鳥取大学教育学部研究報告　人文・社会科学　第 48 巻　第 2 号　(1997)　211

フレーゲとヒルベルトの論争

哲学教室　田　畑　博　敏

はじめに

本論文は，フレーゲとヒルベルトの間に交わされた往復書簡の中に端を発し，後にフレーゲの幾何学の基礎についての二種類の連作論文に発展した主題，すなわち公理・定義の位置づけ，無矛盾性と独立性の証明といった公理的方法の問題を巡る両者の論争を取り上げる。

19世紀の公理的方法の発達は，非ユークリッド幾何学の発見(1)に刺激されて始まったさまざまな幾何学研究の進展とともに生じたが，その基礎は未だ完全ではなかった。世紀が替わろうとする頃（1899年）にヒルベルトの『幾何学の基礎』(2)が出現して，公理体系の基礎づけに関する知見は大いに進歩した。この本は，ユークリッド幾何学に対する最初の厳密な諸公理を立てたものであり，それらの公理の無矛盾性と独立性の証明を含んでいた。ヒルベルトのこの仕事は，後の有限主義的な「ヒルベルトの計画」(3)の発端となるもので，20世紀の数学・論理学・哲学に甚大な影響を及ぼした。

フレーゲはヒルベルトの公理論に対しては不満であり，さっそくヒルベルトとの文通を開始した(4)。ヒルベルトが文通を中断した後，「幾何学の基礎について」と題する二種類の論文(5)を発表して，ヒルベルトの方法を批判するとともに，無矛盾性と独立性についての自らの見解を発表した。彼自身の「哲学観」のゆえに，フレーゲはヒルベルトの方法の持つ「革新性」を十分に理解し得なかったふしがある。しかし，その後の数学・論理学の世界ではヒルベルトの影響が強まり，今回もフレーゲの見解はほとんど黙殺されてしまった(6)。

そこで，本論文の目的は，フレーゲとヒルベルトの論争に現れる論点を再度検討し，ヒルベルトの側に傾きすぎた評価を，より公平な所まで復元することである。フレーゲは古典的な公理論に固執している点があるとは言え，数学における公理と定義の役割についての洞察は極めて厳密で正確であり，「陰伏的定義」（implicit definition）についての混乱はむしろヒルベルトに跡づけられる。「厳密な証明を求める」という形で典型的に現れたフレーゲの数学に対する「厳密さ」の要求は，数学の公理体系を考察する場合にも，その徹底ぶりをいかんなく発揮していることが示されよう。

1．公理的方法

理論を演繹的に展開させるとき，証明なしで使用される原理や仮定は予め明示的に述べねばならない，といった公理的方法の一般的な定式化において，フレーゲとヒルベルトは相当の部分において一致した見解を持っていた。両者とも，無制限に公理を追加して新しい理論を増殖させる「生成

的方法」には批判的であった。また，証明を機械的にチェックすることができるような理論の完全な形式化という，当時の「革命的」な理念も，両者は基本的に受け入れていた。しかし，公理的方法に対する二人の哲学的動機には，かなりの相違が見られた。フレーゲが数概念の分析を最終目標として，その分析の正しさを証拠立てるために『算術の基本法則』の論理体系を必要としたのに対して，ヒルベルトは無矛盾で独立した幾何学の公理体系を見つける，という数学的課題に促されて公理的方法を考察した。フレーゲの場合に言わば手段であった公理的方法は，ヒルベルトの場合は目的の一部であった。公理的方法に対する両者の動機の違いが，両者の哲学的な態度の違いに結びついているように思われる。

公理の地位は，当時の問題の一つであった。証明できない原理としての公理はどのようにして正当化されるのか？フレーゲの解答は伝統的なものであった。証明における循環を避けるために，公理はもはや証明できないものと見なさねばならないが，公理の真理性の起源はわれわれの直観に求められる，というのがフレーゲの見解である(7)。さらに，公理は真でなければならないのみならず，ある種の「自明性」を持たねばならないと考えているように見える。特に，幾何学の公理の場合の「自明性」はわれわれの空間的直観に求められる。われわれは直観に反するような幾何学（非ユークリッド幾何学）を理解できるが(8)，それは概念的思考によって概念的に把握されるのであるから，フレーゲにとって直観によって支えられる「自明性」を欠くことになろう。

公理の地位に関するヒルベルトの独創的な見解は，非ユークリッド幾何学の発見による，緊張を強いられた数学的思考から生み出されたものであった。公理は無矛盾でさえあれば，公理の真理性に対する独立した根拠は必要がないという彼の見解は，数学全体の重心を真理の問題から演繹上の関係に移行させた。「実在」を反映するという重荷から解放された公理は，無矛盾という最低限の紳士協定を守りさえすれば，新しい数学理論を創造することに躊躇なく利用され得るのである。しかし，そのような見解は，哲学的には，ある種の規約主義に通じる（ヒルベルト自身が規約主義者であった訳ではない）。ヒルベルトは，数学理論の創造という点では画期的な思考を切り開いたが，無矛盾性が真理にとって十分であるという彼の主張によって生み出される哲学的問題には，目を向けなかったように見える。

