算術命題の本性に関する諸家の見解のフレーゲによる批判的考察

――『算術の基礎』第1部研究――

哲学教室　田　畑　博　敏

はじめに

本稿の目的は，『算術の基礎』[1]（以後『基礎』と略記）第1部の読解を通して，①数学の哲学の一般的問題として，算術命題の本性についてのフレーゲの見解を明らかにし，さらに②フレーゲ解釈の問題として，彼の論理主義のプログラムの中での『基礎』の役割を理解するための準備作業をすること，である。

フレーゲは『基礎』の序文で，「数の概念」の一般的定義はおろか，最も基本的な研究対象である「数1」の満足のいく定義もなされていない，という（フレーゲの頃の）数学＝算術の状況を嘆いている。それと同時に，その最も基本的部分（論理の形式化と一般系列理論）を『概念記法』で完了させたところの，算術を論理によって基礎づけるという彼のプログラムの本来の意図が，当時の数学者や哲学者には理解されていない，ともフレーゲは考えた。そこで彼は，特に数の概念の定義を求めることの数学的・哲学的意義に焦点を当てた書物を書く必要を感じて，『基礎』を著わしたのである。『基礎』の第1部でフレーゲは，数概念の本格的考察の準備として，算術命題の本性に関する諸家の見解を批判的に考察している。本稿は，先にのべた①，②の目的から，主題の展開に沿って『基礎』第1部を研究する。

さて，ここで考えられている「算術命題」とは，個々の数を扱う数式，個々の数の定義，および数一般に成り立つ法則の三種類である。そして，これらがいずれも分析的な性格を持つことが論じられる。そこで本稿の梗概は以下のようになる。まず第1節では，『基礎』§1－§4でのフレーゲの議論を追跡することにより，『基礎』全体の数学的動機（解析学の厳密化の動き）と哲学的動機（算術の真理は分析的か総合的か，先天的(アプリオリ)か後天的(アポステリオリ)かという問題）を確認する。第2節で，算術命題の一部である数式が，数の一般法則と個々の数の定義から証明可能であることについて，カントを批判し，ライプニッツを援用するフレーゲの議論を検討する。引き続き第3節で，ミルの数式に関する見解についてのフレーゲの批判を扱う。第4節で，ミルの批判による，算術法則（数の一般法則）が帰納的ではないことの議論を取り上げる。最後に，第5，6節で，算術法則の分析性を問題にする。

1．背景と動機

『算術の基礎』第１部の叙述を始める前に，フレーゲは『基礎』§１－§４で，『基礎』全体を構成するに至った背景と動機について述べている。われわれも，第１部の十全な理解のために必要と考えられる限りで，この部分（§１－§４）を検討することから始めたい。

１．１　19世紀数学の厳密化の運動と数学的動機（『基礎』§１，２）

フレーゲによれば，主としてギリシア人によって作られてきた幾何学においては，厳密な推論方法を用いることが伝統として今日まで伝えられているが，その方法や概念がインド起源である算術においては，大雑把な思考方法が引き継がれた，という。18世紀以来の高等解析の発明はこの傾向を促進したにすぎず，主題の厳密な扱いに対して立ちはだかった困難を克服しようとする努力も，報われることが少なかった。しかし，その後の数学の発展は，ますます厳密な証明を要求する方向に進んだ。フレーゲは，厳密な証明により数学の諸命題の妥当性を限界づける準備として，当時なされつつあった，関数，連続性，極限，無限といった解析学の基礎概念を厳密に定義しようとする動きに言及している。

そこで，われわれも例として，極限概念の定義の厳密化をめぐる動きの要点を瞥見することにする[(2)]。極限概念の定義は，導関数の概念の理解に必要なものとされた所にその起源を持っている。導関数（derivative）は，ある運動する対象の位置が時間の関数として与えられたとき，ある時点でのその対象の速度の計算を，その関数から導くという問題として典型的に現れる。x 軸を時間軸，y 軸を空間軸とすると，その対象の運動はグラフとして表現できる。そのとき，運動する対象の一定時点での速度は，関数の変化の割合となる。関数が一次関数のとき，グラフは直線となり，変化の割合は一定で，直線の傾きとして表される。こうして，任意の点 x_0 での速度は，この点を含む短い時間間隔（区間）での速度を考察することで与えられる。区間［x_0, x］でこれを計算するには，時点 x と x_0 における関数の値の差（その区間に移動した距離）を，x と x_0 の差（経過時間）で割ればよい：

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

しかし，変化の割合が一定ではない（速度が各時点で変わる）場合の計算はもっと難しい。一つの戦略は，変化の割合が一定であるほど小さい，その時点の周辺の区間を考えることである。導関数の初期の定義は，一時点の近傍の無限に小さい区間内で関数の変化率を計算することが可能である，という仮定に基づいてなされた。この戦略には無限小，すなわち無限に小さいがゼロではない数の概念の使用が含まれる。1820年代にコーシー（Augustin-Louis Cauchy）が与えた導関数の定義は，極限概念を用いることで，無限小の使用にまつわる問題を回避するものと期待された。コーシーの極限の定義は以下のようなものであった：

> 「同じ変数に次々と割り当てられた値が，望むだけわずかに一定の値と異なったままで終わるという仕方で，その一定値に無限に近づくとき，この最後の値は他のすべての値の**極限**と呼ばれる。」[(3)]［強調はコーシー］

そのとき，関数 f の x_0 における導関数は，x_0 における f の値と x_0+h における f の値との差を h で割った結果の，h が 0 に近づくときの極限値，すなわち

