フレーゲ以後の演繹体系について

哲学教室　田　畑　博　敏

§0．はじめに

アリストテレス以来，論理学は，妥当な推論をそうでない推論からどのようにして区別するのか，ということを中心的研究課題としてきた。今日，妥当な推論はいくつかの論理的な演繹体系として整備されており，それらの特徴づけも種々の観点から行われている。本論文の目的は，フレーゲ以後の代表的な論理的演繹体系を概観し，それらの相互関係，論理体系としての役割，それの持つ哲学的含意等を簡潔に要約することである。以下では，四つの演繹体系，すなわち①フレーゲ＆ヒルベルト流体系，②自然演繹，③連式計算，および④タブロー・メソッドを取り上げる。フレーゲ＆ヒルベルト流体系は，フレーゲに由来し，ラッセル，ヒルベルト等によって継承された公理体系という形での演繹体系であり，真理としての論理法則を組織的に導出することで特徴づけられる。自然演繹体系（natural deduction system）はゲンツェンに由来し，主として数学にインフォーマルな形で現れる推論形式をそのまま「自然な形で」採集することを意図して作られた体系である。連式計算（sequent calculus）もゲンツェンに由来し，「主定理」と呼ばれるメタ定理により，多くの数学（または数学基礎論）に応用される体系である。ダブロー・メソッドは連式計算と解釈上の密接な関連をもつ直観的に見通しの良い体系である。これらの体系はそれぞれの特徴と目的に応じて一長一短があり，一概に優劣をつけることはできない(1)。以下，本論文では歴史的考察は必要最小限に抑え，もっぱら体系的に（主として構文論的観点から）これらの演繹体系の考察に焦点を絞る。演繹体系という論理学の最も基本的部分が持つ主要なアイディアと目的を検討することによって，情報科学・言語学・数学基礎論との交流により急速な変貌を遂げつつある現代の論理学の根幹をその故郷である哲学の立場から捉えること，それが本論文の目的である。

§1．フレーゲ&ヒルベルト流体系

1．1　公理体系

現代論理学の創始者の一人であるフレーゲに始まり[2]，ヒルベルトにより整備された[3]フレーゲ&ヒルベルト流体系の中心概念は「証明可能性（provability）」（または「導出可能性」「定理性」）の概念である。フレーゲが論理を真理の公理体系として捉えたことと，算術の真理は論理的真理であるという彼の論理主義の主張とは密接に関連している。この体系は，まず，いくつかの整式（文法的に整った式：well-formed formula）を公理として定め，定理を，公理を含み一定の証明規則[4]の下で閉じている整式の最小集合とすることにより，定式化される。証明規則は前提から結論へ移行する推論パターンという形式を取るが，前提が仮定に依存するということはない。

古典命題計算ＣＰＣ（Classical Propositional Calculus）の公理系の一つは次の公理図式（axiom schemata）により与えられる：

（Ａ１）　$\phi \supset (\psi \supset \phi)$

（Ａ２）　$(\phi \supset (\psi \supset \theta)) \supset ((\phi \supset \psi) \supset (\phi \supset \theta))$

（Ａ３）　$(\neg\psi \supset \neg\phi) \supset (\phi \supset \psi)$

ここで，ϕ，ψ自体が整式であるから，三つの公理があるのではなく三種類の無限に多くの公理があることになる。証明規則はモドゥス・ポネンス（ＭＰ）：「$\phi \supset \psi$およびϕが定理ならばψも定理である」である。このとき，定理の明示的定義はこうなる：

1．すべての公理は定理である。

2．$\phi \supset \psi$とϕがともに定理ならば，ψも定理である。

上で与えられた公理系をＦＣＰＣと呼ぶ（‘F’はFregeに由来）。メタ変項ϕ，ψ，θの代わりに文変項p_0，p_1，p_2，…に対して（Ａ１）―（Ａ３）の公理を書けば三つの公理を定めたことになるが，次の代入規則が付加されねばならない。

代入規則：定理中の文変項への整式の代入の結果は定理である。

‘$\vdash\phi$’を「ϕはＦＣＰＣの定理である」と読むと，ＭＰ（モドゥス・ポネンス）は

$$\frac{\vdash \phi \supset \psi \qquad\qquad \vdash \phi}{\vdash \psi}\ (\mathrm{MP})$$

と表せる。ＦＣＰＣでの「証明」は，根に証明される式（つまり定理），枝（出発点）に公理を持ちＭＰに統御された樹形図となる[5]。フレーゲ&ヒルベルト流体系の欠点の一つは，証明を遂行することが一般に煩雑だということである。もし枝（出発点）に任意の整式を仮定することが許されるならば，証明は容易になる。いま，Ｄが，出発点にϕ_1，ϕ_2，…，ϕ_kを持ちＭＰによって統御され終式としてϕを持つ整式の有限樹形図のとき，Ｄは，「仮定ϕ_1，ϕ_2，…，ϕ_kからのϕの証明」と言われ，

$$\phi_1,\ \phi_2,\ \cdots,\ \phi_k \vdash \phi$$

と書き表す。

1．2　演繹定理

仮定からの証明の概念は，仮定の集合（無限集合でもよい）Γと整式との間の帰結関係（consequence relation）として拡張され，次のように表現される：

$$\Gamma \vdash \phi \iff \text{ある}\ \{\phi_1, \cdots, \phi_k\} \subseteq \Gamma\ \text{に対して，}\ \phi_1, \cdots, \phi_k \vdash \phi.$$

この概念について，演繹定理と呼ばれるメタ定理が成り立つ。

演繹定理 (deduction theorem)：　$\Gamma, \phi \vdash \psi$ ならば　$\Gamma \vdash \phi \supset \psi$.
この定理の証明（正確にはメタ証明）は，仮定Γ，ϕ（正確には$\Gamma \cup \{\phi\}$であるが，このように略記する。以下同様。）からのψの証明Dに'$\phi \supset$'変形を施した'$\phi \supset$D'という擬証明樹が，公理(A 1)，(A 2)，MPによって，仮定Γからの$\phi \supset \psi$の証明に常に改変できることを示すことにより実行される[6]。このような証明が一般的に行われ得るのは，フレーゲ＆ヒルベルト流体系の「証明」における式変形がMPただ一つに統一されているからである。すなわち，演繹定理が成り立つのは，「仮定の集合からの帰結関係」が「仮定からの証明」により導入され，かつ，

（1）（A 1）と（A 2）が公理図式であり，

（2）MPが唯一の証明規則である，

という条件が成り立つような，このタイプの任意の体系である。

この第二の条件が重要であることを確認するために，演繹定理が成り立たないか，または成り立つとしてもＦＣＰＣのように直接的な仮定からの証明によっては，任意の集合からの帰結関係が導入できない場合を考察しよう。証明樹が仮定からの証明樹へと拡張されるときに生じているのは，MPが「証明規則」から「推論規則」へと事実上変換されているということである。というのは，$\Gamma \vdash \phi \supset \theta$と，$\Delta \vdash \phi$から，$\Gamma, \Delta \vdash \theta$が許されるからである。

そこで，様相命題論理Ｓ４を考える。これは，ＦＣＰＣに文演算子'$\Box$'と（'&'を$\phi \& \psi = \mathrm{def.} \neg(\phi \supset \neg\psi)$として定義）以下の公理図式・証明規則を追加して得られる：

（A 4）　$\Box\phi \supset \phi$

（A 5）　$\Box(\phi \supset \psi) \supset (\Box\phi \supset \Box\psi)$

（A 6）　$\Box\phi \supset \Box\Box\phi$

必然化（Nec）　$\dfrac{\vdash \phi}{\vdash \Box\phi}$

もし仮定からの証明をMPとNecにより統御された証明樹であるとすると，先のMPの場合と同様に，証明規則Necを，

$$\frac{\Gamma \vdash_{S_4} \phi}{\Gamma \vdash_{S_4} \Box\phi}$$

という推論規則に変換することになる。しかし，この規則は，演繹定理を認めるとすると，Ｓ４の通常の意味論に対して健全ではなくなる。というのは，

$$\cfrac{\cfrac{\phi \vdash_{S_4} \phi}{\phi \vdash_{S_4} \Box\phi}\ (\mathrm{Nec})}{\vdash_{S_4} \phi \supset \Box\phi}\ (\text{演繹定理})$$

として，$\phi \supset \Box\phi$というＳ４での非定理が導かれるからである。そこで，このような難点を避けるため，いまの場合，仮定からの帰結の関係は，

$$\Gamma \vdash_{S_4} \phi \Leftrightarrow \Gamma\text{におけるいくつかの}\phi_1, \cdots, \phi_k\text{に対して，}$$
$$\vdash_{S_4} \phi_1 \& \cdots \& \phi_k \supset \phi$$

という形で定義し直される。このやり方で仮定からの帰結の関係を導入すると，ＦＣＰＣで仮定からの証明を導入する以前の欠点が残る。なぜなら，Ｓ４での仮定からの帰結の関係は，「証明可能性」によって定義されているから，それに伴う欠点をすべて持ち越しているからである。しかし，'$\vdash$'に対する演繹定理は成り立つ。というのは，ＦＣＰＣで$\phi \& \phi_1 \& \cdots \& \phi_k \supset \psi$が証明可能であるのは，$\phi_1 \& \cdots \& \phi_k \supset (\phi \supset \psi)$が証明可能であるとき，かつそのときに限るからである。

1．3　述語論理

次に，等号つき古典述語論理（量化計算）ＣＱＣ＝（Classical Quantification Calculus with identity）で演繹定理が成り立つ場合を考察する。ここで，普遍量化子‘∀’を原始記号とする。整式ψがϕの一般化(generalization)であるのは，いくつかの変項x_1，…，x_kに対してψが$\forall x_1 \cdots \forall x_k \phi$となるとき，かつその時に限る（k＝0も含む)。公理シェーマは次の８個である。

（Ｑ１）－（Ｑ３）＝def.（Ａ１）－（Ａ３）の事例の一般化

（Ｑ４）　$\forall x\phi \supset \phi^{x}{}_{t}$[7]……ここでｔは$\phi$のｘに代入可能な[8]項

（Ｑ５）　$\forall x(\phi \supset \psi) \supset (\forall x\phi \supset \forall x\psi)$

（Ｑ６）　$\phi \supset \forall x\phi$　……ｘがϕで自由には出現していない場合

（Ｑ７）　$x = x$

（Ｑ８）　$x = y \supset (\phi \supset \phi')$　……ϕが原子文で，ϕ'がϕ中の０個以上のｘをｙで置き換えてϕから得られる式である場合

ＭＰは唯一の証明規則

この公理体系をＦＣＱＣ＝とすると，これに対して次のメタ定理が成り立つ。

メタ定理（一般化)：ｘがΓのいかなる整式にも出現していないならば，

$$\Gamma \vdash \phi \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash \forall x\phi.$$

証明は，公理の一般化がふたたび公理であることと，（Ｑ６）（Ｑ５）を利用することにより行われる[9]。このメタ定理は派生推論規則である。ＭＰのみを証明規則とする，$CQC_{=}$に対するこのタイプの体系[10]に対して，これと同値な多くの体系がある[11]。

ここで，次節以後の自然演繹，連式計算の体系との関連をつける意味で，フレーゲ＆ヒルベルト流体系のゲンツェン寄りのバージョンを考える。まず個体変項として，もっぱら自由変項としてのみ現れる「パラメータ」(ａ，ｂ，ｃ，…）と束縛変項としてのみ用いる「変項」(ｘ，ｙ，ｚ，…）を明確に区別して，個体項 (individual terms) を改めて定義し直す[12]。論理記号として，&, ∨，⊃，⊥，∀，∃をすべて用いるが，否定のみ　$\neg\phi$＝def.$\phi \supset \bot$として‘⊃’と‘⊥’で定義する。整式は通常の仕方で定義されるが，量化子については次の定義文を用いる。

