

<研究ノート>

電磁気学に関する概論的科目の締めくくりとしての
“光を使わず光速を測定する” 実験の準備と実施の記録

大信田 文志

Note on preparing and carrying out an experiment to “measure
the speed of light without using light” as a closure of an
introductory course in electromagnetism

OOSHIDA Takeshi

キーワード：光速，電磁気学，LC 共振回路，円筒状コイル，実験による学習
Key words: speed of light, electromagnetism, LC resonant circuit, solenoid,
experiment-based learning

1. はじめに

電磁気学の概論的な講義を組み立てる方針を考えると，Maxwell 方程式の解としての電磁波の存在を示すのがひとつの自然なゴールとなる。Maxwell 方程式は，試験電荷に対する力の場としての電場 \mathbf{E} と磁束密度場 \mathbf{B} ，源泉電荷に結びついた電束密度場 \mathbf{D} と磁場 \mathbf{H} という，4種類の場合に対する連立偏微分方程式として書かれる（以下，表記は特に断らない限り現代の慣用に従う）。非定常な電磁場を考えれば， $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ の時間変化が \mathbf{E} を作り， $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ の時間変化が \mathbf{H} を作るので，源泉電荷がなくとも，ゼロでない電磁場が存在できる。このような場合は，速度 $1/\sqrt{\epsilon\mu}$ で伝播する波を解とする波動方程式に従い，電磁波と呼ばれる。特に真空中（またはそれに近い希薄な媒質）の場合には，誘電率 ϵ および透磁率 μ の真空中での値をそれぞれ ϵ_0 , μ_0 と表記すると，

$$c_w = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (1)$$

が電磁波の速度を与える。その値が光速 c に一致することが，光とは電磁場の波動にほかならないという歴史的な大発見へとつながった。式(1)を与える波動方程式の導出をもって電磁気学の概論の講義を締めくくるのは，Maxwell 方程式に基づく電磁気学の概論としてはききめて自然なことだ。

ところが，波動方程式をゴールとするアプローチをまともに実行するためには，学生の側に相当な数学的素養が要求される。たとえば \mathbf{E} や \mathbf{H} といったベクトル場に対する $\text{rot}\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E}$ などの見慣れない微分演算を使いこなし，さらには波動方程式の形から一定速度で伝わる波という挙動を読み取るなどの技能を修得する必要がある。この準備が完了して初めて，電磁場を扱っていたはずの Maxwell 方程式から光速が導出される驚きを味わう境地に達することになる。こういった技能の修得は，電気や流体など物理系工学を専門とする学生にとっては必須のことには違いないが，それ以外の分野の学生にとってはハードルが高すぎる。

他方、電磁気学の歴史をひもとくと、電磁場に対する Maxwell 方程式が定式化される以前に、Maxwell は式 (1) が光速 c に一致する事実に気づいていたことが分かる [佐藤・北野, §4.4]。式 (1) の右辺は、もとをただせば電磁気的な実験で測定できる量の組み合わせで書けて、標語的に言えば“電氣的な力と磁氣的な力の比”という意味をもつ。その値は、電気と磁気の単位系が別々に存在していた 19 世紀の状況 [佐藤・北野, 図 5.1] のもとで、それら両系統の単位系間の換算係数として Weber と Kohlrausch によって測定され、 $c_w \sim 3.1 \times 10^8 \text{m/s}$ という値が得られた。Maxwell は、この値が、既に知られていた光速 c に符合することに気づき、これは偶然の一致ではなく光が電磁場の波動であることを示すものだと考えて、その理論的な裏付けを目指したのだという [佐藤・北野, pp.73–74]。つまり、歴史的には、式(1)に導かれて Maxwell 方程式が発見されたのであって、逆に Maxwell 方程式から波動方程式を経由して式 (1) を導出するのは事後的な答え合わせだとも言える。

式 (1) 自体に歴史的意義があるのであれば、この式が光速度 c を与える事実の実験的検証は、ベクトル解析を用いない電磁気学の講義の締めくくりにあふさわしい。Maxwell 自身の表現を借りて言うなら、“光を用いずに”光速度を測定する実験である。この種の実験は、19 世紀には力の測定を介して行われたが、 c_w の次元から考えると、原理的には時間と長さの測定だけで c_w の値を決定できるはずだ。20 世紀末以降に一般的となっている技術を用いてそのような測定を実際に行う実験系が、北野ら [北野 2015, 小林・北野 2015] によって提案され、佐藤・北野の著書においてコラムとして紹介されている [佐藤・北野, pp.105–107]。寸法の分かっている平板コンデンサと円筒状コイルからなる LC 回路の共振振動数を測定するというアイデアに基づく実験系である。

