学習指導における
子どものコンセプションの変容に関する研究

溝口　達也[**]

A study on the evolution of students' conceptions in the didactical situation

MIZOGUCHI Tatsuya[**]

1．はじめに

学校教育における様々な教科の学習指導では，それぞれ固有の知識や技能の習得が図られ，またそのために固有のコミュニケーションがとられる。教師は，毎時間の授業において，計画的にこれらの学習指導を行うわけであるが，子どもの《達成されたカリキュラム》の評価においては，往々にして観察可能な行動レベルに止まることが指摘され得る。勿論そうした行動についても，必ずしも軽視されるものではなく，むしろこうした行動の変容こそを期待する場面も十分に認められる（溝口，2000）。

一方で，算数・数学科のような教科においては，単に行動の変容だけを期待するのではなく，概念や認識の変容といった観察不可能な面についての評価も必要とされる。特に，算数・数学科においては，しばしば児童・生徒の思考，表現，等が「子どもの考え」として学習指導の中で必要に応じて活用されたり，またそれ自体が評価の対象となることがある。

本研究は，従来「子どもの考え」として表現されてきたものを《コンセプション*conception*》として科学的に捉え直すことを通じて，これをモデル化し，その変容を理論的に説明・記述するとともに，実証的にも検証することを目的とする。また，そうした取り組みは，それ自体が，授業及び評価の改善を目指した教師教育の一つの方策として成立すると期待される。

2．なぜコンセプションを研究の対象とする必要があるか

2．1　コンセプションとは何か

上述の通り，本研究で扱おうとするコンセプションとは従来「子どもの考え」と表現されてきたものである。もとより，『コンセプションとは何か』に答えることは，それ自体本研究の課題の一つである。本研究においては，後述する通り，コンセプションをモデル化することで，この問いに答えることを試みる。

これは，その背景に次のような理由があるからである。従来のコンセプション研究[*1)]においては，《コンセプション》という語は，明確に定義されたものとしてというよりは，ある意味で常識的な考えとして用いられてきた傾向にある。すなわち，実践，研究上の道具として一定程度の機能は有するものの，その定義は暗黙裡であり，研究の対象としての位置づけを（明確には）与えられていないと指摘され得る。また，後述するように，「子どもの考え」によって表現されるものには，「知識（認識）」「概念」等その他の語によって割り当てられるものが含まれることも事実である。こうした状況において，コンセプションの性急な定義は，むしろ研究を進行する上で障害となることが予想され得る。そこで，本研究においては，先ず，コンセプションの特徴を，これをモデル化することによって明らかにし，それに基づき，上記のような他の関連する語との相対的な定義を作り出していくことを目指す。

2．2　コンセプション研究によって何が期待されるか

では，こうしたコンセプションの研究が教育研究，及び実践に寄与するところは何か。これは，端的に《授業（学習指導）を科学する》ことであるといえる。すなわち，ともすると個々の経験によって語られかねない教育の現象や《知識》の本性を理論的・科学的に説明，記述し，明らかにすることにより，現象そのものとその性質を知ることである[*2)]。

ここで，「科学的」という語は，特に数学教育学のような教科教育学においていかなる意味を有するか。もちろん，そのすべてについてここで論述することはかなわないし，また本研究の目的とするところではない。ただ，確認しておくことは次の通りである。我々は，科学的研究の成果として，何らかの望ましいとされる既成の（*ready-made*）指導法を再生産することを意図しない。むしろ，本研究によって得られる成果に基づいて，教師が授業（学習指導）を設計し，コントロール（評価）し得ることを可能にすることこそが意図されるところである。従って，ともすると，教育における理論と実践の関係において，「理論を実践に適用する」といった表現が往々にしてとられることがあるが，それは，上記前者のような安易な適用を意味するものではないことは明らかである。むしろ，そうした理論研究と実践研究は，それぞれ「普遍妥当性」と「個別特殊性」といった異なる目的において実施されるものであり，単に理論研究で得られた成果を実践に持ち込むといったような単純なプロセスであるはずがない。本研究で得られるであろう成果は，従って，教師による授業設計，及び授業分析に対する（科学的）指針を提供するものであるといえる。逆に，このような指針なし

