問いの生成を軸とした探究型学習（3学年）
～二次関数の特徴を生み出す導入～

小出　智栄子
鳥取大学附属中学校　数学科
E-mail: koide_ci@tottori-u.ac.jp

Chieko KOIDE (Tottori University Junior High School): **Inquiry learning (3nd grade) centering on generation of questions.～Introduction to creating the characteristics of quadratic functions～**

要旨 － 本研究の目的は，生徒の主体的な学びの実現に向けて具体的な方策を提案することである．研究の視座としておいた SRP は世界探究パラダイムの中で語られる．本研究では，生徒の活動から二次関数が自然に生み出され，既習の関数との違いに気付くことで，単元全体の問いに繋げられる導入の授業実践を行った．従来の実践を見直し，世界探究パラダイムへ移行していくことを目的としている．そこから明らかになった課題や，主体的な学びを実現する際に必要な教師の態度について報告する。

キーワード　SRP，世界探究パラダイム，Q-A マップ

Abstract — The purpose of this is to propose concrete strategies for realizing students' independent learning. SRP（'Study and Research Paths'）,which is the perspective of this is research, is discussed within the world inquiry paradigm. In this study, we reviewed the previous practice of concluding an introductory class in which quadratic functions were naturally generated from students' and by nothing the differences from the functions they had already studied, they were able to connect to the questions of the entire unit. The purpose is to shift to an inquiry paradigm. We will report on the issues that emerged from this study and the attitude that teachers need to have in order to realize independent learning.

Key words — SRP, world inquiry paradigm , Q-Amap

1.　はじめに

1.1　研究のねらい

本校数学科では，『自ら問い続ける』生徒の育成のために『問いの生成を軸とした探究型学習』をテーマに実践を重ね，今年が 6 年目になる．実践を重ねる中で，自ら問いを立てる力が大切なものであると分かった．そこで，Chevallard が提案する教授人間学理論（Anthropological Theory of the Didactic 以下，ATD）の範疇にある世界探究パラダイムに基づいた学習論‘Study and Research Paths’（以下，SRP）を参考にして授業設計・実践を行い，その成果を報告してきた．SRP は複数時間の実践であったり，複数教科・複数単元を横断する内容であったりと実現するためには，多くの課題が残されており，今すぐに日々の授業で実現できるものではない．本校では，SRP 実践を積み重ねながら得られた知見をもとに，教授パラダイムの移行を目指したいと考えている．

ここで，探究という言葉の定義を確認する．本校では，『探究とは疑問を追究し，それを通して新たな知識を作りだす活動』であると考えて，研究に取り組んでいくこととする． 例えば，従来，私たちが多く実践してきた問題解決学習は授業を繰り返す中で，生徒の考え方が高まり，自らが問いを深めていくように期待しているが，一授業の中で最終的には教師が望む解決に収束することを考えれば作品訪問パラダイムの一例であり，探究ではない．過去の実践を一つ一つ見直し，教授システムの移行だけでなく，教師の指導や指導観・教材観の移行について示唆を得たい．

1.2 昨年残した課題

『Q-A マップの分析では，問いと答えの往還の中でも,とりわけ答えの構成のされ方に注目して分析を行う．この作業によって，従来の作品訪問パ

ラダイムにおける学習と世界探究パラダイムにおける SRP との差異が明らかになる．』(世界探究パラダイムに基づく数学的探究の様相—高等学校と大学における SRP の事例分析－ 袴田綾斗 髙橋聡 濵中裕明(2020))とある．

Q-A マップとは，SRP において予想されるサブクエスチョン Q とそれに対応する解 A の往還を記したものである．これらに関して，昨年度の実践で次のような課題が残った．

・問いの分類をすること，生徒の問いを顕在化させること，問いによる解法の分類をすること

・解法や解答 A に至るサブクエスチョン Q を全体で整理する必要があり，問い Q の共有を大事にすること

今年度は生徒自身が問いを意識することができるように，「なぜその解法を選んだか，至ったか」と問い続け生徒の問いの生成過程を確認し，板書として残すこととして研究を始めた。

