スラッファ標準体系の収束性について

—どのようにして現実の体系から標準体系をつくりあげるのか—

経済学教室　永　田　聖　二

1．はじめに

『商品による商品の生産』のなかでスラッファがつくりあげた標準体系は，そのきっかけは生涯リカードをなやませつづけた「不変の価値尺度」問題にたいするひとつの解決策として提出されたものであったが，かれの解決策の「結合生産物」として，リカード経済学を構成する要石ともよべる「賃金—利潤の相反関係」を簡潔なかたちであらわした「賃金—利潤フロンティア」を結果としてもたらすことになった[1]。そのさい，かれは，標準体系の定義と数値例とを示したあとで，生産にかんする現実の諸条件から標準体系の存在と一意性がつねに保証されるばかりか，いつでも現実の体系を標準体系に変換することができることを示唆している。

ところが，現実の体系から標準体系をつくりあげる手法は，『商品による商品の生産』のなかでは，第37節で「標準体系への変形はつねに可能である」というタイトルのもと，難解な文章のかたちで述べられているにすぎない。そこで，本稿では，いくぶんあいまいに表現されているスラッファの変形手続きを，産業連関分析の手法を利用して，非負行列としての投入係数行列にかんする反復解を求める漸化式としてとらえなおすことにより，かれの変形手続きにたいするひとつの解釈をあたえることにしよう。

2．経済の生産活動にかんするスラッファの数値例

いま，経済を構成する産業は鉄・石炭・小麦の三つであり，それらは，それぞれ，つぎのような生産活動をおこなっているものとする。

鉄　産　業

投　入			産　出	
鉄	90トン	⟼	鉄	180トン
石　炭	120トン		石　炭	0トン
小　麦	60クォーター		小　麦	0クォーター
労　働	3時間			

石　炭　産　業

投　入			産　出	
鉄	50トン	⟼	鉄	0トン
石　炭	125トン		石　炭	450トン
小　麦	150クォーター		小　麦	0クォーター
労　働	5時間			

小　麦　産　業

投　入			産　出	
鉄	40トン	⟼	鉄	0トン
石　炭	45トン		石　炭	0トン
小　麦	200クォーター		小　麦	200クォーター
労　働	8時間			

表からあきらかなように，この経済全体の総労働時間は16時間であるが，あらたにこの16時間を労働の測定単位として定義しなおせば，経済全体の総労働量が１単位になるようにあらわすことができて，スラッファ自身の表現

	90トンの鉄＋	120トンの石炭＋	60クォーターの小麦＋	3／16の労働	→180トンの鉄
	50トンの鉄＋	125トンの石炭＋	150クォーターの小麦＋	5／16の労働	→450トンの石炭
	40トンの鉄＋	40トンの石炭＋	200クォーターの小麦＋	8／16の労働	→480クォーターの小麦
総　計	180	285	410	1	

を得る[(2)]。

さらに，産業連関分析の手法にしたがえば，このような経済活動を

$$X\mathbf{1}+y=\mathfrak{x}\mathbf{1}, \tag{2. 1}$$

$$l\mathbf{1}=1 \tag{2. 2}$$

という産業連関表のかたちであらわすこともできる。ただし，使用されている記号は，

X：投入行列，$\mathfrak{x}$：産出行列，y：純生産物ベクトル，

l：労働投入ベクトル，$\mathbf{1}$：集計ベクトル，

であり，スラッファの数値例では，それぞれ，

$$X=\begin{pmatrix} 90 & 50 & 40 \\ 120 & 125 & 40 \\ 60 & 150 & 200 \end{pmatrix},\qquad \mathfrak{x}=\begin{pmatrix} 180 & 0 & 0 \\ 0 & 450 & 0 \\ 0 & 0 & 480 \end{pmatrix},\qquad y=\begin{pmatrix} 0 \\ 165 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$l=[3/16 \quad 5/16 \quad 8/16],\quad \mathbf{1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