（＊）ϕが整式，ｂがパラメータ，ｘがϕに出現していない変項であるとき，$\forall x\phi'$，$\exists x\phi'$はともに整式である。(ここで，ϕ'はϕ中のすべての‘ｂ’の出現を‘ｘ’で置き換えてϕから得られる表現である。)

①パラメータの導入と，②束縛変項を含む整式を再び同じ変項で束縛することの禁止，という二つの変化は，同一の変項が自由変項としても束縛変項としても現れることがないこと，およびいかなる変項も同一の整式中で二度束縛されることがないこと，という結果をもたらす。これ自体はフレーゲ＆ヒルベルト流体系にとって重要ではないが連式計算にとっては本質的である。また，これにより言語の表現力が弱まった訳ではない。例えば，∃x(Px&∀xQx)は禁じられるが，同じ意味を持つ　∃y (Py&∀xQx) は認められるからである。(‘Py&∀xQx’のようにパラメータではなく変項が自由変項として現れる表現を，以後，擬整式と呼ぶ。)

1．4　直観主義論理と古典論理

ゲンツェン流の体系に一層接近するために，以下のような等号つき直観主義述語論理のバージョンＦＩＱＣ＝（‘Ｉ’はIntuitionisticに由来）を考える。命題論理の部分の公理図式は以下のものである：

（Ａ⊃１）　$\phi \supset (\psi \supset \phi)$

(A⊃2)　$(\phi\supset(\psi\supset\theta))\supset((\phi\supset\psi)\supset(\phi\supset\theta))$
(A&I)　$\phi\supset(\psi\supset(\phi\&\psi))$
(A&E$_i$)　$\phi_0\ \&\phi_1\supset\phi_i\quad(i=0,\ 1)$
(A∨I$_i$)　$\phi_i\supset\phi_0\vee\phi_1\quad(i=0,\ 1)$
(A∨E)　$(\phi\supset\theta)\supset((\psi\supset\theta)\supset(\phi\vee\psi\supset\theta))$

ここまでの公理図式で最小論理 (Minimal logic) が与えられ，次の公理図式（A⊥）を追加することにより，直観主義論理 (Intuitionistic logic) が得られる。

(A⊥)　$\bot\supset\phi$

MP（モドゥス・ポネンス）は（命題論理の部分の）唯一の証明規則である。よって（この部分において），演繹定理が成り立つ。これに量化と等号に関する公理を付け加える：

(A∀E)　$\forall x\phi\supset\phi^x{}_t$
(A∃I)　$\phi^x{}_t\supset\exists x\phi$
(A＝I)　$a=a$
(A＝E)　$a=b\supset(\phi^x{}_a\supset\phi^x{}_b)$　……ここでϕは原子文である。

さらに量化に関する証明規則を二つ加える：

(R∀I)　$\dfrac{\vdash\phi\supset\psi}{\vdash\phi\supset\forall x\,\psi^a{}_x}$　……ここでパラメータ a はϕに出現してはならない。

(R∃E)　$\dfrac{\vdash\phi\supset\psi}{\vdash\exists x\,\phi^a{}_x\supset\psi}$　……ここでパラメータ a はψに出現してはならない。

（これらのパラメータは**固有パラメータ**と呼ばれることがある。）

最後の二つの証明規則に付加されている条件は，これらの規則が健全であるために必要である。$\vdash Pa\supset Pa$であるが，$Pa\supset\forall xPx$は論理的に妥当ではないからである。(例えば，個体領域を「人間」，‘P’を「将棋の七冠王」，‘a’を「羽生名人」と解釈すると反例モデルが作れる。）また，(R∀I）が証明規則であることが重要であり，対応する推論規則にはそれ以上の制限条件が必要である。というのは，公理（A⊃1）とMPにより，

$$Pa\ \vdash\ \forall yQy\supset Pa$$

が成り立つが，これから

$$Pa\ \vdash\ \forall yQy\supset\forall xPx$$

を導くことは許されないからである。(この場合も上と同様の反例モデルが作れる。）そこで，仮定からの証明において（R∀I）を適用するとき必要な制限はこうである：
いま，Dを，公理でない式ϕ_1, …, ϕ_kを出発点とする，$\phi\supset\psi$を導く仮定からの証明樹とし，パラメータ a がϕにおいて出現していないとき，

$$\dfrac{\begin{matrix}D\\ \phi\supset\psi\end{matrix}}{\phi\supset\forall x\,\psi^a{}_x}$$

が，仮定ϕ_1, …, ϕ_kからの$\phi\supset\forall x\psi^a{}_x$の証明であるのは，パラメータ a が$\phi_1$, …, ϕ_kのどの式にも出現しない場合である。(R∃E)を仮定からの証明において適用するときも同様の制限が必要である。

これらの制限を伴うＦＩＱＣの体系では，‘$\phi\supset$’変形（1．2節および註6参照）を用いて演繹定

理が成り立つことが示される[13]。

（R∀I）は仮定の帰結関係に関する条件としても書くことができる。すなわち，固有パラメータaがΓおよびθに出現していないとき，

$$\Gamma \vdash \theta \supset \psi \qquad \text{ならば} \qquad \Gamma \vdash \theta \supset \forall x \psi^{a}{}_{x}.$$

（R∃E）についても同様である。

以上の直観主義述語論理に，次のいずれか一方を加えると古典述語論理が得られる：

（DN）　$\neg\neg\phi \supset \phi$　　　（‘DN’は二重否定double negationに由来）

（排中律）　$\phi \lor \neg\phi$

否定記号を原始記号とする場合，直観主義論理を特徴づける公理（A⊥）の代わりに次の公理を採る：

（A¬I）　$(\phi \supset \psi) \supset ((\phi \supset \neg\psi) \supset \neg\phi)$

（A¬E）　$\phi \supset (\neg\phi \supset \psi)$

本節で考察したフレーゲ&ヒルベルト流体系は，これを外から特徴づける際にある種の単純さを持っている。例えば，「整式」や「証明」が帰納的に定義されるという単純な構造を持っているため，超数学の算術化に適しているといった長所がある。

§2．自然演繹

2．1　推論規則の体系

フレーゲ&ヒルベルト流体系での仮定からの証明と演繹定理は，証明の構成に際してこの体系に伴う過度の負担を軽減しようとする工夫であった。これを，全く異なるタイプの体系を作ることで一層徹底したのがゲンツェンの自然演繹の体系である[14]。ゲンツェンは「数学の証明に含まれる実際の論理的推論をできるかぎり正確に反映した記号体系を作りたい」と書いている[15]。自然演繹の特徴は次の二点に集約できる。第一に，すべての規則は基本的には証明規則ではなく推論規則であり，仮定から何が論理的に推論されるかに関心の焦点があって，証明可能性（定理性）は仮定からの導出の極端な場合と見られる。つまり，フレーゲ&ヒルベルト流体系が証明可能性を中心とした論理的真理の公理体系であったのに対して，自然演繹は推論規則の体系である。第二に，結合子や量化子等の論理的オペレータは，それらに対する対称的な二種類の規則――すなわち，当該オペレータを主要オペレータとして含む文を結論としてどう導くかを述べる「導入」規則と，当該オペレータから何が導かれるかを述べる「消去」規則――により統御されている。

まず，直観主義述語論理の自然演繹体系NIQC（‘N’はnatural deductionに由来）から考察を始める。この体系は，以下の12個（正確には12種類）の推論規則を持つゲンツェンのオリジナルのNJのヴァリエーションである[16]。

仮定の規則（A）

&の導入規則（&I）　$\dfrac{\phi \quad \psi}{\phi \,\&\, \psi}$　　&の消去規則（&E）　$\dfrac{\phi \,\&\, \psi}{\phi}$　$\dfrac{\phi \,\&\, \psi}{\psi}$

∨の導入規則（∨I）　$\dfrac{\phi}{\phi \lor \psi}$　$\dfrac{\psi}{\phi \lor \psi}$　　∨の消去規則（∨E）　$\dfrac{\phi \lor \psi \quad \begin{matrix}[\phi] \\ \vdots \\ \theta\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\psi] \\ \vdots \\ \theta\end{matrix}}{\theta}$

⊃の導入規則（⊃Ｉ）
$$\frac{\begin{matrix}[\phi]\\ \vdots\end{matrix}}{\phi\supset\psi}$$

⊃の消去規則（⊃Ｅ）
$$\frac{\phi\supset\psi \qquad \phi}{\psi}$$

⊥の規則　（⊥）
$$\frac{\bot}{\phi}$$

∀の導入規則（∀Ｉ）
$$\frac{\phi}{\forall x\,\phi^{a}{}_{x}}$$

ただし，固有パラメータａはϕが依存するいかなる仮定にも出現していない。

∀の消去規則（∀Ｅ）
$$\frac{\forall x\phi}{\phi^{x}{}_{t}}$$

∃の導入規則（∃Ｉ）
$$\frac{\phi^{x}{}_{t}}{\exists x\phi}$$

∃の消去規則（∃Ｅ）
$$\frac{\exists x\phi \qquad \begin{matrix}[\phi^{x}{}_{a}]\\ \vdots\\ \theta\end{matrix}}{\theta}$$

ただし，固有パラメータａは，θが依存する$\phi^{x}{}_{a}$以外の仮定にもθにも$\exists x\phi$にも出現していない。

ＮＩＣＱでは，整式の「仮定への依存」の関係が重要である。規則（⊃Ｉ）（∨Ｅ）（∃Ｅ）において，結論は，直前の導出が依存していた仮定の総和のうちの，いくつかの仮定にもはや依存しなくなる。結論が依存しなくなる仮定は「解除された」(discharged) 仮定と呼ばれるが，「解除」が生じたことを明示するために，解除される式を鉤括弧[　]で囲んで番号を付け，その同じ番号を解除が生じた推論線の横にも付ける。解除されていない仮定は開いた仮定と呼ばれる。すべての仮定が解除されたときの結論は「証明された」整式である。証明を作るために解除は権利であるが義務ではない。例えば，導出：

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{1}{[p]} \qquad \overset{2}{[p]}}{p\,\&\,p}\,(\&\mathrm{I})}{p\supset(p\,\&\,p)}\,(\supset\mathrm{I})\ 1}{p\supset(p\supset(p\,\&\,p))}\,(\supset\mathrm{I})\ 2$$

で，二度出現した仮定ｐは，異なる推論において別々に解除されている。一般に，$\phi\supset\psi$を結論とする（⊃Ｉ）の適用において，ϕの形の仮定がすべて解除されるには及ばない。導出：

$$\cfrac{\cfrac{\overset{1}{[\phi]}}{\psi\supset\phi}\,(\supset\mathrm{I})}{\phi\supset(\psi\supset\phi)}\,(\supset\mathrm{I})\ 1$$

における最初の（⊃Ｉ）においては，いかなる解除も生じていない。この寛大さによって，自然演繹は適切論理 (relevant logic) には適していない[17]。同じ形のすべての仮定が同一の場所で解除される必要はないゆえに，同じ形をした仮定のうち，同一推論において解除される仮定の出現のみが同じ仮定のクラスに属する，としなければならない[18]。

（∀Ｉ）と（∃Ｅ）の固有パラメータへの制限条件は，１．３節での（Ｒ∀Ｉ），（Ｒ∃Ｅ）の場

合と同様に，健全さを維持するために必要である。

2．2　二つの体系の演繹的同値性

自然演繹とフレーゲ＆ヒルベルト流体系とは体系のスタイルの点で大いに異なっているが，演繹の効力と言う点では同値である。直観主義述語論理においてそのことを確認しよう。まず，仮定ϕ_1, …，ϕ_kから，あるいは仮定の集合Γから，整式ϕが導出可能であることを

$$\phi_1, \ldots, \phi_k \vdash_N \phi \qquad \text{あるいは} \qquad \Gamma \vdash_N \phi$$

