introduction*, Cambridge U.P.

Hanson, W.H.: 1965, "Semantics for deontic logic", *Logique et Analyse* 8, pp. 177-190.

Hughes, G.E. and Cresswell, M.J.: 1968, *An Introduction to Modal Logic*, Methuen.邦訳：G.H.ヒューズ，M.J.クレスウェル『様相論理入門』三浦聡・大浜茂生・春藤修二訳，恒星社厚生閣 (1981).

Hughes, G.E. and Cresswell, M.J.: 1996, *A New Introduction to Modal Logic*, Routledge.

Kripke, S.: 1963, "Semantical analysis of modal logic I: Normal modal propositional calculi", *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* **9**, pp. 67-96.

Makinson, D.: 1966, "On some completeness theorems in modal logic", *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* **12**, pp. 379-384.

Smiley, T.J.: 1963, "Relative necessity", *Journal of Symblic Logic* **28**, pp. 113-134.