になる。すなわち，投入行列 X や産出行列 $\mathfrak{x}$ の第 i 行第 j 列の成分は，それぞれ，第 j 産業が投入もしくは産出する第 i 生産物の数量をあらわし，また，経済全体にかんして産出が投入をうわまわる量をベクトル表示したものが純産物ベクトル y である。同様に，各産業で投入される労働量を一覧表のかたちであらわしたものが，労働投入ベクトル l である。なお，その成分がすべて１に等しいベクトル $\mathbf{1}$ を集計ベクトルというが，このよび名は，演算を定義できる任意の行列に右側からこのベ

クトルをかけた結果が，じつは，この行列の成分和を各行ごとに求める演算に対応しているからである。したがって，(2．1)，(2．2)の両式は，それぞれ，純生産物の定義式，あるいは，スラッファによる独特な労働の測定単位の採用をあらわす，たんなる，恒等式にすぎない。

産業関連表 (2．1)，(2．2) であらわされる現実の生産活動は，投入係数表示を採用することにより，いわゆるレオンティエフ体系ないし産出量体系

$$x = Ax + y \qquad (2.\ 3)$$

$$a_0 x = 1 \qquad (2.\ 4)$$

とてあらわすこともできる。ここで，記号 x，A，a_0 は，それぞれ産出量ベクトル，投入係数行列，労働投入係数ベクトルとよばれるものであり，つぎのように定義される。

$$x = \hat{x}1 = \begin{pmatrix} 180 \\ 450 \\ 480 \end{pmatrix}, \qquad A = X\hat{x}^{-1} = \begin{pmatrix} 90/180 & 50/450 & 40/480 \\ 120/180 & 125/450 & 40/480 \\ 60/180 & 150/450 & 200/480 \end{pmatrix},$$

$$a_0 = l\hat{x}^{-1} = 16^{-1}\,[\,3/180 \quad 5/450 \quad 8/480\,]$$

逆行列の定義により，$\hat{x}^{-1}\hat{x} = I$ (I：単位行列) が成り立つことに注意すれば，(2．3)，(2．4) は，それぞれ (2．1)，(2．2) とまったく同等な，定義上成立する恒等式に帰着することがわかる(3)。

3．スラッファによる標準体系の定義と数値例

スラッファによれば，標準商品とは「それ自身の生産手段の総量と (同じ割合で合成された)，同じ商品からなる」ような「生産物と生産手段の双方が自己同一的な合成商品」のことであり(4)，「標準体系においては，各種の商品が総生産手段にはいるのと同じ割合で生産される」。いいかえれば，「生産された数量が生産で使いはたされた数量を超過する比率が各商品について同じである」ような仮想的な産出量体系を，スラッファは標準体系と名づけている(5)。

これらの引用文はそのままでは，かれの意味するところを把握するのに一筋縄ではいかないので，ふたたび，スラッファの数値例にたちかえろう。前節で検討された三つの産業からなる現実の経済体系の生産活動にかんして，産業間の構成比率をつぎのようにかえてみよう。すなわち，鉄産業，石炭産業，小麦産業の生産活動を，それぞれ，1倍，3/5倍，3/4倍した，仮想的な経済体系をかんがえる。これらの経済活動から構成されるあらたな体系は，スラッファの表記法にしたがえば，

	90トンの鉄＋	120トンの石炭＋	60クォーターの小麦＋	3/16の労働→180トンの鉄
	30トンの鉄＋	75トンの石炭＋	90クォーターの小麦＋	3/16の労働→270トンの石炭
	30トンの鉄＋	30トンの石炭＋	150クォーターの小麦＋	6/16の労働→360クォーターの小麦
総　計	150	225	300	12/16

である(6)。この仮想的な体系のもとでは，たしかに，すべての生産物にかんしてこの経済の総投入量にたいする産出量の比率は一定の値を保ち，それらは

$$\frac{180}{150} = \frac{270}{225} = \frac{360}{300} = \frac{12}{10}$$

という共通の比率であらわせる。その結果，この体系では，どんな生産物でも20%の物的剰余比率を生みだすことになる。このことを，スラッファはつぎのようにあらわしている(7)。

(90+30+ 30) (1+20/100)= 180トンの鉄
(120+75+ 30) (1+20/100)= 270トンの石炭
(60+90+150) (1+20/100)= 360クォーターの小麦