と書く。フレーゲ＆ヒルベルト流体系として，1．4節で扱ったＦＩＱＣを採る。ＦＩＱＣの公理がすべてＮＩＱＣで証明されることは容易に確かめ得る[19]。そこで，ＦＩＱＣで仮定から証明された整式がＮＩＱＣで同じ仮定から導出されることを示すには，自然演繹の体系であるＮＩＱＣがＦＩＱＣの証明規則に関して閉じていることを示せばよい。これも容易に確かめ得る[20]。よって，以下の（メタ）定理が成り立つ。

定理：　$\Gamma \vdash_F \phi \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash_N \phi.$

この定理の逆も証明される。その証明を行うには，$\Gamma \vdash_N \phi$であるとして，ϕが12個のどの推論規則によって仮定Γから導出されていても，ＦＩＱＣで同じ仮定からの証明が作れることを示せばよい。それは，ＦＩＱＣの公理と演繹定理をうまく使うことによってなされる[21]。こうして，次の定理が成り立つ。

定理：　$\Gamma \vdash_N \phi \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash_F \phi.$

2．3　標準化定理

ＮＩＱＣでは（Ａ）と（⊥）を除く10個の推論規則が導入と消去に分類され，これらが対をなして互いに逆の関係にある。これらの規則において，同一のオペレータに対する導入と消去の規則を連続して使うと，ある種の回り道をすることになる。例えば，（＆Ｉ）と（＆Ｅ）を連続して使うと，

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \phi^1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \psi\end{matrix}}{\phi \,\&\, \psi}\,(\&\mathrm{I})}{\phi^2}\,(\&\mathrm{E})$$

となる。ϕ^1とϕ^2は出現を異にする同一の整式であるが，ϕ^2を導くために必要な　$\phi \,\&\, \psi$　が既にϕ^1を前提している。（＆Ｉ）を使用した直後に（＆Ｅ）を使うことは回り道（ないしは無駄）となる。このように，同じオペレータに関する規則の導入と消去を連続して使用するときの中央の整式（導入の結論，または消去の大前提）は**最大式** (maximum formula) と呼ばれる。しかしこのような回り道は他の導出に置き換えることで取り除かれる。これは**還元** (reduction) と呼ばれる。例えば，上の回り道は，

$$\begin{matrix}\vdots\\ \phi^1\end{matrix}$$

により還元される。＆以外の他のオペレータについても同様である。例えば，⊃については，

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}1\\ [\phi]\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\phi \supset \psi}\,(\supset\mathrm{I})\ 1 \qquad \phi}{\psi}\,(\supset\mathrm{E}) \qquad \text{は} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \phi\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}$$

に還元される。∀の場合，

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x \phi^{a}{}_{x}}\ (\forall \mathrm{I})}{(\phi^{a}{}_{x})^{x}{}_{t}}\ (\forall \mathrm{E}) \quad \text{は} \quad \begin{matrix} \vdots\, {}^{a}_{t} \\ \phi^{a}{}_{t} \end{matrix}$$

（ϕの導出のすべての場所で，パラメータaをtで置き換える。）

へと還元される。こうして，すべての最大式は還元により除去され，回り道のない標準的な証明に書き換えることができそうである。ところが，最大式を取り除くことにより新たな最大式が生じることがある。例えば，

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{[\phi]} \\ \vdots \\ \psi}{\phi \supset \psi}\ (\supset \mathrm{I})\ 1 \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \theta\end{matrix}}{(\phi \supset \psi) \& \theta}\ (\& \mathrm{I})}{\phi \supset \psi}\ (\& \mathrm{E}) \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \phi\end{matrix}}{\psi}\ (\supset \mathrm{E})$$

で最大式は　$(\phi \supset \psi) \& \theta$　であるが，これを除去するために，上の導出を

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}1 \\ [\phi] \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\phi \supset \psi}\ (\supset \mathrm{I})\ 1 \qquad \phi}{\psi}\ (\supset \mathrm{E})$$

へと還元すると，新しい回り道が出来，新しい最大式　$\phi \supset \psi$が生じる。しかし，これら二つの最大式　$(\phi \supset \psi) \& \theta$　と　$\phi \supset \psi$　の複雑さを比べると明らかに前者がより複雑である。還元を行うと，たとえ新しい最大式が生じても，それの複雑度が元の最大式のそれより小さくなることが帰納法により証明できる。よって，次の標準化定理が成り立つ。

標準化定理 (normalization theorem)：

すべての導出は，一連の還元により最大式を含まない標準的導出に変換することができる[22]。

還元と標準化は，タルスキー流の真理概念に基づく意味論に代わる，いわゆる「証明論的意味論」において重要な役割を演じる。ここで，証明論的意味論について論じる余裕はないが，これはウィトゲンシュタインの，ある文脈中での「使用」としての意味の観点に通じる興味深い洞察を含んでいる[23]。

2．4　自然演繹の連式ヴァージョン

自然演繹と連式計算 (sequent calculus) との異同を検討するために，ここで自然演繹の連式ヴァージョンを考察する。すでに述べたように（2．1節参照），自然演繹の体系では導出される整式がいかなる仮定に依存しているか，という「仮定への依存」の関係が重要であった。この関係を明示する形で推論規則を表現するのが，自然演繹の連式ヴァージョンである。Γを整式の有限集合，ϕを整式とするとき，連式は“$\Gamma \vdash \phi$”の形で定義できる。このとき，例えば，（&Ｉ）規則は次のように表現される。

$$\Gamma \vdash \phi \quad \text{かつ} \quad \Delta \vdash \psi \quad \text{ならば，} \quad \Gamma, \Delta \vdash \phi \& \psi.$$

他の規則についても同様である[24]。ここで，仮定を増加することを認めるとする，つまり

$$\Gamma\vdash\phi \quad ならば, \quad \Gamma, \Delta\vdash\phi \qquad \cdots\cdots (※)$$

を認めると，(&Ｉ) 規則は，一般に，

$$\frac{\Gamma\vdash\phi \qquad \Gamma\vdash\psi}{\Gamma\vdash\phi\&\psi}\ (\&\mathrm{I})$$

として，上の多種の仮定から一元化された仮定に依存する形に表現できる。というのは，$\Gamma\vdash\phi$から「仮定の増加」(※) により，$\Gamma, \Delta\vdash\phi$；他方，$\Delta\vdash\phi$と (※) により，$\Gamma, \Delta\vdash\psi$。新しい規則 (&Ｉ) により，$\Gamma, \Delta\vdash\phi\&\psi$；こうして，上の元の規則は新しい規則によって模倣できるからである。他の規則についても同様である。さらに，仮定の規則を　$\phi, \Gamma\vdash\phi$　という形に一般化し，これをフレーゲ&ヒルベルト流体系になぞらえて「公理」と呼ぶと，以下のような自然演繹の連式ヴァージョンができる。

公理：　$\phi, \Gamma\vdash\phi$　　　仮定の増加：　$\dfrac{\Gamma\vdash\phi}{\Gamma, \Delta\vdash\phi}$

(&Ｉ)：　$\dfrac{\Gamma\vdash\phi \qquad \Gamma\vdash\psi}{\Gamma\vdash\phi\&\psi}$　　　(&Ｅ)：　$\dfrac{\Gamma\vdash\phi_0\ \&\phi_1}{\Gamma\vdash\phi i}$　(ｉ＝０，１)

(∨Ｉ)：　$\dfrac{\Gamma\vdash\phi i}{\Gamma\vdash\phi_0\vee\phi_1}$　(ｉ＝０，１)　　　(∨Ｅ)：　$\dfrac{\Gamma\vdash\phi\vee\psi \qquad \phi, \Gamma\vdash\theta \qquad \psi, \Gamma\vdash\theta}{\Gamma\vdash\theta}$

(⊃Ｉ)：　$\dfrac{\phi, \Gamma\vdash\psi}{\Gamma\vdash\phi\supset\psi}$　　　(⊃Ｅ)：　$\dfrac{\Gamma\vdash\phi \qquad \Gamma\vdash\phi\supset\psi}{\Gamma\vdash\psi}$

(⊥)　：　$\dfrac{\Gamma\vdash\bot}{\Gamma\vdash\phi}$

(∀Ｉ)：　$\dfrac{\Gamma\vdash\phi}{\Gamma\vdash\forall x\phi^{a}{}_{x}}$　　　(∀Ｅ)：　$\dfrac{\Gamma\vdash\forall x\phi}{\Gamma\vdash\phi^{x}{}_{t}}$

(∃Ｉ)：　$\dfrac{\Gamma\vdash\phi^{x}{}_{t}}{\Gamma\vdash\exists x\phi}$　　　(∃Ｅ)：　$\dfrac{\Gamma\vdash\phi^{a}{}_{x}}{\Gamma\vdash\exists x\phi}$

（ここで，(∀Ｉ) と (∃Ｅ) において固有パラメータａは制限条件を満たしているとする。)

この連式ヴァージョンにおいても，&，∨，⊃，∀，∃の各オペレータに関する規則は，導入と消去の対称的な形になっている。(これに対して，連式計算の規則は，次節でみるように，導入規則だけから成る。)

§3．連式計算とタブロー・メソッド

3．1　連式計算

自然演繹の連式ヴァージョンでは，消去規則がなお存在して‘⊢’の右に位置している。消去規則に対する全く異なるアプローチを採ることでゲンツェンの連式計算が導かれる。導出可能な連式

$$\phi, \phi_1, \cdots, \phi_k\vdash\theta$$

を考え，この導出可能性を，仮定ϕ，ϕ_1，…，ϕ_kからθへ到る導出樹が構成できることと解釈する。そして，その導出樹を

$$\begin{array}{c} \phi,\ \phi_1,\ \cdots,\ \phi_k \\ \mathrm{D} \\ \theta \end{array}$$

とする。ここで，ϕは未だ解除されていない（すなわち開いている)。これの導出図を（&E）を使って，

$$\begin{array}{c} \dfrac{\phi \& \psi,}{\phi}\ (\&\mathrm{E})\quad \phi_1,\ \cdots,\ \phi_k \\ \mathrm{D} \\ \theta \end{array}$$

に書き換える(ここでϕは仮定からは消える)。すると，連式　$\phi \& \psi,\ \phi_1,\ \cdots,\ \phi_k \vdash \theta$　が導出可能となり，上の解釈に従うと，規則：

$$\frac{\phi,\ \Gamma \vdash \theta}{\phi \& \psi,\ \Gamma \vdash \theta}$$

が健全な証明規則となる。これは（&E）により正当化される。よって，（&E）を新しい形で構成し直したことに外ならない。同様に，規則（⊃E）を

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \qquad\qquad \psi,\ \Gamma \vdash \theta}{\phi \supset \psi,\ \Gamma \vdash \theta}$$

という健全な規則として構成し直すことができる。なぜなら，

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \phi \end{array} \qquad \text{および} \qquad \begin{array}{c} \psi,\ \Gamma \\ \vdots \\ \theta \end{array}$$

という導出樹が与えられているならば，

$$\begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots \\ \phi\end{array} \qquad \phi \supset \psi}{\psi}\ (\supset\mathrm{E}) \qquad \Gamma \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \ \ \cdot \\ \cdot \\ \theta \end{array}$$