定義もまた，両者が論争を行った頃は不明瞭な主題であった。真理の観点からと同様，意味の観点からも循環は避けられねばならないということは認められていた。フレーゲは，ヒルベルトがなした以上に，はるかに明確で精密な「定義論」を有していた(9)。フレーゲにとって，算術の法則は論理法則による定義の変形連鎖によって得られるから，定義はある種の省略表現だった。フレーゲは言う：

> 「数学で定義と言われるものは，通常，言葉または記号の意味（Bedeutung）の規約である。定義は，これまでいかなる意味も持たなかったが，今やそれによって意味を得るところの言葉または記号を含むという点で，他の数学的命題とは異なる。」(10)

フレーゲはまた，定義が消去可能性と非創造性の要求を充たすことを確保するための，定義の形式的な規則も正確に提示した(11)。ヒルベルトとともにフレーゲは，すべての定義が，もはや定義されず当該の体系内部でいかなる定義も不可能であるような究極的な表現，すなわち体系の原始語に到ることをよく理解していた。

そうすると，どのようにしてそのような原始語は意味を得るのか，という問題が生じる。フレーゲの解答は，原始語は非形式的に**解明されねばならない**，すなわち意味の説明が与えられねばならない，というものである。

「これ［解明（Erläuterung)］は，科学者たちがお互いに理解し合い，科学を伝達することができるようにと用いられるものである。それは予備学の一部と見なされねばならない。それは科学の体系の中にはいかなる場所も占めない。…解明の目的は実践的なものであって，その目的が達成されたならば，人はそれに満足せねばならない。これを行うに際して，われわれは理解と示唆が相半ばする善意に訴えねばならない。比喩の使用がなければわれわれは何処にも到達しないだろう。しかし，われわれは解明する人には次のことを要求する，すなわち，彼は自分の意図することを確実に知っていること，（たとえ善意に出会ったとしても）誤解の可能性が生じたならば，彼の解明をもっと完成したもっと完全なものにする用意がなくてはならない，ということを。」(12)

フレーゲは解明そのものについては正確な概念を提示している訳ではないが，定義と解明の区別は厳格に行った。定義だけが公理的理論の一部分と見なされねばならず，従って厳格な形式を充たさねばならない。こうして，フレーゲは一方において，ユークリッドの「点は部分を持たないものである」といった定義を拒否しながら，他方でそれを解明として受け入れる余地も残していた。

ヒルベルトの原始語へのアプローチは，フレーゲよりはるかにラディカルで画期的なものであった。公理は（部分的に）原始語を定義する，なぜなら，

「明らかに，すべての理論は，相互の必然的関係を伴う諸概念の枠組または図式にすぎず，基本要素［原始語］をどれにするかを任意に決めてよいからです。」

というのがヒルベルトの見解であった(13)。これは確かに独創的な見解であり，形式化という理念に大きな刺激を与えるものであり，現代的公理論の発展を生み出す原動力となった。にも関わらず，ヒルベルトの立場は，そのままでは明確化を必要とするものである。どのようにして公理が定義となるのか？もし公理が導入する語彙を公理は一義的に決定できないとすれば，それはどんな種類の定義となるのか？これらの疑問が，フレーゲのヒルベルト批判の根底に横たわっている。

2．公理と定義

フレーゲは，ヒルベルトの『幾何学の基礎』の草稿となった講義ノート(14)の中に，公理と定義についてのヒルベルトの混乱した取り扱いを見出した。一方で，ヒルベルトは，公理が「われわれの直観の基本的事実」を表現しているとしながら(15)，他方で，公理が“間”という語によって表現される関係や“線分”という語によって表現される概念を「定義する」と述べている(16)。しかも，「定義」と題された一節が別にあって，そこでは“間”や“線分”といった術語に通常の明示的で名辞的（ノミナル）な定義が与えられている(17)。フレーゲは，ヒルベルト宛の手紙で，公理や定義のこのような「逸脱した」用法についての適切な説明がないと批判し(18)，講義ノートを送ってくれたH．リープマンには「このヒルベルトの仕事は全体として失敗であり，十分な批判無しには使えないもの」と書き送った(19)。目前の資料となる講義ノートだけから判断すれば，フレーゲの批判は当たっていたと言えよう。

厳密さを重んじる点ではフレーゲにひけを取らないと自覚していたであろうヒルベルト(20)は，彼の公理についての考えを理解するための示唆をフレーゲに与えた。第一に，公理は公理体系全体として，公理の中に現れる語の完全な定義を与えること(21)，第二に，彼の公理はただ一つの概念を一義的に決定することはないが，このことは数学の公理体系がさまざまな理論に応用されるということを意味するから，欠点となるどころか利点であること(22)，をヒルベルトは主張した。実際に，公