本稿では、上記のコラム [佐藤・北野, pp.105–107] に示されたアイデアに基づき、式 (1) の c_w を測定する実験を具体化し実施した内容を記す。対象とした講義は工学部化学バイオ系学科の「物理学概論 II」である。背景には、カリキュラム変更などの事情により、2021 年度は受講者がわずか 2 名となったという状況がある。ある意味では（新型ウイルス感染症問題にもかかわらず対面実施が可能な規模になったということも含め）非常に贅沢な状況であるので、これを機会に、多人数の講義では実施しにくいような学生参加型の授業を試みた。本稿に記す c_w の測定もその一環であり、より人数の多い講義で同じことをするのは難しいかもしれないが、将来的に何らかの参考になることを期待し、ここに記録をまとめる。

2. 実験の準備

2.1. 実験系の構成要素

基本的なアイデア [佐藤・北野, pp.105–107] は、寸法の分かっているコンデンサとコイルからなる LC 回路の共振振動数を測定し、そこから $\epsilon_0 \mu_0$ の値を算出して c_w を得るというものである。共振振動数すなわち LC 回路の固有振動数を、角振動数の形で $\omega_* = 2\pi f_*$ と書くと、その値は、コンデンサの静電容量 C とコイルの自己インダクタンス L の積を用いて

$$\omega_* = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2)$$

で与えられる。コンデンサの極板間を満たす媒質は空気だけだとして、その誘電率を真空の誘電率 ϵ_0 と同一視すると、静電容量は

$$C = \epsilon_0 \Lambda_C \quad (3)$$

と書いて、ここで因子 Λ_C は長さの次元をもち、コンデンサの形状と寸法だけで決まる。同様に、コイルは中空（つまり内部の空間に鉄心などはなく空気のみ）だとすると、自己インダクタンスは

$$L = \mu_0 \Lambda_L \quad (4)$$

と書いて、やはり因子 Λ_L は長さの次元をもち、コイルの巻き数と形状と寸法だけで決まる。式(3)(4)を式(2)に代入すると

$$\omega_* = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \Lambda_L \Lambda_C}} \quad \text{すなわち} \quad (\epsilon_0 \mu_0)^{-1} = \omega_*^2 \Lambda_L \Lambda_C \quad (5)$$

となるので、 Λ_L 、 Λ_C および ω_* が分かれば $\epsilon_0 \mu_0$ が算出できて、したがって式(1)により c_w が得られる。

このアイデアを実行に移すために、まずは寸法と形状の分かっているコイルとコンデンサを用意する必要がある。

コイルとしては、既に磁場観察用の教材として購入していた、アーテック社の電池式電流磁界実験器(008297)に含まれるコイルを利用することにした。このコイルの本来の目的は内部の磁場を磁針等で観察することであって、そのために、コイルはわざと隙間を空けて巻かれており、直径 $2a = 5.4\text{cm}$ の円形コイルを 1cm 間隔で 9 個並べた配置となっている。それぞれの円形コイルが何回巻きなのかは説明書等には明記されておらず、アーテック社に問い合わせたところ、ひとつのコイルあたり およそ 30 回巻きとの回答をいただいた（ただし教材の目的が定性的な観察であって定量的な測定ではないため概数での回答となる旨の補足があった）。このコイルを、全巻き数 $N = 270$ 、長さ $\ell = 8.0\text{cm}$ 、断面積 $S_L = \pi a^2 = 23\text{cm}^2$ の理想的な円筒状コイルと同等だと仮定すると、因子 Λ_L は

$$\Lambda_L^{(\text{ideal})} = \frac{N^2 S_L}{\ell} \sim 2.1\text{km} \quad (6)$$

