研究活動の総括にかえて — **Hopf/Hopf** モード相互作用のノーマルフォーム

藤村　薫
鳥取大学大学院工学研究科応用数理工学講座

Normal Form for Hopf/Hopf Mode Interaction

Kaoru FUJIMURA
Department of Applied Mathematics and Physics, Graduate School of Engineering
Tottori University, Tottori 680-8552, Japan
Email: kaoru@damp.tottori-u.ac.jp

Abstract: Hopf/Hopf mode interaction is governed by amplitude equations in $\mathbb{R}^4$. In this report, we derive a normal form to the amplitude equations by conducting a near-identity transformation. In the course of the derivation, the $1:2$ and $1:3$ resonances are shown to arise naturally.

Key Words: Mode interaction, Amplitude equations, Normal form, Near-identity transformation.

1. はじめに

私は，1978 年 4 月に日本原子力研究所において研究活動の一歩を踏み出し，1997 年 4 月に鳥取大学工学部応用数理工学科に着任した．振り返ってみると 40 年にわたってもっぱら流れの安定性，とくにモード相互作用を記述する振幅方程式を中心とした弱非線形解析に関する研究を続けてきたことになる．

無限次元力学系である流体方程式から低次元力学系である振幅方程式を導出することによって，流体方程式の解の局所分岐構造など定性的性質を調べることが可能である．振幅方程式は，弱非線形解析を行う上での礎であり，私はこれまで様々な流体系に対して振幅方程式を導いてきた．

本稿では，過去 40 年にわたって行った研究内容を懐古的に紹介する代わりに，振幅方程式について最近行ったある練習問題に対する解答*を紹介することで，定年退職予定者に課せられる研究報告（総説）執筆の責を果たすことにしたい．

2. 振幅方程式

まず，流体方程式の厳密解として定常解（主流）が求められていると仮定する．レイノルズ数に代表される制御パラメター R を変化させるとき，主流について線形化された流体方程式の固有値 $\sigma \in \mathbb{C}$ が，$R = R_c$ において複素 σ 平面上の虚軸を複素共役対として横切る状況（Hopf 分岐）を考える．線形臨界点 $R = R_c$ 近傍において，流れに含まれる攪乱 $\hat{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{x}, t)$ を

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} = z(t)\,\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{e}^{i\omega t} + \bar{z}\,\bar{\boldsymbol{\phi}}\,\mathrm{e}^{-i\omega t} + \mathrm{h.o.t.},\ (\omega \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

と書こう．ここで，$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$ は固有関数，h.o.t. は高次の項，また，overbar は複素共役を意味する．

複素振幅 $z(t)$ の時間発展を記述する振幅方程式としてもっとも簡単でよく知られたものは Landau によって 1944 年に導入された Stuart-Landau 方程式

$$\frac{dz}{dt} = \sigma z + \lambda |z|^2 z,\ (\sigma, \lambda \in \mathbb{C}) \quad (2)$$

である．この方程式は，$R = R_c$ 近傍において，多重尺度法（たとえば [2]）や中心多様体定理の方法（たとえば [3]）などを用いることで導出される．（定常解を記述する分岐方程式に関しては Liapunov-Schmidt 法もしばしば用いられる．）

さて，この方程式の右辺の形は，流体方程式を用いなくても，対称性の議論だけから決定することが可能である（同変分岐理論 [4]）．いま，(2) 式の右辺を $g(z)$ と書こう．円周群 S^1 の $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ 上の作用

$$\theta \cdot z = \mathrm{e}^{i\theta} z \ \ (\theta \in \mathrm{S}^1,\ z \in \mathbb{C})$$

*当初は研究の一環として行った解析であるが，この総説の締め切り直前になって，２重 Hopf 分岐のノーマルフォームを求める問題が文献 [1] の練習問題として記載されていたことに気づいた．

に対してベクトル場 $g(z)$ が

$$g(\theta\cdot z)=\theta\cdot g(z)\ \text{ for all }\theta\in\mathrm{S}^1 \tag{3}$$

を満たすとき，(2) は $z\to \mathrm{e}^{i\theta}z$ の下に不変である．(3) 式が成り立つためには，ベクトル場 $g(z)$ は $z(p(u)+iq(u))$，$u=|z|^2$, $p,q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の形をとることが簡単な計算から分かる．不変多項式 p と q を原点周りで Taylor 展開して最低次の近似で打ち切ると，(2) 式が得られる．

