フレーゲの一般系列理論

――『概念記法』第3部研究――

哲学教室　田　畑　博　敏

はじめに

本論文の目的は，(i)「一般系列理論からのいくつかの話題」(Einiges aus einer allgemeinen Reihenlehre) と題されたフレーゲの『概念記法』第3部[1]の内容を可能なかぎり詳細に解読・吟味し，それによって，(ii)この部分が，その後に展開される彼の論理主義のある基本的側面――それは一言で言えば「命題の導出において直観にではなく純粋思考にのみ依拠する」ということである――を具体的な形で実行して見せようとしていること，を確認し，(iii)さらに，「証明の厳密性の追究」という，19世紀の数学の哲学の潮流の中でフレーゲが果たした独自な役割というより広い観点から，この部分に光を当てることである。

論理学の革新が1879年に起こったこと，この1879年という年が『概念記法』(*Begriffsschrift*) が出版された年であることは，今ではよく知られている。そして，『概念記法』の第1部，第2部の内容は，記号法と条件法・一般性等の論理的概念についての深い考察であり，論理学史上最初の（第1階）述語論理の展開である，という理解が行き渡っている。しかし，第3部に関しては話は別である。従来，この部分は，後の『算術の基礎』での「数の概念」の展開に先立つ，予備的な数学的概念の断片的提示といった形でしか理解されず，それが持つ重要さもほとんど無視されていたように思われる。最近，ブーロスが第3部に関する啓発的な論文[2]を著してこの部分の持つ意義を明らかにしたことにより，そういった状況はかなりの程度は改善された。しかし，ブーロスが直接に扱っているのは，事実上，第3部の一部にすぎない。そこで，本論文では，これを補う意味も込めて，より丁寧に第3部の内容を追跡する（以下，第1～5節）。

フレーゲは『概念記法』第3部への導入（§23）で純粋思考の直観に対する優位を強調する。彼によれば，直観は命題の理解と構成において一定の役割を果たすとはいえ，命題の主張内容の表現の一般性という点で純粋思考（論理的思考）に遠く及ばない。このような考えはフレーゲの「論理主義」の一つの基本的側面を物語るものであり，第3部で数論の展開に必要な一般的な系列理論の展開の原動力となっている。(例えば，後に詳しく見るように，「数学的帰納法」のより一般的な系列理論からの導出にそのことが典型的に現れる。)そして，この純粋思考の優位は，透き間のない厳密な証明の追究と結びついている。『概念記法』の5年後に出版され，19世紀の数学の「厳密化」の流れの中で自らの独自の位置を自覚して論じている『算術の基礎』の冒頭でも，フレーゲはこの「厳密な証明の追究」を強調している。この文脈から見て，『概念記法』第3部は，「厳密な証明の追究」

を，数論の展開に必要な系列に関する一般法則の証明という具体的な場面で遂行する第一歩であることが明らかとなる（以下，第６，７節）。

１．第３部の構成とフレーゲの意図

まず，『概念記法』第３部の全体的構成を把握することから始める。第３部は，第１部「記号の説明」（§１～§12），第２部「純粋思考のいくつかの判断の提示」（§13～§22）に続く，『概念記法』の最後の部分である。この部分は「一般系列理論からのいくつかの話題」と題されており，§23から始まり§31で終わる。導入的な節である§23で，第３部が『概念記法』全体に占める位置と目的が説明される。§24で「特性Ｆはｆ系列において遺伝する」という概念の定義が与えられ（定義69），続く§25で遺伝性に関する諸帰結が導かれる。§26で「ｘはｆ系列でｙに先行する」という関係が第２階の量化により定義される（定義76）。ここで，『概念記法』におけるフレーゲの論理が公式的には「第２階述語論理」になったことが判明する。続く§27，§28で祖先関係の定義から諸帰結が導かれる。§29で「ｚはｘで始まるｆ系列に属する」という関係が先の祖先関係を用いて定義される（定義99）。続く§30でそれからの帰結が導かれる。最後に，§31で「ｆは一意的（＝多対一の）手続きである」という概念が定義され（定義115），その諸帰結が導かれる。（§31の先に，『概念記法』に登場するすべての論理式について，それが何を導くのに使われたかを示す表が付録として加えられている。）

こうして，導入部分（§23）を除くと，四つの定義の提示とそれらからの諸帰結を導くことが，第３部の中心的内容となっている。もう一度，これら四つの定義を取り出すと，こうなる。

定義69：「特性Ｆはｆ系列において遺伝する」
定義76：「ｘはｆ系列でｙに先行する」
定義99：「ｚはｘで始まるｆ系列に属する」
定義115：「ｆは一意的手続きである」

フレーゲにとって重要であるのは，これらの定義の内容と同時にその定義の「仕方」である。すなわち，これら四つの定義がすべて「論理的に」定義されていることである（その具体的な内容は以下で考察する）。そのことの持つ意義をフレーゲ自身の言葉によって聞こう。

フレーゲは，内容目次で「導入的論評（Einleitende Bemerkungen）」と題した§23において，以下のように述べている（少し長いが§23を全文引用する）：

「以下の導出は，この概念記法の取り扱い方についての一般的観念を与えようとするものである，たとえそれが，この記法の持つ利点を完全に知らしめるに十分ではないかもしれなくとも。この利点は，より複雑な文［命題］において初めて顕著なものとなる。その上，この例において，純粋思考（das reine Denken）――それは感覚によってまたは直観によって先天的（ア・プリオリ）にさえ与えられる内容をすべて度外視する――が，その固有な本性から生じる内容だけから，一見するとある種の直観（irgendeine Anschauung）に基づいてのみ可能であるように見える判断をいかにして生み出し得るか，をわれわれは見る。われわれはこの働きを，子供のように意識にとっては何も無いように見える空気［水蒸気］を眼に見える水滴をなす液体に変化させる凝結作用に，喩えることができる。系列に関する以下で展開される諸命題は，系列に関するある種の直観から導出され得るどんな類似の命題をも一般性においてはるかに凌駕する。それゆえ，もし系列についての直観的観念を基礎に取るのがより適切であると考えたいならば，そのようにして得られた命題がここで与えられた命

題と同じような言葉使いを持ったとしても，それらは，基礎づけられている特定の直観の領域においてしか妥当性を持たないゆえに，ここでの命題ほど多くのことは語らないだろう，ということを忘れてはならない。」(3)

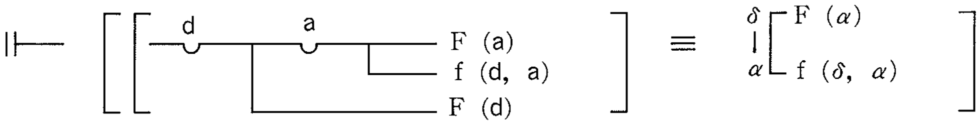
フレーゲはここで，自らが考案した概念記法の利点を説明している。それが複雑な命題においてこそ大きな威力を発揮すること，その威力の内実は，純粋思考が感覚や直観に基づかないで生み出す定義や導出を，はっきりと眼に見えるように示すこととして――水蒸気が水滴に凝結することに喩えて――説明される。この「直観」と「純粋思考」の差異は，それらに基づく命題の射程距離の長さに関して明白であることが強調される。系列に関する直観がいかなるものであれ，概念記法によって表現される命題の範囲が，直観によるそれをはるかに凌ぐとフレーゲは主張する。それを具体的に示すのが§24以下であり，さらに，なぜそこまで「直観」ではなく「純粋思考」に依存することに固執するのかという動機の一端も，そこで暗示される。われわれも§24以下に進もう。

2．遺伝性とその帰結

フレーゲは§24を次の定義によって始める：

$$\forall d\ (Fd \rightarrow \forall a\ (dfa \rightarrow Fa)) \longleftrightarrow \text{Her}\ (F) \tag{69}$$

実際のフレーゲの記号では，



となっているが，以後，印刷の都合上，今日一般に使われている記号で表す（また f は任意の二項関係として固定されていると考えてよいので右辺の‘Her（F）’――hereditary（遺伝性の）に因む――の表面には表さない）。命題69は，‘←→’の右辺に現れた新しい記号の意味を，既知の記号のみで表された左辺により説明し，定義している。従って，命題69は通常の判断ではない。すなわち，‘←→’の両辺が同じ内容を持つことが別の何かを根拠として主張されているのではなく，69自身が「それら［両辺］が同じ内容を持つことにする」(sie soll denselben Inhalt haben) (4)として自らの根拠となることを宣言しているのである。フレーゲは，これが通常の判断ではないゆえ，カントの言う「総合判断」でもないということをわざさわざ断っている。カントを引き合いに出したのは，カントが数学の判断はすべて総合的判断だと考えているからだという(5)。「直観」にではなく論理的な「純粋思考」に基づくという，フレーゲの論理主義の基本的側面が，このようにカントを意識させるのである。

ところで，命題69は，元来は通常の判断ではないが，容易に判断に変換され得る，とフレーゲは説明する。一旦，新しい記号に意味が定められると，以後，その意味は固定され保持される。よって，69は判断として成り立つ。ただし，分析的判断としてである。なぜなら，その判断は，一度導入された意味を再び取り出すにすぎないからだ。この定義の二重の働き，すなわち，新しい記号に意味を定めることと，同時に定めた意味を分析的に取り出すこと，がフレーゲの記号において判断線，つまり判断記号‘⊢’の縦棒‘｜’，の二重化‘⊩’によって示唆されるのである。さらに，この定義の働きの要点は表現の短縮化にあり，右辺の‘Her（F）’はいつでも左辺の‘∀d (Fd→∀a (dfa→Fa))’に復元されねばならない。

さて以上は，命題69の，言わば「身分」についての考察であった。次に，69の内容の検討に移る。フレーゲの説明では，

$$\vdash \quad f(\Gamma,\ \Delta)$$

は，「ΔはΓに手続きｆを適用した結果である」(Δ ist Ergebnis einer Anwendung des Verfahrens f auf Γ)」，または「Γは，手続きｆの適用の対象であり，その結果がΔである」(Γ ist der Gegenstand einer Anwendung des Verfahrens F, deren Ergebnis Δ ist ），または「ΔはΓに対してｆ関係にある」(Δ steht in der f-Beziehung zu Γ)，または「ΓはΔに対して逆のｆ関係にある」(Γ steht in der umgekehrten f-Beziehung zu Δ) ということを表し[6]，これらは同じ意味であると受け取らねばならない。このとき，Her(F)，つまり $\begin{array}{ll}\delta & F\ (\alpha)\\ \alpha & f\ (\delta,\ \alpha)\end{array}$ は，「特性Ｆはｆ系列において遺伝する」(die Eigenschaft F sich in der f-Reihe vererbt) と翻訳される[7]。