と算定される。さらに ℓ/a が有限であることに伴う補正係数が必要だが、これについては後述する。

コンデンサは、面積 S_C の平らな金属板 2 枚を間隔 d_C で配置したものをを用いることにした。具体的には $150\text{mm} \times 300\text{mm} \times 0.3\text{mm}$ のアルミ板（久宝金属製作所 L9000）を鳥取市安長のホームセンターで 2 枚購入し、同じくホームセンターで購入した、EPDM スポンジ製の粘着ソフトクッション（和気産業 CN-101）をスペーサとすることで、 $S_C = 150\text{mm} \times 300\text{mm}$ 、 $d_C = 2\text{mm}$ の平板コンデンサを構成した。これにより、因子 Λ_C は

$$\Lambda_C = \frac{S_C}{d_C} = 22.5\text{m} \quad (7)$$

となる。コンデンサを回路に接続するために、クリップ付きの導線も同じホームセンターで購入した。

共振振動数を知るには、発振器とオシロスコープがあればよい。たまたま、古い低周波発振器（Leader Electronics Corp., Uchida UL-100AG）とオシロスコープ（菊水電子工業 538A）が研究室にあったので、これを利用することにした。扱える振動数の上限は 1MHz である。

そのほか、共振状態で回路に流れる電流を制限し、併せて電流を電圧に換算して測定できるように、既知の抵抗 R をもつ抵抗器を回路に組み込む必要がある。今回は、手もとにあった抵

抗器のなかから、 $R = 820\Omega$ のものを選択した。この値は、真空のインピーダンス $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 376.73\Omega$ と同じオーダーで、今回の LC 回路のインピーダンス $\sqrt{L/C} \sim 3.6k\Omega$ より小さい。

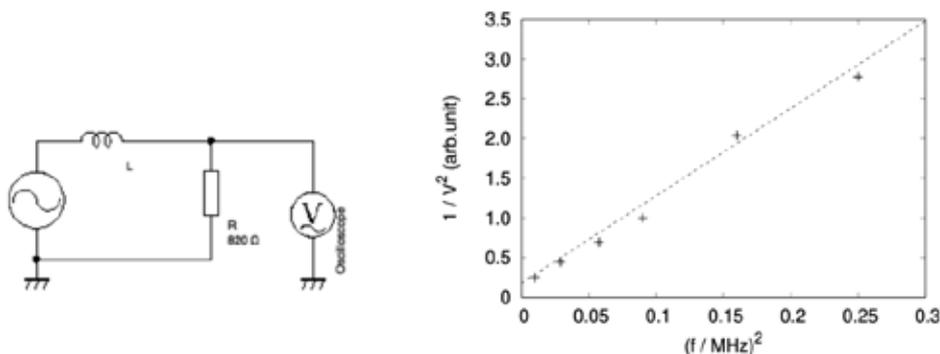


図 1：LR 直列回路による予備実験。左の図のように回路を組み、発振器の振動数 f を変えて、抵抗にかかる電圧の振幅を、オシロスコープに表示される波形の振幅 V として読み取った。右のグラフはその測定値を式 (9) に従ってプロットしたもので、点線は $a = 0.18$, $b = 11$ とした直線を示している。

2.2. 予備実験

コイルの巻き数についてのアーテック社の回答を待つあいだに、用意した実験機材を用いて予備実験を行った。この時点では、巻き数 N が分かっておらず、したがって L や Λ_L の値も算出できない。予備実験の目的は、 L の値を見積もることと、共振振動数 f_* の概略の値を知ることであった。特に、もし f_* が今回用いた発振器で扱える振動数の範囲になかったら、実験計画は頓挫することになるので、共振ピークが検出できることを確認する必要がある。

まずは図 1 (左) のような LR 回路で、発振器の振動数 f を制御変数として、抵抗にかかる電圧の振幅をオシロスコープでアナログ測定した。発振器のスイッチ設定は、正弦波・高出力とし、 $f = 300\text{kHz}$ のときに電圧の波形の振幅が 1 目盛になるように発振器の出力とオシロスコープのゲインを調整した。

こうして測定された（無次元の）電圧振幅 V は、回路の電流 I に比例し、理論的には、LR 回路の時定数 $\tau_L = L/R_{\text{total}}$ を用いて

$$V \propto I \propto \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau_L)^2}}, \quad \omega = 2\pi f \quad (8)$$

と表せる。ただしここで R_{total} は、抵抗器の抵抗 R と、それ以外の抵抗（主にコイルの内部抵抗）の和であるが、簡単化のため $R_{\text{total}} = R$ と見なす。式 (8) は

$$1/V^2 = a + b(f/\text{MHz})^2 \quad (9)$$

の形に変形できるので、これに従って測定結果を図 1 (右) のようにプロットし、切片 a と傾き b を読み取れば、 $(2\pi\tau_L/\mu\text{s})^2 = b/a$ により τ_L が決定できる。