---

*　本研究は，教育地域科学部附属教育実践総合センターによる平成14～15 年度プロジェクト研究（研究代表者：溝口達也）としての支援を受けて実施された。

**　数学教育学研究室　Mathematics Education Division

キーワード：コンセプション*conception*，認識論的障害*epistemological obstacle*，教授学的契約*didactical contract*

に，教師は，科学的な授業設計，あるいは授業分析を行い得ない，というのが本研究の主張である。

「知識の詰め込み」

「子どもの考え」を重視する学習指導の一方で，しばしば我が国の教育問題の一つとして「知識の詰め込み」が問われることがある。実際，第３回国際数学・理科教育調査（TIMSS）の結果を見るとき，その学習達成度において，我が国の子供たちの結果は極めて上位にあるものの情意面の調査においては必ずしも望ましくはない結果が得られた事実から，こうした指摘がなされることがある。こうした結果自体には，教育関係者として謙虚に受け止める必要があるものの，そこから導出される指摘には疑念を挟まざるを得ない。実際国内外からの指摘は，確かにこの調査結果を根拠としてはいるものの，そこから導き出されるものは推測の域を出なかったことも事実である。このことがより明白に示されるのは，TIMSSの付帯調査として行われた「ビデオテープ授業研究」(Stigler & Hiebert, 1999；清水, 2002) によってである。日・米・独の各国の第８学年（我が国においては中学校第２学年が相当）の実際の授業が比較検討される中で，この「知識の詰め込み」という指摘は著しい誤りであることが暴かれ，むしろ，それとは対極の授業（学習指導）が我が国において実践されていることが示された。我々は，しかし，こうした分析結果に満足するものではなく，より一層の改善を推し進めたいという意図を有する。そもそも「知識」とは何か。勿論この問いは，認識論上の主題として歴史的に議論されてきたものであり，そのことを逐一振り返る余地はここではない。しかし，「知識の詰め込み」と言われるとき，ともすると「知識」が否定的な意味で用いられる傾向にあるが，我々の立場は決してそのようなものではない。こうした傾向の背景には，語「知識」に対して教育学的／教授学的に未成熟な吟味しかなされていないということが指摘され得る。「知識の詰め込み」ということを主張する人は，およそ「知識」を社会的に共有された結果としてのそれと解釈していると思われる。すなわち，当該の学問分野における学問化された（*disciplined*），従って体系化された知識をその対象としている。もし，教育（学習指導）の対象としての「知識」がこのようなものであるならば，教師の仕事は，そのような学問化された知識を学習者に伝達することであり，改善されるべきはそのような伝達が首尾よく行われるようにすることである。従って，「よい教師」の養成は，そうした学問化された知識を強力に学ぶことであるといえる。このような，知識観，あるいは教師観の基では，本研究が学習指導のキーとなる要素として扱おうとする「子どもの考え」は，全く問題とされることなく，むしろ学習指導においては排除される対象でさえある。これは，そのような知識観，教師観，あるいは授業観が，知識の文脈化，あるいは個人化を許さないからである。

しかしながら，教育の営みにおいて対象とする「知識」は，上記のようなものではないと我々は考える。すなわち，我々は教育の営みにおける《教授学的変換*Transposition Didactique*》(Chevallard, 1991；小原, 2002)（図１参照）を目指すのであり，これにより初めて，いわゆる教授学的三角形（図２参照）における「教材」の意味を付与することが可能となる。換言すれば，我々は，社会的に共有される・受け入れられるとされる知識（*savoir*）をその達成において意図するものの，学習指導の過程における個々の子ども（学習者）の個人的な知識（*connaissance*）(Balacheff, 1990) の変容を教授学上の問題とし，これを「学習」として意味づけようとするものであると主張される。