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

として定義された。

しかし，このコーシーの定義も十分に厳密なものではなかった。値の系列が「一定値に無限に近づく」とはどういうことか，一定値と「望むだけわずかに異なる」とはどういうことか，は明確ではなかった。極限の定義をもっと単純な用語で定義し，今日も使われる形に表現したのはワイエルシュトラスであった[4]。その定義によれば，x が x_0 に近づくときの関数 $f(x)$ の極限が L に等しいのは，われわれが選ぶ任意の正の数 ε に対して，それがどんなに小さくとも，x_0 から δ より遠くないどんな x に対しても $f(x)$ が L から ε よりは遠くない，そういう正の数 δ が存在するとき，そのときにかぎる。言い換えると，x が十分に x_0 に近づくことを確かめることによって，$f(x)$ がわれわれの望むだけ，どれほどでも L に接近し得るような x を見つけることができる。こうして，系列が一定の値に近づきながら，しかも望むだけわずかにその値とは異なるという，コーシーの定義に未だ潜んでいた曖昧さが消され，正確な表現が得られた。

フレーゲが言及している解析学における厳密化への動きは，抽象的な理念に動かされたというより，いわば現場からの要求により生じたのであった。ワイエルシュトラスによる極限概念の正確な定義は，数学研究において生じた問題や混乱を解決するのに必要とされたのであった。逆に言えば，現場の数学者が厳密さを求めるのは数学研究における問題や混乱の解決に直接関わるものに限られており，そういったものに直接関わらない問い，例えば「数概念とはなにか」といった問いに厳密さを求めることはほとんど無かった，ということである。この点に，彼の同時代の現場の数学者からフレーゲを隔てる発想の違いがあるように見える。フレーゲは，厳密さの要求をさらに先に進めて，算術の領域にまで到達させようとする。彼は言う：

> 「この道 [極限やそれに関連する解析学の諸概念の厳密な定義の要求へと数学者を導いた道] をさらに先に辿れば，われわれは，全算術の基礎を形成する，数の概念と，正の整数について成り立つ最も単純な命題とに，導かれるにちがいない。」(『基礎』 § 2)

フレーゲにとって，算術は厳密さの最終的な基礎にはなり得なかった。個々の数の間の関係を主張する数式や，任意の数において成り立つ一般法則も，証明可能な場合には証明されねばならなかった。

1．2　哲学的動機（『基礎』 § 3，4）

算術の基礎を問うという数学的な問いの動機は，同時に，算術の真理の本性についての哲学的問いに裏打ちされている，とフレーゲは考える。算術の真理の本性についての哲学的問いとは，算術の真理が分析的であるか総合的であるか，ア・プリオリであるかア・ポステリオリであるか，という問いである。これらの問いに関連する概念自体は哲学に属するが，数学の手助けが無ければ，それらの問いに決定的な答えを与えることはできない，とフレーゲは考える（『基礎』 § 3)。

ところで，フレーゲによれば，これらの哲学的問いは，判断の内容 (Inhalt) にではなく，真または偽という判断をなすことの正当性 (Berechtigung) に関わる。算術の場合，判断の正当性は証明によって与えられる。従って，算術の真理の正当化は，その真理の厳密な証明がなされて初めて達成される。厳密な証明において，われわれは，透き間のない推論連鎖を辿ることにより，その真理の真理性の根拠である原真理 (Urwahrheit) に至る筈である。この厳密な証明過程を吟味することによって初めて，われわれは先の哲学的な問い，すなわち，算術の真理が分析的であるか総合的であるか，ア・プリオリであるかア・ポステリオリであるかも，決定される。フレーゲはこれらの

問いに現れる概念をつぎのように規定し直す[5]：

(1) 当の真理の厳密な証明の遂行過程で，論理法則（logische Gegetze）と定義（Definitionen）にしか出会わないならば，その真理は分析的（analytisch）である。

(2) 一般的・論理的本性を持たず，ある特別な学問領域に関連する真理を用いることなしには（ohne Wahrheiten zu benutzen, welche nicht allgemein logischer Natur sind, sondern sich auf besonderes Wissensgebiet beziehen），証明できないとき，その真理は総合的（synthetisch）である。

(3) 事実に訴えることなしには（ohne Berufung auf Thatsachen），証明できないとき，その真理はア・ポステリオリ（a posteriori）である。

(4) 証明が，それ自身はもはや証明可能ではなく証明の必要もない一般法則だけからなされるとき，その真理はア・プリオリ（a priori）である。

フレーゲは，数学的動機とともに，これらの哲学的動機から，『算術の基礎』全体の意図を，数の概念と算術法則の本性の探究へ向かうもの，と規定する（『基礎』§4）。これらの課題が遂行されるのは『基礎』第4部においてであるが，その準備として，フレーゲは先行する諸家の見解を批判的に考察する。これは3つの部分からなり，第1，2，3部に対応している。すなわち，算術命題の本性に関する，数の概念に関する，単一性と数1に関する，先行諸家の見解の考察である。以下，本稿は，第1部の算術命題の本性に関する諸家の見解の批判的吟味を取り扱う。

2．数式は証明可能か？

さて，算術命題において，個々の数を扱う2＋3のような数式と，すべての正の整数について成り立つ一般法則を区別することから，フレーゲは始める。何人かの哲学者たちは，数式が公理のように直接に自明であり，証明できないものと考えた。（ここで，名前が挙げられるのは，ホッブズ，ロック，ニュートンである。）特に，カントは，算術の数式が証明不可能であり，総合的であるとみなした，とフレーゲは理解する。フレーゲは，§5を，主としてカントの見解（とフレーゲに考えられる見解）が不十分であることを示すことに捧げる。