理は，原始語と当該体系の概念の間での適切な一対一写像の下で，その公理を充たすさまざまな概念体系を決定する。フレーゲも言及している論文「数概念について」の中で，ヒルベルトは，実数が，例えば基本列やデデキント切断である必要はなく，その相互関係が公理によって与えられるところの事物の体系にすぎない，と述べた[23]。ヒルベルトはその論文で，当時行われていた「生成的方法」ではなく，彼の「公理的方法」を幾何学にも数論にも適用することを提唱したのである。

ヒルベルトから送られたこの「数概念について」を読んだフレーゲは，ヒルベルトの意図が幾何学を直観から解放し，算術と同様に論理的な学にすることにあることを了解した，とヒルベルトに書き送った[24]。これは，公理を証明されない真理としてではなく，定理が成り立つための条件と解することを意味する。Aを公理の連言とし，Tを定理とすれば，定理は正確には，

$$A \supset T$$

という条件命題として表現されねばならない[25]。定理Tの真理性の問いは，A⊃Tの証明可能性という論理的な問いに置き換えられる。こうして，幾何学の原始語は述語変項と見なされ，幾何学はその応用を直接の帰結として持つような純粋論理の一部となる。

しかし，ヒルベルトの定義としての公理の地位の問題は未だ依然として不明確である。例えば，公理によって少なくとも二つの点がすべての直線上に存在することが定められるとすると，その点は定義によって存在するのか？フレーゲにとって量化子は第二階の述語であった。それに対して，「点」「直線」「間」は第一階の述語である。ヒルベルトの公理には，これら第一階の述語と量化子という第二階述語が含まれる。そこでフレーゲはヒルベルトの公理を，第一階の述語変項の性質を記述する第二階の述語を定義していると解釈する。例えば，公理の連言において，「点」「直線」「平面」「間」「合同」という語が文字（述語変項）“F”，“G”，“H”，“I”，“J”で置き換えられた結果である表現を

$$A\ (F,\ G,\ H,\ I,\ J)$$

とする。そのとき，ヒルベルトの公理は，ユークリッド的「構造」，すなわちF，G，Hがクラスで，Iが三項関係，Jが二項関係で，その間にA（F，G，H，I，J）が成り立つような順序五組：

$$\langle F,\ G,\ H,\ I,\ J \rangle$$

を定義しているものと解釈できる。それは丁度，群論の公理に関して，Dを領域，fを二項演算とするとき，Dとfが群論の公理を充たすような順序対〈D，f〉として「群」を定義する，と解釈するのと同様である[26]。しかし，そのようにしても，公理の真理性は何ら保証されず，具体的な対象について公理は決定できない，とフレーゲは考える。直線上の二つの点の「存在」は，「点」「直線」「の上にある」といった概念と関係の二階の関係を示すのみであり，具体的な点を与える訳ではない。それは丁度，

公理1．任意の自然数aにつき，任意の自然数nを法として，aはそれ自身と合同である：
$a \equiv a \pmod n$
公理2．任意の自然数a，b，cにつき，aがある自然数nを法としてbと合同であり，bが同じ自然数を法としてcと合同ならば，aは同じ自然数を法としてcと合同である：
$a \equiv b \pmod n \wedge b \equiv c \pmod n \supset a \equiv c \pmod n$

等々の公理だけからは，$2 \equiv 8 \pmod 3$ かどうかを決定できないのと同様である，とフレーゲは主張する[27]。

以上のような批判的意見を含むフレーゲからの第二信を受け取ったヒルベルトは繁忙を理由に文

通を打ち切る。そこで，フレーゲは，公理のいわゆる「陰伏的定義」(implicit definition)に関する彼独自の解釈を含む考察，すなわち「幾何学の基礎について」と題する二種類の論文を発表することになる。ヒルベルトの公理について，それを第二階関係を定義したものとするフレーゲの解釈の正しさを，後に，ヒルベルトの弟子であるベルナイスがフレーゲの書簡が出版されたときの書評で認めている[28]。しかし，フレーゲは全体としてのヒルベルトの仕事の意義を正当に評価してはいない，と考えざるを得ない。後に見るように，フレーゲはヒルベルトの独立性の証明を，真正の公理ではなく定義条件を扱ったものにすぎないという理由で認めていない。算術を論理に還元しようとしたフレーゲが，ヒルベルトによる公理理論の論理への還元（フレーゲはヒルベルトの仕事の意味をこう解釈した）を全体として認めないというのは，理解に苦しむ所である。

それを理解する手掛りの一つは，すでに触れた幾何学的認識についての両者の見解の相違にある。フレーゲはユークリッド幾何学が空間についての直観を記述したものと考えたのに対して，ヒルベルトはそのような考えを意図的に避けた。さらに一般的に言えば，両者の数学的真理と存在に対するアプローチに相当の隔たりがあった，ということである。フレーゲは問題の多い数学的実体は存在が確実である実体によって基礎づけられねばならない，という意味での還元主義を採用した。算術の命題を論理法則と定義から導くというフレーゲの論理主義も，確実で基本的な土台の上に建物を立てるというメタファーに導かれている。それに対して，ヒルベルトは公理体系全体がある抽象的な構造を定義するという全体論（反還元主義）を採用しているように見える。二人の論争の間には，彼らのこのような哲学の相違が横たわっていた。だが，フレーゲの批判の矛先はヒルベルトの哲学にではなく，その方法論に向けられた。フレーゲから見れば，ヒルベルトの方法論は，心理主義とともに彼が批判の的とした形式主義の方法論に類似していたのであろう。