ｆは，それだけを一般的に取り出した場合は，「手続き」または「関係」として説明されるが，Her（F）の中では「ｆ系列」という形で述べられる。これは，手続きｆが適用される対象全体がｆによって体系化されていると考えられるため，および後に展開される筈の「数系列」というイメージの先取りを意図しているためと思われる。「遺伝」「系列」をより広い意味で理解するため，フレーゲは「親子関係」という例に訴えている。われわれの記号法では，その説明はこうなる。xfyが，「ｙはｘの子である」または「ｘはｙの親である」を表し，Fxが，「ｘは人間である」を表すとする。このとき，Her（F）つまり∀d (Fd→∀a (dfa→Fa)) は，「どんな人間の子供もすべて人間である」または「人間という特性は親子系列において遺伝する」を表す。フレーゲは「親子」の関係や「人間である」という特性は直観的に理解しやすく，日常の言葉で容易に表現できるが，ｆやＦがもっと複雑になった場合，「遺伝性」を日常言語で表現することは相当に困難になることを予測している。ともあれ，命題69の全体：

$$\forall d\ (Fd \to \forall a\ (dfa \to Fa)) \longleftrightarrow \ \mathrm{Her}\ (F)$$

は，

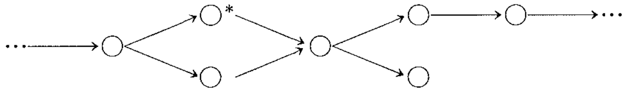
「もしｄが何であれ，ｄが特性Ｆを持てば，手続きｆをｄに適用した結果がすべて特性Ｆを持つならば，そのときかつそのときに限り，
私は“特性Ｆはｆ系列において遺伝する”と言う」

と表現される。

「ｆ系列における遺伝」の内容をイメージするための図式を考えよう。xfyの関係を，

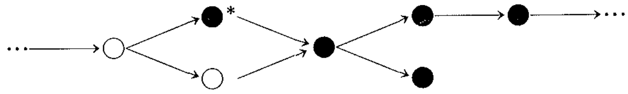
$$\overset{x}{\bigcirc} \longrightarrow \overset{y}{\bigcirc}$$

と描く。この関係ｆ（つまり‘⟶’）は多数の対象の間で成り立ち，例えば



のような「系列」を形成していると考えてよい。このとき，「ｆ系列における遺伝性」とは，任意のｆ関係：$\cdots - \bigcirc \xrightarrow{f} \bigcirc - \cdots$ において，xfy関係の前者ｘが特性Ｆを持つ：$\underset{x}{\overset{F}{\bullet}} \longrightarrow \underset{y}{\bigcirc}$ ならばxfy

関係の後者ｙも特性Ｆを持つ：$\overset{F}{\underset{x}{\bullet}} \longrightarrow \overset{F}{\underset{y}{\bullet}}$ ということである。従って，上の「系列」図で＊印のついた対象が特性Ｆを持つ：●*ならば，そこから出ている→の到達先，さらにその到達先から出る→の到達先，等々がすべて特性Ｆを持つことになる：



続く§25でフレーゲは，遺伝性の定義である命題69からの諸帰結を導出している。まず，第２部の最後の命題である命題68：（∀aGa←→Ｂ）→（Ｂ→Gc）において（無用な混乱を避ける目的でフレーゲ自身が使っている文字を替えている。以下同様），‘a’にｄを，‘GΓ ’にFΓ →∀a(Γfa→Fa)を，‘Ｂ’にHer（Ｆ），‘ｃ’にｘをそれぞれ代入すると，次式が得られる。

［∀d（Fd→∀a（dfa→Fa))←→Her（Ｆ)］
→　[Her（Ｆ）→（Fx→∀a（xfa→Fa))]

これと，命題69（この上の式の先件となっている）からＭＰ（モドゥス・ポネンス：第１部§６）により，次の命題70が導かれる：

Her（Ｆ）→（Fx→∀a（xfa→Fa))　(70)

（ｆ系列で遺伝する特性Ｆを持つｘのすべての子はＦを持つ）

以後，主要な式言語の後に，フレーゲ自身の説明か，またはｆを親子関係モデルで表現した日常言語への翻訳を付する。

命題論理の命題19：（D→（C→B））→［(B→A）→（D→（C→A))］(第２部§16）の‘Ｄ’にHer（Ｆ）を，‘Ｃ’にFxを，‘Ｂ’に∀a(xfa→Fa）を，‘Ａ’にxfy→Fyを代入すると，[Her（Ｆ）→（Fx→∀a（xfa→Fa))]→　[(∀a（xfa→Fa）→（xfy→Fy))→（Her（Ｆ）→（Fx→（xfy→Fy)))］が導かれるが，この式の先件は命題70であるから，ＭＰにより，次の命題71が導かれる：

［∀a(xfa →Fa)→(xfy →Fy)］→［Her（Ｆ）→（Fx→(xfy →Fy))]　(71)

（ｘのすべての子が特性Ｆを持ちｙがｘの子ならばｙはＦを持つということが成り立てば，
親から子に遺伝する特性Ｆをｙの親ｘが持てば，ｙはＦを持つ）

普遍例化を主張する命題58(§22)：∀afa→fc　の‘fΓ’にxfΓ→FΓ を，‘ｃ’にｙを代入すると，∀a（xfa→Fa）→（xfy→Fy）が導かれるが，これは71の先件であるから，ＭＰにより，次の命題72が導かれる：

Her（Ｆ）→（Fx→（xfy→Fy))　(72)

（特性Ｆがｆ系列で遺伝し，ｘが特性Ｆを持ち，ｙが手続きｆをｘに適用した結果ならば，
ｙは特性Ｆを持つ），（親子で遺伝する特性Ｆを持つｘの子ｙもＦを持つ）

命題論理の命題２（§14）：（C→（B→A))→((C→B）→（C→A)）で，‘Ｃ’にHer（Ｆ）を，‘Ｂ’にFxを，‘Ａ’にxfy→Fyを代入すると，[Her（Ｆ）→（Fx→（xfy→Fy))]→[(Her（Ｆ）→Fx）→（Her（Ｆ）→（xfy→Fy))]が導出されるが，この式の先件は命題72であるから，ＭＰにより，次の命題73が導かれる：

(Her（Ｆ）→Fx）→［Her（Ｆ）→（xfy→Fy)］　(73)

（特性Ｆがｆ系列で遺伝すればｘがＦを持つということが成り立てば，
Ｆがｆ系列で遺伝し，手続きｆのｘへの適用結果がｙならば，ｙはＦを持つ）

命題論理の命題８（§16）：（D→（B→A))→（B→（D→A)）で，‘Ｄ’にHer（Ｆ）を，‘Ｂ’に

Fxを，‘A’に$xfy \to Fy$を代入すると，$[Her(F) \to (Fx \to (xfy \to Fy))] \to [Fx \to (Her(F) \to (xfy \to Fy))]$が導出されるが，この式の先件は命題72であるから，MPにより，次の命題74が導かれる：

$$Fx \to [Her(F) \to (xfy \to Fy)] \tag{74}$$

（xが，f系列で遺伝する特性Fを持つならば，xに手続きfを適用した任意の結果であるyもFを持つ）

同一者不可識別原理（フレーゲの言葉では「内容の同一の第一原理」）である命題52（§20）：$(C \longleftrightarrow D) \to (fC \to fD)$で，‘C’に$\forall d\,(Fd \to \forall a\,(dfa \to Fa))$を，‘D’に$Her(F)$を，‘fΓ’にΓを代入すると，$[\forall d\,(Fd \to \forall a(dfa \to Fa)) \longleftrightarrow Her(F)] \to [\forall d\,(Fd \to \forall a(dfa \to Fa)) \to Her(F)]$が導出されるが，この先件は命題69であるから，MPによって，次の命題75が導かれる：

$$\forall d\,(Fd \to \forall a\,(dfa \to Fa)) \to Her(F) \tag{75}$$

（任意の対象dが特性Fを持つことから手続きfのdへの適用結果がすべてFを持つことが帰結するならば，特性Fはf系列で遺伝する）

3．祖先関係（f系列での後続関係）とその帰結

フレーゲは§26を定義である，次の命題76で始める：

$$\forall F[Her(F) \to (\forall a\,(xfa \to Fa) \to Fy)] \longleftrightarrow xf^*y \tag{76}$$

‘$\longleftrightarrow$’の左辺によって定義される右辺　xf^*y　はフレーゲの実際の記号では，

$$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f\ (x_\gamma,\ y_\beta)$$

である。われわれは簡単のために‘xf^*y’で表す。フレーゲによれば，xf^*y　は，

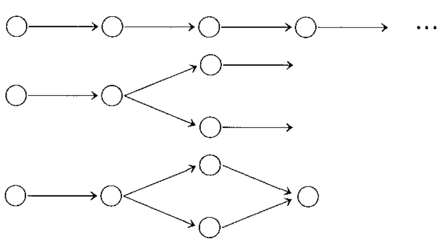
「yはf系列でxに後続する」(y folgt in der f-Reihe auf x)

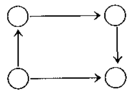
と翻訳される[8]。もちろん，fの意味が具体的に定められて初めて，xf^*yの意味も確定する。命題76は，フレーゲの日常言語での翻訳では，

「Fが何であれ，特性Fはf系列で遺伝するという命題と，手続きfをxに適用したすべての結果がすべて特性Fを持つという命題とから，yが特性Fを持つということが推論されるならば，そのとき，私は“yはf系列でxに後続する”または“xはf系列でyに先行する”と言う」

となる[9]。この命題76の説明を補足する目的で，フレーゲは脚註を与えている[10]。それによると，f系列の順序をここでは一般的に考えているということであり，例えば，①数珠つなぎの玉のような系列だけではなく，②家系樹のように枝分かれしたもの，③逆に枝が合流するもの，④環のように一巡するもの，等も含まれるという。フレーゲが考えている例を図示すると以下のようなものとなろう。