ところで，(2) 式の右辺はもっとも単純な形か？という問いに対する答えはノーマルフォームによって与えられる．

§3 ならびに §4 では文献 [1], [5] にしたがってノーマルフォーム導出の要点を述べ，§5 ならびに §6 では Hopf/Hopf 相互作用にそれを適用する．

3. 近恒等変換とノーマルフォーム

次の一般的な n 次元振幅方程式を出発点にする：

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{g}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n.$$

原点における $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ の Jacobi 行列を Λ と名付け，

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\Lambda\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})+O(||\boldsymbol{x}||^3)$$

の形に書こう．

さて，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{y})+\cdots$ によって定義される近恒等変換を導入すると，次を得る：

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}=\left[Id-\frac{d\boldsymbol{P}_2}{d\boldsymbol{y}}+\cdots\right]\cdot$$

$$\left[\Lambda(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{y})+\cdots)+\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{y})+\cdots)+\cdots\right].$$

我々の目的は，近恒等変換によってノーマルフォームに含まれる項を最小限に抑えることである．たとえば $O(|\boldsymbol{x}|^2)$ では

$$-\frac{d\boldsymbol{P}_2}{d\boldsymbol{y}}\Lambda\boldsymbol{y}+\Lambda\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{y})=0$$

を満たすように $\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{y})$ を選ぶことができるなら，2 次の非線形項 $\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{y})$ をノーマルフォームから消し去ることが可能であろう．

$$L_2\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{y}):=\frac{d\boldsymbol{P}_2}{d\boldsymbol{y}}\Lambda\boldsymbol{y}-\Lambda\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{y})$$

によって定義される線形写像 L_2 に対して $H_2=L_2(H_2)\oplus G_2$ が成り立つとき，G_2 は $L_2(H_2)$ の補空間である．$G_2=\emptyset$，すなわち $L_2(H_2)=H_2$ ならば，２次の非線形項はすべて消去することができる．逆に，G_2 が空でないときは，G_2 を張る非線形項は消去できない．

4. $n=2$ の例：Hopf 分岐のノーマルフォーム

議論を具体的に進めるための取りかかりとして，文献 [5] の Hopf 分岐（$n=2$）の例を復習しよう．$\omega t\to t$ によって (1) 式から ω を 1 を消去する．

$$\Lambda=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_r\\y_i\end{pmatrix}$$

を仮定し，近恒等変換に含まれる２次の非線形関数 $\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{y})$ として

$$P_2^r(\boldsymbol{y})=a_1y_r^2+b_1y_ry_i+c_1y_i^2,$$

$$P_2^i(\boldsymbol{y})=a_2y_r^2+b_2y_ry_i+c_2y_i^2$$

を導入する．すなわち H_2 は

$$H_2=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}y_r^2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_ry_i\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_i^2\\0\end{pmatrix},\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix}0\\y_r^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\y_ry_i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\y_i^2\end{pmatrix}\right\}$$

のように 6 つのベクトルによって生成される．各々の成分に対して L_2 を作用させると

$$\Lambda\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}-y_i\\y_r\end{pmatrix}$$

より以下を得る：

$$L_2(H_2)=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}-2y_ry_i\\-y_r^2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}y_r^2-y_i^2\\-y_ry_i\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2y_ry_i\\-y_i^2\end{pmatrix},\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix}y_r^2\\-2y_ry_i\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}y_ry_i\\y_r^2-y_i^2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}y_i^2\\2y_ry_i\end{pmatrix}\right\}. \tag{4}$$

$H_2=\mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_6\}$ と略記すると，

$$(\boldsymbol{e}_1\ \cdots\ \boldsymbol{e}_6)\,L_2^T\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{e}_1\ \cdots\ \boldsymbol{e}_6)\,\boldsymbol{b}$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{a}$ が求まれば，ノーマルフォームから $\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{z})$ に含まれる項 $(\boldsymbol{e}_1\ \cdots\ \boldsymbol{e}_6)\boldsymbol{b}$ を消去することができる．ただし，$\boldsymbol{a}=(a_1\cdots a_6)^T$, $\boldsymbol{b}=(b_1\cdots b_6)^T$ である．さて，(4) 式が与える L_2^T は

$$L_2^T=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&0\\-2&0&2&0&1&0\\0&-1&0&0&0&1\\-1&0&0&0&1&0\\0&-1&0&-2&0&2\\0&0&-1&0&-1&0\end{pmatrix}$$