3．無矛盾性の証明

フレーゲは，もし真正の公理が設定されていればそれが偽であることはそもそも不可能であるから，公理の無矛盾性証明は不要であると言う：

> 「公理が真理であるということから，公理が互いに無矛盾であることが導かれます。それ以上の証明は何ら必要ではありません。」[29]

ヒルベルトは，これに真っ向から対立する意見を返した：

> 「あなたの［上記の］文を拝読しまして，私［ヒルベルト］は大いに関心を持ちました。なぜなら，そのような事柄について考え，書き，講義したかぎりで，私は常に正反対のことを主張してきたからです。任意に置かれた公理がそれらの多数の帰結とともに互いに矛盾し合わなければ，それらの公理は真であって，公理によって定義される事物が存在します。そのことが私にとって，真理と存在の規準なのです。」[30]

これに対して，フレーゲは，ヒルベルトのいう「公理」が実際には真理の保証を持たない条件の定義にすぎないという理由で，それの無矛盾性を証明する必要は認めた。しかし，フレーゲの考えでは，条件の集合の無矛盾性を確立するには，それらの条件を充たすある事物を生み出せば十分である。しかし，その逆は成り立たない。そうすると，ヒルベルトの規準は無効になる，なぜなら，もしヒルベルトの規準を受け入れるならば，それは「存在論的証明」の一変形（ヴァージョン）となろうからである。つまり，もし，条件：

> Ａは知的存在者である，

　　Aは偏在する，
　　Aは全能である，

が無矛盾ならば，それらをすべて充たす対象を具体的に見出さなくとも，全能で偏在する知的存在者の存在が導かれることになる(31)。これは，フレーゲにとって納得しがたいことである。こうして，フレーゲは次のように結論する：

　　「私は無矛盾性から真理性を導くような推論方法を受け入れることはできません。おそらく，あなたもこういうことを意図しておられる訳ではないのでしょう。いずれにしろ，もっと正確な定式化が必要であると思われます。」(32)

ヒルベルトの言葉は，それを文字どおりに受け取れば，以上のようなフレーゲの批判から免れることはできない。考えられるヒルベルトの真意は，

　　もし公理の集合が演繹的に無矛盾ならば，公理がそれについて成り立つような事物の領域が存在する，

といったものであろう(33)。このヒルベルトのアイディアは，後に「無矛盾な命題の集合にはモデルが存在する」という意味での完全性定理に発展するものである。しかし，ヒルベルトはこの時点で，まだどんな公理体系の構文論的無矛盾性も直接に証明してはいなかった。『幾何学の基礎』で用いられた証明はモデルを用いるものであった。

ヒルベルト流の無矛盾性証明に対するフレーゲの批判は，このモデルの使用にあるのだろうか。すでに述べたように，フレーゲ自身が考える可能な無矛盾性証明の形態は，条件（ヒルベルトの公理）を充たす対象を見出すことである(34)。フレーゲが考えるそのような対象は，条件の意味が一義的に要求する対象であり，ヒルベルトのモデルとは異なるものであろうか。いずれにせよ，フレーゲは，条件を充たす対象（モデル？）の存在は条件の無矛盾性にとって十分条件ではあるが，必要条件ではないと考えていたらしい。すなわち，

　　条件（公理）を充たす対象が特定できるならば，その条件は無矛盾である，

ということは常に正しいが，

　　条件（公理）が無矛盾であれば，それらを充たす対象が特定できる，

ということは必ずしも成り立たない（成り立つならば証明を要する）と，フレーゲは考えていたらしい。『算術の基礎』において，フレーゲはこれに類比的な考えを概念の無矛盾性に関して述べていた。すなわち，

　　「概念はたとえその定義特徴が矛盾を含んでいても許容される。禁じられるのは，その概念に何かが帰属すると前提することである。」(35)

　　「もちろん，厳密に言えば，その概念に何かが帰属することを証明しさえすれば，概念が無矛盾であることは確立される。しかし，その逆は偽であろう。」(36)

レスニクによれば，フレーゲの無矛盾性証明に対するこのような態度は，数学的真理に対する還元主義的アプローチと，真正の公理は偽ではありえない，という主張に由来する(37)。相対的な無矛盾性の証明が，問題を先送りにするものでしかないとすれば，形式体系の絶対的な無矛盾性証明に到らねばならない。そのような絶対的な証明があるとすると，そこでの「絶対性」は用いられる原理の真理性に根拠を持つであろう。それはどのようにして確保されるのか，ヒルベルトの説明は不明確である。1920年代にヒルベルトは「有限主義」の立場からの「証明論」を定式化していくが，そこで考えられる証明のギリギリの根拠は，ある有限的領域（形式言語の項の領域や自然数の領域）の存在と，そこでの基本原理の真理性である。しかし，論争の頃のヒルベルトは未だそのような突