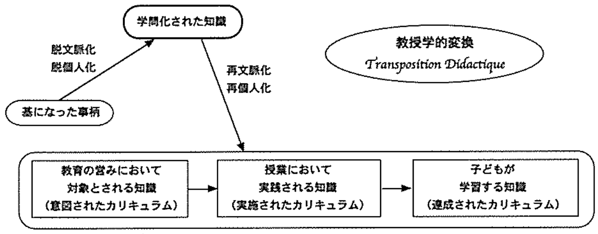


図１　教授学的変換

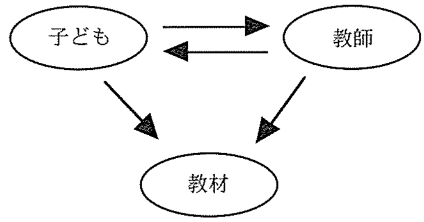


図２　教授学的三角形

３．コンセプションのモデル化：コンセプションをどのようにアプローチすることが適切であるか

３．１　*Piaget* の発生的認識論における*conception*

Piaget の理論においては，語《*conception*》が（仏語原文においては）特段に重要な語として位置づくわけではないものの，いくつかの彼の著作（英訳版）の表題において，この語が用いられていることも事実である。例えば，以下の通りである。

The child's conception of number, 1952.

The child's conception of space, 1956.

The child's conception of geometry, 1960.

Piaget の理論は，現代数学における様々な構造をモデルとして基礎に据え，そこから引き出される概念に基づいて構築されていることにその特徴がある。例えば，Piaget は，数を，行為を起源とするクラス化や系列化という操作を基礎として構成される基数と序数の統合されたものとして捉えることで子どもの認識を特徴づけようとする。また，子どもの空間認識については，トポロジー空間，射影空間，ユークリッド空間といった現代数学における構造としての空間を適用してこれを特徴づけ，また順序づけようとする (Beth & Piaget, 1966)。これにより，発達は量的増大とみなされるのではなく，構造化として規定される。すなわち，発達とは，その過程にいくつかの節目があって，子どもの思考はその節目ごとに構造替えを行うという意味での構造化を経る過程であるとされる。さらに，発達が環境との相互作用として生じるとする彼の基本的立場に立てば，「すでに所有している内省的知識を用いて，外生的知識を獲得していくとき，その操作を反省することにより，外生的知識が再構成されて，これが内省的知識に置き換えられていく」（滝沢, 1992）と換言され得る。ここで言うところの《内省的知識》や《外生的知識》が我々の対象とするコンセプションに相当すると見ることができる。すなわち，《内省的知識》から《外生的知識》への進化をシェマの発達として規定するのである。そしてそこには，同化と調節による均衡化の過程が介在することになる（中垣, 1984）。

3．2　初期のコンセプション研究：*Erlwanger*による *conception*の*case-study*

学習指導における「子どもの考え」に注目する研究は，前述のPiagetの臨床的方法を受けて，子どもの学習のケーススタディとして展開された。ここで取り上げるErlwanger（1974）による研究は，そうした研究の最も初期のものとして認められるものである。彼は，その学位論文の中で，次のように用語の規定を行っている（ここでは，その語の意味を考察する上で，原文のまま引用する）。

(a) Mathematical behavior: This refers to the child's observable verbal or non-verbal reaction to any situation related to mathematics or to his learning experience in mathematics.

(b) Conception: The child's conception of mathematics is viewed as a conceptual system of inter-related ideas, beliefs, emotions and views about mathematics and learning mathematics he has gradually developed from all his learning experiences. This conception guides his mathematical behavior, how he learns and what he learns. That is, his external, observable behavior indicates the direction and trend of his underlying ideas, beliefs and views pertaining to mathematics and learning mathematics.