であるが，この行列は正則であるため，

$$L_2(H_2) = H_2\,,$$

すなわち，$G_2 = \emptyset$ であり，H_2 を張る要素の一次結合によって得られる 2 次の非線形多項式 $\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{z})$ はすべて消去することが可能であることが分かる．

つぎに，新しい近恒等変換 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{z})$ を導入しよう．

$$P_3^r(\boldsymbol{z}) = a_3 z_r^3 + b_3 z_r^2 z_i + c_3 z_r z_i^2 + d_3 z_i^3,$$

$$P_3^i(\boldsymbol{z}) = a_4 z_r^3 + b_4 z_r^2 z_i + c_4 z_r z_i^2 + d_4 z_i^3$$

とおく．さて，2 次の非線形項を消去したのと同じ手順で 3 次の非線形項をできる限り消去することを考える．これまで用いた表記を

$$\boldsymbol{P}_2 \to \boldsymbol{P}_3,\ \boldsymbol{g}_2 \to \boldsymbol{g}_3,\ H_2 \to H_3,\ L_2 \to L_3$$

のように転用すると，H_3 は

$$H_3 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} z_r^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_r^2 z_i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_r z_i^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_i^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 \\ z_r^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z_r^2 z_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z_r z_i^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z_i^3 \end{pmatrix} \right\}$$

のような 8 つのベクトルによって張られる．各々の成分に対して L_3 を作用させると

$$\Lambda \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} -z_i \\ z_r \end{pmatrix}$$

より以下を得る．

$$L_3(H_3) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3z_r^2 z_i \\ z_r^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_r^3 - 2z_r z_i^2 \\ -z_r^2 z_i \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 2z_r^2 z_i - z_i^3 \\ -z_r z_i^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3z_r z_i^2 \\ -z_i^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_r^3 \\ -3z_r^2 z_i \end{pmatrix},$$

$$\left. \begin{pmatrix} z_r^2 z_i \\ z_r^3 - 2z_r z_i^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_r z_i^2 \\ 2z_r^2 z_i - z_i^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_i^3 \\ -3z_r z_i^2 \end{pmatrix} \right\}. \quad (5)$$

$H_3 = \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_8\}$ と略記すると，

$$(\boldsymbol{e}_1\ \cdots\ \boldsymbol{e}_8)\, L_3^T \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{e}_1\ \cdots\ \boldsymbol{e}_8)\, \boldsymbol{b}$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{a}$ が求まれば，ノーマルフォームから $\boldsymbol{g}_3(\boldsymbol{z})$ に含まれる項 $(\boldsymbol{e}_1\ \cdots\ \boldsymbol{e}_8)\boldsymbol{b}$ を消去することができる．ただし，$\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_8)^T$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_8)^T$ である．さて，(5) によって与えられた L_3^T は

$$L_3^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．この行列の行列式は 0 であり，rank $= 6$. すなわち，$\dim G_3 = 2$ である．0 固有値に属する L_3^T の固有ベクトル（kernel）は，

$$(1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)^T,\ (0, -1, 0, -1, 1, 0, 1, 0)^T$$

のように求められる．これより，

$$(\boldsymbol{e}_1\ \cdots\ \boldsymbol{e}_8) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_r(z_r^2 + z_i^2) \\ z_i(z_r^2 + z_i^2) \end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{e}_1\ \cdots\ \boldsymbol{e}_8) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_i(z_r^2 + z_i^2) \\ z_r(z_r^2 + z_i^2) \end{pmatrix}$$

を得る．すなわち，これらの線形結合はノーマルフォームから消去できないが，それ以外の 3 次の非線形項は変換 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{z})$ によって消去することが可能である．

こうして得られた結果は式 (2) がノーマルフォームであり，それ以上に簡単化することはできないことを示している．

5. $n = 4$ の例：２重 **Hopf** 分岐

さて，$R = R_c$ において線形化された流体方程式の固有値が $\pm i\omega_1$ と $\pm i\omega_2$ で複素 σ 平面の虚軸を同時に横切る場合の Hopf/Hopf モード相互作用を考える．撹乱は