き詰めた考察を有してはいなかったのであり，フレーゲの不満もそこにあったのである。

4．独立性の証明

フレーゲは，ヒルベルトによるユークリッドの公理の独立性証明についても否定的な評価を下した。しかし，これは大部分，フレーゲの誤解に基づいていたと言わざるを得ない。フレーゲは，ヒルベルトの証明が真正の公理をではなく，定義づけの条件（フレーゲの言葉では擬似公理 Pseudoaxiom）を取り扱っていると主張して，ヒルベルトの見解を退けた[38]。彼はまた，ヒルベルトの方法を真正の公理に適用することにも反対した。ヒルベルトの独立性の証明は，一つを除くすべての公理が真となるような公理の解釈を見出すことによって行われる。フレーゲにとって，真正の公理はそもそも真であるから，そのような公理が偽となる解釈を見出すことなどはできない。そのような公理の再解釈は，数学のタームの意味の曖昧さを助長するゆえ有害である。本来，公理は文というより，一定の文によって表現された思想であって，確定した意味を有しているはずであるから，それを再解釈することは無意味である[39]。

このような一見頑迷とも思えるヒルベルトに対する否定的評価を下した後，フレーゲは公理の独立性に関する自らの方法を提示する。彼によれば依存性（非独立性）は次のように把握される[40]。

> 「真なる非論理的思想が真なる非論理的思想の有限集合に依存するのは，その思想が有限個の推論規則によってそれらの思想の集合から導出されるとき，かつそのときにかぎる。」

次にフレーゲは，独立性を確立するための彼自身の一般的な方法を提案する[41]。それは以下のようなものである。

> Gが思想であり，Ωが真なる思想の集合であり，GとΩがともに言語Lで定式化できると仮定する。次に，LからL自身への一対一の上への写像を考える。その写像は，論理的表現と構文論的タイプは保存するが非論理的表現は保存しないと仮定する。言い換えると，この写像は論理形式のみを保存する。もしΩが真の思想の集合Ω′に写像されるが，Gが偽の思想G′に写像されるならば，そのときGはΩから独立している。

独立性を証明するにはこのような写像を見つければよい。こうして，フレーゲは意味を再配分する写像の概念を利用して独立性を確保しようとした。（ただし，フレーゲはこの方法を実際に幾何学に応用することはしていないようである。）

このフレーゲの独立性証明の定式化は，それ自体としては正確なものであり，彼自身，このような考察の新しいメタ数学的性格を自覚していたようである[42]。しかし，フレーゲは，ヒルベルトの『幾何学の基礎』に暗に含まれていた（有限的に公理化された）第一階公理体系を扱う原理の考察に失敗した。この原理によれば，

> 命題Gが命題の集合Ωから独立であるのは，¬Gが量化の観点からΩと無矛盾であるとき，かつそのときにかぎる。

これは，GとΩを表現する量化図式を手に入れ，これらの図式のモデルを示すことで確立される。しかし，フレーゲはこの問題を第一階の言語で見ようとはしない。フレーゲは，ヒルベルトが公理の中の述語文字を普遍量化により一般化し，それから真の代入例を見出すことによって無矛盾性と独立性を証明しようとしている，と解釈した[43]。確かに，“Ｆａ”の真理性は可能的に“∀ｘＦｘ”を確証するが“Ｆｂ”の真理性を含意しない。しかし，“Ｆａ”の真理性は図式としての“Ｆｂ”の無矛盾性を確立する。ヒルベルトの無矛盾性の議論において，フレーゲはこの観点を見誤ってい

る。同様の誤りが，ヒルベルトの独立性の証明に対しても見られる。

このようなフレーゲの誤解は，一つには，彼の推論に関する見解に由来するように見える[44]。今日，推論の説明は推論規則の概念に基づいて行われる。一つまたはそれ以上の言明（推論の前提）から一つの新しい言明（推論の結論）への移行が正しい推論規則であるのは，すべての前提が真となるモデルで結論も真となるようなパターンであるとき，かつそのときにかぎる。フレーゲの場合，推論は前提の真理性の認識から結論のそれへの移行である：

「推論は記号の領域に属するのではなく，以前になされた判断に基づいて論理法則に従って行われる判断の表明（Urteilsfällung）である。各前提は真と認められた確定した思想であり，結論も真と認められた確定した思想である。」[45]

そうすると，推論を行う場合，その真理性を承認していない前提に基づかせることはできないことになる[46]。証明は推論の連鎖であるから，証明も真である前提に基づかねばならないことになる。公理は，すべての数学的証明の基礎であるから，当然，真でなければならない。無矛盾性と独立性に関するフレーゲの見解の中に，このような推論についての見解が暗に影を落としている。

フレーゲの推論に対する見解の反論としては，条件的または間接的証明における推論のケースが考えられる。そのような証明において，われわれは真であることが未だ確定していない前提を仮にそれが真であると仮定した上で，推論を始める。しかし，フレーゲは，そのようなスタイルの証明が正統的なものではなく，誤解を招き易いものであると考えたようである。フレーゲは言う：