The approach in each case study is non-judgemental about the child's work and focuses upon his point of view. From his conception of mathematics, his answer such $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{8}$ may be correct. Therefore descriptions such as the child's error, misconception, and lack of understanding or comprehension are not used because they reflect an adult's point of view about the child and his work. (Erlwanger, 1974, pp.28-29)

Erlwanger の以上の言明から，我々は少なくとも次のような指摘をくみ取ることが可能である：

1）行動を支える／コントロールするものとしてのコンセプション；
2）その中身は，アイデア，信念，感情などが内的に関連したシステムとしてのコンセプション；
3）その用いられ方は，子どもの行動を大人の視点から判断するのではなく，そのような行動の子どもの立場からの妥当性を与えるものとして。

3．3　*operational conception* と*structural conception*

コンセプションの直接的な機能面に着目する上記のErlwangerの研究に対して，個々のタイプ化されたコンセプションがカテゴリーとして扱われる場合がある。Sfard（1987, 1988, 1989, 1991）による《*operational conception*》と《*structural conception*》としてのコンセプションの二重性（*duality*）に関する研究はそのようなタイプの研究の中では特筆すべきものであるといえる。

従来，子どもの概念や知識の二分法（*dichotomy*）が様々になされてきた。例えば，Andersonによる《*declarative knowledge*》と《*procedural knowledge*》(Anderson, 1976）は，広く認知心理学一般で受け入れられてきたものである。また，特に数学教育学においてはこれと同様のものとして，《*conceptual knowledge*》と《*procedural knowledge*》(Lesh & Landau, 1983 ; Hiebert & Lefevre, 1986）があげられる。これらの二分法が，子どもの学習対象としての知識や概念の特徴を優れて示してきたことは事実である。しかしその一方で，当該の二分法における両者の関係は明確に定義されにくく，従って，実際にあるものが，例えば《*conceptual knowledge*》であり，またあるものが《*procedural knowledge*》であるといかなる基準に基づいて特定するかは困難な作業の様相を呈することになる。さらにSfard自身はあげていないが，Douady による数学的概念の２つの状態間の区別（Douady, 1984 ; Artigue, 1992）も同様の指摘がなされるものである。Sfardは，こうした状況に対して，従来の知識あるいは概念の二分法に関する研究が，基本的に区別される実体としてみなされるのに対し，《*operational conception*》と《*structural conception*》がこれらのカテゴリーとは分離されるものではないものの劇的に異なる様相であるとし，これがその論文の表題において“*different sides of the same coin*”と述べられる所以である。

3．4　コンセプションの取り組みの相違：《実体論的》と《関係論的》

以上，コンセプション（すなわち「子どもの考え」）に関する先行研究の概観をしたわけであるが，我々は，従来の研究を２つの相に分類することが可能である。その一方は，前節で示されたような研究のタイプであり，我々はこれを《実体論的 *tangible*》に捉える研究であると指摘し得る。このような立場においては，コンセプションをあたかもブラックボックスとみなし，その焦点はそうしたブラックボックスによるアウトプットに当てられたと指摘し得る（Linder, 1993）。このとき，そのような《実体》は，歴史的な発達の段階を踏まえる等の規範に基づくものとしてあらかじめ用意されたものであり，実際の「子どもの考え」はこうした規範のフィルターを通して観察される。こうしたアプローチは，しかし否定されるものではないことは明白である。すなわち，教授学的に何らかの規範に基づく授業設計はそれ自体価値のあるものであり，また必要なことでもある。他方，そのようなアプローチは，真に「子どもの考え」を捉えているかということについては議論の余地がある。むしろ，従来のコンセプション研究では，特にそのカテゴリー化を目指すアプローチにおいては，「子どもの考え」のカテゴリー化というよりは歴史的，社会的に認められる概念や知識のカテゴリー化であったと解釈される。これは，何よりもそのような概念や知識が前提とされるものとして位置づく。換言すれば*savoir*としての知識をもって*connaissance*としての知識を見ていると言えるものである。

しかしながら，我々の立場は，逆に子どもの*connaissance*がいかにして*savoir*へと変容するかに関心があり，これによって学習を意味づけることにある。この点において，Erlwangerによる研究，特に上述の引用における後半部分は傾聴に値するものであるといえる。再度引用することを許されるならば，次の通りであり，本研究の基本的立場を代弁するものでさえあるといえる；*The approach in each case study is non-judgemental about the child's work and focuses upon his point of view.* ただし，両アプローチは対立の図式にあるのではなく，むしろ相補的性格を担うものであり，*forward*と*backward*の関係にあると主張されるものである。本研究では，基本的にErlwangerの研究の立場に立つ。換言すれば，《関係論的》取り組みを図る。従って，コンセプションの変容は主体（学習者）と環境（文脈／状況）との関係の変容によって捉えられ，さらに，本研究で