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} = z_1\, \boldsymbol{\phi}_1\, \mathrm{e}^{i\omega_1 t} + \bar{z}_1\, \bar{\boldsymbol{\phi}}_1\, \mathrm{e}^{-i\omega_1 t}$$

$$+ z_2\, \boldsymbol{\phi}_2\, \mathrm{e}^{i\omega_2 t} + \bar{z}_2\, \bar{\boldsymbol{\phi}}_2\, \mathrm{e}^{-i\omega_2 t} + \mathrm{h.o.t.} \quad (6)$$

と表すことができる．ω_1 と ω_2 が $\omega_1/\omega_2 = l/m$ $(l, m\,(\in \mathbb{N})$：互いに素）であるとき，振幅方程式は

変換 $(z_1, z_2) \to (\,\mathrm{e}^{il\theta} z_1,\, \mathrm{e}^{im\theta} z_2)$，$\theta \in [0, 2\pi)$ の下で不変でなければならないため，

$$\dot{z}_1 = (p_1^r + ip_1^i) z_1 + (q_1^r + iq_1^i) \bar{z}_1^{m-1} z_2^l,$$

$$\dot{z}_2 = p_2^r + ip_2^i) z_2 + (q_2^r + iq_2^i) z_1^m \bar{z}_2^{l-1} \qquad (7)$$

の形をとることが分かる．ここで，p_1^r, p_1^i, p_2^r, p_2^i, q_1^r, q_1^i, q_2^r, q_2^i : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ は $\theta-$不変量 $u = |z_1|^2$, $v = |z_2|^2$, $w = z_1^m \bar{z}_2^l + \bar{z}_1^m z_2^l$ の関数として表される不変多項式である．(7) 式は O(2) 対称性の下で得られる定常モード間 $l : m$ 共鳴の振幅方程式 [6] と，各項の係数が複素数，実数の違いがある点を除くと同一である．

$(l, m) = (1, 2)$ の場合，p_1^r, p_1^i, p_2^r, p_2^i, q_1^r, q_1^i, q_2^r, q_2^i を原点周りで Taylor 展開して 2 次で打ち切ると，

$$\dot{z}_1 = z_1(\sigma_1 + \lambda_{11} u + \lambda_{12} v) + \kappa_1 \bar{z}_1 z_2,$$

$$\dot{z}_2 = z_2(\sigma_2 + \lambda_{21} u + \lambda_{22} v) + \kappa_2 z_1^2 \qquad (8)$$

を 1 : 2 共鳴に対する振幅方程式として得る．

$(l, m) = (1, 3)$ の場合には，同様にして

$$\dot{z}_1 = z_1(\sigma_1 + \lambda_{11} u + \lambda_{12} v) + \kappa_1 \bar{z}_1^2 z_2,$$

$$\dot{z}_2 = z_2(\sigma_2 + \lambda_{21} u + \lambda_{22} v) + \kappa_2 z_1^3 \qquad (9)$$

が 1 : 3 共鳴の振幅方程式として得られる．これら 2 種類の共鳴を除くと，$l : m$ 共鳴を記述する振幅方程式は $l + m - 1$ 次以上の位相のカップリングを記述する共鳴項を含まなければならないが，これは絶対値を介した 3 次のカップリング項よりも高次であるため，共鳴の効果は相対的に弱いと考えられる．そのため $l + m \geq 4$ の場合については立ち入らないことにする．

6. 2 重 Hopf 分岐のノーマルフォーム

いよいよ $n = 4$ の場合のノーマルフォームを導こう．§3 と同様に，$\omega_1 t \to t$ とすることによって (ω_1, ω_2) を $(1, \omega)$ に変換しておき，

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega \\ 0 & 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_{1r} \\ y_{1i} \\ y_{2r} \\ y_{2i} \end{pmatrix}$$