①　②　③



④ 

ここで，ｆのモデルとして親子関係を取ろう。これは，枝分かれと枝の合流を共に含む。このとき，xf*yはどのようなものとなろうか。任意の特性Ｆを取る。Ｆがｆ系列で遺伝する，つまり親の持つ特性Ｆがその親のすべての子に伝えられる，とする。いま，ｘの子がすべてＦを持つとする。このような状況のとき，ｙはｘの子孫が持つすべての遺伝する特性を持っている。いま特に，Ｆとして「ｘを祖先としてその子孫である」という特性だとする。すると，このＦは親子で遺伝すると考えられ(なぜなら，ｘの任意の子孫の子はすべてｘの子孫であるから)，しかもｘの子はすべてｘの子孫であるから，ｙはこのＦを持つ。すなわち，ｙはｘの子孫である。こうして，

ｆを親子のモデルで考えるとき，

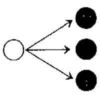
xf*yは「ｘはｙの祖先である」を表す。

例えば，『創世記』5章のアダムの系図によれば，人祖アダムの後継者は次のようになっている(共同訳による)：

アダム⟶セト⟶エノシュ⟶ケナン⟶マハラルエル⟶イエレド

⟶エノク⟶メトシェラ⟶レメク⟶ノア⟶　……

このとき，セト以下のアダムの子孫は「この系列でアダムに後続する（この家系でアダムの子孫である)」が，それは，彼らが，アダムのすべての子（カインやアベルも含む）が持つ，この家系で遺伝する任意の特性を持つからだと考えられる。例えば，そのような特性として「人間の父を持つ」という特性が考えられる。人祖アダムは神が直接に創造したものであるから，彼自身はこの「人間の父を持つ」という特性は持っていない。しかし，アダムは『創世紀』では人間の祖先であることに相違ないから，アダムから数えて第十代目の子孫であるノアも，アダムの子等から伝えられたすべての遺伝的特性を持つ筈である。「ｘはｙの祖先である」または「ｙはｘの子孫である」という概念は，このような例によって確かにある種の直観によって理解できるが，フレーゲの要点は，これを「ｆ系列」および「ｆ系列における遺伝性」という，より論理的・一般的概念によってこれを定義することにある。

いずれにせよ，xf*y（ｘはｆ系列でのｙの祖先である）は，直観的には次のようなことである。Ｆを任意の特性として，これがｆ系列で遺伝する，つまりdfa：ｄ○⟶○ａなる任意のｄ，ａに対して，もしFd：●⟶○　ならばFa：●⟶●　であり，しかもｘの子(手続きｆのｘの適用結果)のすべてがこの特性Ｆを持つ：ｘ　ということが成り立つ場合はつねにｙもＦを持つ。これが，xf*yの意味である（記号f*がｆの一般化であることを暗示する)。

§27と§28でフレーゲは，ｆ系列での後続関係（祖先関係）からの諸帰結を導いている。記述を簡略化するために，

$$\forall a\ (xfa \rightarrow Fa)$$

を，

$$\mathrm{In}(x,\ F)\qquad\qquad [\underline{\mathrm{in}}\mathrm{heritance}:相続]$$

と略記する。(また，今後も手続きｆは固定されているとみなす。）すると，命題76は，

$$\forall F\ [\mathrm{Her}\ (F) \rightarrow (\mathrm{In}(x,\ F) \rightarrow Fy)] \longleftrightarrow\ xf^*y \qquad (76)$$

となる。

命題68（§22）：$(\forall a Fa \longleftrightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow Fc)$ に類比的な第2階の命題68′：$[\forall f M_\beta f\beta \longleftrightarrow B] \rightarrow [B \rightarrow M_\beta G\beta]$ で，‘f’にFを，‘$M_\beta \Gamma\beta$’に$Her(\Gamma) \rightarrow (\forall a(xfa \rightarrow \Gamma a) \rightarrow \Gamma y)$ を，‘B’にxf^*yを，‘G’にFを代入すると，

$$[\forall F(Her(F) \rightarrow (In(x, F) \rightarrow Fy)) \longleftrightarrow xf^*y]$$
$$\rightarrow [xf^*y \rightarrow (Her(F) \rightarrow (In(x, F) \rightarrow Fy))]$$

が導出されるが，この式の先件は命題76であるから，MPにより，次の命題77が導かれる：

$$xf^*y \rightarrow [Her(F) \rightarrow (In(x, F) \rightarrow Fy)] \tag{77}$$

（yがf系列でxに後続し，特性Fがf系列で遺伝し，xへの手続きfの適用結果がすべて特性Fを持てば，yはFを持つ）

命題17（§16）：$[D \rightarrow (C \rightarrow (B \rightarrow A))] \rightarrow [C \rightarrow (B \rightarrow (D \rightarrow A))]$ で，‘D’にxf^*yを，‘C’に$Her(F)$を，‘B’に$In(x, F)$を，‘A’にFyを代入すると，先件が命題77となるから，MPによって後件が次の命題78として導かれる：

$$Her(F) \rightarrow [In(x, F) \rightarrow (xf^*y \rightarrow Fy)] \tag{78}$$

命題2（§14）：$[C \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow [(C \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A)]$ で，‘C’に$Her(F)$を，‘B’に$In(x, F)$を，‘A’に$xf^*y \rightarrow Fy$を代入すると，先件が命題78となるから，MPによって後件が次の命題79として導かれる：

$$[Her(F) \rightarrow In(x, F)] \rightarrow [Her(F) \rightarrow (xf^*y \rightarrow Fy)] \tag{79}$$

命題5（§15）：$(B \rightarrow A) \rightarrow [(C \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A)]$ で，‘B’に$Her(F) \rightarrow In(x, F)$を，‘$A$’に$Her(F) \rightarrow (xf^*y \rightarrow Fy)$を，‘$C$’に$Fx$を代入すると，先件が命題79となるから，MPにより，後件が次の命題80として導かれる：

$$[Fx \rightarrow (Her(F) \rightarrow In(x, F))] \rightarrow [Fx \rightarrow (Her(F) \rightarrow (xf^*y \rightarrow Fy))] \tag{80}$$

命題74ではyは$xfy \rightarrow Fy$の部分にしか現れないから，この部分をaで普遍汎化（§11）すると，$Fx \rightarrow [Her(F) \rightarrow \forall a(xfa \rightarrow Fa)]$，つまり $Fx \rightarrow [Her(F) \rightarrow In(x, F)]$ が導出されるが，これは命題80の先件だから，MPにより後件が次の命題81として導かれる（これは一般化された数学的帰納法である）：

$$Fx \rightarrow [Her(F) \rightarrow (xf^*y \rightarrow Fy)] \tag{81}$$

（xがf系列で遺伝する特性Fを持ち，yがxの子孫ならば，yは特性Fを持つ）

命題18（§16）：$[C \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow [(D \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow (D \rightarrow A))]$ で，‘C’にFxを，‘B’に$Her(F)$を，‘A’に$xf^*y \rightarrow Fy$を，‘D’にAを代入すると，その先件が命題81となるから，MPにより後件が次の命題82として導かれる：

$$(A \rightarrow Fx) \rightarrow [Her(F) \rightarrow (A \rightarrow (xf^*y \rightarrow Fy))] \tag{82}$$

この命題82で，‘A’にhx，‘$F\Gamma$’に$h\Gamma \vee g\Gamma$を代入すると，$(hx \rightarrow hx \vee gx) \rightarrow [Her(\{a : ha \vee ga\}) \rightarrow (hx \rightarrow (xf^*y \rightarrow hy \vee gy))]$ が導出されるが，この式の先件部分：$hx \rightarrow hx \vee gx$は，命題36（18）：$A \rightarrow A \vee B$で‘$A$’に$hx$を‘$B$’に$gx$を代入した式だから証明可能である。よって，これとMPにより後件部分が次の命題83として導かれる：

$$Her(\{a : ha \vee ga\}) \rightarrow [hx \rightarrow (xf^*y \rightarrow hy \vee gy)] \tag{83}$$

（特性hまたはgを持つという特性がf系列で遺伝し，xが特性hを持ち，yがf系列でxに後続するならば，yは特性hまたはgを持つ）

ここで，‘$F\Gamma$’に$h\Gamma \vee g\Gamma$のような複合述語を代入する場合，‘$Her(F)$’という形で‘F’がすでに第2

階の述語によって述語づけられているときは　Her(h∨g)とせず，上記のように集合論の記法で Her({a：ha∨ga})と表す。

命題８（§16）：［D→（B→A)］→［B→（D→A)］で，‘D’にFxを，‘B’に Her(F)を，‘A’にxf*y→Fyを代入して得られる式の先件は命題81であるから，ＭＰにより，後件である次の命題84が導かれる：

$$\mathrm{Her}(F) \rightarrow [Fx \rightarrow (xf^{*}y \rightarrow Fy)] \tag{84}$$

命題12（§16）：［D→（C→（B→A)）］→［D→（B→（C→A)）］で，‘D’にxf*yを，‘C’に Her(F)を，‘B’にIn(x，F)を，‘A’にFyを代入した式の先件は命題77であるから，ＭＰにより，後件である次の命題85が導かれる：

$$xf^{*}y \rightarrow [\mathrm{In}(x, F) \rightarrow (\mathrm{Her}(F) \rightarrow Fy)] \tag{85}$$

（xがyの祖先で，xのすべての子が遺伝する特性Fを持てば，yはFを持つ）

命題19（§16）:(D→（C→B))→［(B→A)→(D→(C→A))］で，‘D’にxf*yを，‘C’にIn(x，F)を，‘B’にHer(F)→Fyを，‘A’にHer（F）→（yfz→Fz）を代入した式の先件は命題85であるから，ＭＰにより，その後件である次の命題86が導かれる：

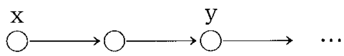
$$[(\mathrm{Her}(F) \rightarrow Fy) \rightarrow (\mathrm{Her}(F) \rightarrow (yfz \rightarrow Fz))]$$
$$\rightarrow [xf^{*}y \rightarrow \{\mathrm{In}(x, F) \rightarrow (\mathrm{Her}(F) \rightarrow (yfz \rightarrow Fz))\}] \tag{86}$$

命題73で，‘y’にｚを，‘x’にｙを代入した式は命題86の先件となるから，ＭＰにより，その後件部分である次の命題87が導かれる：

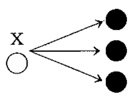
$$xf^{*}y \rightarrow [\mathrm{In}(x, F) \rightarrow (\mathrm{Her}(F) \rightarrow (yfz \rightarrow Fz))] \tag{87}$$