図 1 (右) から目分量で読み取った $a = 0.18$, $b = 11$ という値を用いると、時定数 τ_L は約 $1.2 \mu\text{s}$ となる。これと $R_{\text{total}} = R = 820\Omega$ から、コイルの自己インダクタンス L と因子 Λ_L は

$$L = \tau_L R \sim 1 \times \frac{10^{-3} \text{Wb}}{\text{A}}, \quad \Lambda_L = \frac{L}{\mu_0} \sim 0.8 \text{km} \quad (\text{予備実験}) \quad (10)$$

と見積もられる。この値は、実際には過小評価だが、そのことについては最後の節で検討する。

続いて、回路に平板コンデンサを追加し、図2(左)のようなLCR回路とした。発振器の出力とオシロスコープのゲインを、 $f = 150\text{kHz}$ のときに波形の振幅が1目盛になるように調整し、あとはLR回路の場合と同様の測定を行った。これにより、図2(右)に示す共振曲線が得られ、 V のピークを与える共振振動数は $f_* = 260\text{kHz}$ であることが分かった(この値が発振器の最大振動数1MHzよりも小さかったのは幸運だった)。理論的には、LCR直列回路の共振曲線は

$$V = V_{\max} / \sqrt{1 + Q_{\text{res}}^2 \left(\frac{f}{f_*} - \frac{f_*}{f} \right)^2}, \quad Q_{\text{res}} = \frac{1}{R_{\text{total}}} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (11)$$

で与えられ、ここで $f_* = \omega_*/(2\pi)$ は式(2)により L と C だけで決まる。図2(右)には、式(11)によるフィッティングも併せて示してある。共振ピークの幅は Q_{res} を通じて抵抗に依存するが、共振ピーク的位置は抵抗とは無関係に $f = f_*$ であることに注意する。

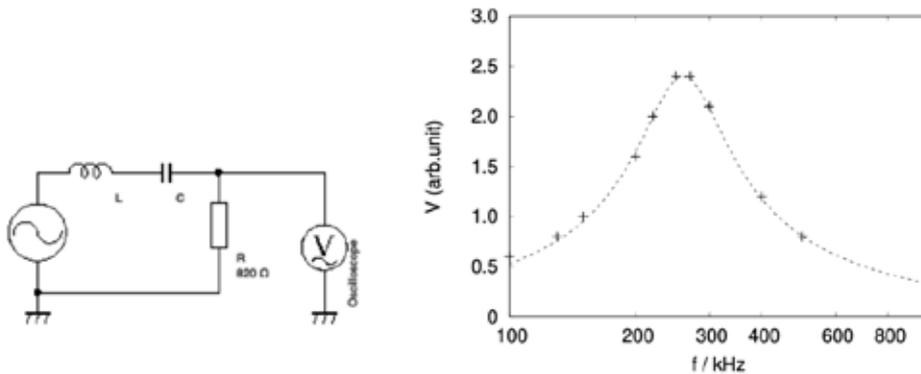


図2: LCR直列回路に対する予備実験。左の図に示す回路で、発振器の振動数 f を変え、オシロスコープに表示される電圧の波形の振幅 V を読み取った。右のグラフはその測定結果を示している(横軸は対数目盛)。点線は式(11)で $V_{\max} = 2.4$, $f_* = 260\text{kHz}$, $Q_{\text{res}}^2 = 4$ としたものを示す。

3. 授業で実施した内容

3.1. 理論の説明

授業は、15コマの講義(おおむね毎週3コマの講義を5月下旬から6月末まで実施)の最終回として、2021年6月29日に行った。講義が始まる前に、あらかじめ、図2(左)の回路図に従って、実験装置を図3のように組み立てておいたので、学生はこの装置を見ながら理論について聴講することができた。

講義の冒頭では、まず、 c_w の測定からMaxwell方程式に至る歴史について話し、次に、それと本質的に同じ実験を20世紀末の技術を利用して体験すること、つまり共振回路とオシロスコープを用いて“光を使わずに光速を測る”という実験の趣旨を説明した。そのあと、必要となる C と L についての関係式の復習を行った。その際、学生の負担を考慮し、新たな文