スラッファによるこのような標準体系の定義をさらに理解しやすくするために，これらの数値例を産業連関分析の用語に翻訳しよう。かれの定義に忠実にしたがえば，標準体系では，

$$\alpha Xz=\hat{x}z \tag{3. 1}$$

が成り立つ。ここで，記号 X，$\hat{x}$ は，前節で使用されたものと同一であり，また，

$$\alpha=\frac{12}{10}, \qquad z=\begin{pmatrix} 1 \\ 3/5 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

である。すなわち，数 α はこの体系の総投入量にたいする産出量の比率，もしくは1＋物的剰余比率のことであり，一方，現実の体系から標準体系を導き出すために各産業の構成比を調整する変換率を，一覧表のかたちで表示したものがベクトル z である。

そうすると，スラッファの標準体系がみたすべき性質をあらわす上式は，

$$Aq = \beta q \tag{3. 2}$$

という式と同値であるから，けっきょく，標準体系を導き出す手続きは，（3．2）であらわされる固有方程式の非負解を求めるという，一般的な非負固有値問題に帰着する。ただし，

$$A=X\hat{x}^{-1},\ \beta=1/\alpha,\ q=\hat{x}z$$

である。

なお，標準体系の産出量がじつは行列 A の固有ベクトルであることから，このベクトルの任意の正スカラー倍もまた（3．2）の解となりうるので，スラッファは，とくに，この体系の総労働投入量が現実の体系のそれと一致するような規準化を採用している。すなわち，

$$a_0 q= 1 \tag{3. 3}$$

ここで，かれの特殊な測定単位の採用のため，現実の総労働量が1単位になっていることに注意せよ。そして，スラッファは，このように規準化を実行したのち，標準体系の純生産物を標準商品の測定単位に採用したうえで，これを標準純生産物または標準国民所得とよんだ[8]。したがって，かれの数値例では，さきのベクトル $\hat{x}z$ を16/12倍したものが標準体系の産出量ベクトル q であり，このとき，標準純生産物は

$$q-Aq=RAq=\frac{20}{100}\cdot\frac{16}{12}\cdot\begin{pmatrix} 150 \\ 225 \\ 300 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 80 \end{pmatrix}$$

になる。ここで，数 R は，これまでたびたび言及してきた物的剰余比率のことであり，これをスラッファは標準比率と名づけている[9]。

4．標準体系と反復解法

これまで述べてきたように，現実の産出量体系

$$x=X1+y, \tag{4. 1}$$

あるいは，一般にレオンティエフ体系とよばれる，その投入係数表示

$$x=Ax+y \tag{4. 2}$$

のかたちであたえられる現実のデータにもとづいて，スラッファは，標準体系をつぎのように定義した。

$$q=(1+R)Aq \tag{4. 3}$$

ただし，労働の測定単位にかんするかれの特殊な想定と標準体系の規準化ルールにより，

$$a_0 q = a_0 x = 1 \tag{4. 4}$$

が成り立つことに注意せよ。

一般に，投入係数行列 A に代表される生産体系が基礎的部門のみから構成され，しかも，これらのうち少なくともひとつ，みずからの生産物を直接投入する部門が存在するときには，この行列はプリミティブな分解不能行列であることが知られている[10]。このとき，（4．3）式の右辺にあらわれる標準体系の産出量ベクトル q にかえて，規準化のルール（4．4）を保ちつつ，任意の半正ベクトル $q(t)$ を代入しようとも，漸化式

$$q(t)=(1+R)Aq(t-1), \tag{4. 5}$$

$$a_0 q(t)=1 \tag{4. 6}$$

にしたがって，逐次，修正した値を代入するプロセスをくりかえせば，ついには，極限が，（4．3），（4．4）式をみたすようなベクトル q へ収束することもよく知られている[11]。すなわち，どのようなベクトル $q(0) \geq 0$ から出発しようとも，（4．5），（4．6）であらわされる反復解の極限は，スラッファの標準体系（4．3），（4．4）にあらわれる仮想的な産出量ベクトル q に収束する。