フレーゲは命題87の導出を，以下のように日常言語で説明する[(11)]。

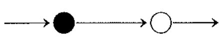
（α）ｙがｆ系列でｘに後続するとする：xf*y



（β）手続きｆのｘへの適用結果がすべて特性Ｆを持つとする：In(x，F)，つまり ∀a（xfa→Fa）

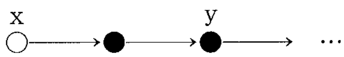


（γ）特性Ｆがｆ系列で遺伝する：Her（F）

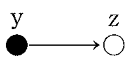

のとき


（α），（β），（γ）の仮定から命題85により，

（δ）ｙは特性Ｆを持つ：Fy



（ε）ｚを手続きｆのｙへの適用結果とする：yfz



命題72（ただし，‘x’にｙを‘y’にｚを代入）によれば，

$$\mathrm{Her}(F) \rightarrow (Fy \rightarrow (yfz \rightarrow Fz))$$

であるから，（γ）：Her（F），（δ）：Fy，（ε）：yfz　から，ＭＰにより，

ｚは特性Ｆを持つ：Fz

が帰結する。こうして，命題87はを日常言語で表現すると，

「もしyがxにf系列で後続しており，xへの手続きfの適用結果がすべてf系列で遺伝する特性Fを持ち，zが対象yへの手続きfの適用結果であるならば，そのときzは特性Fを持つ」

となる。親子モデルでは，

「xがyの祖先であり，xのすべての子が親から子へ遺伝する特性Fを持ち，zがyの子ならば，yはその特性Fを持つ」

となる。

命題15（§16）：$[E\to\{D\to(C\to(B\to A))\}]\to[B\to\{E\to(D\to(C\to A))\}]$ で，‘E’に xf^*y を，‘D’に $In(x, F)$ を，‘C’に $Her(F)$ を，‘B’に yfz を，‘A’に Fz を代入した式の先件は命題87であるから，その後件である次の命題88が導かれる：

$$yfz\to[xf^*y\to(In(x, F)\to(Her(F)\to Fz))] \tag{88}$$

ここから，§28に移る。引き続き，祖先関係（f系列での後続関係）に関わる命題の導出を追跡する。

命題52（§20）：$(C\longleftrightarrow D)\to(fC\to fD)$ で，‘C’に $\forall F[Her(F)\to(In(x, F)\to Fy)]$ を，‘D’に xf^*y を，‘$f\Gamma$’に Γ を代入した式の先件は命題76であるから，その後件部分が次の命題89として導かれる：

$$\forall F[Her(F)\to(In(x, F)\to Fy)]\to xf^*y \tag{89}$$

命題5（§15）：$(B\to A)\to((C\to B)\to(C\to A))$ で，‘B’に $\forall F[Her(F)\to(In(x, F)\to Fy)]$ を，‘A’に xf^*y を代入した式の先件は命題89であるから，その後件部分が次の命題90として導かれる：

$$[C\to\forall F\{Her(F)\to(In(x, F)\to Fy)\}]\to[C\to xf^*y] \tag{90}$$

命題63（§22）：$gx\to[m\to(\forall a(ga\to fa)\to fx)]$ で，‘$g\Gamma$’に $xf\Gamma$ を，‘m’に $Her(F)$ を，‘f’に F を，‘x’に y を代入し，後件部分のFを普遍汎化した式：

$$xfy\to\forall F[Her(F)\to(\forall a(xfa\to Fa)\to Fy)]$$

つまり，$$xfy\to\forall F[Her(F)\to(In(x, F)\to Fy)]$$

は，命題90で‘C’に xfy を代入した式の先件であるから，その後件部分が次の命題91として導かれる：

$$xfy\to xf^*y \tag{91}$$

日常言語による命題91の導出はこうなる（フレーゲが与えている説明(12)を少し変形する）。

（α）xに手続きfを適用した結果をyとする：xfy

（β）xに手続きfを適用した結果がすべて特性Fを持つ：$\forall a(xfa\to Fa)$，
　つまり $In(x, F)$

（α）と（β）から

（γ）yは特性Fを持つ：Fy

が導出されるから，

（δ）xに手続きfを適用した結果がyであり，Fが何であれ，Fがf系列で遺伝し，xに手続きfを適用した結果がすべて特性Fを持つならば，yは特性Fを持つ

が導かれる。（δ）の下線部分は「yはf系列でxに後続する」ということであるから，

「yがxに手続きfを適用した結果であるならば，yはf系列でxに後続する」

となる。これが，命題91の内容である。親子モデルでは，

「yがxの子であるならば，yはxの子孫である」
と表現できる。

命題53（§20）：$fc\rightarrow(c=d\rightarrow fd)$ で，‘fA’に$xfy\rightarrow Af^*y$を，‘c’にxを，‘d’にzを代入した式：$(xfy\rightarrow xf^*y)\rightarrow(x=z\rightarrow(xfy\rightarrow zf^*y))$ の先件が命題91であるから，後件部分が次の命題92として導かれる：

$$x=z\rightarrow(xfy\rightarrow zf^*y) \qquad (92)$$

命題60（§22）：$\forall a\,(ha\rightarrow(ga\rightarrow fa))\rightarrow(gb\rightarrow(hb\rightarrow fb))$ に類比的な第2階の命題60′：$\forall f\,(\Omega\beta f\beta\rightarrow(N\beta f\beta\rightarrow M\beta f\beta))\rightarrow(N\beta g\beta\rightarrow(\Omega\beta g\beta\rightarrow M\beta g\beta))$で，‘f’にFを，‘$\Omega\beta\Gamma\beta$’に$In(x,\Gamma)$を，‘$N\beta\Gamma\beta$’に$Her(\Gamma)$を，‘$M\beta\Gamma\beta$’に$\Gamma y$を，‘g’にFを代入した式：

$$\forall F\,[In(x,F)\rightarrow(Her(F)\rightarrow Fy)]\rightarrow[Her(F)\rightarrow(In(x,F)\rightarrow Fy)]$$

の後件のFを普遍汎化すると次の式が導出される：

$$\forall F\,[In(x,F)\rightarrow(Her(F)\rightarrow Fy)]\rightarrow\forall F\,[Her(F)\rightarrow(In(x,F)\rightarrow Fy)]$$

ところで，この式は，命題90で‘C’に$\forall F\,[In(x,F)\rightarrow(Her(F)\rightarrow Fy)]$を代入した式の先件部分に外ならないから，その後件部分が次の命題93として導かれる：

$$\forall F\,[In(x,F)\rightarrow(Her(F)\rightarrow Fy)]\rightarrow xf^*y \qquad (93)$$

命題7（§15）：$(B\rightarrow A)\rightarrow[(D\rightarrow(C\rightarrow B))\rightarrow(D\rightarrow(C\rightarrow A))]$ で，‘B’に$\forall F\,(In(x,F)\rightarrow(Her(F)\rightarrow Fz))$を，‘A’に$xf^*z$を，‘D’に$yfz$を，‘C’に$xf^*y$を代入した式の先件は，命題93で‘y’にzを代入した式：$\forall F\,(In(x,F)\rightarrow(Her(F)\rightarrow Fz))\rightarrow xf^*z$ であるから，先の式の後件部分が次の命題94として導かれる：

$$[yfz\rightarrow\{xf^*y\rightarrow\forall F\,(In(x,F)\rightarrow(Her(F)\rightarrow Fz))\}]$$
$$\rightarrow[yfz\rightarrow(xf^*y\rightarrow xf^*z)] \qquad (94)$$

命題88で‘F’が現れている部分を普遍汎化して得られる式：

$$yfz\rightarrow[xf^*y\rightarrow\forall F\,(In(x,F)\rightarrow(Her(F)\rightarrow Fz))]$$

は命題94の先件部分であるから，後件部分が次の命題として導かれる：

$$yfz\rightarrow(xf^*y\rightarrow xf^*z) \qquad (95)$$

命題8（§16）：$(D\rightarrow(B\rightarrow A))\rightarrow(B\rightarrow(D\rightarrow A))$ で，‘D’にyfzを，‘B’にxf^*yを，‘A’にxf^*zを代入した式の先件は命題95であるから，後件が次の命題96として導かれる：

$$xf^*y\rightarrow(yfz\rightarrow xf^*z) \qquad (96)$$

（f系列でxに後続する対象yに手続きfを適用した結果zはf系列でxに後続する）
または（yがxの子孫であり，zがyの子ならば，zもxの子孫である）

命題75で‘FΓ’に$xf^*\Gamma$を代入すると，

$$\forall d\,[xf^*d\rightarrow\forall a\,(dfa\rightarrow xf^*a)]\rightarrow Her(\{a:xf^*a\})$$

が得られるが，この式の先件は，命題96で‘z’をaで‘y’をdで普遍汎化した式：

$$\forall d\,[xf^*d\rightarrow\forall a\,(dfa\rightarrow xf^*a)]$$

に外ならないから，後件部分が次の命題97として導かれる：

$$Her(\{a:xf^*a\}) \qquad (97)$$

（f系列でxに後続する（つまりxの子孫である）という特性は，f系列で遺伝する）
命題97の内容は，親子モデルではこういうことである。いま，「xの子孫である」という特性を考える。任意の対象dがこの特性を持っているとしよう。dの任意の子をaとする。そのとき，aも「xの子孫である」という特性を持つ。図式的に書くと，

$$\overset{x}{\bigcirc}\longrightarrow\ \cdots\cdots\ \longrightarrow\overset{d}{\bigcirc}$$

かつ

$$\overset{d}{\bigcirc}\longrightarrow\overset{a}{\bigcirc}$$

ならば

$$\overset{x}{\bigcirc}\longrightarrow\ \cdots\cdots\ \longrightarrow\bigcirc\longrightarrow\overset{a}{\bigcirc}$$

命題84で，‘FΓ’にxf*Γを，‘x’にyを，‘y’にzを代入した式：Her({a：xf*a})→[xf*y→(yf*z→xf*z)]の先件部分は命題97であるから，後件部分が次の命題98として導かれる：

$$xf^{*}y\rightarrow\ (yf^{*}z\rightarrow xf^{*}z) \qquad (98)$$

（xがyの祖先であり，yがzの祖先であれば，xはzの祖先である）

命題98は，祖先関係（すなわち，f系列で後続するという関係）が推移的であるということを主張している。

4．系列（家系）への所属関係とその帰結

対象xを固定し，「xを始祖とするxの子孫である（xにf系列で後続する）」という特性を考えると，x自身がこの特性を持つとは限らない。むしろ，持たない場合が多い。人間の親子関係のモデルにおいても，ある対象がそれ自身の子孫（または先祖）であるとは，通常は見做さない。だが他方で，命題97が主張するように，「xの子孫である」という特性は，親から子へと遺伝する。一般に，f系列で遺伝する特性Fを考えるとき，たとえxの子孫がすべてこの特性Fを持っていたとしても，x自身がFを持つとは限らない。『創世記』の人祖アダムの家系においても，アダム自身はアダムの子孫ではない。同様に，「人間の父を持つ」という遺伝する特性は，アダムのすべての子孫に共有されているが，アダムその人はこれを欠いている（本論文第3節参照）。しかし，アダム自身がアダムの家系（「人間」の家系？）に属することは間違いない。そこで，アダム自身を含めたアダムの家系の一員であることを定義するには，「アダムの子孫であるか，またはアダムその人である」と規定すればよいことになる。これがフレーゲのアイディアである。