フレーゲがここで念頭においているのは，7＋5＝12という数式が，ア・プリオリではあるが分析的ではなく総合的であり，直観によってその正しさが示される，というカントの周知の議論である[6]。しかし，フレーゲ自身の例は，その自明性においてカントの数式よりはるかに劣る，

$$135664 + 37863 = 173527$$

という数式である。カントは，この「自明性の無さ」が，このような数式が「総合的」であるという本性を持つ例証となると考えた，とフレーゲは論じる。しかし，これが自明でないならば，何を根拠にしてこの数式の真であることは示されるか？証明によってでなければ，何によってか？カントであれば，直観によるであろう，とフレーゲは言う。そして，カントの指や点についてのわれわれの直観に訴える説明を引いている。

このようなカントの説明が不十分であることを，フレーゲは二つの論点から指摘する。第一は，算術命題がア・プリオリで総合的であるというカントの公式見解にも関わらず，指や点の直観に訴えることにより，算術命題が経験的命題であり，従ってア・プリオリでなくなる危険を冒している，という論点である。というのは，37863本の指の直観が経験から全く無縁の純粋な直観ではあり得ないだろうからだ。10本の指の直観すら，配置の変化により異なりうる。だとすると，そのような

直観が客観的基準になるか？なりそうもない。そもそも，135664個といった多数の指または点の直観を持ちうるか？持てたとして，別に37863個の指または点の直観と，173527個のそのような直観から，証明に代わる，上の数式の正しさの直観による説明がどのようなものか，明らかではない。

第二の論点は，カントが小さい数の場合だけを考えていて，大きい数の間の数式は考えていなかったようだ，ということである。確かに，７＋５＝12のような比較的小さい数を扱う数式の説明では，指や点の直観に訴えることが可能であろう。しかし，数式としては，大きい数と小さい数の場合を分けることは意味がなく，そもそも，どこで大と小を分けるか，その境界も判然としない。

このようなカント批判がそれ自体として的を射たものであるか，あるいは批判の仕方は公平であるのか，という問題は残るかもしれない。しかし，ともかく，フレーゲにとって，数式がそれ自体で証明の必要のない直観的自明性を持つ，という考えは不十分なものであった。フレーゲにとって数式も証明されねばならない。そこで，彼は§６において，数式の証明が可能であるとする哲学者・数学者の説を検討する。その代表として，ライプニッツの　２＋２＝４　の「証明」を以下のように引用する：[7]

定義：(1)　$2=1+1$

(2)　$3=2+1$

(3)　$4=3+1$

公理：同等なものを［同等なもので］置き換えても，同等なままである。

証明：
$$\begin{aligned} 2+2 &= 2+1+1 && \text{(定義(1)による)}\\ &= 3+1 && \text{(定義(2)による)}\\ &= 4 && \text{(定義(3)による)}\\ \therefore\ \ 2+2 &= 4 && \text{(公理による)} \end{aligned}$$

フレーゲによれば，この証明は定義と公理だけから導かれたように見えるが，実は括弧の省略による透き間が一行目と二行目の間にあって，証明としては不備である。実際，ここでの数の定義によれば，“$2+1+1$”という表現は許されず，“$2+(1+1)$”か“$(2+1)+1$”が許されるだけである。そして，定義(1)と(2)によって，

$$2+2=2+(1+1),$$
$$(2+1)+1=3+1$$

である。よって，$2+2=3+1$であることを導くには，

$$2+(1+1)=(2+1)+1$$

を示さねばならない。これは，加法の結合法則：

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

の事例である。よって，透き間のない証明は

$$\begin{aligned} 2+2 &= 2+(1+1) && \text{(定義(1)による)}\\ &= (2+1)+1 && \text{(加法の結合法則による)}\\ &= 3+1 && \text{(定義(2)による)}\\ &= 4 && \text{(定義(3)による)} \end{aligned}$$

となろう[8]。

ここでのフレーゲの指摘の要点は，透き間のない証明によって数式を証明するために，算術の一般法則が必要である，ということである。証明が必要である，ということはその式または命題が原真理ではない，ということを意味する。フレーゲにとって，証明は真理を原真理まで連れ戻すこと

である。すると，すべての数式が証明できるということを示すためには，何が確認されるべきか，という問いが現れよう。まず第一に，すべての数が，1と，「1だけ増やす」という操作とによって，定義される必要がある。すなわち，$2=1+1$，$3=(1+1)+1$，…という形で数の無限集合を確保する必要がある。これを表現する命題としての定義は一つの省略表現を規約する命題であり，一旦その規約が承認されると，その命題が論理的な分析命題となることに問題はない。第二に，数式の中の数表現が，すべてこのような，数1と1だけ増やすという操作からなる表現による定義に置き換えることができる。例えば，

$$2+2=4$$

は，

$$(1+1)+(1+1)=((1+1)+1)+1$$

に置き換えることができる。そして，このような数式が数の一般法則を使って証明できることを示せばよい。すると，第三に，数の一般法則がどのように証明されるのか？数の一般法則の身分はいかなるものであるか，が問題として残る。フレーゲ自身の見解では，数の一般法則も論理的に証明される必要があり，これは『算術の基本法則』で実行される。しかし，『基礎』第1部ではこの問題に関しても諸家の見解が吟味される（『基礎』§9以下，本稿4以下）。それに向かう前に，個々の数を経験的に定義しようとするミルのやり方が検討される。

3．数の定義についてのミルの見解の批判

前節で確実であろうことが示されたのは，数式が個々の数の定義と数に関する一般法則から証明可能である，ということである。しかし，これに関してはJ．S．ミルが異論を述べている。フレーゲは『基礎』§7，8で，数の定義についてのミルの見解を検討する。