1.3 問題の所在

現在の状況は，教授システムを作品訪問パラダイムから世界探究パラダイムに移行している途中，つまり移行期とされている．また，問題解決学習から探究的学習への移行期であるとされている．この時期に私たちが何を研究していくのかが問われている．

問題解決学習は教授意図を実現するために，教師の支援をはさみながら，その時間の目標に向かって学習活動を重ねていくものである．教授パラダイム変換のためには，最終的に教師が望んでいる解決へ収束させるのではなく，教師の支援によってでもなく，生徒の探究が進むようにしなければならない．つまり，問題に文脈を与えることで，生徒自らが知識を生み出すことができるように設定し直すことが必要であると考える．SRP の種類で言えば，目的づけられた SRP(何らかの教えるべき対象が存在し，それが探究の過程で生じるように設定した SRP)へと教授システムを変換していきたいのである．

1.4. 研究の手順

本研究は作品訪問パラダイムである問題解決学習から変化させるため，目的づけられた SRP を選択して計画する．

対象は鳥取大学附属中学校 3 年生，授業実施は 2023 年 7 月 10 日予定とする．

(1)元問題分析と検討

(2)授業プランの作成

(3)授業実践と分析

(4)今後の課題

2. 2021 年度実践 導入問題について

二次方程式単元は教科書(啓林館)において，二次方程式の定義を学んだ後，単純な二次方程式から順に解き方が教師によって伝えられる．この指導計画では，生徒の問いが軸となっておらず従来通りの作品訪問パラダイムであると判断できる．一つ一つの解法がどのように生まれたか，どのような問いを経て生み出されるのかは問われていない．そもそも生徒が問いをもって単元全体の学習に臨んでいるかどうかも定かではない．生徒が生み出した問いや気づきが二次方程式や二次関数の単元全体を貫く問いや解法の構成に役立つような導入が必要であると考えた．

そこで，2021年7月5日に授業者自身が行った二次関数の導入(図1)の見直しを行った．

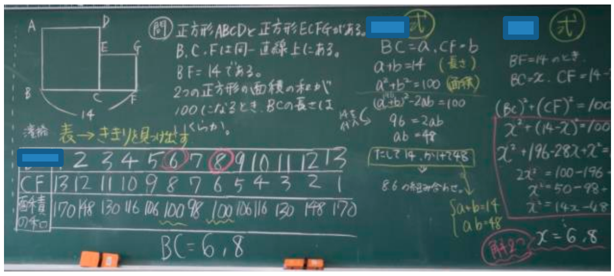

図1 実践(2021)板書

(問)
正方形 ABCD と正方形 ECFG がある．B,C,F は同一直線上にある．BF=14 のとき，2 つの面積の和が 100 になるとき，BC の長さはいくらか．

上記のように，正方形を用いたのは，平方根から二次関数まで一連の流れを持たせようと考えたからである．実践当時は対称性のある関数，二次方程式などが生徒の手によって生み出されている．また，表を見て対称性に興味を持ち，グラフ（放物線）を描く生徒も多くいた．