が(⊃E)により正当化されるからである。規則(∨E)，(∀E)，(∃E)についても同様である[25]。

こうして，消去規則を'⊢'の左辺への導入規則と見ることができる。ゲンツェンのオリジナルの連式計算の記号'→'にならって，以後，連式を

$$\Gamma \to \theta$$

と書くことにする(ここで，Γは整式の有限集合，θは整式である)。このとき，ゲンツェンの連式計算の公理と規則は次のものとして与えられる。

(公理)　$\phi,\ \Gamma \to \phi$

(増)　$\dfrac{\Gamma \to \phi}{\Delta,\ \Gamma \to \phi}$

(→&)　$\dfrac{\Gamma \to \phi \qquad \Gamma \to \psi}{\Gamma \to \phi \& \psi}$

(&→)　$\dfrac{\phi,\ \Gamma \to \theta}{\phi \& \psi,\ \Gamma \to \theta} \qquad \dfrac{\psi,\ \Gamma \to \theta}{\phi \& \psi,\ \Gamma \to \theta}$

(→∨)　$\dfrac{\Gamma \to \phi}{\Gamma \to \phi \vee \psi} \qquad \dfrac{\Gamma \to \psi}{\Gamma \to \phi \vee \psi}$

(∨→)　$\dfrac{\phi,\ \Gamma \to \theta \qquad\qquad \psi,\ \Gamma \to \theta}{\phi \vee \psi,\ \Gamma \to \theta}$

(→⊃) $\dfrac{\phi,\ \Gamma\to\psi}{\Gamma\to\phi\supset\psi}$

(→∀) $\dfrac{\Gamma\to\phi}{\Gamma\to\forall x\,\phi^{a}{}_{x}}$ ただし，aはΓに出現していない。

(→∃) $\dfrac{\Gamma\to\phi^{x}{}_{t}}{\Gamma\to\exists x\,\phi}$

(⊥) $\dfrac{\Gamma\to\bot}{\Gamma\to\theta}$

(⊃→) $\dfrac{\Gamma\to\phi\qquad\qquad \psi,\ \Gamma\to\theta}{\phi\supset\psi,\ \Gamma\to\theta}$

(∀→) $\dfrac{\phi^{x}{}_{t},\ \Gamma\to\theta}{\forall x\,\phi,\ \Gamma\to\theta}$

(∃→) $\dfrac{\phi^{x}{}_{a},\ \Gamma\to\theta}{\exists x\phi,\ \Gamma\to\theta}$ ただし，aはΓ，θに出現していない。

この体系が**カットなしの直観主義連式計算**（これをＩＳで表す：Intuitionistic Sequent）である。連式：$\Gamma\to\phi$がＩＳで証明可能であるのは，出発点がすべて公理であり，上の規則により統御された証明樹が構成されるとき，かつそのときにかぎる。連式$\Gamma\to\phi$がＩＳで証明可能であることを

$$\vdash_{IS}\ \Gamma\to\phi$$

で表す。

3．2　主定理

さて，連式計算と２．４節での自然演繹の連式ヴァージョンとの関係を考えよう。まず，

$\vdash_{IS}\Gamma\to\phi$ならば，自然演繹の連式ヴァージョンで　$\Gamma\vdash\phi$が導出可能である…（＊）

（証明は，$\Gamma\to\phi$のＩＳにおける証明の長さに関する数学的帰納法による。）

この（＊）の逆も成り立つ。いま，ゲンツェンが導入した次の規則（ＣＵＴ）を考える。

$$(\mathrm{CUT})\ \dfrac{\Gamma\to\phi\qquad\qquad \phi,\ \Gamma\to\theta}{\Gamma\to\theta}$$

これは自然演繹での消去規則をある意味で模倣する規則である[26]。いま，

$$\mathrm{IS}^{+}=\mathrm{IS}+(\mathrm{CUT})$$

とすると，

$\Gamma\vdash\phi$が自然演繹の連式ヴァージョンで導出可能ならば，$\vdash_{IS+}\ \Gamma\to\phi$.

が証明できる。そこで，ゲンツェンの主定理：

「ＣＵＴは消去可能である」

が成り立つならば，$\vdash_{IS+}\ \Gamma\to\phi$　ならば$\vdash_{IS}\Gamma\to\phi$　となるから，上の（＊）の逆が成り立つことになる。

ところで，自然演繹にとってカット（ＣＵＴ）はどのような意味を持つか。カットは，$\Gamma\vdash\phi$　および　$\phi,\ \Gamma\vdash\psi$　から，$\Gamma\vdash\psi$への移行を許す。この移行は（⊃Ｉ）と（⊃Ｅ）を連続して行うことにより実現する：

$$\dfrac{(\supset\mathrm{I})\ \dfrac{\phi,\ \Gamma\vdash\psi}{\Gamma\vdash\phi\supset\psi}\qquad\qquad \Gamma\vdash\phi}{\Gamma\vdash\psi}\ (\supset\mathrm{E})$$

ここに，新しい最大式　$\phi\supset\psi$　が生じている。また，導出樹の構成という観点からカットを見ると，

$$\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \phi\end{array}\qquad \text{および}\qquad \begin{array}{c}\phi,\ \Gamma\\ \vdots\\ \psi\end{array}$$

から，

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \phi,\ \Gamma \\ \vdots \\ \psi \end{array}$$

を作ることを許すものと解することができる。このとき，ϕは新しい最大式となっている可能性がある。こうして，カットのない連式計算の導出は，最大式のない標準的導出のみから成る自然演繹の導出に対応する。自然演繹の導出が標準的ならば，(＊)の逆により，その導出はカットのない連式計算ＩＳで証明されることになる。すると，主定理を証明することが，自然演繹と連式計算の同等性を示すのに好都合であることが分かる。

ゲンツェンの主定理の証明は，より複雑なカットをより単純なカットへと還元する一連の手続きを示すことから成る。例えば，

$$\dfrac{(\rightarrow\&)\ \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\rightarrow\phi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\rightarrow\psi\end{array}}{\Gamma\rightarrow\phi\&\psi} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \phi,\ \Gamma\rightarrow\theta\end{array}}{\phi\&\psi,\ \Gamma\rightarrow\theta}\ (\&\rightarrow)}{\Gamma\rightarrow\theta}\ (\mathrm{CUT})$$

を，

$$\dfrac{\Gamma\rightarrow\phi \qquad \phi,\ \Gamma\rightarrow\theta}{\Gamma\rightarrow\theta}\ (\mathrm{CUT})$$

へと置き換える。上のカット式：$\phi\&\psi$　より下のカット式ϕがより単純にものになっている。実際の状況はこれほど簡単なものばかりではないが，このような洞察が基本となっている[27]。

3．3　古典論理の連式計算

さて，古典論理に対する連式計算を考察するために，連式を‘$\Gamma\rightarrow\Delta$’という形で表現する。ここで，先件Γは後件Δとともに整式の有限集合であるが，Δは空でないとする。Δが空のとき，‘$\Gamma\rightarrow$　’と書く。また，$\Gamma\rightarrow\{\phi\}$の代わりに$\Gamma\rightarrow\phi$と略記する。

ところで，これまでＩＳ（直観主義連式計算）では‘$\perp$’を原始記号としたが，これを落として‘$\neg$’（否定）を原始記号とすることができる。そして，規則（$\perp$）の代わりに，

$$\dfrac{\Gamma\rightarrow}{\Gamma\rightarrow\theta}$$

を採用し，‘$\neg$’に関する規則として，

$$(\rightarrow\neg)\ \dfrac{\phi,\ \Gamma\rightarrow}{\Gamma\rightarrow\neg\phi} \qquad \text{および} \qquad (\neg\rightarrow)\ \dfrac{\Gamma\rightarrow\phi}{\neg\phi,\ \Gamma\rightarrow}$$

を追加する。この新しい定式化をＩＳ′とする。

新しい形式での連式：$\Gamma\rightarrow\Delta$の解釈について考える。Γのすべての要素が真であればΔの少なくとも一つの要素が真であるとき，$\Gamma\rightarrow\Delta$は**妥当である**と呼ばれ，Γのすべての要素を真とし，Δのすべての要素を偽とすることができるとき，$\Gamma\rightarrow\Delta$は**反証可能である**と呼ばれる。これに対応して，規則についても二つの解釈を考えることができる。規則：

$$\dfrac{S_1 \qquad S_2}{S}$$

において，「もし連式S_1とS_2がともに妥当であるならば，連式Ｓも妥当である」という解釈が可能であるとともに，「もし連式Ｓが反証可能であるならば，連式S_1またはS_2の少なくとも一方が反証可能

である」という解釈も可能である。この第二の解釈が成り立つことを上のＩＳ′の（$\neg\rightarrow$）と（$\rightarrow\neg$）について確認しよう。まず（$\neg\rightarrow$）である。結論（下の連式）：$\neg\phi$，$\Gamma\rightarrow$が反証可能ならば，$\neg\phi$とΓをすべて真とすることができる。よって，Γの要素をすべて真，ϕを偽にし得る。よって，前提（上の連式）：$\Gamma\rightarrow\phi$が反証可能となる。次に（$\rightarrow\neg$）である。結論：$\Gamma\rightarrow\neg\phi$が反証可能とする。すると，$\Gamma$をすべて真，$\neg\phi$を偽とすることができる。よって，$\phi$と$\Gamma$をすべて真とすることができる。よって，前提：$\phi$，$\Gamma\rightarrow$　が反証可能となる。

ここで，古典論理に対応させるため，ＩＳ′での‘$\neg$’についての規則（$\rightarrow\neg$）（$\neg\rightarrow$）を各々一般化して，

$$\frac{\phi,\ \Gamma\rightarrow\Delta}{\Gamma\rightarrow\Delta,\ \neg\phi}\qquad\qquad\frac{\Gamma\rightarrow\Delta,\ \phi}{\neg\phi,\ \Gamma\rightarrow\Delta}$$

とする。すると，各規則の結論（下の連式）の反証可能性の必要十分条件が，少なくとも一つの前提（上の連式）の反証可能性であるような，連式体系を構成することができる。このとき，公理は反証可能ではあり得ない。また一般に，規則の前提の複雑さの度合いはその規則の結論より（量化子に関する規則を除いて）低くなる。よって，結論の反証可能性は，より複雑さの低い反証可能性の条件によって表現され得る。このような連式体系をＣＳ（古典論理連式計算：‘Ｃ’はclassicalに由来）と呼ぶ。ＣＳは以下の公理と推論規則から成る：

公理　$\phi,\ \Gamma\rightarrow\Delta,\ \phi$

（$\rightarrow$&）$\dfrac{\Gamma\rightarrow\Delta,\ \phi\qquad\Gamma\rightarrow\Delta,\ \psi}{\Gamma\rightarrow\Delta,\ \phi\,\&\,\psi}$

（&$\rightarrow$）$\dfrac{\phi,\ \psi,\ \Gamma\rightarrow\Delta}{\phi\,\&\,\psi,\ \Gamma\rightarrow\Delta}$

（$\rightarrow\vee$）$\dfrac{\Gamma\rightarrow\Delta,\ \phi,\ \psi}{\Gamma\rightarrow\Delta,\ \phi\vee\psi}$

（$\vee\rightarrow$）$\dfrac{\phi,\ \Gamma\rightarrow\Delta\qquad\psi,\ \Gamma\rightarrow\Delta}{\phi\vee\psi,\ \Gamma\rightarrow\Delta}$

（$\rightarrow\supset$）$\dfrac{\phi,\ \Gamma\rightarrow\Delta,\ \psi}{\Gamma\rightarrow\Delta,\ \phi\supset\psi}$

（$\supset\rightarrow$）$\dfrac{\Gamma\rightarrow\Delta,\ \phi\qquad\psi,\ \Gamma\rightarrow\Delta}{\phi\supset\psi,\ \Gamma\rightarrow\Delta}$

（$\rightarrow\neg$）$\dfrac{\phi,\ \Gamma\rightarrow\Delta}{\Gamma\rightarrow\Delta,\ \neg\phi}$

（$\neg\rightarrow$）$\dfrac{\Gamma\rightarrow\Delta,\ \phi}{\neg\phi,\ \Gamma\rightarrow\Delta}$