「しかし，真であるという判断をせずに，純粋に仮設的に一定の思想から演繹を行い得る，と反論するかもしれない。…しかし，そのような疑わしい思想は推論の前提とはならない。むしろ，[その場合の] 前提は，問題の思想を先件として含む一定の仮設的思想である。最後の結果においても，そのような疑わしい思想は条件として生じなければならない。従って，それらは実際には前提として使われていたのではないのである。というのは，もし前提として使われていたのであれば，それらは最後の結果において消去されていたであろうからである。もしそれを残していたとすると，彼は単に誤ったのにすぎない。問題の思想の一つが真であると認められて初めて，先件としてそれを [最後の結果から] 落とすことができる。このことが生じるのは，今や真と認められた思想が前提となっているような推論にかぎられる。」[47]

フレーゲの見解は，公理論的に定式化された論理体系における演繹定理を思い起こさせる。演繹定理が成り立つ論理体系では，

もしＢが仮定Ａから導出可能ならば，Ａ⊃Ｂは定理である，

ということが成り立つ。演繹定理は，ＡからＢへの演繹が即座に，例えば“Ａ⊃”をその演繹の各論理式に加えてＡ⊃Ｂからの証明が作れるような論理体系でのみ成り立つ。真なる公理だけから出発する演繹のみを証明とするフレーゲにとって，条件化やそれに類似の規則は，真理性の単純な移行とは見なせない操作を含むゆえに，確実なものとは思えなかったのかもしれない。これに対して，ゲンツェンの自然演繹や連式計算は，真理性の伝達を含むより広範囲の推論規則を，数学上の自然な慣行として扱っていた。フレーゲは，その意味で，正しい推論に関する彼の「理念」にこだわりすぎた側面があったと言えよう。

＊　　　＊　　　＊

フレーゲとヒルベルトの論争の中に，われわれは何を学び取るべきであろうか。両者の論争を通じて，論理の概念や数学の方法論についての意義深い明晰化が得られたことは確実である。ヒルベ

ルトは，数学の哲学と分析的知識についての理論に対して，現代的な公理論による新鮮な観点，すなわち，数学は永遠で唯一の数学的対象を発見するのではなく，無矛盾性を唯一の判定規準とする多様な解釈による多様な構造を探究するものであるという観点を提供した。その際，後の証明論・モデル論へと発展するような方法論上の新機軸を打ち出した。他方，フレーゲの貢献は，独創的なものではなかったかもしれないが，ヒルベルトの見解の批判と分析を通して，公理と定義の役割の明確な定式化という，方法的批判の典型を提供した。独立性証明を巡ってのフレーゲの議論の中に，新しいメタ数学的アプローチが自覚されていることも特筆に値する（それは，1920年代に形をとるヒルベルトの有限主義的証明論の萌芽とも読める）。

ただ，フレーゲの余りに強烈な哲学的・数学的理念がヒルベルトを辟易させたのか，ヒルベルトの突然の文通中断によって，両者の論争から得られることが期待されたより多くの果実が成熟の時を迎えるに到らなかったのは残念なことである。しかし，論理と数学の哲学に関する両雄の議論は，現代において通例とされている思考態度や方法論が，いかに多くの混乱や思い込みから次第に洗練されていくものであるかということの，貴重な実例を提供してくれるものである。

註

(1)　非ユーリッド幾何学がいかにして受入れられたかという観点から，19世紀の幾何学の主要な流れを論じた，次のフロイデンタールの簡便な概観を参照：Hans Freudenthal, “The Main Trends in the Foundations of Geometry in the 19th Century” , E. Nagel, P. Suppes, A. Tarski (eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Stanford U. P. (1962), pp. 613-633。また，非ユークリッド幾何学の発見については，Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford U. P. (1972) の第36章を参照。

(2)　David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, in *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß -Weber- Denkmals in Göttingen*, Teubner (1899). 邦訳：ヒルベルト『幾何学の基礎』(寺阪英孝・大西正男訳)，共立出版 (1970).

(3)　「ヒルベルトの計画」の持つさまざまな現代的な側面については，デトレフセンの次の書物を参照：Michael Detlefsen, *Hilbert's Program, An Essay on Mathematical Instrumentalism*, D. Reidel (1986)。

(4)　ヒルベルトとの往復書簡は，次の書物に纏められている：G. Frege, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Felix Meiner (1976), SS. 55-80 [以下，この書物を *BW* と略記する]。英訳：G. Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence* [：*PMC*], Basil Blackwell (1980), pp. 31-52.