ここで生み出された二次方程式の解を求めるためにはどのようにするかという問い

につなげようとした．しかし，元々の問題場面に文脈がなく，生徒が与えられた問題を解き進めていく様子は作品訪問パラダイムの形であると判断した．

ここで，元問題について Q-A マップ（図２）を作成した．

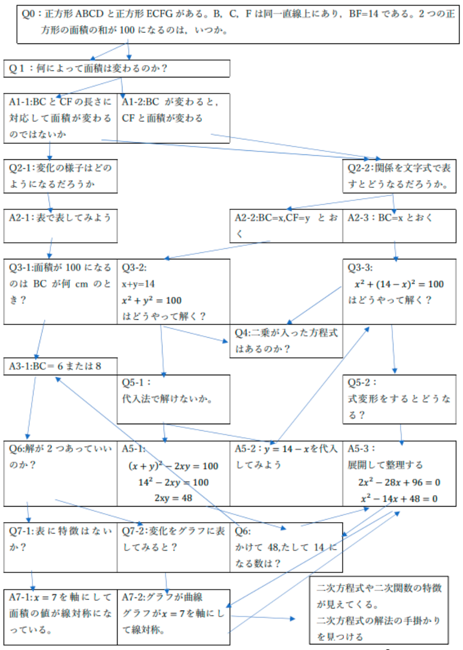

図２　元問題　Q-A マップ

Q-A マップの中で，生徒の問いと答えが往還しているようにみられたが，Q-A マップは生徒の数学的活動の流れを示しただけであると判断した．

つまり，教師が問いを与える作品訪問パラダイムでも Q-A マップが作成できることが分かった．問題に文脈を与え，生徒が自ら問いを生み出して前向きに問い続ける問題の開発が必要であると考えた．この問題を元問題とし，生徒が解くべき文脈を設定して，数学モデルとして二次方程式や二次関数が生み出されるように計画を立てようと考えた．リサーチクエスチョン RQ を次のように設定する．

RQ：二次方程式と二次関数を生徒が生み出し，それに関わる特徴を表出させる導入 Q0 の条件とは何か．

3.　授業プランの作成　Q0の作成

> Q0 案①
> サイコロを使って 2 人でゲームを行う。自分が投げたサイコロの出た目を A，裏の目を B として，A^2+B^2が【　　】が勝ちとする。面白いゲームにするには，ルールや勝利条件をどのように設定するか？

文脈をモデル化したときに，二次式の関係が生み出されることを期待して Q0 案①を立てた．

（ⅰ）二変数でなく一変数の関係に繋げるため，A＋B が一定になることが絶対に必要な条件だと考え，サイコロで表現した．

（ⅱ）勝利条件を自分で設定させることで，様々な式を生み出したり，比較検討したりする流れを期待した．

（ⅲ）「面白い」を加えることで，比較検討の視点を与えた．

プレ授業をして，（ⅰ）～（ⅲ）について確認したところ，次のようであった．

（ⅰ）A^2+B^2のまま探究を進める生徒が多く，期待するような複数の二次式が出てこない．

サイコロは統計・確率を思い出しやすく，確率を根拠にして議論を進める傾向がある．

→サイコロ・表面を A，裏面を B とおいたこと．

→サイコロは統計・確率分野で使用されるものだという教授学的契約が考えらえる．これによって，文字式が表出しにくい．

（ⅱ）式を変えるよりも素数・約数・倍数など数の共通点を見つけるなどの細かな計算に終始する生徒が多かった．

（ⅲ）「面白さ」についての生徒の発言・記述が少ない．

→「面白いゲームとは？」の問いと「複数回ゲームを繰り返す」という条件が抜け落ちている．

> Q0 案②
> A さんと B さん 2 人でサイコロを使ってゲームをする．
> 2 人交互に【サイコロの出た目の 2 乗と裏面の目を 2 乗したものの和】を足していく．
> 【3 回】繰り返して，【100】に近い方が勝ちとする．
> もっと面白いゲームにアレンジするにはどうするか？

案②に変更後，再度分析して改善点を挙げた．

（ⅰ） 探究の幅が広がりすぎることと，生徒の問いが見えにくいこともあり，ゲーム設定のたたき台を改善する内容にする．

（ⅱ）what if not strategy に慣れ親しんだ生徒たちが条件替えを行いやすくするために，Q0 の中に，【　】を使用した．生徒の思考を

制限することになるが，SRP の目的を達成することができると考える．

最終的な Q0
A さんと B さん 2 人でサイコロを使ってゲームをし，出た目をx，その裏面をyとする．
2 人交互に，サイコロを振って【x^2+y^2】を足していく．
【3 回】繰り返して，【100】に近い方が勝ちとする．
このゲームをもっと面白くするには，どのようにアレンジをするか?