（$\rightarrow\forall$）$\dfrac{\Gamma\rightarrow\Delta,\ \phi}{\Gamma\rightarrow\Delta,\ \forall x\,\phi^{a}{}_{x}}$　ただし，ａはΓ，Δに出現していない。

（$\forall\rightarrow$）$\dfrac{\phi^{x}{}_{t},\ \forall x\,\phi,\ \Gamma\rightarrow\Delta}{\forall x\,\phi,\ \Gamma\rightarrow\Delta}$

（$\rightarrow\exists$）$\dfrac{\Gamma\rightarrow\Delta,\ \exists x\,\phi,\ \phi^{x}{}_{t}}{\Gamma\rightarrow\Delta,\ \exists x\,\phi}$

（$\exists\rightarrow$）$\dfrac{\phi,\ \Gamma\rightarrow\Delta}{\exists x\,\phi^{a}{}_{x},\ \Gamma\rightarrow\Delta}$

ただし，ａはΓ，Δに出現していない。

３．４　タブロー・メソッド

最後に，カットなし連式計算の完全性証明の研究から1950年代に，Beth, Hintikka, Kanger, Schütteによって独立に発見されたタブロー・メソッド（または意味論タブロー）を考察する[(28)]。まず，次の定義から始める。

定義：ϕが整式のとき，Ｔϕ，Ｆϕはともに記号づけられた整式である。

ここで意図されている解釈は，Ｔϕが「ϕは真である」，Ｆϕが「ϕは偽である」ということであり，ＣＳでの反証可能性を徹底することである。こうして，連式$\{\phi_1,\ \cdots,\ \phi_k\}\rightarrow\{\psi_1,\ \cdots,\ \psi_m\}$は記号づけられた整式の有限列：Ｔ$\phi_1$，…，Ｔ$\phi_k$，Ｆ$\psi_1$，…，Ｆ$\psi_m$へと変換される。ＣＳでの規則は上下が逆転した形で再解釈され，新たな導出は反証可能性解釈の体系的探索となり，枝分かれする規

則は解釈の複数の選択肢ということになる[29]。探索は樹状の形に表現され，探索に成功した場合，連式の妥当性に対する反証が得られたことになり[30]，探索樹が閉じられて反証可能性が存在しないことが判明する場合，元の連式の妥当性が示される[31]。

タブロー・メソッドの体系Tの規則は以下のものである（‘S’は記号づけられた整式の有限集合である)。

F&：$\dfrac{S,\ F\phi\&\psi}{S,\ F\phi \mid S,\ F\psi}$　　T&：$\dfrac{S,\ T\phi\&\psi}{S,\ T\phi,\ T\psi}$

F∨：$\dfrac{S,\ F\phi\vee\psi}{S,\ F\phi,\ F\psi}$　　T∨：$\dfrac{S,\ T\phi\vee\psi}{S,\ T\phi \mid S,\ T\psi}$

F⊃：$\dfrac{S,\ F\phi\supset\psi}{S,\ T\phi,\ F\psi}$　　T⊃：$\dfrac{S,\ T\phi\supset\psi}{S,\ F\phi \mid S,\ T\psi}$

F¬：$\dfrac{S,\ F\neg\phi}{S,\ T\phi}$　　T¬：$\dfrac{S,\ T\neg\phi}{S,\ F\phi}$

F∀：$\dfrac{S,\ F\forall x\phi}{S,\ F\phi^{x}_{a}}$　　T∀：$\dfrac{S,\ T\forall x\phi}{S,\ T\forall x\phi,\ T\phi^{x}_{t}}$

ただし，aはSに出現していない。

F∃：$\dfrac{S,\ F\exists x\phi}{S,\ F\exists x\phi,\ F\phi^{x}_{t}}$　　T∃：$\dfrac{S,\ T\exists x\phi}{S,\ T\phi^{x}_{a}}$

ただし，aはSに出現していない。

枝分かれする規則（F&)（T∨)（T⊃）は，反証条件の可能な選択肢の存在を示しており，探索においてはそのすべての選択肢が調べられねばならない。整式ϕのタブローによる証明は，樹の頂点が$\{F\phi\}$であり，すべての枝が閉じている形での，記号づけられた式の有限集合から成る有限樹である。

より簡便なタブローは，樹の節を記号づけられた整式の集合ではなく，整式そのものとすることによって得られる。まず，頂点の節：$\{T\phi_1, \cdots, T\phi_k, F\psi_1, \cdots, F\psi_m\}$を縦方向に，

$$\begin{array}{c} T\phi_1 \\ \vdots \\ T\phi_k \\ F\psi_1 \\ \vdots \\ F\psi_m \end{array}$$

と書き，以下の規則を使う：

$$\begin{array}{c} F\phi\&\psi \\ \swarrow \quad \searrow \\ F\phi \qquad F\psi \end{array} \qquad \dfrac{T\phi\&\psi}{\begin{array}{c}T\phi\\ T\psi\end{array}}$$

$$\dfrac{F\phi\vee\psi}{\begin{array}{c}F\phi\\ F\psi\end{array}} \qquad \begin{array}{c} T\phi\vee\psi \\ \swarrow \quad \searrow \\ T\phi \qquad T\psi \end{array}$$

$$\dfrac{F\phi\supset\psi}{\begin{array}{c}T\phi\\ F\psi\end{array}} \qquad \begin{array}{c} T\phi\supset\psi \\ \swarrow \quad \searrow \\ F\phi \qquad T\psi \end{array}$$

$$\frac{\mathrm{F}\neg\phi}{\mathrm{T}\phi}$$

$$\frac{\mathrm{F}\forall x\phi}{\mathrm{F}\phi^{x}_{a}}$$ ただし，a は枝で新しいパラメータである。

$$\frac{\mathrm{F}\exists x\phi}{\mathrm{F}\phi^{x}_{t}}$$

$$\frac{\mathrm{T}\neg\phi}{\mathrm{F}\phi}$$

$$\frac{\mathrm{T}\forall x\phi}{\mathrm{T}\phi^{x}_{t}}$$

$$\frac{\mathrm{T}\exists x\phi}{\mathrm{T}\phi^{x}_{a}}$$ ただし，a は枝で新しいパラメータである。

これにより，簡潔な探索樹が得られる(32)。

さらに簡潔なタブローを得るには，‘Fϕ’を‘¬ϕ’に，‘Tϕ’を‘ϕ’に変換することで，記号づけられた整式に替えて通常の整式の分解規則とすることである。すると上の規則は次のようになる。

$$\begin{array}{ccc} & \neg(\phi\&\psi) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg\phi & & \neg\psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \phi\&\psi \\ | \\ \phi \\ | \\ \psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg(\phi\vee\psi) \\ | \\ \neg\phi \\ | \\ \neg\psi \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \phi\vee\psi & \\ \swarrow & & \searrow \\ \phi & & \psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg(\phi\supset\psi) \\ | \\ \phi \\ | \\ \neg\psi \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \phi\supset\psi & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg\phi & & \psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg\neg\phi \\ | \\ \phi \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg\forall x\phi \\ | \\ \neg\phi^{x}_{a} \end{array}$$ a は枝で新しいパラメータ

$$\begin{array}{c} \forall x\phi \\ | \\ \phi^{x}_{t} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg\exists x\phi \\ | \\ \neg\phi^{x}_{t} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \exists x\phi \\ | \\ \phi^{x}_{a} \end{array}$$ a は枝で新しいパラメータ

例として，$\forall x(\phi\supset\psi)\supset\phi\vee\forall x\psi$（ここで$\phi$に x は出現していない）を，この最後の方式でのタブロー・メソッドで分析しよう。

$$\neg(\forall x(\phi \vee \psi) \supset \phi \vee \forall x \psi)$$
$$\forall x(\phi \vee \psi)$$
$$\neg(\phi \vee \forall x \psi)$$
$$\neg \phi$$
$$\neg \forall x \psi$$
$$\neg \psi^{x}{}_{a}$$
$$\phi \vee \psi^{x}{}_{a}$$
$$\phi \qquad\qquad \psi^{x}{}_{a}$$

二つの可能な枝がともに矛盾を含んで閉じているので，反証は不可能である。よって，$\forall x(\phi \vee \psi) \supset \phi \vee \forall x \psi$　は妥当であることが証明された。

こうして，連式計算から示唆を得て発展したタブロー・メソッドは，反証可能性による整式の妥当性，非妥当性の判定方法を提供する。

註

(1) サンドホルムによれば (Göran Sundholm, "Systems of Deduction" in D. Gabbay and F. Guenthner (eds.), Handbook of Philosophical Logic, Vol. I, Reidel, 1983, pp.133-188)，論理学的研究における演繹体系の役割として，以下の事例を挙げうる。①フレーゲの場合のような数学（フレーゲにおいては算術）の確実な基礎を与えること，②様相論理のいくつかの分野に見られるような，すでに与えられた意味論的帰結関係を構文論的に生成すること，③カットなしのゲンツェン連式による無限論理の初期の展開に見られるような発見の道具となること，④ヒルベルトの無矛盾性証明の計画に関する伝統的仕事のような，メタ数学の研究対象となること，⑤推論の本性についての哲学的洞察を定式化するときの一つのモデルケースとなること，等において演繹体系が用いられているという。尚，本論文を準備する過程で，このサンドホルムの論文から多くの貴重な示唆を得た。

(2) フレーゲの体系は『概念記法』に史上最初の論理の公理体系として現れた。Gottlob Frege : Begriffsschrift, Nebert, 1879.

(3) ヒルベルトはこの体系を例えば次の書物で採用している。D. Hilbert and P. Bernays: Grundlagen der Mathematik vol. I/II., Springer, 1934/39, 2nd ed. 1968/79.　邦訳：D．ヒルベルト／P．ベルナイス（吉田夏彦・渕野昌訳）『数学の基礎』シュプリンガー・フェアラーク東京 1993は，第2版からの抄訳である。

(4) 通常この体系においても「推論規則」という名称が使われるが，Sundholmに従い「証明規則」という名称を採用する。これは，推論の前提が「定理」であり，単なる「仮定」であってはならないということを暗示するのに都合がよい。

(5) 証明（正確には証明図式）の例として，$\phi \supset \phi$の証明を描く：

$$\dfrac{\phi \supset (\phi \supset \phi) \qquad \dfrac{(\phi \supset ((\phi \supset \phi) \supset \phi)) \supset ((\phi \supset (\phi \supset \phi)) \supset (\phi \supset \phi)) \qquad \phi \supset ((\phi \supset \phi) \supset \phi)}{(\phi \supset (\phi \supset \phi)) \supset (\phi \supset \phi)}}{\phi \supset \phi}$$

これは，

$$\dfrac{(4) \qquad \dfrac{(1) \qquad (2)}{(3)}}{(5)}$$

という形をしている。(1)と(2)は各々公理（Ａ２）（Ａ１）であり，(3)はこれらを前提としてのＭＰによる結論である。(4)は再び公理（Ａ１）であり，(3)，(4)からＭＰにより(5)が導かれる。証明が唯一つの移行パターンであるＭＰにより形成されるという単純さにより，この体系の証明に関するメタ定理（証明の特徴を述べる命題）の発見とその証明（メタ証明）が容易になる。しかし反面，上の最も簡単な例からも分かるように，この体系の証明を遂行するのは頗る煩雑である。出発点が三種類の公理に限られていて（大抵は長大なものになる），しかも一つのパターンでしか移行できないから先の見通しが限られるからである。この欠点は，しかし，以下で述べる演繹定理により，相当程度は解消される。

(6)　証明は概略以下のようになる。定理の仮定により，出発点としてϕ_1，…，ϕ_k（Γの要素）とϕという仮定と公理γ_1，…，γ_mを取るψの証明Ｄが存在する：

$$\left.\begin{array}{c}
\phi, \qquad \phi_1, \cdots, \phi_k, \qquad \gamma_1, \cdots, \gamma_m \\
\vdots \\
\dfrac{\theta\supset\delta \qquad \theta}{\delta}\ (\mathrm{MP}) \\
\vdots \\
\psi
\end{array}\right]\mathrm{D}$$

さて，仮定としてΓのみを取る$\phi\supset\psi$の証明を見出さねばならない。そのために，Ｄに‘$\phi\supset$’変形，すなわちＤの各式の右端に‘$\phi\supset$’を付加する操作を施して，以下の擬証明樹‘$\phi\supset$Ｄ’を作る。

$$\left.\begin{array}{c}
\phi\supset\phi, \qquad \phi\supset\phi_1, \cdots, \phi\supset\phi_k, \qquad \phi\supset\gamma_1, \cdots, \phi\supset\gamma_m \\
\vdots \\
\dfrac{\phi\supset(\theta\supset\delta) \qquad \phi\supset\theta}{\phi\supset\delta}\ \text{‘}\phi\supset\mathrm{MP}\text{’} \\
\vdots \\
\phi\supset\psi
\end{array}\right]\text{‘}\phi\supset\mathrm{D}\text{’}$$

この‘$\phi\supset$Ｄ’を改良して，Γだけからの$\phi\supset\psi$の証明を作ることができることを示す。（言い換えると，‘$\phi\supset$Ｄ’を構成しているすべての式αに対して，$\Gamma\vdash\alpha$であることを示す。）まず擬証明樹‘$\phi\supset$Ｄ’の出発点である三種の式の場合である。

（ａ）$\phi\supset\phi$の場合。註５より証明可能。ゆえに，$\Gamma\vdash\phi\supset\phi$.