『概念記法』§29でフレーゲは，「zはxで始まるf系列に属する」または「zはxを始祖とする家系に属する」という関係を，命題99として定義している。

$$xf^{*}z\ \vee\ z=x\ \longleftrightarrow\ xf^{*=}z \qquad (99)$$

この式の‘←→’の右辺である　xf*z　は，フレーゲの実際の記号では，

$$\frac{\gamma}{\widetilde{\beta}}f\ (x\gamma,\ z\beta)$$

であり，これが「zはxで始まるf系列に属する」を意味する。つまり，命題99全体は，「zがf系列でxに後続するかまたはzがxと同一であるとき，かつそのときに限りzはxで始まるf系列に属する」ということを表している。

以下，この「ある対象で始まるf系列に属する」（親子モデルでは「ある家系に属する」という関係の諸帰結を，フレーゲに従って導出する。

命題57（§21）：（C←→D）→（fD→fC）で，‘C’にxf*z∨z＝xを，‘D’にxf*=zを，‘fΓ’にΓ

を代入した式：

$$(xf^*z \vee z = x \quad \longleftrightarrow \quad xf^{*=}z) \rightarrow (xf^{*=}z \rightarrow xf^*z \vee z = x)$$

の先件は命題99であるから，後件が次の命題100として導かれる：

$$xf^{*=}z \quad \rightarrow \quad xf^*z \vee z = x \tag{100}$$

命題48（§19）：$(D \rightarrow C \vee B) \rightarrow [(B \rightarrow A) \rightarrow \{(C \rightarrow A) \rightarrow (D \rightarrow A)\}]$ で，‘D’に $xf^{*=}z$ を，‘C’に xf^*z を，‘B’に $z = x$ を，‘A’に $zfy \rightarrow xf^*y$ を代入した式の先件部分は命題100であるから，後件部分が次の命題101として導かれる：

$$\begin{aligned}&[z = x \rightarrow (zfy \rightarrow xf^*y)]\\ &\rightarrow [\{xf^*z \rightarrow (zfv \rightarrow xf^*y)\} \rightarrow \{xf^{*=}z \rightarrow (zfv \rightarrow xf^*y)\}]\end{aligned} \tag{101}$$

命題92で，‘x’に z を，‘z’に x を，‘y’に v を代入した式：$z = x \rightarrow (zfv \rightarrow xf^*v)$ は，命題101の‘y’に v を代入した式の先件であるから，これから後件部分：

$$[xf^*z \rightarrow (zfv \rightarrow xf^*v)] \rightarrow [xf^{*=}z \rightarrow (zfv \rightarrow xf^*v)]$$

が導かれる。この式の先件部分は，命題96で‘y’に z を‘z’に v を代入した式：$xf^*z \rightarrow (zfv \rightarrow xf^*v)$ に外ならないから，先の式の後件部分が次の命題102として導かれる：

$$xf^{*=}z \quad \rightarrow (zfv \rightarrow xf^*v) \tag{102}$$

言葉での命題102の導出はこうである：

もし z が x と同一ならば，命題92により，z に手続き f を適用した結果である対象 v は f 系列で x に後続する。もし z が f 系列で x に後続すれば，命題96により，z に手続き f を適用した結果である v は f 系列で x に後続する。

従って，

もし z が x で始まる f 系列に属するならば，そのとき手続き f を z に適用した結果である v は x に後続する

命題19（§16）：$[D \rightarrow (C \rightarrow B)] \rightarrow [(B \rightarrow A) \rightarrow (D \rightarrow (C \rightarrow A))]$ で，‘D’に $xf^{*=}z$ を，‘C’に $\neg xf^*z$ を，‘B’に $z = x$ を，‘A’に $x = z$ を代入した式の先件は命題100であるから，その後件が次の命題103として導かれる：

$$(z = x \rightarrow x = z) \rightarrow (xf^{*=}z \rightarrow xf^*z \vee x = z) \tag{103}$$

命題55(§21)：$c = d \rightarrow d = c$ で，‘c’に z を，‘d’に x を代入した式は命題103の先件であるから，後件が次の命題104として導かれる：

$$xf^{*=}z \rightarrow xf^*z \vee x = z \tag{104}$$

ここから，§30に移る。引き続き，「z は x で始まる f 系列に属する（z は x の家系に属する）」という関係の諸帰結の導出を追う。

命題52（§20）：$(C \longleftrightarrow D) \rightarrow (fC \rightarrow fD)$ で，‘C’に $xf^*z \vee z = x$ を，‘D’に $xf^{*=}z$ を，‘$f\Gamma$’に Γ を代入した式の先件部分は命題99であるから，後件部分が次の命題105として導かれる：

$$xf^*z \vee z = x \quad \rightarrow \quad xf^{*=}z \tag{105}$$

命題37（§18）：$(C \vee B \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow A)$ で，‘C’に xf^*z を，‘B’に $z = x$ を，‘A’に $xf^{*=}z$ を代入した式の先件部分は命題105であるから，後件部分が次の命題106として導かれる：

$$xf^*z \quad \rightarrow \quad xf^{*=}z \tag{106}$$

（f 系列で x に後続する対象は，x で始まる f 系列に属する）

または（x の子孫であるものは，x を始祖とする家系の一員である）

命題 7（§15）：$(B \rightarrow A) \rightarrow [(D \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow (D \rightarrow (C \rightarrow A))]$ で，‘B’に zf^*v を，‘A’に $zf^{*=}v$

を，‘D’に$zf^{*}{=}y$を，‘C’にyfvを代入した式の先件部分は，命題106で‘x’にzを‘z’にvを代入した式に外ならないから，先の式の後件部分が次の命題107として導かれる：

$$[zf^{*}{=}y \rightarrow (yfv \rightarrow zf^{*}v)] \rightarrow [zf^{*}{=}y \rightarrow (yfv \rightarrow zf^{*}{=}v)] \tag{107}$$

命題102で，‘x’にzを，‘z’にyを代入した式：$zf^{*}{=}y \rightarrow (yfv \rightarrow zf^{*}v)$ は命題107の先件であるから，その後件が次の命題108として導かれる：

$$zf^{*}{=}y \quad \rightarrow (yfv \rightarrow zf^{*}{=}v) \tag{108}$$

ここで，この命題108の導出を言葉で与える。

もしyがzで始まるf系列に属するならば，そのとき命題102によって，yに手続きfを適用したすべての結果は，f系列でzに後続する。そのとき命題106によって，手続きfをyに適用したすべての結果は，zで始まるf系列に属する。

従って，

もしyがzで始まるf系列に属するならば，手続きfをyに適用したすべての結果は，zで始まるf系列に属する。

上の命題108で，‘z’にxを代入し，‘y’をdで，‘v’をaで普遍汎化すると，

$$\forall d\ (xf^{*}{=}d \rightarrow \forall a\ (dfa \rightarrow xf^{*}{=}a))$$

という式が導かれるが，これは，命題75で‘FΓ’に$xf^{*}{=}\Gamma$を代入した式：

$$\forall d\ (xf^{*}{=}d \rightarrow \forall a\ (dfa \rightarrow xf^{*}{=}a)) \quad \rightarrow Her\ (\{a : xf^{*}{=}a\})$$

の先件であるから，後件が次の命題109として導かれる：

$$Her\ (\{a : xf^{*}{=}a\}) \tag{109}$$

命題78で，‘FΓ’に$xf^{*}{=}\Gamma$を，‘x’にyを，‘y’にmを代入した式：

$$Her\ (\{a : xf^{*}{=}a\}) \rightarrow [\forall a\ (yfa \rightarrow xf^{*}{=}a) \rightarrow (yf^{*}m \rightarrow xf^{*}{=}m)]$$

の先件は命題109であるから，後件が次の命題110として導かれる：

$$\forall a\ (yfa \rightarrow xf^{*}{=}a) \rightarrow (yf^{*}m \rightarrow xf^{*}{=}m) \tag{110}$$

命題25（§16）：$(D \rightarrow (C \rightarrow A)) \rightarrow [D \rightarrow (C \rightarrow (B \rightarrow A))]$ で，‘D’に$zf^{*}{=}y$を，‘C’にyfvを，‘A’に$zf^{*}{=}v$を，‘B’に$\neg vf^{*}z$を代入した式の先件は命題108であるから，後件が次の命題111として導かれる：

$$zf^{*}{=}y \rightarrow [yfv \rightarrow vf^{*}z \vee zf^{*}{=}v] \tag{111}$$

この命題111の言葉による導出を与える：

もしyがzで始まるf系列に属するならば，命題108により，手続きfのyに対する適用結果はすべてzで始まるf系列に属する。従って，手続きfのyに対する適用結果はすべて，zで始まるf系列に属するかまたはf系列でzに先行する。

こうして，

もしyがzで始まるf系列に属するならば，そのとき，手続きfのyへの適用結果はすべて，zで始まるf系列に属するかまたはf系列でzに先行する。

命題11（§16）：$((C \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A)$ で，‘C’に$\neg xf^{*}{=}z$を，‘B’に$z=x$を，‘A’に$xf^{*}{=}z$を代入した式の先件は命題105であるから，その後件が次の命題112として導かれる：

$$z = x \quad \rightarrow \quad xf^{*}{=}z \tag{112}$$

命題7（§15）：$(B \rightarrow A) \rightarrow [(D \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow (D \rightarrow (C \rightarrow A))]$ で，‘B’に$z=x$を，‘A’に$xf^{*}{=}z$を，‘D’に$zf^{*}{=}x$を，‘C’に$\neg zf^{*}x$を代入した式の先件は命題112であるから，後件が次の命題113として導かれる：

$$[zf^{*}{=}x \to (zf^{*}x \vee z = x)] \to [zf^{*}{=}x \to (zf^{*}x \vee xf^{*}{=}z)] \qquad (113)$$