(5)　第一シリーズは次のものである：“Ueber die Grundlagen der Geometrie”, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* [*JDMV*と略記] 12 (1903), SS. 319-324, “Ueber die Grundlagen der Geometrie II” *JDMV* 12 (1903), S. 368-375. これらは，各々次の書物に再録されている：G. Frege, *Kleine Schriften* [*KS*と略記], Georg Olms (1990), SS. 262-266, 267-280. 第二シリーズは次のものである：“Ueber die Grundlagen der Geometrie I，II und III” *JDMV 15* (1906), SS. 293-309, 377-403, 423-430. これらは*KS* SS.281-323に再録されている。両シリーズの英訳が，G. Frege, *On the Foundations of Geometry and Formal Theory of Arithmetic* [*FG*と略記], translated with an Introduction by Eike-Henner W. Kluge, Yale U. P. (1971) および，G. Frege, *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy* [*CP*と略記] , ed. by Brian McGuiness, Basil Blackwell (1984) にある。

(6)　上記の註(1)のフロイデンタールはフレーゲを見下したような評言を書いている：「なぜ，彼 [フレーゲ] が今日そのように高く評価されるのか，私 [フロイデンタール] には理解できない。」H. Freudental op. cit. p. 618.

(7)　ヒルベルトとの論争の発端となったヒルベルト宛の最初の手紙 (1899年12月27日付) でフレーゲは，(幾何学の) 公理が直観に支えられていると言っている。「私 [＝フレーゲ] が公理と呼ぶのは，真ではあるが，空間的直観とでも呼ぶことのできる，論理的根拠とは異なる認識根拠からその認識が導かれているゆえに，証明されないところの命題です。」(強調は筆者)，*KS* S.409, *BW* S. 63, *PMC* p. 37。また，「幾何学の基礎につい

て」の第一シリーズの第一論文では，こう述べている：「古来より，公理と呼ばれるのは，推論連鎖によって証明されることがなくともその真理性が確実であるところの思想（Gedanke）である。……ここで私は，公理を真であると見なすことの正当性が何に基づくかという問題に立ち入ることはしない。幾何学の場合，その起源としてはたいてい**直観**が与えられる。」（強調は筆者），*KS* S. 262, *FG* p. 23, *CP* p. 273.

(8)　『算術の基礎』の§14で，フレーゲは概念的思考の上での非ユークリッド幾何学を認めているように見える。

(9)　フレーゲの「定義論」については，次のクッチェラの本に簡潔な概観がある：Franz von Kutschera, *Gottlob Frege, Eine Einführung in sein Werk*, de Gruyter（1989），SS. 140-161.

(10)「幾何学の基礎についてⅠ」（第一シリーズ），*KS* S.262, *FG* p. 23, *CP* p. 274.

(11)『算術の基本法則』（*GGA* と略記）Ⅰ，§33, SS. 51-52.

(12)「幾何学の基礎についてⅠ」（第二シリーズ），*KS* S. 288, *FG* p. 59, *CP* p. 300-301.

(13)　ヒルベルトのフレーゲ宛の返事（1899年12月29日付），*KS* S. 412, *BW* S. 67, *PMC* p. 40.

(14)　フレーゲはイエナ大学の同僚 Otto Liebmann の息子で当時のゲッチンゲン大学でヒルベルトの講義を聞いた数学者 Heinrich Liebmann から，「ユークリッド幾何学の基本」という題目のヒルベルトの講義録の写しを送ってもらっていたらしい。*BW* S.147, *PMC* p. 90 の編者解説参照。

(15)「幾何学の公理は五個の群に分けることができる。これらの公理群のおのおのは，ある互いに関連した直観上の基本的事実を表現している」『幾何学の基礎』§１。

(16)「この群の公理は“間”の概念を<u>定義する</u>もので，この概念に基づいて直線上の点，平面内の点，および空間内の点の**順序づけ**が可能になる」（太字強調は原文，下線筆者）『幾何学の基礎』§３。

(17)『幾何学の基礎』§３の最初の「定義」は「一つの直線上の点は互いにある関係にある。この関係を述べるために特に**間**という言葉を用いる」であり，次の「定義」は「一つの直線ａ上に二点A，Bを考える。この二点A，Bの組を**線分**と言い，これをABまたはBAで表す。…」となっている（太字強調はいずれも原文）。

(18)「なによりも先ず必要なことは“解明”“定義”“公理”といった表現の理解であると私には思われます。それらの表現においてあなたは慣例の用法からも私のそれからも著しく逸脱しておられます。そのことによって，これらの表現をあなたの説明から切り離しては考えられないし，その論理的構造を十分明確に知ることも困難です。」ヒルベルト宛のフレーゲの手紙（1899年12月27日付），*KS* S. 410, *BW* S. 64, *PMC* p. 38.

(19)「多くの点で才気に満ちたものであるが，全体としては失敗であり，十分な批判無しでは使えないものだと私は考えます。」H. リープマン宛のフレーゲの手紙（1900年 7月29日付），*KS* S. 397, *BW* S. 147-148, *PMC* p. 90.

(20)　例えば，1900年パリでの国際数学者会議でヒルベルトが行った講演「数学の諸問題」の前文に「証明の厳密さ」についての言及がある。Cf. David, Hilbert, “Mathematische Probleme”, *Gesammelte Abhandlungen*, Springer（1935），Band Ⅲ，SS. 290-329. 邦訳：ヒルベルト『数学の問題』（一松信訳），共立出版（1969）.