フレーゲによれば，ミルも一見すると，ライプニッツ（およびフレーゲ自身）と同様な個々の数の定義を与えることにより，算術を数の定義の上に基礎づけようとしているが，すべての知識が経験的であるというミルの偏見によって，それが台無しにされている，という（『基礎』§7）。フレーゲが引用している『論理学体系』のある箇所(9)でミルは，

> 「各々の［自然］数は，大きさにおいてそれの次に小さい数に一つの単位を加えることによって形成されると考えられる，…」（括弧［　］による補足は田畑。以下同様）

と述べる。しかし，同時にミルは，

> 「他のいわゆる定義と同様に，これら［数の定義］も二つのものから作られている，すなわち名前の説明と事実の主張からである。…数の定義において主張される事実は物理的事実である。」(10)
>
> 「もしそうしたければ，われわれは“3は2と1である”という命題を数3の定義と呼んでもよいし，幾何学に関して主張されたように，算術は定義に基礎づけられた科学である，と主張してもよい。しかし，それらは幾何学的な意味で定義なのであって，論理的な意味では定義ではない。［それらは］用語の意味を定めているだけではなく，それと共に，観察された事実をも主張している。」(11)

とも述べる。ここで，フレーゲにとって反論さるべきミルの議論の中心は，数の定義の内容が，言葉の意味の定義であるのみならず，事実の，それも観察された事実・物理的事実の主張をも含む，という論点である。フレーゲにとって，算術命題の一つである数の定義の内容が経験的事実の主張

を含む，という見解は，算術命題をア・ポステリオリな命題であるという結論を導くことになるゆえに，見過ごせないのである。フレーゲは，例としてミルが続けて述べている，数３の定義が含意するとされる観察事実を攻撃する。ミルはこう述べる：

> 「こうして，われわれは“３は２と１である”を３の定義と呼んでよい。しかし，その命題に基づく計算は定義そのものから導かれるのではなく，むしろそこで前提されている算術的定理，すなわち，対象の集まりが存在しており，それらは感覚に $_{\circ}{}^{\circ}{}_{\circ}$ という印象を刻む一方で，例えば $^{\circ\circ}\quad{}^{\circ}$ というように二つの部分に分離されもする，という定理から導かれる。」(12)

３の定義がそれに基づくという事実が $_{\circ}{}^{\circ}{}_{\circ}$ という感覚印象を与えるものだとすると，それらが釘づけにされて固定されていなくて幸いである，なぜなら，もし固定されて $^{\circ\circ}\quad{}^{\circ}$ の印象を与えるような分離が不可能であれば，２＋１は３とはならないだろう，とフレーゲは皮肉る。また，味覚の場合，このような視覚的印象を与えることはないから，甘さと酸っぱさと苦さを３つの感覚とよぶこともできなくなる，とも言う（『基礎』§７)。

数の定義の〈内容〉が経験的事実の主張を含むとすることに反論した後，フレーゲは，これらの定義の〈正当性〉に関しても，事実の観察が不要であることを論じる（『基礎』§８)。フレーゲによれば，２＝１＋１，３＝２＋１，４＝３＋１，…　といった定義は，これらがそれに基づくとミルが主張するような観察事実がなくとも，正当化される。集積と分離を観察せずとも，３＝２＋１と定義できる。なぜなら，この定義が２＋１に何の意味も与えない訳ではないからだ。あらゆる数の定義において，観察された事実の存在が必須の条件だとすると，数０は定義できなくなる。誰も０個の小石を見たことがないからだ。観察事実の要請を拒絶すると，ミルの考え方では，０を使う計算において，０が何の意味もないただの記号であり，計算は意味のないゲームである，という結論に導かれることになろう，とフレーゲは考える。しかし，フレーゲによれば，そのようなことはない。計算は意味のないゲームではなく，数０にも重要な意味が与えられ得る（ただし，そのことの本格的な考察は『基礎』の第４部で行われる)。

考えられるミルの側からの反論は，感覚によって対象の識別ができなければ，算術は不可能ではないか，というものであろう。しかし，これは算術命題の真理性に影響を及ぼすかどうかという意味での命題の正当性に関する問いではない。むしろ，算術命題の内容を知るために観察を行わねばならないのではないか，という命題の内容に関わる問いである。このような問いが出されるのは，算術命題，特に数の定義の内容に感覚的・経験的内容が含まれている，という前提があるためである。ところが，そのような前提をそもそも取らないのであるから，答える義務から免れる，というのがフレーゲの応答であろう。

４．算術法則は帰納的真理か？

これまでの議論で，数式が，個々の数の定義と数に関する一般法則とから証明されること，また個々の数の定義が観察される事実を主張しているのではなく，それらの定義自身の正当性のために事実を前提とするのでもない，ということが示された，とフレーゲは考える。そこで，次に考察されるべきことは，数についての一般法則の本性，それらの身分の問題である。フレーゲはここで（『基礎』§９－10)，算術法則を帰納的なものとみなすミルを批判する。

ミルは，５＋２＝７の証明が，数の定義と，「等しいものの和は等しい」という包括的な法則に

よってなされると主張する[13]。その証明とは，以下のようなものである：

	5＋1＝6	(数6の定義による)
∴	5＋1＋1＝6＋1＝7	(当該法則と数7の定義による)
ところで	2＝1＋1	(数2の定義による)
∴	5＋2＝5＋1＋1＝7	(当該法則による)