命題104で，‘x’にzを，‘z’にxを代入した式：$zf^{*}{=}x \to (zf^{*}x \vee z = x)$は命題113の先件であるから，後件が次の命題114として導かれる：

$$zf^{*}{=}x \to (zf^{*}x \vee xf^{*}{=}z) \qquad (114)$$

（xがzを始祖とする家系に属するならば，xはzの子孫であるかまたはzはxを始祖とする家系に属する）

この命題114の言葉による導出を与える：

xがzで始まるf系列に属するとする。そのとき命題113によって，xはf系列でzに後続するかまたはzはxと同一である。もしzがxと同一であれば，命題112によって，zはxで始まるf系列に属する。

最後の二つの命題から，次が導かれる：

xはf系列でzに後続するか，またはzはxで始まるf系列に属する。

従って，

もしxがzで始まるf系列に属するならば，xはf系列でzに後続するかまたはzはxで始まるf列に属する。

5．多対一の関係とその帰結

これまで，二項関係fは全く一般的な「手続き」として扱われてきた。従って，「親子」のような「多対多」の関係がモデルとして許容されていた。しかし，フレーゲの本来の意図は数の系列にあり，それの準備のために一般系列理論を展開しているのである。そこで，fを限定して，数系列の構成に不可欠な「多対一」の関係（数学的には「関数」の関係）を定義せねばならない。それが『概念記法』§31で命題115によって与えられる：

$$\forall e \forall d\,[dfe \to \forall a\,(dfa \to a = e)] \longleftrightarrow FN(f) \qquad (115)$$

われわれが　FN（f）と表した‘←→’の右辺は，フレーゲの実際の記号では，

$$\overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}}\, f\,(\delta,\ \varepsilon)$$

であり，「手続きfは多対一である」または「fは関数である」と翻訳される（‘FN’はfunctionに由来する）。こうして，命題115全体は，

「dが何であれ，eがdへの手続きfの適用結果であるという状況から，dへのfの適用結果がすべてeと同一であるということが帰結するとき，かつそのときにかぎり，「fは多対一の手続きである（fは関数である）」と定義する」

と翻訳される。

以下，多対一の関係の定義からの諸帰結を，フレーゲに従って導出する。

命題68（§22）：$[\forall a fa \longleftrightarrow B] \to (B \to fc)$で，‘fΓ’に$\forall d(df\Gamma \to \forall a\,(dfa \to a = \Gamma))$を，‘B’にFN（f）を，‘c’にxを代入し，‘a’をeで書き換えると，

$$[\forall e \forall d(dfe \to \forall a(dfa \to a = e)) \longleftrightarrow FN(f)]$$
$$\to [FN(f) \to \forall d(dfx \to \forall a(dfa \to a = x))]$$

が導かれるが，この式の先件は命題115であるから，後件である次の命題116が導かれる：

$$FN(f) \to \forall d\ [dfx \to \forall a\ (dfa \to a = x)] \tag{116}$$

命題９（§16）：（C→B）→((B→A)→（C→A)) で，'C'にFN（f）を，'B'に∀d (dfx→∀a (dfa→a＝x))を，'A'にyfx→∀a (yfa→a＝x) を代入した式の先件は命題116であるから，後件が次の命題117として導かれる：

$$[\forall d\ \{dfx \to \forall a\ (dfa \to a = x)\} \to \{yfx \to \forall a\ (yfa \to a = x)\}]$$
$$\to [FN(f) \to \{yfx \to \forall a\ (yfa \to a = x)\}] \tag{117}$$

普遍例化の主張である命題58（§22）：∀afa→fcで，'a'をdで書き換え，'fΓ'にΓfx→∀a (Γfa→a＝x) を，'c'にyを代入した式：

$$\forall d\ [dfx \to \forall a\ (dfa \to a = x)] \to \{yfx \to \forall a\ (yfa \to a = x)\}$$

は命題117の先件であるから，後件が次の命題118として導かれる：

$$FN(f) \to [yfx \to \forall a\ (yfa \to a = x)] \tag{118}$$

命題19（§16）：（D→（C→B))→［(B→A）→（D→（C→A))］で，'D'にFN（f）を，'C'にyfxを，'B'に∀a(yfa→a＝x)を，'A'にyfa→a＝xを代入した式の先件は命題118であるから，後件である次の命題119が導かれる：

$$[\forall a\ (yfa \to a = x) \to (yfa \to a = x)]$$
$$\to [FN(f) \to \{yfx \to (yfa \to a = x)\}] \tag{119}$$

命題58（§22）：∀afa→fcで，'fΓ'にyfΓ→Γ＝xを，'c'にaを代入した式：∀a (yfa→a＝x)→(yfa→a＝x) は命題119の先件であるから，後件である次の命題120が導かれる：

$$FN(f) \to [yfx \to (yfa \to a = x)] \tag{120}$$

命題20（§16）：［E→（D→（C→B))］→［(B→A）→｛E→（D→（C→A))｝］で，'E'にFN（f）を，'D'にyfxを，'C'にyfaを，Bにa＝xを，'A'にxf*＝aを代入した式の先件は命題120であるから，後件が次の命題121として導かれる：

$$(a = x \to xf^{*=}a) \to [FN(f) \to \{yfx \to (yfa \to xf^{*=}a)\}] \tag{121}$$

命題112で，'z'にaを代入した式：a＝x→xf*＝aは命題121の先件であるから，後件が次の命題122として導かれる：

$$FN(f) \to [yfx \to (yfa \to xf^{*=}a)] \tag{122}$$

命題19（§16）：（D→（C→B))→［(B→A）→（D→（C→A))］で，'D'にFN（f）を，'C'にyfxを，'B'に∀a (yfa→xf*＝a）を，'A'にyf*m→xf*＝mを代入した式の先件は，上の命題122でyfa→xf*＝aの部分の'a'を普遍汎化した式：

FN（f）→（yfx→∀a (yfa→f*＝a)) であるから，先の式の後件が次の命題123として導かれる：

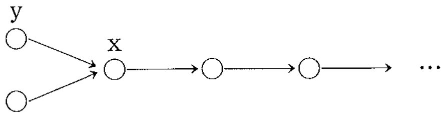
$$[\forall a\ (yfa \to xf^{*=}a) \to (yf^{*}m \to xf^{*=}m)]$$
$$\to [FN(f) \to \{yfx \to (yf^{*}m \to xf^{*=}m)\}] \tag{123}$$

上の命題123の先件は命題110に外ならないから，その後件が次の命題124として導かれる：

$$FN(f) \to [yfx \to (yf^{*}m \to (xf^{*=}m)] \tag{124}$$

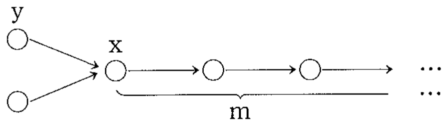
（もしxが多対一の手続きfをyに適用した結果であり，mがf系列でyに後続するならば，mはxで始まるf系列に属する）

命題124の内容を図式的に表すと，



かつ

ならば,



となろう。

命題20 (§16)：［E→（D→（C→B))］→［(B→A）→｛E→（D→（C→A))｝］で,‘E’にFN（f）を,‘D’にyfxを,‘C’にyf*mを,‘B’にxf*=mを,‘A’にxf*m∨mf*=xを代入した式の先件は命題124であるから,後件が次の命題125として導かれる：

$$(xf^{*=}m \rightarrow xf^{*}m \vee mf^{*=}x) \rightarrow [FN(f) \rightarrow \{yfx \rightarrow (yf^{*}m \rightarrow xf^{*}m \vee mf^{*=}x)\}] \quad (125)$$

命題114で,‘x’にmを,‘z’にxを代入した式：xf*=m→（xf*m∨mf*=x）は命題125の先件であるから,その後件が次の命題126として導かれる：

$$FN(f) \rightarrow [yfx \rightarrow (yf^{*}m \rightarrow (xf^{*}m \vee mf^{*=}x)] \quad (126)$$

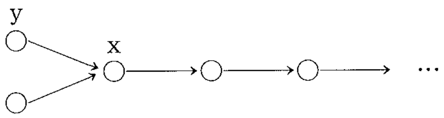
この命題126の導出を言葉で与えよう：

xを,多対一の手続きfのyに対する適用の結果とし,mがf系列でyに後続するとする。そのとき,命題124によれば,mはxで始まるf系列に属する。従って,命題114によれば,mはf系列でxに後続するか,またはxはmで始まるf系列に属する。

こうして,

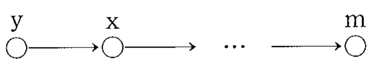
xが多対一の手続きfのyへの適用結果であり,mがf系列でyに後続するとき,mはf系列でxに後続するか,またはxはmで始まるf系列に属する。

図式化すると,以下のように表現できよう。

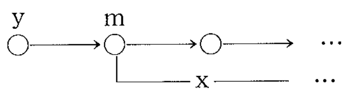


かつ

ならば



または



命題12 (§16)：［D→（C→（B→A))］→［D→（B→（C→A))］で,‘D’にFN（f）を,

‘C’にyfxを，‘B’にyf^*mを，‘A’に$xf^*m \vee mf^{*=}x$を代入した式の先件は命題126であるから，後件が次の命題127として導かれる：

$$FN(f) \rightarrow [yf^*m \rightarrow (yfx \rightarrow xf^*m \vee mf^{*=}x)] \tag{127}$$

命題51（§19）：$(D \rightarrow (C \rightarrow A)) \rightarrow [(B \rightarrow A) \rightarrow (D \rightarrow (C \vee B \rightarrow A))]$で，‘D’に$FN(f)$を，‘C’に$yf^*m$を，‘A’に$yfx \rightarrow (xf^*m \vee mf^{*=}x)$を，‘B’に$mf^{*=}y$を代入した式の先件は命題127であるから，後件が次の命題128として導かれる：

$$[mf^{*=}y \rightarrow (yfx \rightarrow xf^*m \vee mf^{*=}x)]$$
$$\rightarrow [FN(f) \rightarrow \{yf^*m \vee mf^{*=}y \rightarrow (yfx \rightarrow (xf^*m \vee mf^{*=}x))\}] \tag{128}$$

命題111で，‘z’にmを，‘v’にxを代入した式：$mf^{*=}y \rightarrow (yfx \rightarrow xf^*m \vee mf^{*=}x)$は命題128の先件であるから，後件が次の命題129として導かれる：

$$FN(f) \rightarrow [yf^*m \vee mf^{*=}y \rightarrow (yfx \rightarrow xf^*m \vee mf^{*=}x)] \tag{129}$$