字の定義をなるべく少なくするように注意した（たとえば Λ_L や Λ_C を陽に定義するのは避けた）。

全 15 回の講義のなかで、平板コンデンサについては 8 回めから 10 回めにかけて学んでいる。その復習として、電圧 V とコンデンサに流れ込む電流 $I = dQ/dt$ の関係を示す

$$C = \epsilon_0 \frac{S_C}{d_C} \quad (12)$$

$$Q = CV \Rightarrow I = C \frac{dV}{dt} \quad (13)$$

という式を、 S_C および d_C の図解とともに板書した。

円筒状コイル（ソレノイド）の自己インダクタンスについては、直前の第 14 回の講義で扱った。そこでは十分に細長い理想的なコイルを考え、電圧 V と電流 I の関係を

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S_L}{\ell} \quad (14)$$

$$V = -L \frac{dI}{dt} \quad (15)$$

の形で示した。今回の講義では、これらの式をコイルの寸法の図とともに板書し、さらにコイルの形状が十分に細長いとは言えないので式 (14) には補正係数が必要であることを説明して、この式の右辺に加筆し

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S_L}{\ell} \times (\text{補正係数}) \quad (14')$$

とした。

続いて、共振振動数の式を導出する必要がある。ここでは以下のようなアプローチを採用した。

まず、実際の実験装置では発振器や抵抗があるけれど、これらがなくても振動数は変わらないことを（証明抜きで）述べ、コイルとコンデンサだけからなる閉回路を考えれば十分であることを納得してもらおう。このような回路の特性を知るための方程式としては、式 (13) と式 (15) を連立させ、 V も I も両者に共通であるとすればよい（そうなるように符号を決めてある）。ここで、振動が生じることを見越して



図 3：授業で用いた LCR 共振回路。左から順に、オシロスコープ、発振器、平板コンデンサが配置され、平板コンデンサの手前には抵抗器とコイルが置かれている。

$$V = V_0 \cos 2\pi ft \quad (16)$$

と仮定して式(13)(15)に代入する。すると式(13)から

$$I = -2\pi f C V_0 \sin 2\pi ft \quad (17)$$

となり、したがって、式(15)の右辺は $-L \times (-4\pi^2 f^2) C V_0 \cos 2\pi ft$ となる。これが式(15)の左辺すなわち V と等しいのだから、等号を成立させるには

$$(2\pi f)^2 LC = 1 \quad \text{すなわち} \quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (18)$$

であればよい。なお、学生にとって煩雑となるのを避けるため、式(2)に従うなら f_* と書くべき共振振動数を単に f と書いている。

受講している学生には、以下のような指示の書いてあるプリントを配布し、項目間に設けた余白に板書内容をまとめさせた。

- 平板コンデンサの静電容量 C を、コンデンサの寸法と ϵ_0 の組み合わせで表す。
 - 円筒状コイルの自己インダクタンス L を、同様に、コイルの寸法と μ_0 で表す。
 - 共振の生じる振動数を C と L に関係づける。
- ⇒ 上記の式を組み合わせ、測定可能な量が右辺にくるように変形： $\epsilon_0 \mu_0 =$

3.2. 測定の実行

上記の理論的準備が完了したところで、学生には、必要な諸量のうち、ものさしで測定できる寸法をすべて測定するように指示した。コンデンサについて学生が報告した測定値は

$$S_C = 15\text{cm} \times 30\text{cm}, \quad d_C = 2\text{mm} \quad (19)$$

であり、これは教員側で測定した値と同じで、 $\Lambda_C = S_C/d_C$ の値は、式(7)のとおり 22.5 m となる。他方、コイルについては

$$S_L = \pi a^2, \quad a = 27\text{mm}, \quad \ell = 83\text{mm} \quad (20)$$

という値が報告され、 $\Lambda_L = N^2 S_L/\ell$ の値は 2.01 km と算定された。もともと ℓ の定義自体に不確かさがあり、この値と式(6)の食い違いは誤差の範囲内であるが、授業では、学生の報告した値をそのまま採用して板書した。

続いて、発振器とオシロスコープを用いて、振幅が最大になるような振動数を見つけるよう学生に指示した。予備実験の結果に基づき、発振器のレンジは数百 kHz の振動数領域に既に合わせてあり、つまみを回して振動数を連続的に変えるだけで共振振動数が見つけられるようになっている。教員の期待どおり、学生たちは無事に $f_* = 260\text{kHz}$ という値を見つけ出した。