この Q0 に対する Q-A マップを作り，問いと答えの往還を吟味し，回答を分類した．

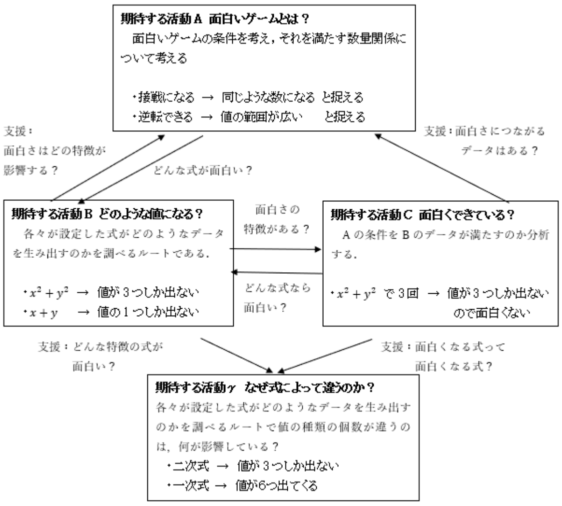

図3 Q-A の往還分類

A：面白いゲームとは？

…条件の吟味，方向性の設定

面白いとは主観で語られることが多いが，それを数学的に数値や式，数量関係を根拠に語っていくルートである．この問いと答えの往還は，自身が作成したゲームの評価としても働く部分であると考えた．

B：どのような値になるか？

…データ収集，分析

ゲームを作成するために各々が設定した式がどのようなデータを生み出すのかを調べるルートである．単にデータを得るのでなく，値の分布や範囲，その意味を分析していく．

C：面白くできているか？…評価

ここで作成したゲームの面白さを評価する．A で生成した条件を満たしているか，何を変更したら何が変わったのか，さらにどの部分を改良できるかとゲームの評価をする．

♡：式や表から見つけた特徴を根拠に
ルール設定・勝利条件を決定する…結論

これは，ゲームを作成するために各々が設定した式が生み出すデータについて調べるルートである．A♡の内容は人によって違うため，これは一見オープンな SRP としても見えるが，その根拠として表出する二次式や二次方程式，二次関数の特徴が目的づけられた SRP で生み出したい知である．

$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$：他のゲームは…発展

これは更にゲームを面白くしていく発展のルートである．また，二次式や二次関数の特徴を深く追究していくルートでもあり，終わりがない．ゲーム作成について授業時間を増やしてオープンな SRP にしてもよいだろうし，二次方程式・二次関数の単元全体を貫く問いの生成として捉えてもよい．
授業時間を増やして実践をすれば，A・B・C の探究ルートを循環するように回っていくように考えられる．PPDAC サイクルのように，データと分析，結論や方向性を繰り返して納得解 A♡を作っていくことが考えられた．

4. 授業実践と分析

4.1 授業実践

対象:鳥取大学附属中学校 3 年
期日:2023 年 7 月 10 日

最初に，「面白いゲーム」と板書し「面白いゲームとはどんな条件か」と問うた。生徒の発言を基に，面白さの条件を共有した．次に，【　】の部分を変えることを確認して，発想の幅に縛りをつけた．

その後 Q0 を板書し，Q0 を書いたワークシートを配布した．

多くの生徒がサイコロの出目とx^2+y^2の値の場合の数を書き上げることから始めた．一度にいくつもの条件を変える生徒に対してのみ支援をした．期待する活動 B の様相を示した生徒は場合の数が 3 通りだと面白くないため，もっと数の種類を増やしたいと考え，期待する活動 B･C を行き来する発想が見られた． また，展開や因数分解を