（ｂ）$\phi\supset\phi i$　（$\phi i\in\Gamma$）の場合。仮定ϕi と公理（Ａ１）$\phi i\supset(\phi\supset\phi i)$を挿入して，

$$\frac{\phi i \qquad \phi i\supset(\phi\supset\phi i)}{\phi\supset\phi i}\ (\mathrm{MP})$$

を作ることで，$\Gamma\vdash\phi\supset\phi i$ が示せる。

（ｃ）$\phi\supset\gamma i$　（γi は公理γ_1，…，γ_mの一つ）の場合。公理γiと公理（Ａ１）$\gamma i\supset(\phi\supset\gamma i)$　を挿入して，

$$\frac{\gamma i \qquad \gamma i\supset(\phi\supset\gamma i)}{\phi\supset\gamma i}\ (\mathrm{MP})$$

を作ることで　$\Gamma\vdash\phi\supset\gamma i$ が示せる。公理（Ａ１）の存在理由はこの（ｂ）（ｃ）が可能となる点にある。残るは，（ｄ）擬ＭＰ，すなわち‘$\phi\supset$ＭＰ’によって移行している途中の段階を正しいＭＰに復元することである。そのために公理（Ａ２）を使って，$\phi\supset(\theta\supset\delta)$ と$\phi\supset\theta$から$\phi\supset\delta$へのＭＰによる移行を次のように作る（公理（Ａ２）の存在理由はここにある）：

$$\dfrac{\phi\supset\theta \qquad \dfrac{(\phi\supset(\theta\supset\delta))\supset((\phi\supset\theta)\supset(\phi\supset\delta)) \qquad \phi\supset(\theta\supset\delta)}{(\phi\supset\theta)\supset(\phi\supset\delta)}\ (\mathrm{MP})}{\phi\supset\delta}\ (\mathrm{MP})$$

帰納の仮定より　$\Gamma\vdash\phi\supset(\theta\supset\delta)$，　$\Gamma\vdash\phi\supset\theta$であるから，$\Gamma\vdash\phi\supset\delta$. こうして，$\phi\supset\psi$も，（ａ）－（ｄ）のいずれかのパターンに当てはまるから，$\Gamma\vdash\phi\supset\psi$. Ｑ．Ｅ．Ｄ．

(7)　‘ϕ^x_t’という表現は，変項ｘがϕ中で自由変項として現れているとき，ｘをｔで置き換えてϕから得られる表現である。これは次のように帰納的に定義される。

(0)　ϕが原子文のとき，ϕ^x_tはϕ中のｘをｔで置き換えて得られる表現である。

(1)　$(\neg\phi)^x{}_t = \mathrm{def.}\neg(\phi^x{}_t)$
(2)　$(\phi\supset\psi)^x{}_t = \mathrm{def.}\ \phi^x{}_t \supset \psi^x{}_t$
(3)　$(\forall y\phi)^x{}_t = \mathrm{def.} \begin{cases} \forall y\phi, & \text{x と y が同一の変項であるとき；} \\ \forall y\ (\phi^x{}_t), & \text{そうでないとき.} \end{cases}$

こうして，$(x=y)^y{}_x$ は $x=x$　であり，$\forall x\ (x=x)^x{}_t$ は $\forall x\ (x=x)$ である。

(8) いま，ϕ を $\neg\forall y\ (x=y)$ とする。すると，'t'をyとすると $\phi^x{}_t = \mathrm{def.}\neg\forall y\ (y=y)$，$(\forall x\phi\supset\phi)^x{}_t = \mathrm{def.}$ $(\forall x\phi)^x{}_t \supset \phi^x{}_t = \forall x\neg\forall y\ (x=y)\supset\neg\forall y\ (y=y)$ である。ところがこの最後の式は論理的に妥当ではない。なぜなら，二つ以上の個体を持つ任意の個体領域において，先件は真であるが後件は常に偽だから，反例モデルを作ることができるからである。これが（Q４）に制限条件が必要な理由である。すなわち，xの自由出現が ϕ 中において，tが持つ自由変項を束縛することになるような変項の作用域に存在しないとき，tはxに対して「代入可能」と言われる（または「xに対して代入可能」の代わりに「xに対して自由」とも言われる)。これは次のように帰納的に定義される。

(ｉ) ϕ が原子文のとき，ｔはxに対して ϕ で代入可能である。
(ii) ｔがxに対して ϕ において代入可能であるとき，ｔはxに対して $(\neg\phi)$ において代入可能である。
(iii) ｔがxに対して ϕ と ψ において代入可能であるとき，ｔはxに対して $(\phi\supset\psi)$ において代入可能である。
(iv) xが $\forall y\phi$ において自由に現れないときか，またはyがｔにおいて出現せずｔがxに対して ϕ において代入可能であるとき，ｔはxに対して $\forall y\phi$ において代入可能である。

(9) 証明は以下のようになる。Γ からの ϕ の証明樹をDとすると，Dは次の形をしている：

$$\overbrace{\phi_1,\ \cdots,\ \phi_k,}^{\Gamma}\qquad \overbrace{\gamma_1,\ \cdots,\ \gamma_m}^{\text{公理}}$$
$$\vdots$$
$$\frac{\theta\supset\psi \qquad \theta}{\psi}\ (\mathrm{MP})$$
$$\vdots$$
$$\phi$$

そこで，D中で出現している各整式 δ に対して，$\Gamma\vdash\forall x\delta$　を示す。まず，δ がDの出発点である場合：

(ｉ) δ が公理 $\gamma_1, \cdots, \gamma_m$ の一つであるとき。公理の一般化はすべて再び公理であるから，$\forall x\delta$ は公理である。ゆえに，$\Gamma\vdash\forall x\delta$。

(ii) δ が Γ の要素であるとき。定理の仮定により，Γ 中のいかなる式においてもxは自由変項としては出現していないから，当然 δ にも出現していない。しかるに，公理（Q６）より，$\vdash\delta\supset\forall x\delta$. δ は Γ の要素だったから，MPにより　$\Gamma\vdash\forall x\delta$。(公理（Q６）の存在理由はこのことが可能となることにある。)

残るはモドゥス・ポネンスを適用する場合である。帰納法の仮定より，$\Gamma\vdash\forall x\ (\theta\supset\psi)$ および $\Gamma\vdash\forall x\theta$. ところが（Q５）より，$\vdash\forall x\ (\theta\supset\psi)\supset(\forall x\theta\supset\forall x\psi)$，よってMPを２回適用して，$\Gamma\vdash\forall x\psi$。(公理（Q５）の存在理由はここにある。) Q．E．D．

(10) このタイプの体系は，タルスキー，カリシュ＆モンタギュー，モンク等の以下の一連の論文で取り上げられている。A. Tarski: "A simplified formulation of predicate logic with identity", Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung（以下Archと略記）7, 1965, pp.61-79. D. Kalish and R. Montague : "On Tarski's formalization of predicate logic with identity", Arch 7, 1965, pp.81-101. D. Monk: "Substitutionless predicate logic　with identity", Arch 7, 1965, pp.102-121.

(11) 例えば，以下のチャーチやメンデルソンが採用している体系は，（A１）－（A３)，（Q４）(同じ制限を伴う）は共通であるが，次の公理を加える：

(Q′5)　$\forall x\ (\phi\supset\psi)\supset(\phi\supset\forall x\psi)$ ……xは ϕ 中に自由には出現しない.

この体系（F′CQCとする）では，公理が公理図式の事例のみであり，それらの一般化は公理に含まれない。ただし，次の二つの証明規則によってその効力を確保する：

R′1.　MP

R′2（一般化）．　$\vdash\phi \ \Rightarrow\ \vdash\forall x\phi$

先の体系ＦＣＱＣでは一般化は派生推論規則であったが，このＦ′ＣＱＣでは原始証明規則である。Cf. A. Church : Introduction to Mathematical Logic, xol. I, Priceton U. P. 1956, E. Mendelson: Introduction to Mathematical Logic, Van Nostrand, 1964.

(12) 個体項の定義はこうなる：

（i）個体定項は項である。

（ii）パラメータは項である。

（iii）f^jがj項関数記号であり，t_1，…，t_jがすべて項ならば，

$f^j(t_1, \cdots, t_j)$は項である。

(13) ポイントは量化に関する証明規則であるから，（R∀Ｉ）の場合のみ考える。いま，Ｄを，仮定ϕ，ϕ_1，…，ϕ_kからの$\theta\supset\forall x\psi^a{}_x$の証明とする：

$$\left.\begin{array}{c} \phi,\quad \phi_1,\ \cdots,\ \phi_k \\ \vdots \\ \dfrac{\theta\supset\psi}{\theta\supset\forall x\psi^a{}_x}\,(\mathrm{R}\forall\mathrm{I}) \end{array}\right] \mathrm{D}$$

（R∀Ｉ）に対する制限が満たされているから，固有パラメータａはθにも，仮定ϕ，ϕ_1，…，ϕ_kのいずれにも出現していない。帰納法の仮定により，‘$\phi\supset$’変形によって得られる擬証明樹‘$\phi\supset$D’を改変して，仮定ϕ_1，…，ϕ_kだけからの$\phi\supset$（$\theta\supset\psi$）の証明D′が存在する。このD′に続けて以下の証明樹が作れる：

$$\dfrac{(\phi\&\theta\supset\forall x\psi^a{}_x)\supset(\phi\supset(\theta\supset\forall x\psi^a x))^{**} \qquad \dfrac{\dfrac{(\phi\supset(\theta\supset\psi))\supset(\phi\&\theta\supset\psi)^{*} \qquad \left.\begin{array}{c}\phi_1,\ \cdots,\ \phi k\\ \vdots \\ \phi\supset(\theta\supset\psi)\end{array}\right]\mathrm{D}'}{\phi\&\theta\supset\psi}\,(\mathrm{MP})}{\phi\&\theta\supset\forall x\psi^a x}\,(\mathrm{R}\forall\mathrm{I})}{\phi\supset(\theta\supset\forall x\psi^a x)}\,(\mathrm{MP})$$

ここで，‘*’のついた式は公理（A＆Ei）と命題論理部分の演繹定理によって証明可能であり，$\phi\&\theta$および仮定ϕ_1，…，ϕ_kのいずれにも固有パラメータａが出現していないから，（R∀Ｉ）の適用は正しく，‘**’のついた式は公理（A＆Ｉ）と命題論理の部分の演繹定理により証明可能である。

(14) ゲンツェンのオリジナルの論文は次のものである。G. Gentzen : “Untersuchungen über das logische Schliessen”, Mathematische Zeitschrift 39, 1934, SS.176-210, 405-431.