3.3. 光速度の算出

上記の測定値に基づいて c_w を算出するために、既に板書してある式を組み合わせ得られる

$$(\epsilon_0 \mu_0)^{-1} = (2\pi f)^2 \times \frac{S_C}{d_C} \times \frac{KN^2 S_L}{\ell} \quad (21)$$

という式を板書した。ただしここで K は式(14')の補正係数(長岡係数)であり、書籍に掲

載されている数表 [田口・井上, p.85] を補間して, $2a/\ell = 0.65$ に対し $K = 0.775$ という値を採用した。

測定値を式 (21) に代入すると

$$(\epsilon_0 \mu_0)^{-1} = (1.63 \times 10^6 \text{s}^{-1})^2 \times (22.5 \text{m}) \times 0.775 \times 2.01 \text{km} = 9.3 \times 10^{16} \text{m}^2/\text{s}^2 \quad (22)$$

となり, これと式 (1) から

$$c_w = \sqrt{9.3 \times 10^{16} (\text{m/s})^2} = 3.05 \times 10^8 \text{m/s} \quad (23)$$

という値が得られた。光速 $c = 3.0 \times 10^8 \text{m/s}$ との食い違いは全く誤差の範囲内である。

4. まとめと考察

佐藤・北野の著書 [佐藤・北野, pp.105–107] で紹介されている, LC 共振回路によって c_w を測定する実験を, 電磁気学の講義の 15 回めの締めくくりとして具体化し実施した。共振周波数は $f_* = 260 \text{kHz}$ であり, 幸いにして手もとにあった古い発振器で扱える範囲内だったので, 首尾よく測定を実施できた。得られた c_w の値は光速 c と誤差の範囲内で一致したが, 定量的な一致を得るためには, コイルの形状に関する補正係数 (長岡係数) を含める必要があった。

残念ながら, 教員側では測定自体を成功させるのに手一杯で, 学生の受け止め方を深く掘り下げる余裕はなかった。それでも雑談的な形で学生の感想を尋ねたところ, 光速を直接測定する高校生のプロジェクトをテレビで見たことがあり, それに比べると今回はずいぶん手軽に測定できた印象がある, という趣旨の答えがあった。

実験系の構成要素のうち, 平板コンデンサはホームセンターで購入した資材を用いて自作した。家具の滑り止め用として売られていた粘着ソフトクッションがスペーサとして手頃だというのは個人的には面白い発見だった。コイルについてはアーテック社の教材に含まれる既製品を流用したが, その巻き数を知るためには販売元に問い合わせる必要があった。

最後に, もし販売元から巻き数についての回答が得られなかったらどうなっていたか考えてみたい。円筒状コイルを完全に自作するのが筋ではあるが, 既製品を使う方針を放棄しなかった場合には, 予備実験の結果から式 (10) のようにして L および Λ_L を見積もることが考えられる。しかし, 式 (10) に示されている 0.8 km という値は, $c_w = 2.2 \times 10^8 \text{m/s}$ という小さめの結果に導くという意味で, 過小評価である。過小評価の原因としては, コイルの内部抵抗を無視して $R_{\text{total}} = R$ と仮定したことが最も疑わしい。言い換えれば, コイルの内部抵抗は R と比べて無視しがたい大きさを持つ可能性があるため, これを直接測定するか, または R を変えて τ_L や Q_{res} の R 依存性を見ることで $R_{\text{total}} - R$ を見積もるなどの方法を取る必要が生じただろうと思われる。

謝辞

コイルの巻き数に関する問い合わせにご対応くださいました, 株式会社アーテック アートテクノ事業部の村瀬徳さま, および同社の関係者の方々に謝意を表します。

文献

北野正雄：“LC共振回路で光速を測る”大学の物理教育 **26**, 126 (2015).

小林弘和・北野正雄：“机の上で光速を測る”大学の物理教育 **26**, 130 (2015).

佐藤文隆・北野正雄：『新SI単位と電磁気学』岩波書店 (2018).

田口俊弘・井上雅彦：『エッセンシャル電磁気学：エネルギーで理解する』森北出版 (2012).

大信田 丈志 (鳥取大学工学部)