は，従来ブラックボックスとして暗黙のものとされていたコンセプションの属性に対して積極的にこれらを顕在化することを目指すものである。

concept-meaning approach, concept-structure approach, & conceptual change approach

以上の議論に加え，我々はConfrey による概念（*concept*）についての異なるアプローチの枠組み（Confrey, 1980）にならってコンセプションに関する先行研究を吟味することを試みることとしよう。そのようなアプローチとは，以下の通りである：*concept-meaning*アプローチ；*concept-structure*アプローチ；conceptual changeアプローチ。

*concept-meaning*アプローチは，概念の本性あるいはその意味に焦点を当てるもので，概念を一つの対象としてその特徴のリストを作るといった作業がとられた。このアプローチに対する批判として，次のような指摘がある。すなわち，*concept-meaning* アプローチでは，概念をクラス，カテゴリー，集合といったものとして仮定するが，それらが，何のクラスであったり，あるいはカテゴリーであったりといったことを特定する点に対して弱いことである。これは，上記コンセプション研究の概観におけるブラックボックスの議論と符合するものである。またさらに，次のような批判もあげられる。*concept-meaning* アプローチでは，概念を単一の，孤立した，静的な実体（*static entities*）としてみなす点がそれである。諸概念は，ある種の概念系に組み込まれるものであり，個々に考察し得るものではない。この点が，続く*concept-structure* アプローチへと導くこととなる。

*concept-structure*アプローチでは，概念は主題の構造の構成者であり，当該の学問分野における諸概念間の連関に強調点が置かれた。いわゆるコンセプト-マップや意味ネットワークを構成すること（あるいはスキーマ（*schema*）による知識の記述）は，このアプローチの典型であるといえる。このようなアプローチに対する批判としては次のような点が指摘される。例えば，コンセプト-マップにおいて，その結びつきは，２つの概念間の連関があたかも近接するもののみの関数であるかのような連合主義として示される。しかし，そうした批判以上に重要なものとして，このアプローチが，生徒の認知構造を評価するための言わばテンプレートとして客観的に正しいとされる構造を推定する傾向にあることである。このことはさらに，客観的真理は静的であるということを仮定し，従って，諸概念及びその連関は，個人や時間を越えて不変（*permanent*）であるとみなされる。しかしながら，このことは，概念を対象とするConfreyの立場のみならず，本研究における我々の状況でもない。すなわち，コンセプションの変容を議論する上で，まさに対象とされるのは学習指導における子どものコンセプションであり，その変容の様相は，何らかのテンプレートによって分析あるいは評価において参照されることは認められても，予めこれらを想定し，それに基づいて現象を観察するようなものではない。従って，そのようなコンセプションの変容は，よりダイナミックな描写を必要とし，こうした議論の帰結として，*concept-meaning* アプローチと*concept-structure* アプローチの単純な結合以上のものを要請する。

*conceptual change*アプローチは，こうした要請を受けて，時間を越えた，従って概念の不変性を解放することで概念の成長あるいは形成に焦点を当てるものである。このとき，*conceptual change*アプローチでは，*comprehension*と*justification*の２つのプロセスの重要性を主張する。これらは次のように定義される；"Comprehension" is herein defined as the process by which a student connects a new piece of knowledge to his/her indivisual existing knowledge and applies to it the standards for rationality which are already present in that existing knowledge. Justification is defined herein to subjecting those connections and reasons for believing the knowledge to public standards of evidence." (Confrey, 1980, p.27)

このとき，本研究の主題であるコンセプションの変容は，*conceptual change*アプローチを補完するものとして特徴づけられる。すなわち，上記引用における*comprehension*や*justification*の過程そのものがコンセプションの変容であり，*conceptual change*アプローチにおいてもなおブラックボックスであった点を記述，分析し，これを明らかにすることに本研究の主たる関心があるといえる。