(15) M. Szabo : The Collected Papers of Gerhard Gentzen, North-Holland, 1969, p.74.

(16) 本文中の規則の表現は略式のものである。ここで，煩を厭わず詳しく正確に表現する。

（A）　：任意の整式ϕに対して，ϕただ一つから成る木がϕ自身に依存する（つまりϕ自身を仮定とする）ϕの導出となる。

（＆Ｉ）：$\begin{array}{c}\mathrm{D}_0\\ \phi_0\end{array}$ と $\begin{array}{c}\mathrm{D}_1\\ \psi_0\end{array}$ が，それぞれ，仮定ϕ_1，…，ϕ_kと仮定ψ_1，…，ψ_mに依存するϕ_0とψ_0の導出であるとき，

$$\begin{array}{cc}\mathrm{D}_0 & \phi_1\end{array}$$
$$\dfrac{\phi_0 \qquad \psi_0}{\phi_0\ \&\ \psi_0}\,(\&\mathrm{I})$$

は，仮定ϕ_1，…，ϕ_k，ψ_1，…，ψ_m に依存する　ϕ_0 ＆ψ_0 の導出である。

（＆Ｅi）：ｉ＝0,1 に応じて二つある。$\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \phi_0\&\phi_1\end{array}$ がψ_1，…，ψ_m に依存する　$\phi_0\&\phi_1$ の導出であるとき，

$$\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \dfrac{\phi_0\ \&\phi_1}{\phi i}\,(\&\mathrm{E}\ i)\end{array}$$

は，同じ仮定に依存する　ϕi の導出である。

(∨ I i)：i=0, 1 に応じて二つある。$\begin{array}{c}D\\ \phi_i\end{array}$ が仮定ψ_1, …, ψ_mに依存するϕiの導出であるとき，

$$\dfrac{\begin{array}{c}D\\ \phi\,i\end{array}}{\phi_0\vee\phi_1}\ (\vee\,I\,i)$$

は同じ仮定に依存する　$\phi_0\vee\phi_1$ の導出である。

(∨ E)：$\begin{array}{c}D\\ \phi\vee\psi\end{array}$ が仮定ϕ_1, …, ϕ_kに依存する$\phi\vee\psi$の導出であり，$\begin{array}{c}\phi\\ D_1\\ \theta\end{array}$ と $\begin{array}{c}\psi\\ D_2\\ \theta\end{array}$ が，それぞれ，仮定ϕ, ψ_1, …, ψ_mと仮定ψ, θ_1, …, θ_hに依存するθの導出であるとき，

$$\dfrac{\begin{array}{c}D\\ \phi\vee\psi\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{c}[\phi]\\ D_1\\ \theta\end{array}\quad \begin{array}{c}[\psi]\\ D_2\\ \theta\end{array}}{\theta}\ (\vee\,E)$$

は，仮定ϕ_1, …, ϕ_k, ψ_1, …, ψ_m, θ_1, …, θ_hに依存するθの導出である。

(⊃ I)：$\begin{array}{c}D\\ \psi\end{array}$ が仮定ϕ_1, …, ϕ_m に依存するψの導出であるとき，

$$\dfrac{\begin{array}{c}D\\ \psi\end{array}}{\phi\supset\psi}\ (\supset I)$$

は，仮定$\phi_1{}^*$, …, $\phi_m{}^*$に依存する$\phi\supset\psi$の導出である。ただし，$\phi_1{}^*$, …, $\phi_m{}^*$はϕ_1, …, ϕ_mからいくつかの（0個やすべての場合も含む）ϕの出現を取り除いて得られるリストである。取り除かれたϕの出現は「解除された」と言われる。

(⊃ E)：$\begin{array}{c}D_0\\ \phi\supset\psi\end{array}$ と $\begin{array}{c}D_1\\ \phi\end{array}$ が，それぞれ，仮定ϕ_1, …, ϕ_kと仮定ψ_1, …, ψ_mに依存する$\phi\supset\psi$ と ϕ の導出であるとき，

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_0\\ \phi\supset\psi\end{array}\qquad \begin{array}{c}D_1\\ \phi\end{array}}{\psi}\ (\supset E)$$

は，仮定ϕ_1, …, ϕ_k, ψ_1, …, ψ_mに依存するψの導出である。

(⊥)　：$\begin{array}{c}D\\ \bot\end{array}$ が仮定ϕ_1, …, ϕ_kに依存する⊥の導出であるとき，

$$\dfrac{\begin{array}{c}D\\ \bot\end{array}}{\phi}\ (\bot)$$

は，同じ仮定に依存するϕの導出である。

(∀ I)：$\begin{array}{c}D\\ \phi\end{array}$ が仮定ψ_1, …, ψ_kに依存するϕの導出であり，ϕ中の固有パラメータａがこれらのどの仮定にも出現していないとき，

$$\dfrac{\begin{array}{c}D\\ \phi\end{array}}{\forall x\,\phi^{a}{}_{x}}\ (\forall I)$$

は，同じ仮定に依存する　$\forall x\,\phi^{a}{}_{x}$　の導出である。

(∀ E)：$\begin{array}{c}D\\ \forall x\,\phi\end{array}$ が，仮定ψ_1, …, ψ_k に依存する$\forall x\,\phi$の導出であるとき，

$$\dfrac{\begin{array}{c}D\\ \forall x\,\phi\end{array}}{\phi^{x}{}_{t}}\ (\forall E)$$

は，同じ仮定に依存する$\phi^{x}{}_{t}$の導出である。

(∃Ｉ)：$\overset{D}{\phi^x{}_t}$ が仮定ψ_1，…，ψ_kに依存する$\phi^x{}_t$の導出であるとき，

$$\dfrac{\overset{D}{\phi^x{}_t}}{\exists x\,\phi}\,(\exists\mathrm{I})$$

は，同じ仮定に依存する∃ｘϕの導出である。

(∃Ｅ)：$\overset{D}{\exists x\,\phi}$ が仮定ϕ_1，…，ϕ_kに依存する∃ｘϕの導出であり，$\overset{\phi^x{}_a}{\overset{D_1}{\theta}}$ が仮定$\phi^x{}_a$，θ_1，…，θ_mに依存するθの導出であり，固有パラメータａが∃ｘϕにもθにも，$\phi^x{}_a$以外のθが依存するどの仮定にも出現していないとき，

$$\dfrac{\overset{D}{\exists x\,\phi}\qquad\qquad \overset{[\phi^x{}_a]}{\overset{D_1}{\theta}}}{\theta}\,(\exists\mathrm{E})$$

は，仮定ϕ_1，…，ϕ_k，θ_1，…，θ_mに依存するθの導出である。

(17) 例えば，次の二つの導出においては（⊃Ｉ）はいずれも「解除」を伴う。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{[P]}\qquad\overset{1}{[Q]}}{P\&Q}\,(\&\mathrm{I})}{P}\,(\&\mathrm{E})}{Q\supset P}\,(\supset\mathrm{I})\ 1}{P\supset(Q\supset P)}\,(\supset\mathrm{I})\ 2
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{3}{[P]}}{P\vee(Q\supset P)}\,(\vee\mathrm{I})\quad \overset{1}{[P]}\quad \dfrac{\overset{2}{[Q]}\quad\overset{1}{[Q\supset P]}}{P}\,(\supset\mathrm{P})}{P}\,(\vee\mathrm{E})\ 1}{Q\supset P}\,(\supset\mathrm{I})\ 2}{P\supset(Q\supset P)}\,(\supset\mathrm{I})\ 3$$

しかし，これらは回り道のある，標準的 (normal) でない導出になっている点で，適切とは言い難い。自然演繹の体系の中で「適切性」を確保するためにはいくつかの条件が必要となる。それについては，D. Prawitz : Natural Deduction, Almqvist & Wiksells, 1965, pp.81-87 参照。

(18) Cf. D. Leivant : "Assumption classes in natural deduction", Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 25, 1979, SS.1-4.

(19) （Ａ⊃１）についてはすでに扱った。（Ａ⊃２）については以下のように証明できる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{[\phi]}\qquad\overset{3}{[\phi\supset(\psi\supset\theta)]}}{\psi\supset\theta}\,(\supset\mathrm{E})\qquad \dfrac{\overset{1}{[\phi]}\qquad\overset{2}{[\phi\supset\psi]}}{\psi}\,(\supset\mathrm{E})}{\theta}\,(\supset\mathrm{E})}{\phi\supset\theta}\,(\supset\mathrm{I})\ 1}{(\phi\supset\psi)\supset(\phi\supset\theta)}\,(\supset\mathrm{I})\ 2}{(\phi\supset(\psi\supset\theta))\supset((\phi\supset\psi)\supset(\phi\supset\theta))}\,(\supset\mathrm{I})\ 3$$

ＦＩＱＣの他の公理：（Ａ＆Ｉ），（Ａ＆Ｅi），（Ａ∨Ｉi），（Ａ∨Ｅ），（Ａ⊥），（Ａ∀Ｅ），（Ａ∃Ｅ）についても同様である。

(20) ＦＩＱＣの証明規則は（Ｒ∀Ｉ）と（Ｒ∃Ｅ）の二つである。これらをいま推論規則とみて，仮定からの証明を考える。（Ｒ∀Ｉ）の場合。仮定ψ_1，…，ψ_kからの$\phi\supset\psi$の導出を$\overset{D}{\phi\supset\psi}$と表す。（Ｒ∀Ｉ）により，$\phi\supset\forall x\,\psi^a{}_x$の導出が許されるが，（固有パラメータａに関する制限条件により）ａはϕに出現しておらず，（自然演繹での推論規則としての条件に合致する意味で）仮定ψ_1，…，ψ_k にも出現していないとみなしてよい。このとき，以下の導出により，同じ仮定に依存して$\phi\supset\forall\psi^a{}_x$が導出される。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{D}{\phi\supset\psi} \qquad \overset{1}{[\phi]}}{\psi}\ (\supset E)}{\forall x\,\psi^{a}{}_{x}}\ (\forall I)}{\phi\supset\forall x\,\psi^{a}{}_{x}}\ (\supset I)\ 1$$

（R∃E）も同様：

$$\dfrac{\dfrac{\overset{2}{[\exists x\,\phi]} \qquad \dfrac{\overset{1}{[\phi^{x}{}_{a}]} \qquad \overset{D}{\phi^{x}{}_{a}\supset\psi}}{\psi}\ (\supset E)}{\psi}\ (\exists E)\,1}{\exists x\,\phi\supset\psi}\ (\supset I)\,2$$

ここで，固有オペレータａは，ψにも，仮定ψ_1，…，ψ_kにも出現していないから，(∃E)適用に伴う制限条件は守られている。

(21) $\Gamma\vdash_N\phi$を確立する最終推論規則が（＆Ｉ）と（∃Ｅ）の場合を考える。他の場合は類比的に実行できる。

（ｉ）（＆Ｉ）の場合。ϕ_1，…，$\phi_k\vdash_F\phi_0$ および　ψ_1，…，$\psi_m\vdash_F\psi_0$ と仮定する。１．４節のＦＩＱＣの公理（Ａ＆１）により，$\vdash_F\phi_0\supset(\psi_0\supset(\phi_0\ \&\ \psi_0))$．仮定$\phi_1$，…，$\phi_k$，$\psi_1$，…，$\psi_m$の下でＭＰを二度使って，$\phi_1$，…，$\phi_k$，$\psi_1$，…，$\psi_m\vdash\phi_0\ \&\ \psi_0$．