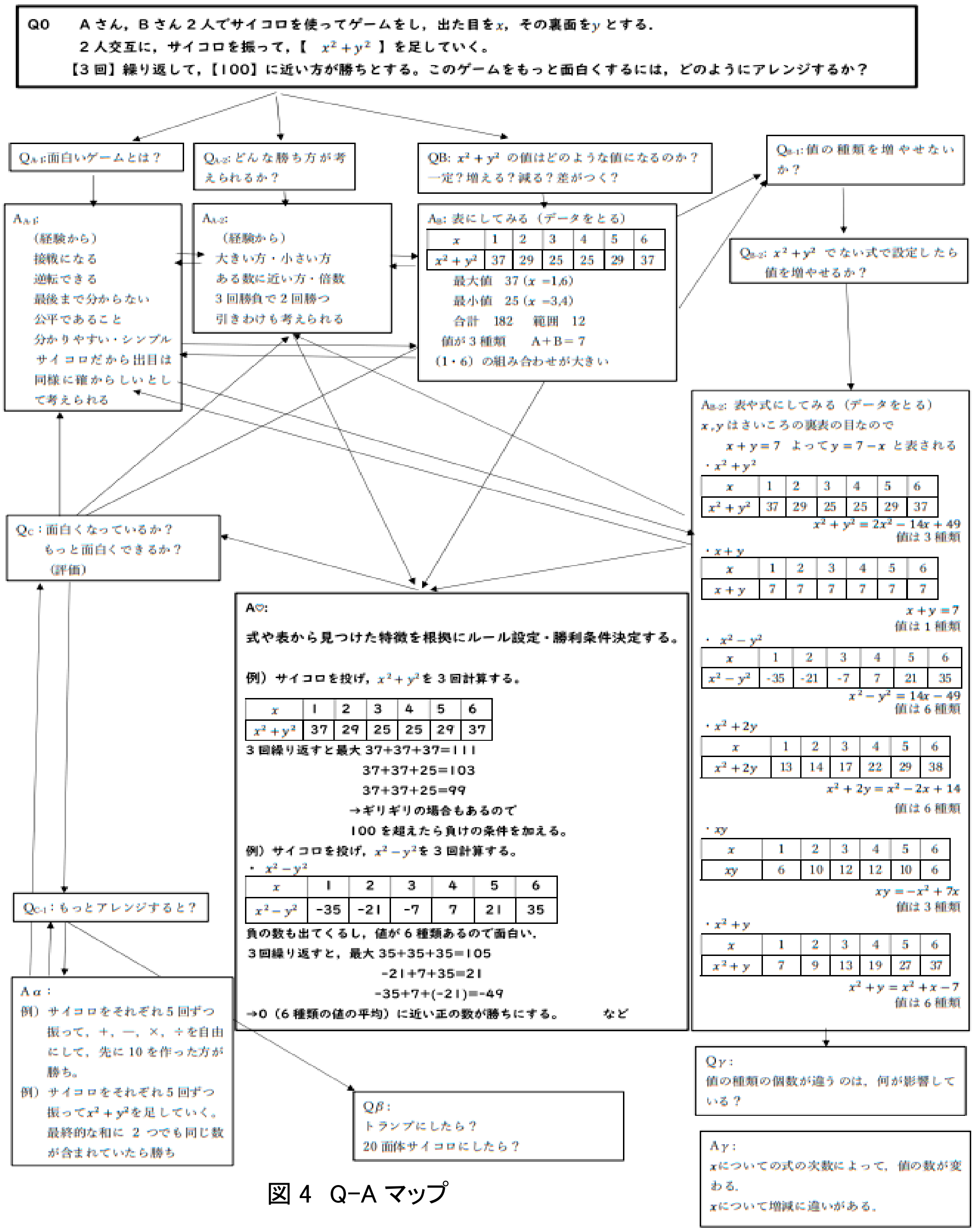

図 4　Q−A マップ

利用するなどして，式を変えながら式と値の種類の関係を吟味し続けており，期待する活動 A･B の行き来が見られた．

また，式を変形したり，式を変えたりして式によって答えの種類が変わることの違いを探る活動 α･β･γが見られた．班活動にうつると，各々のゲームの詳細を説明しながら活動 A･B･C･α･β･γを行き来した．どの班も意見の根拠として，場合の数と式の関係を語ることができていた．

最後に全体で何人か面白いゲームについて発表させた．その際に，なぜその【　】部分を変えたのか尋ねた．生徒とのやりとりから，いろいろと工夫をしたが値が 3 種類しか出てこない【x^2+y^2】が問題であるとした．サイコロの目の表裏の和が 7 であること原因であると挙げられ，それにも関わらず 6 種類の値が出る式があるのはなぜかという問いが出たところで授業の時間が終了した．