(21)「…私の考えでは，三行で点の定義を与えることは不可能です，むしろ公理体系全体が完全な定義を与えるのですから。」フレーゲ宛のヒルベルトの手紙（1899年12月29日付），*KS* S. 412, *BW* S. 66, *PMC* p. 40.

(22)「私の概念，例えば“点”や“間”が一義的に決定されない，とあなたは言われます。…すべての理論は常に，無限に多くの基本要素の体系に応用されます。…，電気の理論の全主張は，もちろん，磁性，電子性といった概念に代入される他の事物のすべての体系に当てはまります，…要求される公理を充たしさえすれば。しかしながら，ここに示したような事態は理論の欠点ではなく，むしろ反対にそれは大いなる利点です［この部分は註の形で書き足してある：筆者]，ともかく避けるべきものではありません。」同上の手紙，*KS* S. 412-413, *BW* S. 67, *PMC* p. 40-41.

(23)「…実数全体を考えるということは，基本列の各項を引き続き作ってゆくあらゆる法則の全部を考えるなどということではなくて，〈有限個の閉じた〉公理体系Ⅰ－Ⅳで規定されるところの関係を相互に持つある対象の集まりを考えることであって，これらから有限個の推論によって導かれる結論だけが，定理として導かれるのである。」D. Hilbert, “Ueber den Zahlbegriff”, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* Bd. 8（1900），SS. 180-184. この論文は『幾何学の基礎』第７版に付録として再録されている。

(24)　ヒルベルト宛のフレーゲの手紙（1900年１月６日付），*KS* S. 413, *BW* S. 70, *PMC* p. 43.

(25)　Michael Resnik, “The Frege-Hilbert Controversy”, *Philosophy and Phenomenological Research*, vol. xxxiv（1974），p. 392 f.。レスニクによれば，フレーゲは条件法A⊃Tを第二階量化条件法と解釈した。「点」「線」等

の原始語は変項に置き換えられ，それらを束縛する量化記号は条件法全体の前に置かれる。公理に対する「モデル」に関わる定理は普遍例化とモドゥス・ポネンスを適用して得られる。これとは対照的に，ヒルベルトは原始語としての「点」や「線」は図式（Schema）と見たように思われる。なお，上記のレスニクの論文は，H. Sluga (ed.), *Philosophy of Frege 2, Logic and Foundations of Mathematics in Frege's Philosophy*, Garland (1993) に再録されている。

(26) Resnik, op. cit. p. 393.

(27) ヒルベルト宛のフレーゲの手紙（1900年1月6日付），*KS* S. 415, *BW* S. 72-73, *PMC* p. 45.

(28) *Journal of Symbolic Logic 7* (1942), pp. 92-93.

(29) ヒルベルト宛のフレーゲの手紙（1899年12月27日付），*KS* S. 409, *BW* S. 63, *PMC* p. 37.

(30) フレーゲ宛のヒルベルトの手紙（1899年12月29日付），*KS* S. 411, *BW* S. 66, *PMC* p. 39.

(31) 上記註27のフレーゲの手紙，*KS* S. 417, *BW* S. 75, *PMC* p. 47.

(32) 同上，*KS* S. 418, *BW* S. 75, *PMC* p. 48.

(33) これは「数学の諸問題」（上の註20参照）の第2節「算術の公理の無矛盾性」から，ヒルベルトに好意的に現代的視点から推測される彼のアイディアである。

(34) ヒルベルト宛のフレーゲの手紙（1900年1月6日付），*KS* S. 414, *BW* S. 71, *PMC* p. 43.

(35) *Die Grundlagen der Arithmetik*（＝*GLA*）§94.

(36) *GLA* §95.

(37) Resnik, op. cit. p. 397.

(38) "Ueber die Grundlagen der Geometrie II"（第二シリーズ），*KS* S. 317, *FG* p. 102, *CP* pp. 332-333.

(39) "Ueber die Grundlagen der Geometrie I"（第一シリーズ），*KS* S. 266, *FG* pp. 28-29, *CP* pp. 277-278, Ibid II（第二シリーズ），*KS* SS. 313-314, *FG* pp. 96-98, *CP* pp. 328-330.

(40) Ibid III（第二シリーズ），*KS* S. 318, *FG* pp. 103-104, *CP* pp. 333-334.

(41) Ibid III（第二シリーズ），*KS* SS. 321-23, *FG* pp. 107-110, *CP* pp. 337-39.

(42) Ibid III（第二シリーズ），*KS* S. 320, *FG* p. 107, *CP* p. 336.

(43) H. リープマンへの手紙（1900年7月29日付），*KS* S. 398, *BW* S. 148, *PMC* p. 91.

(44) Cf. Resnik, op. cit. p. 400 f.

(45) "Ueber die Grundlagen der Geometrie II"（第二シリーズ），*KS* S. 303-304, *FG* p. 82, *CP* p. 318.

(46)「推論の前提となるのは真なる思想のみである。」Ibid III（第二シリーズ），*KS* S. 319, *FG* p. 105, *CP* p. 335.

(47) Ibid III（第二シリーズ），*KS* S. 319, *FG* pp. 105-106, *CP* p. 335.