なお，スラッファのあげた数値例が行列 A のみたすべき性質を満足していることは，容易にわかる。じっさい，第 2 節で計算した行列 A は正行列であるから，あきらかにプリミティブな分解不能行列である。また，かれの数値例では $y \geq 0$ も成り立つので，フロベニウスの定理により，（4．3），（4．4）をみたす正ベクトル q で，正の物的剰余比率を生みだすものが存在する[12]。したがって，かれの例では標準体系の存在も保証されている。

これらの準備をもとにして，次節では，いよいよ，本稿の主題である，スラッファ自身による標準体系の導出プロセスを検討することにしょう。

5．スラッファによる解法とその定式化

はじめに，現実の体系から標準体系を導出するプロセスにかんして，スラッファ自身どのように考えていたのかを引用しよう。

> 「われわれが考察してきた型の現実の経済体系はいかなるものでも，つねに標準体系に変形できるということが，仮想の実験によって示されるだろう。
> （そのような実験は二つの型の交替的なステップを含んでいる。その一つの型は，諸産業の割合を変えることからなり，いま一つの型は，生産手段として使用される数量を変えずに，すべての産業によって生産される数量を同一比率で減ずることからなる。）
> まず，それぞれの基礎的商品について，厳密に補填に必要なものより大きな数量が生産されるような仕方で、その体系の諸産業の割合を調整することから始めよう。
> つぎに，雇用された労働と生産手段の数量に手を加えることなく，次々におこなわれる僅かな比例的なカットによってすべての産業の生産物をだんだんと減じてゆくものと想像しよう。

このようなカットによって，どれかひとつの商品の生産が補塡に必要な最低の水準にまで減ぜられるとすぐに，（雇用労働の全体を一定に維持しながら）再び各生産物の剰余がでてくるように，諸産業の割合を再調整する。ある商品に剰余が存在し，欠損がまったく存在しないかぎり，このことはつねに実行可能である。

全面的な補塡が剰余生産物を少しも残さずに，ちょうど可能になるような程度にまで生産物が減ぜられる点に至るまでは，各生産物について，このような比例的なカットと剰余の再設定との交替を続ける。

この状態に達するまで，あらゆる産業の生産物が同じ割合で切りすてられたから，われわれはいまや，各産業において生産された数量を均一の率で増加させることによって，もとの生産条件を復元することができる。他方，われわれは，諸産業によって達成された割合を撹乱しない。もとの生産条件を復元する均一の率は R であり，諸産業によって達成された割合は標準体系の割合である[13]。」

このように，スラッファの表現はかなり難解なうえに，いくぶんあいまいでさえもある。そこで，できるだけ忠実にかれの意をくんだうえで，調整プロセスを厳密に定式化すれば，つぎのようになる。

引用のはじめの部分で，スラッファは，調整プロセスがふたつの交替的なステップから構成されることを述べている。すなわち，

ステップⅠ：正の純生産物を生みだすように各産業の割合を調整すること

ステップⅡ：生産手段の使用量は不変のまま生産量を比例的にカットすること[14]

である。それでは，スラッファが提唱するこれらふたつのステップの意味するところをくわしく検討してみよう。

はじめに，ステップⅠでは，出発点とて，正の純生産物を生みだすように産業間の構成比率を変更しなければならない。けれども，スラッファは，その具体的な方法にはなんら触れることなく，あいまいなまま残している。なるほど，現実の体系が正の純生産物を生みだしているときには，なんの問題もなく，ただ単純に出発点には現実の産出量を選ぶだけでよかろう。ところが，いずれかひとつの生産物が，もっぱら中間生産物としてのみ利用され，剰余をまったく生みださないときにはどうであろうか。このときには純生産物は半正ベクトルであるにすぎず，何らかの方法で適切な性質をもつように変換する必要があろう。じっさい，スラッファの数値例では，鉄産業の純生産物はゼロなのである。そこで，この問題を解決するために，投入係数行列 A がプリミティブな分解不能行列であるという情報を利用することにしよう。このとき，一般に，行列 A のべきで

$$A^r > 0$$

をみたすものが存在することが知られている[15]。そこで，出発点になる産出量ベクトルとして，あらたに，$A^r x$ を採用しさえすれば，この体系の純生産物は，

$$A^r x - A^{r+1} x = A^r y > 0$$

となり，たしかに正ベクトルになる。これで，出発点の産出量ベクトルが得られた。以下では，記号の単純化のために，現実の体系の数量をあらわす記号 x, y をもちいて，これら，出発点として採用されたベクトル $A^r x$, $A^r y$ をあらわすものと約束しても混乱はないであろう。なお，スラッファの数値例では，投入係数行列 A は正行列であるから，じつは，かけ算は１回だけですみ（$r=1$），産出量ベクトルとして Ax からはじめてよい。