この証明も，ライプニッツの　2＋2＝4の証明（本稿2）と同様，括弧の省略による結合法則の使用が見過ごされているが，ここで問題なのはその点ではない。ミルは，「等しいものの和は等しい」という法則が，「部分から成り立つものは，それらの部分の部分からも成り立つ」という原理と同等であり，この真理は帰納的真理であって，最高位の自然法則である，と言う。このような位置づけが問題である。まず，フレーゲは，「等しいものの和は等しい」という法則が，ライプニッツの「同等なものを［同等なもので］置き換えても，同等なままである」という公理（本稿2）の代理物であることを指摘し，これを自然法則とは呼べないと主張する。一般に，算術の法則が自然法則であると言えるためには，それらの真理が持たない意味をそれらに付加せねばならない。

フレーゲは，算術の真理を自然法則と呼ぶミルの見解が，算術に現れる記号，例えばプラス記号（＋）の経験的解釈――物理的物体や体積の諸部分の全体に対する関係を表現したものとする解釈――に裏打ちされていることを指摘する。5＋2＝7は，2単位体積の液体を5単位体積の液体に注ぎ込むとき，7単位体積の液体が得られる，ということを意味するのではない。そのような意味が与えられるのは，5＋2＝7という算術の真理が，化学的作用により体積が変化しないとき，液体を混ぜ合わせるという操作に応用される場合である。プラス記号は，多くの応用において体積の合成に対応するであろう。しかし，そのことがプラス記号に意味を与えるのではない。物理的物体の体積に何ら関係しない別の応用もあるからである。例えば，出来事の数を数える場合がそうである。また，部分の全体に対する関係を，ミルのように物理的物体の間の関係に限定することもできない。元首殺害は殺害一般の部分であるが，これは論理的な従属（logische Unterordnung）の意味での，部分の全体に対する関係である。よって，加法は，一般に，物理的関係に対応することはなく，加法の一般法則も自然法則ではない。(『基礎』§9)

算術法則が自然法則ではないとしても，ミルが主張するように，帰納的真理であるという可能性は残る。そこで，フレーゲはこの問題の検討に移る（『基礎』§10)。

もし加法の結合律のような算術法則が帰納的真理であれば，それの持つ一般性に到達するにはどのような事実から出発すべきか？この出発点はおそらく数式であろう。しかし，数式は，個々の数の定義と数の一般法則から導かれることがすでに示された。すると，これは循環に陥ることになるのではないか？なぜなら，帰納によって数の一般法則に到達するための出発点である数式が，再び数の一般法則に依存しているからだ。この循環を一旦断ち切り，数式が数の一般法則から導かれることを無視し，数式から一般法則が帰納されるという側面だけを考察しよう。この場合にも，フレーゲによれば，帰納が成り立つ基盤がそもそも欠けていることが指摘できる。その基盤とは，数という同一の類に見られるべき斉一性（Gleichförmigkeit）である。フレーゲは，それに関連するライプニッツの言葉を引用する[14]：

> 「そのこと［斉一性を持つこと］は，時間や直線については言えるが，しかし，図形については決して言い得ないし，まして，単に大きさにおいて異なるのみならず類似性も無い数の場合は，なおさら言えない。偶数は，二つの同一部分に分割され得るが，奇数はそれができない。3と6は三角数であり，4と9は平方数であり，8は立方数である，等々。

そして，このことは，図形においてよりは，数において一層よく生じる。というのは，同じでない二つの図形は互いに完全に類似し得るが，しかし，二つの数はそうはならないからだ。」

われわれが，数を同種のものとして扱うことに慣れ，それらの間に斉一性があると思い込みがちであるのは，数の一般法則を多数知っていることに起因する，とフレーゲは言う。空間の点，時間の各瞬間は，それ自体として，差異や特徴を持つ訳ではなく，条件が同じであれば，他の場所，他の時間においても，それらの間の法則はいつでも成り立つ。つまり，それらの間に斉一性が成り立っている。しかし，個々の数の場合は，そうではない。数は時間・空間において存在するのではなく，数列におけるそれらの位置は，空間における位置とは価値が異なる。従って，帰納法が成り立つための基盤である数の間の斉一性の欠如によって，数の法則を帰納によって得ることの正当性は見出せない。

それでは，数の一般法則はどのようにして得られるのか？ここでのフレーゲの示唆（あくまで示唆に留まるものであるが）は，数の回帰性（recursiveness），すなわち繰り返すということ，に注目することである。数の諸特性は，個々の数の定義，すなわち，数 1 と 1 だけ増やすという操作の繰り返しにより与えられたから，そのような繰り返しに基づいて導き出される筈である。よって，数の一般法則についても，すべての数に共通するような数の創出方法に基づいて証明されるであろう。

いずれにせよ，数の一般法則が帰納的な真理ではないことが以上の考察において示された，とフレーゲは考える。そこで，彼は，哲学的動機からの算術命題の身分への問い，すなわち，算術命題が分析的か総合的か，ア・プリオリかア・ポステリオリかという問いへと向かう。

5．算術法則は総合的でア・プリオリか？

フレーゲは『基礎』第 1 部の最後の数節（§12－17）で，算術命題の哲学的位置づけの問題に向かう。二種類の対立項，すなわち分析的と総合的およびア・プリオリとア・ポステリオリを組み合わせると 4 つの組み合わせが生じる。そのうち，〈分析的でア・ポステリオリ〉という組合わせは在り得ない。命題が分析的であれば，その証明は定義と論理的一般法則にしか依存しないが，それらは経験的な事実とは無関係だからである。また，ミルの見解が否定されたことに対応して，〈総合的でア・ポステリオリ〉という組合わせも算術法則には相応しくない。従って，残る組み合わせは，〈総合的でア・プリオリ〉と〈分析的でア・プリオリ〉である。このうち，フレーゲによる分析性の定義に従うと，ある命題が分析的ならば必ずア・プリオリであるから，フレーゲは後者の組合わせを〈分析的〉で代表させる。すると，問題は次のように整理される：