規則（＆Ｅ）の場合は公理（Ａ＆Ｅi)を，規則（∨Ｉ）の場合は公理（Ａ∨Ｉi)を，規則（∨Ｅ）の場合は公理（Ａ∨Ｅ）を，規則（⊃Ｉ）の場合は演繹定理を，規則（⊥）の場合は公理（Ａ⊥）を使って同様に証明でき，規則（⊃Ｅ）はＭＰそのものであるからトリヴィアルに成り立つ。

（ii）（∃Ｅ）の場合。$\Gamma\vdash_F\exists x\,\phi$　を示す，仮定からの証明Ｄと，Δ，$\phi^{a}{}_{x}\vdash_F\theta$を示す仮定からの証明$D_1$があるとする。ただし，固有パラメータａは，$\exists x\,\phi$にもΔにも$\theta$にも出現していないとする。このとき，

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ D\\ \exists x\,\phi\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\phi^{a}x] \quad \Delta\\ D_1\\ \theta\end{matrix}}{\phi^{a}{}_{x}\supset\theta}\ (\text{演繹定理})}{\exists x\,\phi\supset\theta}\ (R\exists E)}{\theta}\ (MP)$$

…パラメータａの制限条件は守られている。

によって，Γ，$\Delta\vdash_F\theta$　が示される。

同様に，規則（∃Ｉ）の場合は公理（Ａ∃Ｉ）を，規則（∀Ｅ）の場合は公理（Ａ∀Ｅ）を，規則（∀Ｉ）の場合は証明規則（Ｒ∀Ｉ）をそれぞれ使って示すことができる。

(22) この定理の証明はD. Prawitzの前掲書（Natural Deduction）で与えられている。

(23) Ｃｆ．G. Sundholm : “Proof Theory and Meaning”, Handbook of Philosophical Logic vol. III, Reidel, 1986, pp. 471-506.

(24) 規則は次のように表現される。

（０）$\phi\vdash\phi$　…仮定の規則

（ｉ）$\Gamma\vdash\phi$ならば，Γ，$\Delta\vdash\phi$　…「仮定を増やしてよい」という規則。これは暗黙のうちに認められていたものを明示的に表したものである。

（ii）$\Gamma\vdash\phi$かつ$\Delta\vdash\psi$ならば，Γ，$\Delta\vdash\phi\&\psi$　…（＆Ｉ）

（iii）$\Gamma\vdash\phi_0\ \&\ \phi_1$ ならば，$\Gamma\vdash\phi i$ (i＝0,1)　…（＆Ｅ）

（iv）$\Gamma\vdash\phi i$ ならば，$\Gamma\vdash\phi_0\vee\phi_1$（ｉ＝0，1）　…（∨Ｉ）

（ｖ）$\Gamma\vdash\phi\vee\psi$かつ　ϕ，$\Delta_1\vdash\theta$かつ　ψ，$\Delta_2\vdash\theta$ならば，Γ，Δ_1，$\Delta_2\vdash\theta$　…（∨Ｅ）

（vi）ϕ，$\Gamma\vdash\psi$ならば，$\Gamma\vdash\phi\supset\psi$　…（⊃Ｉ）

（vii）$\Gamma\vdash\phi$　かつ$\Delta\vdash\phi\supset\psi$ならば，Γ，$\Delta\vdash\psi$　…（⊃Ｅ）

（viii）$\Gamma\vdash\perp$ならば，$\Gamma\vdash\phi$　…（⊥）

（ix）$\Gamma\vdash\phi$　かつ　ａがΓ中に出現していないならば，$\Gamma\vdash\forall x\,\phi^{a}{}_{x}$　…（∀Ｉ）

(x) $\Gamma\vdash\forall x\phi$ならば，$\Gamma\vdash\phi^{x}{}_{t}$ … ($\forall$E)
(xi) $\Gamma\vdash\phi^{x}{}_{t}$ならば，$\Gamma\vdash\exists x\phi^{t}{}_{x}$ … ($\exists$I)
(xii) $\Gamma\vdash\exists x\phi$ かつ$\phi^{x}{}_{a}$，$\Delta\vdash\theta$ かつ aが$\exists x\phi$，Δ，θに出現していないならば，Γ，$\Delta\vdash\theta$ … ($\exists$E)
仮定の増加の規則を加えたため，規則がＮＩＱＣの場合より一つ増えて13個になっている。

(25) 規則 ($\vee$E) により，

$$\frac{\phi,\ \Gamma\vdash\theta \qquad\qquad \psi,\ \Gamma\vdash\theta}{\phi\vee\psi,\ \Gamma\vdash\theta}$$

が正当化される。また，($\forall$E) により，

$$\frac{\phi^{x}{}_{t},\ \Gamma\vdash\theta}{\forall x\phi,\ \Gamma\vdash\theta}$$

が正当化される。最後に，($\exists$E) により，

$$\frac{\phi^{x}{}_{a},\ \Gamma\vdash\theta}{\exists x\phi,\ \Gamma\vdash\theta}$$

が正当化される。(ただし，パラメータ a はΓ，θに出現していない。)

(26) 規則 (CUT) と他の規則または公理を組合わせることにより，消去規則と同じ効力を発揮させることができる。'$\vdash$'の代わりに'$\rightarrow$'で表現する。

(&E) の場合

$$\cfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma\rightarrow\phi\&\psi\end{matrix} \qquad \cfrac{\psi,\ \Gamma\rightarrow\psi\ (\text{公理})}{\phi\&\psi,\ \Gamma\rightarrow\psi}\ (\&\rightarrow)}{\Gamma\rightarrow\psi}\ (\mathrm{CUT})$$

($\vee$E) の場合

$$\cfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma\rightarrow\phi\vee\psi\end{matrix} \qquad \cfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \phi,\ \Gamma\rightarrow\theta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \psi,\ \Gamma\rightarrow\theta\end{matrix}}{\phi\vee\psi,\ \Gamma\rightarrow\theta}\ (\vee\rightarrow)}{\Gamma\rightarrow\theta}\ (\mathrm{CUT})$$

($\forall$E) の場合

$$\cfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma\rightarrow\forall x\phi\end{matrix} \qquad \cfrac{\phi^{x}{}_{t},\ \Gamma\rightarrow\phi^{x}{}_{t}\ (\text{公理})}{\forall x\phi,\ \Gamma\rightarrow\phi^{x}{}_{t}}\ (\forall\rightarrow)}{\Gamma\rightarrow\phi^{x}{}_{t}}\ (\mathrm{CUT})$$

($\exists$E) の場合

$$\cfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma\rightarrow\exists x\phi\end{matrix} \qquad \cfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \phi^{x}{}_{a},\ \Gamma\rightarrow\theta\end{matrix}}{\exists x\phi,\ \Gamma\rightarrow\theta}\ (\exists\rightarrow)}{\Gamma\rightarrow\theta}\ (\mathrm{CUT})$$

(27) Cf. Gentzen [1934] (註14)，Szabo [1969] (註15)。

(28) ここでは，R. Smullyan : First- Order Logic, Springer, 1968, の方式に従う。

(29) 例として，$\forall x(\phi\vee\psi)\supset\phi\vee\forall x\psi$ (ここでxはϕに出現していない) の反証可能性を考える。

$$\mathrm{F}\ (\forall x(\phi\vee\psi)\supset\phi\vee\forall x\psi)$$

とする。これの必要十分条件は，

$$\mathrm{T}\forall x(\phi\vee\psi), \qquad \mathrm{F}(\phi\vee\forall x\psi)$$

であり，これらが成り立つための必要十分条件は，

$$\mathrm{T}\forall x(\phi\vee\psi), \qquad \mathrm{F}\phi, \qquad \mathrm{F}\forall x\psi$$

である。$\forall x\psi$を反証するには，ある a について $\psi^{x}{}_{a}$ を偽化せねばならない。よって，

$$\mathrm{T}\forall x(\phi\vee\psi), \qquad \mathrm{F}\phi, \qquad \mathrm{F}\psi^{x}{}_{a}$$

が反証条件である。$\forall x(\phi\vee\psi)$ が真であることから，特に，$\phi\vee\psi^{x}{}_{a}$が真となる。よって，

$T\forall x\ (\phi\vee\psi),\quad T\ (\phi\vee\psi^{x}_{a}),\quad F\phi,\quad F\psi^{x}_{a}$

（ここで，ϕ に x が出現していないことが使われる。）

が反証条件である。$\phi\vee\psi^{x}_{a}$ を真にするには選言肢の一方が真であればよいから，反証条件が二つの可能性に分かれる。

①第一の可能性：$T\forall x\ (\phi\vee\psi),\ T\phi,\ F\phi,\ F\psi^{x}_{a}$；

これは反証条件とはならない。なぜなら，同一の整式 ϕ が同時に真であり偽であることは不可能だからである。よって，探索は閉じられる。

②第二の可能性：$T\forall x\ (\phi\vee\psi),\ T\psi^{x}_{a},\ F\phi,\ F\psi^{x}_{a}$；

これも ψ^{x}_{a} が真であり偽であることを要求しているから反証条件にはなり得ない。よって探索は閉じられる。ここで，反証可能性のすべての可能性が尽くされている。よって，$\forall x(\phi\vee\psi)\supset\phi\vee\forall x\psi$ は反証不可能である，つまり妥当である。以上の探索は探索樹として次のようにまとめられる。

$$F\ (\forall x\ (\phi\vee\psi)\ \supset\phi\vee\forall x\psi)$$

$$T\forall x\ (\phi\vee\psi),\ F\ (\phi\vee\forall x\psi)$$

$$T\forall x\ (\phi\vee\psi),\ F\phi,\ F\forall x\psi$$

$$T\forall x\ (\phi\vee\psi),\ F\phi,\ F\psi^{x}_{a}$$

$$T\forall x\ (\phi\vee\psi),\ T\ (\phi\vee\psi^{x}_{a}),\ F\phi,\ F\psi^{x}_{a}$$

$$T\forall x\ (\phi\vee\psi),\ T\phi,\ F\phi,\ F\psi^{x}_{a}\quad|\quad T\forall x\ (\phi\vee\psi),\ T\psi^{x}_{a},\ F\phi,\ F\psi^{x}_{a}$$

(30) 反証に成功する例として，$\exists x\phi\supset\forall x\phi$ を採る。

$$F\ (\exists x\phi\supset\forall x\phi)$$

$$T\exists x\phi,\ F\forall x\phi$$

$T\phi^{x}_{a},\quad F\forall x\phi$ ……a は枝で新しいパラメータとする。

$T\phi^{x}_{a},\quad F\phi^{x}_{b}$ ……b は a とは異なる，枝で新しいパラメータとする。

$V\ (a)\neq V\ (b),\ V\ (\phi^{x}_{a})=T,\ V\ (\phi^{x}_{b})=F$ となる付値関数 V を与えることで反証モデルを構成できる。

(31) 反証に失敗し，元の連式の妥当性が示される例としては註29を参照。

(32) $\forall x\ (\phi\vee\psi)\ \supset\phi\vee\forall x\psi$ の探索樹は以下のようになる：

$F\quad\forall x\ (\phi\vee\psi)\ \supset\phi\vee\forall x\psi$

|

$T\quad\forall x\ (\phi\vee\psi)$

|

$F\quad\phi\vee\forall x\psi$

|

$F\phi$

|

$F\forall x\psi$

|

$F\psi^{x}_{a}$

|

$T\phi\vee\psi^{x}_{a}$

$T\phi\qquad\qquad T\psi^{x}_{a}$

(1996年 4 月30日受理)