このようにして得られた出発点となる産出量ベクトル x を利用して，つづいて，スラッファは，

ステップIIではどのような調整方法を提唱しているのであろうか。はじめに，すでにステップⅠの手続きから，

$$x-Ax=y>0$$

をみたす産出量があたえられている。両辺に第 i 単位ベクトル e_i を左からかければ，

$$x_i-e_iAx=y_i>0$$

ここで，第 i 単位ベクトル e_i とは，第 i 番目の成分だけが1で，残りの要素はすべて0の数値からなる行ベクトルのことである。そこで，すべての i にかんして，

$$\min\ \{x_i/e_iAx\}=\alpha(0)$$

とおけば，すべての i について，

$$x_i \geqq \alpha(0)\ e_iAx$$

$$\alpha(0)>1$$

ただし，$\alpha(0)$ は各産業ごとに計算されたなかで最小の物的剰余比率であるから，上式では，すくなくともひとつは等号が成立する。あるいは，この式は，

$$\alpha(0)^{-1}x \geqq Ax$$

とあらわすこともできるが，じつは，この表現こそ，スラッファがステップIIとして提唱している手続きに相当するものであることがわかる。じっさい，このステップで遵守されるべき原則は，投入量を不変に保ったまま産出量を比例的にカットすることであるが，たしかに，上式では，これらの原則がすべて守られている。すなわち，一方では，右辺にあらわれる投入量は Ax のまま不変であり，他方，左辺では，産出量ベクトル x に共通の正数 $\alpha(0)^{-1}<1$ がかけられることになり，これは，原則の後半部分に提唱された産出量の比例的カットにあたる。なお，このような比例的なカットによって，ある商品の物的剰余はゼロになる。ここで，もしも，すべての商品の物的剰余がゼロになり，上式が等号で成立することになれば，すでに標準体系は導出されていて，$q=x$，$R=\alpha(0)-1$ とおくだけで問題は解決する。そうではなくて，ひとつでも厳密な不等号が生じるときには，ふたたびステップⅠにもどって，剰余の再設定をおこなう必要がある。

剰余の再設定，すなわち，すべての生産物に正の剰余を生じるように出量ベクトルを調整することとは，最初に示したステップⅠの手続きに準拠するが，ずっと単純ですらある。というのは，以前の産出量 x に代えて，これに左から行列 A をかけたものの $\alpha(0)$ 倍，

$$q(1)=\alpha(0)Ax$$

をもちいさえすればよいからである。じっさい，行列 A は分解不能行列であるから各行ごとに少なくともひとつは正の要素をもつことに注意すれば(16)，$y>0$ とあわせて，

$$q(1)-Aq(1)=\alpha(0)A(I-A)x=\alpha(0)Ay>0$$

となり，たしかに，あらたな産出量 $q(1)$ を基準にすれば，すべての産業で正の剰余を生むことになる。

なお，この改訂された産出量 $q(1)$ は，旧産出量 x の範囲内で最大の斉一な物的剰余比率をもたらすように，旧出量をカットしたものとして，次式

$$\text{maximize}\quad \alpha^0\quad \text{subject to}\quad x \geqq \alpha^0 Ax \qquad (5.1)$$

の解に対応する制約式の右辺にあらわれる数量 α^0Ax に等しい。じっさい，あきらかに $\alpha(0)$ はこの制約式をみたすので，α^0 の最大性により，

$$\alpha^0 \geqq \alpha(0)$$

一方，かりに，

$\alpha^0 > \alpha(0)$

とすれば，$\alpha(0)$の定義から，あるiにかんして，

$x_i = \alpha(0) e_i A x$

が成し立つので，行列Aの分解不能性から$Ax > 0$になることを考慮すれば，けっきょく，

$x_i \geqq \alpha^0 e_i A x > \alpha(0) e_i A x = x_i$

となり，矛盾。したがって，

$\alpha^0 = \alpha(0)$

が成立するからである。

ところで，剰余の再設定のための仕上げとして，投下労働量を現実体系のそれに一致させる必要がある。くりかえし述べているように，スラッファによる特殊な測定単位の採用のため，現実の労働量は1に等しい。したがって，いま求めた$q(1)$を改訂して，さらに，規準化のルール