４．数学教育学におけるコンセプション–モデル

本章では，数学教育学におけるコンセプション研究，特にそのモデル化の取り組みとして，溝口（1993；1995a；1995b）による認識論的障害の克服過程の特徴づけにおけるコンセプションのモデル化の取り組み，及び近年フランス数学教授学において議論されるコンセプションのモデル化の取り組みについて述べ，これらの比較検討を行う。もとより，これらのコンセプションモデルは，その他のモデル同様，個々の目的に応じて作られたものであるといえ，従って，どのモデルが最も優れている等の序列化をすることがここでのねらいではない。我々のねらいは，モデルそのものの構築は勿論ではあるが，さらにそこから引き出される教授学的示唆にあり，必要によっては複数のモデルを同時に用いることもある。すなわち，複数のモデルを用いることで，子どものコンセプションの変容についての知見が豊かに得られるのであれば，それはむしろ歓迎されることでさえある。しかしながら，前章で見たように，コンセプションの《関係論的》アプローチをとることを前提とするとき，そうしたアプローチにおいては，コンセプションと呼ばれるものの記述カテゴリーによる特徴づけが不可欠となり，現段階において，こうした性格を有するモデルがここに示す両者であり，すなわち，これらを取り上げることの理論的根拠でもある。*3)

４．１　認識論的障害の克服過程の特徴づけにおける子どものコンセプションのモデル化：$C(\mathcal{C}, \mathcal{N}, \mathcal{E})$ モデル

よく「滑らかで可能なかぎりつまずきのない学習」ということが掲げられ，算数・数学の学習は，知識・技能の単調な積み上げによって進展するといった学習観がとられることがある。しかし，少なくとも子どもが新しい概念を学習するとき，その多くの場面で認識論的障害の克服が不可避であるとする相対立する学習観が指摘される。その理由の１つは，まさに数学の発達の歴史そのものが認識論的障害の克服であったとみなされるからである（Bachelard, 1938/1993；Brousseau, 1983；Sierpinska, 1994）。一方で，もしそうだとすれば，克服されてきた結果としての数学的概念や知識を指導すればよいのではないか，という意見が出されることも考えられる。これは，現代数学で承認されている定義等を直接教授することに結びつく考え方であろう。しかし，子ども（学習者）の立場からみれば，なぜそのような定義が採用されるか，といった理解が欠落してしまうこと

となる。そこで，認識論的障害を克服するとは一体どのような過程を経ることであるのか，また克服をすることの学習における意義とは何か，という点が問題となるわけである。

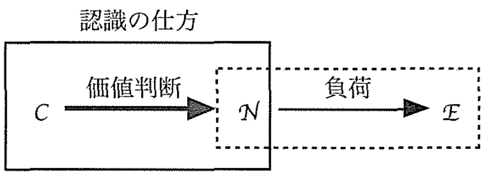
認識論的障害の克服の過程を記述するために以下の３つのカテゴリーを必要とする。

《概念*notion*》：子どもの漠然としたアイデア，イメージ，また心的モデル等を含む。

《事象*event*》：《事象》は《概念》が用いられる範囲や《概念》が適合する事柄を意味する。単に与えられた問題等の事柄自体が《事象》ではなく，子どもの《概念》が負荷された対象を《事象》とする。

《確信*conviction*》：上記２つのカテゴリーによって記述されるものは，実際に観察される子どもの行動にあたるものである。《確信》は，なぜ子どもがそのような行動を示すのかということを説明する子どもの包括的な価値基準にあたるものとして用意される。すなわち，《確信》とは，子どもの数学，あるいは数学的知識に対する態度を意味する。ここで言う態度とは，「振る舞い」としての意味ではなく，行動への準備状態あるいは論理的要請として解釈されるものである。

これら３つのカテゴリーは，下図のような関係として子どものコンセプションモデル$\mathcal{C}$（$\mathcal{C}, \mathcal{N}, \mathcal{E}$）を構成する。