を仮定する．2 次の非線形関数 $\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{y})$ は ${}_4C_1 + {}_4C_2 = 10$ 個の単項式:

$$y_{1r}^2,\ y_{1i}^2,\ y_{2r}^2,\ y_{2i}^2,\ y_{1r}y_{1i},\ y_{1r}y_{2r},$$

$$y_{1r}y_{2i},\ y_{1i}y_{2r},\ y_{1i}y_{2i},\ y_{2r}y_{2i}$$

を用いて表すことができる．$n = 2$ の場合と同様の記法を用いると煩雑ではあるが，

$$H_2 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} y_{1r}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1i}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{2r}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{2i}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1r}y_{1i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} y_{1r}y_{2r} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1r}y_{2i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1i}y_{2r} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1i}y_{2i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{2r}y_{2i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y_{1r}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_{1i}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_{2r}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_{2i}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_{1r}y_{1i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y_{1r}y_{2r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_{1r}y_{2i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_{1i}y_{2r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_{1i}y_{2i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_{2r}y_{2i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_{1r}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_{1i}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_{2r}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_{2i}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_{1r}y_{1i} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_{1r}y_{2r} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_{1r}y_{2i} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_{1i}y_{2r} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_{1i}y_{2i} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_{2r}y_{2i} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_{1r}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_{1i}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_{2r}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_{2i}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_{1r}y_{1i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_{1r}y_{2r} \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_{1r}y_{2i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_{1i}y_{2r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_{1i}y_{2i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_{2r}y_{2i} \end{pmatrix} \right\}$$

のような 40 個のベクトルによって生成される．各々の成分に対して L_2 を作用させると

$$\Lambda \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -y_{1i} \\ y_{1r} \\ -\omega y_{2i} \\ \omega y_{2r} \end{pmatrix}$$

より例えば

$$L_2 \begin{pmatrix} y_{1r}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_{1r}y_{1i} \\ -y_{1r}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, L_2 \begin{pmatrix} y_{1i}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_{1r}y_{1i} \\ -y_{1i}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

などから，40 個のベクトルで張られる $L_2(H_2)$ を求めることができる．

$H_2 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_{40}\}$ と略記すると，

$$(\boldsymbol{e}_1\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{40})\, L_2^T \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{e}_1\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{40})\, \boldsymbol{b}$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{a}$ が求まれば，ノーマルフォームから $\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{z})$ に含まれる項 $(\boldsymbol{e}_1\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{40})\boldsymbol{b}$ を消去することができる．ただし，$\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_{40})^T$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_{40})^T$．さて，$L_2^T$ は 20 次正方行列 $\tilde{L}_2^{(1)}$, $\tilde{L}_2^{(2)}$ を用いて

$$L_2^T = \begin{pmatrix} \tilde{L}_2^{(1)} & 0 \\ 0 & \tilde{L}_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

と書くことができるが，その詳細は割愛する．計算の結果，

$$\det \tilde{L}_2^{(1)},\ \det \tilde{L}_2^{(2)} \propto (4-\omega^2)^2(1-4\omega^2)^2 \qquad (10)$$

を得るため，$\omega \neq 2$ もしくは 1/2 の場合には正則である．したがって，

$$H_2 = L_2(H_2)\,,$$

すなわち，$G_2 = \emptyset$ であり，H_2 を構成する要素の一次結合によって得られる 2 次の非線形多項式 $\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{z})$ は，すべて消去することが可能であることが分かる．

一方，$\omega = 2$, もしくは 1/2 である場合には行列式は 0 になる．この場合の kernel，すなわち $\tilde{L}_2^{(1)}$, $\tilde{L}_2^{(2)}$ の固有ベクトルはそれぞれ

$$(0,0,0,0,0,0,-1,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,1,0)^T,$$

$$(0,0,0,0,0,-1,0,0,-1,0,0,0,0,0,0,0,-1,1,0,0)^T,$$

と

$$(1,-1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2,0,0,0,0,0)^T,$$

$$(0,0,0,0,2,0,0,0,0,0,-1,1,0,0,0,0,0,0,0,0)^T$$

であり，対応する多項式はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} -y_{1r}y_{2i} + y_{1i}y_{2r} \\ y_{1r}y_{2r} + y_{1i}y_{2i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -y_{1r}y_{2r} - y_{1i}y_{2i} \\ -y_{1r}y_{2i} + y_{1i}y_{2r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_{1r}^2 - y_{1i}^2 \\ 2y_{1r}y_{1i} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2y_{1r}y_{1i} \\ -y_{1r}^2 + y_{1i}^2 \end{pmatrix}$$

のように求められる．つまり，

$$\begin{pmatrix} i(y_{1r} - iy_{1i})(y_{2r} + iy_{2i}) \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} (y_{1r} - iy_{1i})(y_{2r} + iy_{2i}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ (y_{1r} + iy_{1i})^2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ i(y_{1r} + iy_{1i})^2 \end{pmatrix}$$