$a_0 q(1) = 1$

を守るようにしなければならない。そのためには，さきの$q(1)$をスカラー$a_0 q(1)$でわってやるだけでよいが，記号の繁雑化をさけるために，このような規準化をほどこしたベクトルを，ふたたび，記号$q(1)$であらわしておこう。

以上，ふたつの交替的なステップからなる，このようなプロセスのくりかえしは，$q(0) = x$から出発する漸化式

$$\alpha(t) = \min \{ q_i(t) / e_i A q_i(t) \} \tag{5. 2}$$

$$q(t+1) = \alpha(t) A q(t), \tag{5. 3}$$

$$a_0 q(t+1) = 1 \tag{5. 4}$$

のかたちにまとめられる。ここで，行列Aの分解不能性と条件$x > 0$とから，$q(t+1) > 0$であることに注意せよ。また，

$$q(t) - Aq(t) = \alpha(t-1) A (I - A) q(t-1)$$
$$= \prod_{k=1}^{t} \alpha(k-1) A^t y > 0$$

であるから，$\alpha(t) > 1$となり，物的剰余比率の正値条件もみたされる。

前節の（4．5），（4．6）式を考慮すれば，この漸化式が，じっさいに，（4．3），（4．4）で定義されるベクトルqに収束することは，規準化の約束から，この式がじつは，

$$q(t+1) = \frac{\alpha(t) A q(t)}{\alpha(t) a_0 A q(t)} = \frac{(1+R)\ A q(t)}{a_0 (1+R) A q(t)} \tag{5. 5}$$

であることに注意すれば，

$$\lim_{t \to \infty} q(t) = q,$$
$$\lim_{t \to \infty} \alpha(t) = 1 + R,$$
$$a_0 q = 1$$

となり，確認できる。

なお，（4．5），（4．6）式では，さきに述べたように，出発点となるべきベクトルの要件は，かならずしも厳密に正の純生産物を生みだすような産出量ベクトルである必然性はなく，たんに，純生産物には半正であることが要請されるにすぎない。したがって，スラッファが出発点に厳密な

正値条件を求めたことは杞憂にすぎず，じつは，はじめから現実の体系の純生産物ベクトル $y \geq 0$ を利用してもよかったのである。ただし，そのばあい，(5．2)式の計算には正の剰余を生みだす産業（これはかならず存在する）だけをふくめる必要がある。また，(5．5) 式をみればわかるように，じつは，係数 $\alpha(t)$ を計算する必要すらなく，(5．3) に代えて，ただ，

$$q(t+1)=Aq(t) \tag{5. 6}$$

という変換公式を，あるいは，(5．4) とあわせれば，(5．5) の代わりに，

$$q(t+1)=\frac{Aq(t)}{a_0Aq(t)} \tag{5. 7}$$

をもちいさえすればよい。これは，行列 A に代表されるこの経済の産業構造自体が，標準体系を暗黙のうちに内包していることを意味する。したがって，まさに，スラッファがいうとおり，

「現実のどのような経済体系のなかにも縮尺的な標準体系が埋められており，不必要な部分を削りとることによって，あかるみに出すことができる[17]」

わけである。

6．おわりに

本稿では，『商品による商品の生産』のなかでスラッファが，難解な文章のかたちでいくぶんあいまいさを残したまま示唆していた，現実の体系から標準体系を導出する手続きを，線形数学の手法を利用して厳密さを失わないように注意を払いつつ，できるだけスラッファに忠実に定式化してみた。その結果，かれの提唱する変形手続きは，投入係数行列 A を利用して反復解を求めるものとして，(5．2)，(5．3)，(5．4)という一組の漸化式のかたちであわすことができた。これらの漸化式によれば，たしかに現実の産出量体系を代表する投入係数行列 A と純生産物ベクトル y の情報を利用して，現実の体系から標準体系を導き出せることになり，その意味で，まさにスラッファが述べているとおり，「現実の経済体系はいかなるものでも，つねに標準体系に変形できる」わけである。