（手続き f が多対一であり，y が f 系列でmに先行するかまたはmで始まる f 系列に属するならば，手続き f への適用のすべての結果 x は f 系列でmに先行するか，またはmで始まる f 系列に属する）

命題９（§16）：$(C \rightarrow B) \rightarrow [(B \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow A)]$で，‘C’に$FN(f)$を，‘B’に$\forall d\,[df^*m \vee mf^{*=}d \rightarrow \forall a(dfa \rightarrow af^*m \vee mf^{*=}a)]$を，‘A’に$Her(\{a : af^*m \vee mf^{*=}a\})$を代入した式の先件は，命題129の‘x’と‘y’をそれぞれ a と d で普遍汎化した式：$FN(f) \rightarrow \forall d\,[df^*m \vee mf^{*=}d \rightarrow \forall a(dfa \rightarrow af^*m \vee mf^{*=}a)]$　に外ならないから，先の式の後件が次の命題130として導かれる：

$$[\forall d\,[df^*m \vee mf^{*=}d \rightarrow \forall a(dfa \rightarrow af^*m \vee mf^{*=}a)] \rightarrow Her(\{a : af^*m \vee mf^{*=}a\})]$$
$$\rightarrow [FN(f) \rightarrow Her(\{a : af^*m \vee mf^{*=}a\})] \tag{130}$$

命題75で，‘FΓ’に$\Gamma f^*m \vee mf^{*=}\Gamma$を代入した式：
$\forall d\,[df^*m \vee mf^{*=}d \rightarrow \forall a(dfa \rightarrow af^*m \vee mf^{*=}a)] \rightarrow Her(\{a : af^*m \vee mf^{*=}a\})$は命題130の先件であるから，後件が次の命題131として導かれる：

$$FN(f) \rightarrow Her(\{a : af^*m \vee mf^{*=}a\}) \tag{131}$$

（手続き f が多対一であるとき， f 系列でmに先行するかまたはmで始まる f 系列に属するという特性は f 系列で遺伝する）

命題９（§16）：$(C \rightarrow B) \rightarrow [(B \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow A)]$　で，‘C’に$FN(f)$を，‘B’に$Her(\{a : af^*m \vee mf^{*=}a\})$を，‘A’に$xf^*m \rightarrow (xf^*y \rightarrow yf^*m \vee mf^{*=}y)$を代入した式の先件は命題131であるから，後件が次の命題132として導かれる：

$$[Her(\{a : af^*m \vee mf^{*=}a\}) \rightarrow \{xf^*m \rightarrow (xf^*y \rightarrow yf^*m \vee mf^{*=}y)\}]$$
$$\rightarrow [FN(f) \rightarrow \{xf^*m \rightarrow (xf^*y \rightarrow yf^*m \vee mf^{*=}y)\}] \tag{132}$$

命題83で，‘hΓ’にΓf^*mを，‘gΓ’に$mf^{*=}\Gamma$を代入した式：

$$Her(\{a : af^*m \vee mf^{*=}a\}) \rightarrow [xf^*m \rightarrow (xf^*y \rightarrow yf^*m \vee mf^{*=}y)]$$

は命題132の先件であるから，後件が次の命題133として導かれる：

$$FN(f) \rightarrow [xf^*m \rightarrow (xf^*y \rightarrow yf^*m \vee mf^{*=}y)] \tag{133}$$

（手続き f が多対一であり，mと y が f 系列で x に後続するとき，y は f 系列でmに先行するかまたはmで始まる f 系列に属する）

この命題133の導出によって，フレーゲは，『概念記法』第３部での f 系列に関する式の導出をひとまず終えている。

6．直観と純粋思考

フレーゲは『概念記法』第3部への導入（§23）で，純粋思考の直観に対する優位を強調していた。フレーゲによれば，純粋思考によって定義され導かれる命題は，直観による命題を一般性において凌駕しているのである（本論文第1節参照）。また，『概念記法』全体への「序」において，自らの歩みを振り返ってこう言っている：

「……，まず私は，ここから数概念に進むために系列における配置の概念を論理的後続の概念に還元しようと試みた。ここで直観的なものが気づかれずに侵入できないようにするために，すべての推論に透き間がなくなることが重要であった。」[13]（強調はフレーゲ）

こうして，フレーゲは，

（1）命題の主張内容とその根拠の一般性・論理性，射程の長さ（適用範囲の広さ）

および

（2）推論の連鎖において透き間（論理的飛躍）がないという意味での厳密な証明の追究

という観点から，純粋思考の直観に対する優位を考えていると言える。数学の概念や定理を論理的に定義し導出すること，その導出を厳密な証明により行うこと，これらの実現はフレーゲの論理主義のプログラムにおける中心的な課題である。フレーゲは最初の著作である『概念記法』においてすでにそのことを目標とし，実行し始めたのである。そこで，この二つの観点から『概念記法』第3部を眺め，彼の意図がこの時点でどれほど実現しているかを検討しよう。

直観的なものの役割とは何であろうか。フレーゲはカントを意識する点においてより，「時空の直観形式」といつたものを念頭においていたのかもしれないが，ここではまず，系列に関する命題を理解するためのモデルという形で捉えることにする。われわれは「系列における遺伝」や「系列における後続」といった関係を「親子」モデルを使って考えたし，これはフレーゲ自身の説明手段でもあったからである。親から子へと生物学上の特性が文字通り遺伝するイメージによって，対象ｄが持っていた特性Ｆを，ｄに手続きｆを適用した結果である対象ａも持つこと，すなわち「Ｆの伝達」という事態を理解することが容易になる。しかし，そのような直観的なものは，さまざまなモデルの中の一つにすぎない。直観的なものに訴えることは，命題の内容全体を目前に提示されたモデルの特殊事例に限定してしまうことを含む。言い換えると，命題の内容の持つ一般性を狭め，それによって言わば命題の内容の射程を短くするのである。

例えば，§26で「ｙはｆ系列でｘに後続する」：xf*y　という関係の定義（命題76）を説明するとき，フレーゲは手続きｆの配置（順序）を，そこでは一般的に考えていることを強調するために，いくつものモデルを例示していた。フレーゲの意図は，多数のモデルの提示による十全な理解の促進を図ることであったと同時に，どれか一つのモデルに限定することによって命題76が持つ内容の一般性を減じてはならないための注意，ということでもあった。

われわれも手続きｆを「親子」の関係として，『創世記』5章のアダムの系図を祖先関係（系列ｆでの後続関係）のモデルとした。そして，対象ｘを固定して「ｘを祖先とするその子孫である」という特性が遺伝することを，このモデルで考えた（本論文第3節参照）。この「ｘを祖先としてその子孫である」という特性は後に，そのような特定のモデルに依存しない形で，フレーゲの体系において論理的に導出された（命題97：Her({ａ：xf*a}))。もちろん，これは論点先取によるのではなく，第2階述語論理という体系で「代入」という論理的操作によって導出されたのである。

ここで，この「代入」という論理的操作がフレーゲの体系という文脈において持つ必要以上の強さ（それはある困難を生み出す可能性を孕むほどのものである）について語ることはできる(14)。しかし，われわれとしては，フレーゲの体系の欠点を指摘してその限界を論ずるのではなく，彼が意図したことの積極的な意義と（部分的にしろ）成功した側面を評価する，という観点を保持したい。『概念記法』第3部でのフレーゲの意図は，自然数の算術を展開するに必要な関係と概念を一般的に定義し，論理的に導くことであった。上で引用した「系列における配置の概念を論理的後続の概念に還元する」というフレーゲの戦略の意図も，正しくそこにこそあった。

「算術に必要な原理の論理的導出」という『概念記法』第3部での意図の実現を例証するものとして，いわゆる「数学的帰納法」の導出を挙げることができる。フレーゲの体系では，数学的帰納法は，命題81がそれに相当する：

(81)　　$Fx \to [Her(F) \to (xf^*y \to Fy)]$.

通常，自然数論において数学的帰納法（mathematical induction：MI）は次の形の命題で考えられる：

(MI)　　$P0 \ \wedge \ \forall x\ (Px \to Px') \ \to \ \forall x Px$.

この，通常の形の数学的帰納法が命題81の特殊事例であり，これから論理的に導かれることは次のようにして分かる。いま，MIの先件を仮定する：

$$P0 \text{ かつ } \forall x\ (Px \to Px') \quad \cdots\cdots①$$

また，自然数論での後者関数「′」をフレーゲの手続きｆと関連づけるため，

$$xfy \ \longleftrightarrow \ y = x' \quad \cdots\cdots②$$

とおく。命題81で，‘F’にPを，‘x’に0を代入し，‘y’を普遍汎化すると，

$$P0 \to [Her(P) \to \forall y\ (0f^*y \to Py)] \quad \cdots\cdots③$$

が導かれる。ここで，Her（P），すなわち　$\forall x\ (Px \to \underline{\forall y\ (xfy \to Py)})$ の，下線部分：$\forall y\ (xfy \to Py)$ は②により，Px'と同値である。（なぜなら，$\forall y\ (xfy \to Py)$ と仮定すると普遍例化により，$xfx' \to Px'$. ところが②より　$xfx' \longleftrightarrow x'=x'$であり，この式の右辺は常に成り立つから　xfx', ∴Px'。逆に，Px'と仮定して，任意のｙについてxfyとおくと，②よりｙ＝x'だから，Py，∴$\forall y(xfy \to Py)$が導かれるからである。）よって，Her（P）は　$\forall x\ (Px \to Px')$ と同値である。すると，①の仮定からP0，$\forall x\ (Px \to Px')$ すなわちHer（P）　であるから，③より

$$\forall y\ (0f^*y \to Py) \quad \cdots\cdots④$$

が導かれる。ところで，標準的な解釈を持つ通常の自然数論では，すべての自然数は，０および０の後者：$0'$，$0''$，$0'''$，……　である。よって，②の$xfy \longleftrightarrow y = x'$により，フレーゲの体系の言葉で言えば，すべての自然数とは，０および０のすべての後続者に外ならない。ゆえに，P0の仮定と④により，すべての自然数はＰである，すなわち，

$$\forall x Px \quad \cdots\cdots⑤$$

が導かれる。こうして，①の仮定から⑤が導けた。こうして，フレーゲの体系で

$$P0 \ \wedge \ \forall x\ (Px \to Px') \ \to \ \forall x Px$$

という，通常の数学的帰納法が導出される。

数学的帰納法は「数学に特有な原理」であると考えられることがある。フレーゲはこの原理をより一般的な形で導いた。その導出の根拠となったものは，全く一般的・論理的に定義された，ｆ系列における遺伝と後続という関係である。概念に関わる法則が何を根拠にして何から導かれているか，という命題相互の内的関連を知ることは，学問の発展という観点からきわめて重要である。フ