算術法則は総合的でア・プリオリか，それとも分析的か？

フレーゲは§12－14で，算術法則が総合的でア・プリオリではないことを示そうと試みる。フレーゲの戦略は，もし算術法則が総合的でア・プリオリならば，カント（そしてこの説を支持する大部分の論者）の見解によれば，その認識根拠として直観を考えねばならないが，その根拠が算術の基礎づけには不適切であることを示すことで，間接的に，算術法則が総合的でア・プリオリであることを否定する，というものである。彼は数，あるいは一般に量（Größe）に直観はなじまない，とする。カントは直観について，『論理学』でこう定義している：

「直観とは個別的表象であり，概念とは一般的または反省的表象である。」(15)

そして，カントによれば，感性なしでは直観は働かない。『純粋理性批判』でカントは述べる：

「感性によってわれわれに対象が与えられるだろう。そして，感性のみがわれわれに直観をもたらす。」(16)

だとすると，例えば100,000を直観と呼べることになるが，この意味での直観は算術法則を基礎づけることはできない，とフレーゲは言う（『基礎』§12）。

フレーゲは，幾何学の一般命題が直観から得られる点についてはカントおよびライプニッツと見解を同じくする。しかし，算術の場合はそうではない。幾何学の対象である点，線，面といったものは個別的なものではなく，それ自体で類の代表となる。それゆえ，それらの表象の直観がそのままそれらに関する一般命題を基礎づけることができる。しかし，数の持つ特徴は個別的であり，それらの表象の直観は数の一般法則を導くには多様すぎる。§13，14で，フレーゲは直観に関連させて幾何学と算術の相違をこう述べる：

「幾何学的点は，それ自体で考察されるとき，どんな他の点とも区別されはしない。同じことは直線や平面にも当てはまる。……幾何学においては，一般命題が直観から得られる場合，そのことは以下のことからも説明がつく。すなわち，直観された点，直線，平面は本来，決して個別的なものではなく，それゆえ，それらの類全体の代表とみなされ得る。数の場合は，事情が別である。各々の数は，その特徴を持っている。どの程度まである一定の数が他のすべての数を代表できるのか，どこでその特殊性が有効なものとされるのかを予め言うことはできない。」（『基礎』§13）

フレーゲによれば，どんなに空想的な物語を考えようとも直観に留まるかぎり，われわれは幾何学（ユークリッド幾何学）の公理に縛られる。概念的思考だけが，例えば，四次元空間や正の曲率の空間を仮定して，ある程度，幾何学の公理から自由になる。そして，概念的思考によって，幾何学の公理に反する，つまり直観に反する命題を仮定でき，しかも，それにより矛盾に陥らない。これは幾何学の公理が相互に独立であり，そして論理の法則からも独立であることを意味する。しかし，数の理論の基本命題については，このようなことは言えない。もし，算術の基本命題に反することを仮定すればすべてが混乱に陥り，そもそも思考することさえできないだろう。フレーゲは，算術の基礎は他のすべての科学より深い部分の基礎を形作っている，と考える。それは，人間の思考そのものに関わる。フレーゲは，算術と思考との関わりをこう説明する：

「算術の真理は，数えうるものの領域を支配する。これは，最も広範囲な領域である。というのは，現実的なものや直観的なものばかりがその領域に属する訳ではなく，すべての思考可能なものがその領域に属するからである。従って，数の法則は思考の法則と最も緊密に結びついている筈ではないか？」（『基礎』§14）

算術の真理がすべての思考可能なものを支配するとすれば，それは特殊科学の真理であると考えることはできないだろう。すなわち，算術の真理は総合的ではなく分析的であると考えねばならない。こうして，フレーゲの議論は，直観が算術を基礎づけることの不可能性を示して，算術法則の総合性を間接的に否定することから，算術が思考と関わることを示したことで，算術法則の分析性を直接に問題にする方向へと踏み出す。

6．算術法則の分析性とその評価

『基礎』第1部の最後の三節（§15－17）で，フレーゲは，算術の真理（数式と法則）とが分析

的である，ということを支持するライプニッツの議論を補強し，ミルの反論を批判し，自らの議論を展開する。

ライプニッツは不十分ながら，数の法則が分析的であることに気づいていたようである。ライプニッツにとって，ア・プリオリであることと分析性は一致し，また彼は，代数は論理という高度な技術から利点を得ている，と考えていた。ライプニッツは，必然的真理である算術の真理は証明されるか，または同一性に還元される，と言う。しかし，他方で，ライプニッツはすべての真理の証明可能性を考えていたようであり，これが彼の分析性の捉え方を一面的なものにしている，とフレーゲはみなす。数の科学の成長を考えると，単なる同一性に根ざすと見ることは困難であり，論理の形式がそのような豊かな内容を生み出したことの説明が十分ではないからだ。

ミルの帰納による算術法則の基礎づけという見解において，彼の論点の中心は，算術法則が経験的事実により支持されるという点である。もしそのような支持がなければ，ミルによれば，数学者は空虚な記号のゲームを為しているにすぎないことになる。しかし，そのように考える必要はない，とフレーゲは反論する。数学者は記号でもって，何か感覚的に知覚可能なものや直観的なものを理解していなくとも，計算を実行できる。よって，知覚可能な内容を記号の意味に盛り込む必要はなく，別の応用により別の内容を盛り込むことが可能である。応用と本来の意味とは異なるのである。それでは，数法則の分析性はどのようなものであり，経験的事実との関係はどのように捉えられるのか？