このとき，漸化式の初期ベクトルとしては，かならずしもスラッファが求めたようないくぶん厳しい想定を採用せずとも，任意の半正ベクトルでもよいのであるから，単純に，現実の純生産物ベクトル $y \geq 0$ をもちいてもよかろう。そうすると，(5．6) を利用すれば，

$$\lim_{t\to\infty} A^t y = q$$

となる。ただし，スラッファとはことなって，こんどは，

$$a_0 y = 1$$

という規準化を採用しなければならないが。これは興味深い表現である。というのも，一般に，現実体系の産出量ベクトルは，

$$x=y+Ay+A^2y+A^3y+\cdots\cdots+A^ty+\cdots\cdots$$

という級数展開のかたちであらわすこともできるが，この展開式の一般項こそ，極限をとれば，標準生産物としての資格をりっぱに保持しているからである[18]。この表現からも，「現実のどのような経済体系のなかにも縮尺的な標準体系が埋められている」というスラッファの意図をくみることが

できるかもしれない。そうすると，標準体系とは，現実の生産のくりかえしを極限にまでさかのぼって投影したものとして，ある意味で再生産活動を蒸留したものとでもいえないだろうか。

また，産出量改訂プロセスの１ヴァリアントとして（5．1）式を示したが，この式が，じつは，

$$\text{maximize } \alpha \text{ with respect to } (\alpha, q) \text{ subject to } q \geqq \alpha A q$$

という式と酷似しているのもおもしろい。というのも，後者の数理計画問題の解こそ標準体系なのだから。しかも，この数理計画問題にはかならず双対が随伴し，それは，

$$\text{minimize } \beta \text{ with respect to } (\beta, p) \text{ subject to } p \leqq \beta p A$$

という最小化問題のかたちをとる。そして，これらの係数のあいだには，

$$\alpha - 1 = \beta - 1 = R$$

という関係が成り立ち，解 p は最大利潤率 R をもたらす価格ベクトルであることもよく知られている。そうすると，このような価格ベクトルの導入に対応して，こんどは，価格ベクトルの改訂プロセスを定式化できそうである。これらの論点は，稿を改めて論じよう。

また，本稿では，投入係数行列 A の分解不能性を仮定して論をすすめたが，この仮定をゆるめて体系内に非基礎的生産物をふくむケースを考慮しても，同様な議論を展開できよう。さらに，この行列がインプリミティブなばあいには極限ベクトルが存在しなくなるが，このようなケースでも，時間平均をとることによって，一種の収束性を示すことができるだろう。

注

(1)　永田［4］参照。

(2)　スラッファ［9］訳書31ページ参照。

(3)　投入係数行列 A の (i, j) 成分は，通常の産業連関分析の定義と同様に，第 j 生産物を１単位生産するために投入される第 i 生産物の平均数量をあらわしている。これにたいして，労働にかんしてスラッファが独自の測定単位を採用したため，労働投入係数ベクトルは，産業連関分析の常套的な用法とは異なって，その第 j 成分を第 j 生産物１単位あたりに投入されるスラッファの測定単位にもとづく労働量として定義されている。したがって，通常の測定単位にしたがった労働投入係数ベクトルを記号 l_0 であらわせば，本稿で定義されるそれとのあいだには，

$$a_0 = l_0 / l_0 x$$

という対応がある。この式から（2．4）が成立することはあきらかであろう。

(4)　スラッファ［9］訳書30ページ参照。

(5)　スラッファ［9］訳書33ページ参照。

(6)　スラッファ［9］訳書32ページ参照。

(7)　スラッファ［9］訳書34ページ参照。

(8)　スラッファ［9］訳書33ページ参照。なお，厳密にいえば，一般に「国民所得」とは純生産物を価格評価した数値（スカラー）のことをさすので，この用法は，いくぶん，ことばの濫用におもえるかもしれないが，価格ベクトルがどように変化しようとも，また，どんな物価指数を採用しようとも，標準生産物というこの特殊な生産物の評価額は実質上不変であるから，スラッファはこのような定義をあたえたのであろう。