レーゲは根拠となるものは，一般性・論理性のより高いものであると考え，自然数の算術の展開に必要な概念と法則を，より一般的・論理的な定義と法則から導くことを実行した。この観点から，『概念記法』第3部を見直すとき，彼の意図は十分に実現しているといえる。

さて，「厳密な証明の追究」という観点から第3部を見るというもう一つの課題は，節を改めて遂行することにする。

7．厳密な証明の追究

われわれは『概念記法』第3部を「厳密な証明の追究」という観点から眺めるために，『概念記法』の出版から5年後の1884年に出た『算術の基礎』(Grundlagen der Arithmetik) の冒頭の数章に手掛りを求めたい[15]。というのは，この箇所でフレーゲ自身が明確に「厳密な証明の追究」という主題を述べており，従って，それを19世紀数学の厳密化の運動に果たしたフレーゲの役割という観点から第3部に光を当てる，というわれわれの目論見にとっても好都合だからである。

フレーゲは，関数・連続性・極限・無限といった概念について批判的吟味と厳密な定義が求められているという歴史的な事態を踏まえて，こう述べる：

> 「数学においては，多くの成功した応用に支えられた単なる教訓的確信では不十分であることが益々明らかにされてきている。以前は自明なことと見なされていた多くの事柄に対して，今では証明が要求されている。……　厳密に証明し，妥当性の限界を正確に設定しようとして，それを可能とするために概念を鋭利に把握する努力が至る所でなされているのが見られる。」(『算術の基礎』[16]§1．以下引用の際は『基礎』と略記)

厳密な証明を追究するという数学のこのような傾向は，偶然的な歴史的産物ではなく，数学の本性に根ざすものとフレーゲは考える。

> 「証明が可能である場合には，数学が帰納による確証よりは証明を好むというのは，数学の本性に基づいている。」(『基礎』§2)

ではなぜ，証明が必要なのか。それは，真理の間の相互関係，すなわち当の真理がどの一層基本的で単純な真理から導かれたかを知るためである。

> 「証明は，単に一つの命題の真理性に対してすべての疑いを排除するという目的だけを持つのではなく，真理がいかに互いに依存し合っているかという相互依存性への洞察をもたらすものである。」(『基礎』§2)

すると，証明は，真理の正当性 (Berechtung) の問題と直結する。これに関連してフレーゲは，『算術の基礎』§3で，算術の真理の本性についての引き出される哲学的問い――算術の真理はア・プリオリなものかア・ポステリオリなものか，分析的なものか総合的にものかという問い――も数学的に問われねばならない，と論じる。

> 「[そのような] 関連する諸概念がそれ自体哲学に属するにせよ，それにも関わらず，数学の手助けがなければ [これらの問いについては] いかなる決定にも到達し得ない，と私は信じる。」(『基礎』§3)

フレーゲによれば，算術の命題についても，命題の主張内容の真偽の問いと，その正当性の根拠の問い，つまりどのようにしてそれが証明されたかという問いとを，区別する必要がある。ア・プリリ vs. ア・ポステリオリ，分析的 vs. 総合的という哲学的区別は，判断の「内容」にではなく判断をなす「根拠」に関わるのである。そして真理が数学の領域に属するものであれば，数学が本性的

に求める命題の正当化，すなわち証明を改めて吟味する必要がある。フレーゲにとって，「分析的」または「ア・プリオリ」である命題とは，その証明が定義と一般的論理法則にのみ依存するような命題であり，「総合的」または「ア・ポステリオリ」である命題とは，その証明が特殊な科学の領域または特定の対象についての事実を含むことなしには遂行できない命題である。

ここで，ア・プリオリ vs. ア・ポステリオリ，分析的 vs.総合的という区別をフレーゲが数学者として行ったのか哲学者として行ったのか，といった問題は派生的問題にすぎない。それらの区別に基づく問い（算術の真理はこれらのどちらであるかという問い）が数学的に答え易いようにある種の変更を被ったとしても，肝心な点は「問いの数学化」の持つ意味である。フレーゲにとって，算術の基本法則は可能ならば証明されねばならず，しかも厳密に証明されねばならない。

> 「これらの哲学的な問いから出発して，われわれは数学の領域で独立に生じた同じ要求を定式化することに導かれる。すなわち，その要求とは，算術の基本法則は，もしそれが何らかの方法で可能ならば，最大限の厳密さをもって証明されねばならない。というのは，演繹の連鎖におけるすべての透き間が最大の注意をもって取り除かれるとき初めて，その証明がいかなる原真理(Urwahrheit)に依存しているかを確実に語ることができるからである。」（『基礎』§4）

こうして，透き間のない証明が要求されるのは，真理の正当性の究極の根拠を明らかにするためである。

> 「もしわれわれがこの要求を満たそうとするならば，われわれは，そこで生じている概念をより単純な概念に分析することに成功するかまたはそれらをより一般性を持つものに還元することに成功するか，しないかぎり証明できない文に到達する。」（『基礎』§4）

フレーゲは算術の基本法則は一般的な論理法則から導かれ，算術の展開に必要な概念――言うまでもなくそれの筆頭は数の概念である――はすべて論理的に定義できると考えた。こうして，基本法則の証明可能性と基本概念（数概念）の定義可能性の要求は，19世紀数学の厳密化の運動という歴史的な事実問題であったと同時に，フレーゲにとっては数学の本性に根ざす要求であった。フレーゲはこの要求に従って，『概念記法』第3部において，数系列を定義するためのより一般的な概念や関係（つまり「系列における遺伝」以下四つの概念や関係）を一般的・論理的に定義し，それに関する法則を論理的に導いた。第3部でなされた仕事の意義は，上で見てきたような厳密な証明による真理の正当性の根拠の明示，という文脈から光を当てて初めて正しく評価されることになろう。

註

(1) テキストとしては，Olms社からのもの：Gottlob Frege, *Begriffsschrift und andere Aufstze,* Zweite Auflage, Olms Vlg.1977 を用いるが，これには一部誤植が含まれるので，Bynumの英訳：Gottlob Frege, *Conceptual Notation and Related Articles,* transl. and ed. by T.W.Bynum, Clarendon Press, 1972 も合わせて参照する。筆者はかつて'Begriffsshrift'を「概念文字」と訳して論文を書いた（田畑博敏「フレーゲの論理学――『概念文字』I，II章研究――」鳥取大学教養部紀要第15巻1981）。この訳語は，当時としてほとんど唯一のフレーゲの邦訳文献であった石本新氏による第1部の翻訳（石本新訳編『論理思想の革命』東海大学出版会1972）に従ったものである。その後，「概念記法」という訳語が一般に定着してきたと思われるので，筆者もこれに改める（また区切りの単位も「章」ではなく「部」と改める）。尚，本論文は，内容的には独立しているが，研究の継続という観点からは，筆者の上記論文に連続するものである。

(2) G. Boolos: "Reading the *Begriffsschrift*", Mind 94 (1985), pp.331-44. この論文は，フレーゲの数学の哲学に関

する，80年代以降の主要な論文を集めた次の論文集にも収録されている。W. Demopoulos (ed.) : *Frege's Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, 1995.

(3) Frege: *Begriffsschrift* §23, S.55.（頁づけは註 1 のテキストによる。）

(4) *Begriffsschrift* §24, S.56.

(5) op.cit. §24, S.56.

(6) op.cit. §24, S.57.

(7) op.cit. §24, S.58.

(8) op.cit. §26, S.61.

(9) op.cit. §26, S.61-2.

(10) op.cit. §26, S.62.

(11) op.cit. §27, S.67.

(12) op.cit. §28, S.69.

(13) op.cit. S. X.

(14) 標準的な論理規則が認められているとき，代入規則と内包公理シェーマ：$\exists X \forall x\,(Xx \longleftrightarrow A(x))$とは演繹的に同値である。その証明の概略は以下のようになる。証明可能な式　$\forall x\,(Fx \longleftrightarrow Fx)$ から第 2 階の存在汎化により，$\vdash \exists X \forall x\,(Xx \longleftrightarrow Fx)$. 代入規則を仮定しているとして，'F'に $\{a : A(a)\}$ を代入すると，$\vdash \exists X \forall x\,(Xx \longleftrightarrow A(x))$. 逆に，内包公理シェーマから代入規則が導けることを示す。$\vdash \forall x\,(Fx \longleftrightarrow A(x))$　かつ　$\vdash P[F]$ から，$\vdash P[\{a : A(a)\}]$ を導かねばならない。$P[F]$ の部分式についての数学的帰納法により，$\vdash \forall x\,(Fx \longleftrightarrow A(x)) \rightarrow (P[F] \longleftrightarrow P[\{a : A(a)\}])$. 仮定：$\vdash P[F]$ と，$P[\{a : A(a)\}]$ の部分に'F'が含まれないことにより，$\vdash \exists X \forall x\,(Xx \longleftrightarrow A(x)) \rightarrow P[\{a : A(a)\}]$. 内包公理シェーマを仮定しているから，$\vdash P[\{a : A(a)\}]$. QED. こうして，代入規則を認めることは内包公理シェーマが体系内に含まれていることを認めることになる。しかし，特性と対象の区別とその根拠が余り明確でない『概念記法』においてはラッセルのパラドクスと類比的な問題が生じる可能性は否定できない。例えば，f は特性間では成り立たないのか？特性と特性の間で x f y を「特性 x は特性 y に当てはまる」と解釈すると $\neg xfx$は「x は自分自身に当てはまらない特性である」という特性となり，そのとき　$\exists X \forall x\,(Xx \longleftrightarrow \neg xfx)$ は「自分自身に当てはまらないすべての特性がかつそれらのみが当てはまる特性が存在する」と解釈されようが，これは偽であろう。もちろん，$\exists X$を「…なる集合が存在する」と読むとラッセルのパラドクスそのものが導かれる。

(15) 同じ戦略をベナセラフが影響力のある論文「フレーゲ：最後の論理主義者」で採用している (P. Benacerraf : "Frege : The Last Logicist", *Midwest studies in philosophy VI,* French et al (eds.), University of Minnesota Press, 1981, pp.17-35. 註 2 に記したDemopoulos編の書物に収録)。

(16) テキストとしてはオースティンの独英対訳本を用いる：*The Foundations of Arithmetic, German Text with English Translation by* J. *L. Austin,* Northwestern University Press, 1953.

(1996年 4 月30日受理)