の線形結合で表される 2 次の項は近恒等変換によって消去することができない．なお，$\omega = 2$（もしくは 1/2）は，周波数比が $1:2$（もしくは $1:1/2$）の高調波（分数調波）共鳴の場合に相当する．これら 4 つの項は 2 次の共鳴項であり，(8) 式の 2 次の共鳴項に一致する．

つぎに，新しい近恒等変換 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{z})$ を導入しよう．$\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{z})$ は ${}_4C_1 + 2 \times_4 C_2 +_4 C_3 = 20$ 個の単項式

$$z_{1r}^3,\ z_{1i}^3,\ z_{2r}^3,\ z_{2i}^3,\ z_{1r}^2 z_{1i},\ z_{1r} z_{1i}^2,\ z_{1r}^2 z_{2r},\ z_{1r} z_{2r}^2,$$

$$z_{1r}^2 z_{2i},\ z_{1r} z_{2i}^2,\ z_{1i}^2 z_{2r},\ z_{1i} z_{2r}^2,\ z_{1i}^2 z_{2i},\ z_{1i} z_{2i}^2,\ z_{2r}^2 z_{2i},$$

$$z_{2r} z_{2i}^2,\ z_{1r} z_{1i} z_{2r},\ z_{1r} z_{1i} z_{2i},\ z_{1r} z_{2r} z_{2i},\ z_{1i} z_{2r} z_{2i}$$

の線形結合によって表される．

さて，2 次の非線形項を消去したのと同じ手順で 3 次の非線形項をできる限り消去することを考える．詳細は省略するが，H_3 は 80 個のベクトルによって生成される．各々の成分に対して L_3 を作用させると

$$\Lambda \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} -z_{1i} \\ z_{1r} \\ -\omega z_{2i} \\ \omega z_{2r} \end{pmatrix}$$

より，少し長い計算の結果，

$$L_3^T = \begin{pmatrix} \tilde{L}_3^{(11)} & \tilde{L}_3^{(12)} & 0 & 0 \\ \tilde{L}_3^{(21)} & \tilde{L}_3^{(22)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{L}_3^{(33)} & \tilde{L}_3^{(34)} \\ 0 & 0 & \tilde{L}_3^{(43)} & \tilde{L}_3^{(44)} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{L}_3^{(12)} = -Id_{(20)},\ \tilde{L}_3^{(21)} = Id_{(20)},\ \tilde{L}_3^{(34)} = -\omega Id_{(20)},$$

$$L_3^{(43)} = \omega Id_{(20)},\ \tilde{L}_3^{(11)} = \tilde{L}_3^{(22)} = \tilde{L}_3^{(33)} = \tilde{L}_4^{(44)}$$

を得る．ここで，$Id_{(20)}$ は 20 次単位行列である．

$\omega \neq 3$ もしくは 1/3 の場合には，Mathematica を用いると

$$\mathrm{rank} \begin{pmatrix} \tilde{L}_3^{(11)} & \tilde{L}_3^{(12)} \\ \tilde{L}_3^{(21)} & \tilde{L}_3^{(22)} \end{pmatrix} = 36,$$

$$\mathrm{rank} \begin{pmatrix} \tilde{L}_3^{(33)} & \tilde{L}_3^{(34)} \\ \tilde{L}_3^{(43)} & \tilde{L}_3^{(44)} \end{pmatrix} = 36$$

であり，

$$\det\begin{pmatrix}\tilde{L}_3^{(11)} & \tilde{L}_3^{(12)}\\ \tilde{L}_3^{(21)} & \tilde{L}_3^{(22)}\end{pmatrix},\ \det\begin{pmatrix}\tilde{L}_3^{(33)} & \tilde{L}_3^{(34)}\\ \tilde{L}_3^{(43)} & \tilde{L}_3^{(44)}\end{pmatrix}$$

$$\propto 0^4\omega^4(1-\omega^2)^8(9-\omega^2)^2(1-9\omega^2)^2 \qquad (11)$$

であることが分かる．結局，

$$\begin{pmatrix}i(z_{1r}+iz_{1i})(z_{1r}^2+z_{1i}^2)\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}(z_{1r}+iz_{1i})(z_{1r}^2+z_{1i}^2)\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}(z_{1r}+iz_{1i})(z_{2r}^2+z_{2i}^2)\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}i(z_{1r}+iz_{1i})(z_{2r}^2+z_{2i}^2)\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\i(z_{2r}+iz_{2i})(z_{2r}^2+z_{2i}^2)\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\(z_{2r}+iz_{2i})(z_{2r}^2+z_{2i}^2)\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0\\(z_{2r}+z_{2i})(z_{1r}^2+z_{1i}^2)\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\i(z_{2r}+iz_{2i})(z_{1r}^2+z_{1i}^2)\end{pmatrix}$$