(9)　スラッファ［9］訳書34ページ参照。

(10)　二階堂［5］，［6］，［7］，あるいはゲール［1］参照。また，永田［2］，［3］もみよ。

(11)　二階堂［5］，［6］，［7］あるいはゲール［1］参照。また，永田［2］，［3］もみよ。

(12)　フロベニウスの定理については二階堂［5］，［6］，あるいは［7］参照。

(13)　スラッファ［9］訳書44～45ページ参照。

(14)　ここでスラッファが述べているのは，生産手段の使用量 Ax は不変のまま，産出量 x だけを比例的にカットする手続きである。これは，スラッファがわざわざ指摘しているように，「仮想の実験」だからこそできるわざ

である。置塩［8］で，標準体系にかんしてだけは収穫一定の仮定が必要であると断定しているが，この指摘はスラッファにたいしては厳しすぎるようにおもわれる。事実，収穫一定を仮定しては，スラッファの変形ステップIIを容易には解釈することができないのではなかろうか。スラッファは，標準商品を求めるために，あくまでも「仮想的な実験」としてのみ産出量を調整しているにすぎなく，調整過程のあとにもさきにも現実の体系がすこしでも動くわけではない。そこで，わざわざ，スラッファは，『商品による商品の生産』の序文のなかで，いの一番に，収益法則にかんしてはどのような仮定もおれていないことを開示しているわけである。なお，本稿では，線形数学の手法を利用するため，スラッファ体系を産業関分析の用語に翻訳して論をすすめてきた。ところが，スラッファ体系では，ほんらい，産出量はまったく変動しないので，通常のレオンティエフ体系と同様に現実の産出量が変動する経済を想定することはできない。したがって，本稿で使用される投入係数行列 A は，あくまでも事後的な定義式にすぎなく，これらの係数にしたがって現実の産出量が変動するとかんがえてはならない。

(15) 二階堂［6］93ページ参照。

(16) かりに，ある行の要素がすべてゼロであったとすれば，この行に対応する部門の生産物は他のどの産業の生産活動にも投入物として必要とされないことになり，この部門の生産物は非基礎的生産物になってしまう。

(17) スラッファ［9］訳書33ページ参照。

(18) この一般項 $A^t y$ は，絶対的には 0 に収束するが，ベクトルの成分の比率を比較すれば，相対的には q に収束する。したがって，ベクトルを規準化すれば絶体的にも q に収束する。

参考文献

［1］ Gale, D., *The Theory of Linear Economic Models,* MacGraw-Hill, 1960；（和田貞夫，山谷恵俊訳『線型経済学』紀伊国屋書店，1964年)。

［2］ 永田聖二「安定行列と価格―Leontief-Sraffa 体系における価格の収束性―」九州大学『経済学研究』第52巻第 6 号，1987年。

［3］ 永田聖二「Leontief-Sraffa 体系における非基礎的生産物―「自然価格」の存在とその収束性―」九州大学『経済学研究』第53巻第 3 号，1987年。

［4］ 永田聖二「スラッファ理論の構造」(時政勗，山下正毅編著『現代マクロ経済学―その基礎と展開―』第12章，中央経済社，1991年)。

［5］ 二階堂副包『現代経済学の数学的方法―位相数学による分析入門―』岩波書店，1960年。

［6］ 二階堂副包『経済のための線型数学』培風館，1961年。

［7］ Nikaido, H., *Convex Structures and Economic Theory,* Academic Press, 1968.

［8］ 置塩信雄『マルクス経済学―価値と価格の理論―』筑摩書房，1977年。

［9］ Sraffa, P., *Production of Commodities by Means of Commodities―Prelude to a Critique of Economic Theory―,* Cambridge U. P., 1960（菱山泉，山下博訳『商品による商品の生産―経済理論批判序説―』有斐閣，1962年)。

付記：本稿の作成にあたっては，「文部省科学研究費補助金」(平成 2 年度奨励研究（A)）からの援助を受けた。ここに記して感謝する。

(1991年 4 月20日受理)