フレーゲが考える分析性の形式は，結論を当の算術法則とする推論系列である。それはある思考系列である。結論である算術法則に，応用という場面で経験的事実の意味が含まれているならば，そのような事実を成り立たせる前提は，その内容を推論の条件として，結論である法則に随伴させる。こうして，思考系列においてすべての事実の前提を条件で置き換え，帰結が条件の系列に依存するという形で結論が導かれる。この真理は，事実そのものとは切り離し，思考のみにより，「言語の技術」（ミルの言い方）だけにより根拠づけられる。数の法則はこのような類の真理として捉え直すことができる。このとき，数の法則は分析判断となる。なぜなら，推論の出発点は思考の法則としての一般的論理法則かまたは定義であり，事実（または特殊な領域）との結び付きは，条件つきの法則という形で結論に随伴するから，それらが証明の根拠とはならないからである。この分析性は，真理の相互の依存関係に光を当てることに貢献する。こうして，算術の真理は，将来の使用のための全推論系列を圧縮された形でそれ自身の中に含む。一旦，証明がなされたなら，もはや個別的な推論を行う必要はなく，全系列の結果について述べることができる。これらが，推論系列という形に分析された数法則に与えられた利点であり，純粋論理の不毛さという根拠のない先入見の反証となるものである。フレーゲは算術法則の分析性をこのような形で考え，それを以上のように評価した。

＊　　　＊　　　＊

ここで，暫定的な結論を述べよう。フレーゲは，諸家の見解を批判的に考察することにより，算術命題の分析性を，言わば間接的に示した。算術命題のうち，個別の数を扱う数式は直観的に明らかなのではなく，個々の数の定義と数の一般法則から証明されねばならない。他方，数の一般法則は，数概念の論理的定義と論理の一般法則から導かれる筈である。これが，技術的な側面も含めて詳細に実行されるには，『算術の基本法則』を俟たねばならない。われわれが本稿で検討した『算術の基礎』第1部においては，それの準備として，自らのプログラムの哲学的動機に光を当てている。特に，カント，ミル，ライプニッツといった哲学者たちの見解との対比において，算術命題の

位置づけに関する彼の独自な観点を出そうと努めている。先行の論者の批判を主な目的とするこの第1部では，それらの観点の十分な展開は抑制され示唆に留まっているものも多いが，それらを押さえておくことは，以後の『基礎』第4部での具体的な展開への必要な一段階であったのである。

註

(1) 『算術の基礎』のテキストとしては，Gottlob Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik, Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl,* Mit ergänzenden Texten kritisch herausgegeben von Christian Thiel, Felix Meiner (1986), およびオースティンによる独英対訳本である，G. Frege, *The Foundations of Arithmetic,* Translated by J. L. Austin, 2nd. rev. ed. Northwestern U. P. (1953) を用いる。

(2) 以下の記述は，Joan Weiner, *FREGE in Perspective,* Cornell U. P. (1990) の Part. Ⅰの1，特に 24－26頁に負う。

(3) "Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres." この定義は，*Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique* (1821) の Préliminaires（以下の復刻版の4頁）にある。この『解析学教呈』と呼び慣らわされる書物は全集 *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy,* Sér. 1, 12 vols.；Sér. 2, 15 vols, Paris (1882－1974) のSer. 2の3にある。テキストとしては次の復刻版を用いた：A. L. Cauchy, *Analyse Algébrique,* Gabay (1989)。

(4) Cf. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,* Oxford U. P., (1972), p. 952.

(5) 分析的と総合的，ア・プリオリとア・ポステリオリという伝統的な哲学用語をここで使用することに関して，フレーゲは，これらに新しい意味を付与しようとする意図はなく，これまでの著述家，特にカントがこれらの言葉によって考えていたことを正確に言おうとしているにすぎない，と『基礎』§3の脚注で断っている。

(6) フレーゲがここで（『基礎』§5）引用しているのは，『純粋理性批判』のⅠ：先験的原理論第二部門：先験的論理学，の第一部：先験的分析論，第二篇：原則の分析論，第二章：純粋悟性のすべての原則の体系，第三節：純粋悟性のすべての総合的原則の体系的表示，1．直観の公理，の部分である（Immanuel Kant, *Kritik der Reinen Vernunft,* B 204－205, hrsg. I. Heidemann, Reclam (1966)，S. 240, 邦訳：カント／篠田英雄訳『純粋理性批判』岩波文庫，239頁)。ここで，カントは，「あるものがどれくらい大きいか」という問いの答である量についての命題が総合的命題で，しかも直接に確実（unmittelbar gewiß）である，つまり論証できないものである（indemonstrabilia）が公理ではない，と述べる。また，「等しい量に等しい量を加えればそれぞれの和は等しい」といった命題は分析的命題であって，これも公理ではない，という。カントにとって，

> 「公理は，ア・プリオリな総合的命題でなければならない。これに反して，数的関係を表わす明白な（evident）命題は，確かに総合的命題ではあるが，しかし幾何学の命題のような一般命題ではない，まさにそれ故に，このような命題は公理ではなく，数式と呼ばれてよい。例えば（7＋5＝12）という命題は，分析的命題ではない。というのは，私は7の表象においても，5の表象においても，あるいはこの両数の合成の表象においても，数12を考えることができないからである（私がこの両数の加法において，数12を考えて然るべきだ，ということは，ここでは問題にならない。というのは，分析的命題の場合は，私が主語の表象において実際に述語を考えているかどうか，ということだけが問題だからである。)」（篠田訳を一部改変，強調は原文）