4.2. 授業後の分析より

3 通りの値が出ることに関する記述をワークシートから抜粋する．

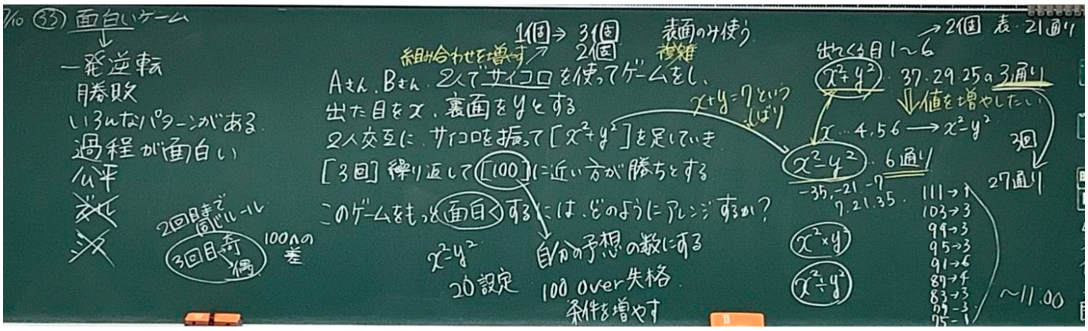

図 5　授業板書

・$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 49 - 2xy$
　xyが場合の数に影響している.
・3 回繰り返してもxyの項があるので，対称性が生まれて，場合の数が最大にならない.
・xyの項があると，増減があり，放物線のような形になる。
・$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 7(x - y)$なので，$xy$の項がなくなり，6 通りの値が出る.

期待される活動 B・C を行き来しながら，式の特徴を考えていることが分かった. まず与えられた問いが面白いかどうかを吟味する生徒が作った式について吟味していた.

また，参観者から次のような意見があった.
・二次関数$y = ax^2 + bx + c$の対称性，放物線などの特徴に関わる発想や一次関数との違いへの疑問が出てきたことで目標が達成された. しかし，中学校学習内容は$y = ax^2$なので，この後の展開が難しいかもしれない.
・全員が同じ問い（値の種類を増やしたい）を共有しながらも，面白いゲームの答え（A♡）は個々で異なり生徒の自由が保障されている.

Q-A マップで想定していた流れが全て表出しており, 授業者の見立てとしては概ね正しかった．授業の最後に$x + y = 7$という条件を扱ったが，$y = 7 - x$が出なかったため教師から示したが, この活動が無ければ二次関数や二次方程式に繋がらないことが大きな課題である.

Q-A マップで想定していなかった発想は，3 回のゲームで得られる数値と, 場合の数の対称性に注目する考え方（図 5 右下）である．ゲームの公平性や運について生徒が語る時に根拠としたものである. 二次関数や二次方程式の発想が出ることを目ざした SRP だったため，深く触れることはしなかった.

5. 本研究のまとめ

RQ: 二次方程式と二次関数を生徒が生み出し，それに関わる特徴を表出させる導入 Q0 の条件とは何かに対する結論

今回の授業において RQ にこたえる条件は二変数を一変数に変える数学的活動を含むことである. これによって，次数が異なる関数が生み出され, それぞれの特徴を比較することができる. また，変化の割合の違いや増減の様子の違い, 場合の数が異なることの意味を生徒自身が見つけることができる. 今回は，サイコロを使用したことで，解空間が(1～6)と単純であったが, トランプや二十面体のサイコロに変更することで解空間は広げられる. 従来は未知数xが分からないため，二次方程式を作る必要になるという流れであったが, 今回の Q0 によって, 解を代入することで二次方程式や二次関数を生み出し, その特徴を生徒自身が理解をしていくという流れを生み出すことができた.

6.　今後の課題

今回の実践を通して, 作品訪問パラダイムでも Q-A マップを作ることができるということが分かったため, 今後は授業検証の視点を複数用意しなければならないと言える. 来年度以降は ATD の範疇で語られる Q-A マップやプラクセオロジーに追加して他の検証方法を用意し, 場面に応じて使い分けることができるようにしていきたい.

参考文献

袴田綾斗　髙橋聡　濵中裕明(2020)「世界探究パラダイムに基づく数学的探究の様相―高等学校と大学における SRP の事例分析－」
啓林館「未来へひろがる 数学 3」