の線形結合で表現される 3 次の項は消去することができないことが結論される．.

一方，$\omega=3$ もしくは 1/3 の場合には，rank はいずれも 34 になる．この場合，1 : 3 もしくは 1 : 1/3 共鳴が 3 次で発生可能であり，

$$\begin{pmatrix}i(z_{2r}+iz_{2i})(z_{1r}-iz_{1i})^2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}(z_{2r}+iz_{2i})(z_{1r}-iz_{1i})^2\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}i(z_{1r}+iz_{1i})(z_{1r}^2+z_{1i}^2)\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}(z_{1r}+iz_{1i})(z_{1r}^2+z_{1i}^2)\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}(z_{1r}+iz_{1i})(z_{2r}^2+z_{2i}^2)\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}i(z_{1r}+iz_{1i})(z_{2r}^2+z_{2i}^2)\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0\\i(z_{2r}+iz_{2i})(z_{2r}^2+z_{2i}^2)\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\(z_{2r}+iz_{2i})(z_{2r}^2+z_{2i}^2)\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0\\(z_{2r}+iz_{2i})(z_{1r}^2+z_{1i}^2)\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\i(z_{2r}+iz_{2i})(z_{1r}^2+z_{1i}^2)\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0\\i(z_{1r}+iz_{1i})^3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\(z_{1r}+iz_{1i})^3\end{pmatrix}$$

の線形結合で表される項が近恒等変換によって消去不可能であることを示している．これら 12 項のうち，第 1, 2 項および第 11, 12 項が 3 次の共鳴項であって，(9) の共鳴項に一致することが結論される．

7. おわりに

近恒等変換を用いて 2 重 Hopf 分岐のノーマルフォームを 3 次までの近似で求め，周波数比が 1 : 2，1 : 3 である場合にはそれぞれ 2 次，3 次の共鳴項がノーマルフォームに含まれることを示した．これらは同変分岐理論にもとづく共鳴方程式に含まれる項と同一である．

まったく同様の手順を踏むことで高次まで首尾一貫してノーマルフォームを導出することができ，4 次で打ち切ったノーマルフォームには 1 : 4 共鳴と 2 : 3 共鳴の振幅方程式に含まれる非線形項が，また 5 次で打ち切ったノーマルフォームには 1 : 2 共鳴と 1 : 5 共鳴の非線形項が同様に現れるはずであるが，ここでは 3 次までの近似で解析を終える．

一般に，$l:m$ 共鳴に対する振幅方程式を導出する場合，最初に周波数比を $l:m$ に固定した上で撹乱を (6) 式の形に表す必要があるが，近恒等変換を用いたノーマルフォームの導出では，$l:m$ 共鳴に関する先見的な仮定を行うことなく，周波数比が (10), (11) 式のように自然に導かれることを示すことができた．

参考文献

[1] Wiggins, S. : Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer-Verlag, New York, 1990.

[2] Fujimura, K. : The equivalence between two perturbation methods in weakly nonlinear stability theory for parallel shear flows, Proc. R. Soc. Lond. A, **424**, pp.373–392, 1989.

[3] Fujimura, K. : Centre manifold reduction and the Stuart-Landau equation for fluid motions, Proc. R. Soc. Lond. A, **453**, pp.181–203, 1997.

[4] Golubitsky, M., Stewart, I. N., Shaeffer, D. G. : Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vol.II, Springer-Verlag, New York, 1988.

[5] Guckenheimer, J., Holmes, P. : Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New York, 1883.

[6] Dangelmayr, G. : Steady-state mode interactions in the presence of O(2)-symmetry, Dynamics and Stability of Systems, **1**, pp.159–185, 1986.

（受理 平成 29 年 10 月 27 日）