ここで，フレーゲとカントにあっては，分析性や証明可能性に関する基本的な見解の相違が存在すること，に気づかざるを得ない。数式が「明白である」または「直接に確実である」ゆえに論証できない・証明できないとする点で，カントの見解はフレーゲのそれと基本的に異なっている。しかし，カントは，「直接で確実である」ことの根拠をこの箇所では明示していないように思える。むしろ，ここでは，7＋5＝12といった数式が総合判断であるということが論点である。そして，総合判断であるとする根拠は，数7の表象にも，数5の表象にも，両数の和（7＋5）の表象にも，数12の表象が含まれないことである。括弧の中でカントが付け加えていること，すなわち「両数の<u>加法7＋5において</u>12という数を考える」ということに，この数式を証明可能とみなすというフレーゲの見解への接近の可能性が見出されるが，結局，「主語の表象に述語の表象が含まれるか否

か」という基準の外にカントは出なかったようである。従って，カントにとって，７＋５＝12が「直接に確実である」ということの根拠は別に求めざるを得ない。それは「直観」である。『純粋理性批判』緒言のＶ「理性に基づく一切の理論的な学にはア・プリオリな総合判断が原理として含まれている」(Kant, op. cit. B 15-16, s. 64, 前掲邦訳70頁）では，こう述べられる：

「12の概念は，私が７と５の結合を考えるだけで，すでにそれによって考えられているというわけにはいかない。……ところで，この両方の数の一方に対応する直観（Anschauung)，例えば，五本の指，あるいは（…）五個の点というような直観に頼って，この直観において与えられた五個の単位を７という概念に一つずつ順に付け加える場合は，７と５という両方の概念の外に出なければならない。というのは，まず数７を取り，それから，５の概念の代わりに直観としての私の手の五本の指に頼ることにより，数５を構成するために予め纏めておいた五個の単位を，その私の像を用いて順次に数７に加えていくと，ここで数12が生じるのが判るからである。」(同)

結局，ここで　７＋５＝12　という数式が「直接に確実である」ことの根拠は，直観に明らかと思われる指の表象を一つずつ具体的に足し合わせる，という操作の結果である。概念を分析しても，７＋５から12は出て来ない。すなわち（Kant, op. cit. s. 65)：

「７に５が加えられねばならぬということを，なるほど私は和（７＋５）の概念において考えたが，しかし，この和が12に等しいということは考えなかった。従って，算術命題は，常に総合的命題である。」(同)

概念的思考では７＋５＝12の「直接に確実である」ことが知られないが，表象を用いた直観では明らかである，とするカントの主張に対して，フレーゲは以下の議論で，直観に明らかとは思えない「大きな数」を用いて反論する。しかし，カントは，むしろ大きな数の方が自らの主張を支持する，と言う（Kant, op. cit. s. 65)：

「このこと［算術命題の総合性］は何かもっと大きな数を使ってみればいっそうはっきりする。実際，これら両数の概念をいくらひねくり廻したところで，直観を援用しないかぎり，これらの概念を分析するだけでは，その和［が何であるか］が決して見出せない，ということは明らかに納得されるからだ。」(同)

(7) *Die Philosophischen Schriften von G. W. Leibniz*, 5, hrsg. von C. J. Gerhardt, Berlin (1882)；Nachdr. Olms (1978), s. 394.（邦訳：ライプニッツ『人間知性新論』米山優訳，みすず書房(1987)，419－20頁）

(8) もう少し細かく言えば，①一般法則から数式を導出することを許す代入操作が前提されていなければならないし，②証明の第一行目は，ａ＝ａという（論理の）一般法則からの代入例：２＝２に，「公理」とよばれている同一性の推論規則　ａ＝ｂ，Ｆ(ａ) ∴Ｆ(ｂ) を適用して導かれたものとしなくてはならず，さらに③結論を出すときの「公理」の使用において，

$$a=b,\ b=c\quad \therefore a=c$$

という規則を適用しているが，これも公理，つまり同一性の推論規則から導かれる。フレーゲは『算術の基本法則』では，もちろん，これと同水準の厳密さを保持している。

(9) John Stuart Mill, *A System of Logic Ratiocinative and Inductive, Being a Connective View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigation*, J. M. Robson (ed.), *Collected Works of John Stuart Mill*, vol. Ⅶ, University of Toronto Press (1974), Book Ⅲ, ch. xxiv, §5, p. 612.

(10) J. S. Mill, op. cit. p. 610.

(11) J. S. Mill, op. cit. Book Ⅱ, ch. vi, §2, p. 257.

(12) J. S. Mill, op. cit. p. 257.

(13) J. S. Mill, op. cit. Book Ⅲ, ch. xxiv, §5, p. 610.

(14) フレーゲはバウマンの本（Baumann, *Die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik*, Berlin (1868)）に引用してあるライプニッツの言葉を孫引きしているようであるが，ライプニッツのオリジナルの箇所は以下である：Leibniz, op. cit. Liv. Ⅱ, ch. xvi, §5, p. 143.（邦訳：ライプニッツ『人間知性新論』128頁）本文の翻訳は，フレーゲの『基礎』のテキストのドイツ語から筆者が訳した。

(15) "Die Anschauung ist eine einzelne Vorstellung (repraesentatio singularis), der Begriff eine allgemeine (repraesentatio per notas communes) oder reflektierte Vorstellung (repraesentatio discursiva)." *Immanuel Kants Logik, ein Handbuch zu Vorlesungen*, hrsg. Gottlob Benjamin Jasche, A 139, Akad.-Ausg. Ⅸ s. 91.

(16) "Vermittelst der Sinnlichkeit also werden uns Gegenstände gegeben, und sie allein liefert uns A n s c h a u u n g e n ; " KRV B33, s. 80. (強調はカント)