（$\mathcal{C}$：確信，$\mathcal{N}$：概念，$\mathcal{E}$：事象）

図３　$\mathcal{C}(\mathcal{C},\mathcal{N},\mathcal{E})$モデル

$\mathcal{C}$（$\mathcal{C}, \mathcal{N}, \mathcal{E}$）モデルによって，子どもの認識論的障害の克服は次のように説明される。$\mathcal{C}$（$\mathcal{C}, \mathcal{N}, \mathcal{E}$）モデルが整合的であるとき，これに基づく子どもの認識活動は持続する。学習活動は，$\mathcal{C}$（$\mathcal{C}, \mathcal{N}, \mathcal{E}$）モデルの整合性が保たれなくなることで誘発される。これは，子どもが以前の活動においては，確信（$\mathcal{C}_1$）に基づいて自己の概念（$\mathcal{N}_1$）を事象（$\mathcal{E}_1$）に対して適用できたにもかかわらず，新しく直面した事象（$\mathcal{E}_2$）に対しても同じ認識の仕方を適用しようとし，その適用が失敗に終わる状況を意味する。すなわち，既有の認識の仕方が認識論的障害として機能するわけである。認識論的障害の克服は，少なくとも，それ以前に達成した認識の仕方がこれまでの学習において十分に

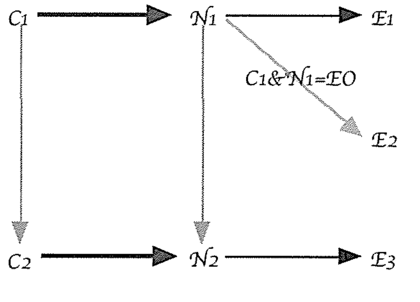


図４　$\mathcal{C}(\mathcal{C},\mathcal{N},\mathcal{E})$モデルによる認識論的障害の克服

満足されたものである以上，誤りを修正したり，必要な事項を補うといった程度で解決されるものではない。すなわち，新しい概念（$\mathcal{N}_2$）を用意するだけでは十分ではない。このため，認識論的障害の克服には，認識の全面的変容が要請される。すなわち，新しく直面した事象（$\mathcal{E}_3$）に適用され得る概念（$\mathcal{N}_2$）とこの行動を価値判断する確信（$\mathcal{C}_2$）が新しく生起されることをもって克服が達成されたとみなされるわけである（$\mathcal{E}_2$～$\mathcal{E}_3$は表面的には同じ対象であるかもしれないが，子どもの認識の仕方が変わることでそれぞれ違った見方をしているものとして区別する）。

$\mathcal{C}$（$\mathcal{C}, \mathcal{N}, \mathcal{E}$）モデルを用いて，実際の子どもの活動を観察するとき，仮に教師が期待したとしても，子どもはいつでも認識論的障害を克服しようとするわけではなく，むしろそうでないときの方が実際には多く見受けられる。子どもの障害とのかかわり方を調べるとき，次のような異なる認識の状態を特定することが可能である。これらの認識の状態は，本研究におけるコンセプションの変容の記述として解釈できる：1）主観的容易さへの固執（*persistence in subjective facility*）では，様々に直面する《事象》に対して，学習者の一貫した《確信》と《概念》の組を見ることができ，「変容」という語にそぐわないようにも受け取られるであろう。本研究においては，コンセプションの関係論的把握を基礎とすることから，このようなケースについてもコンセプションの変容と見る。2）《事象》の社会的適応としての正当化（*justification as social adaption of*《*event*》）では，特に他の３者との違いを明確に指摘することが可能である。すなわち，新しい《概念》とそれの負荷された《事象》は，実際には子どものコンセプションとして存在するわけではなく，そのような《概念》と《事象》の可能性を示唆しているのである。さらに，3）認識論的障害の意識化（*becoming aware of an epistemological obstacle*）と4）認識論的障害の克服（*overcoming an epistemological obstacle*）については，モデルによるコンセプションの変容の記述を通して，初めて次の点が明確になる。すなわち，4）のモデルの変容を追うとき，そこに3）のモデルが含まれることである。このことから，4）は3）を前提として変容が達成することが指摘されるわけである。（図５参照）

４．２　フランス数学教授学におけるコンセプションのモデル化：$\mathcal{C}$（$\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{L}, \Sigma$）モデル

フランス数学教授学におけるコンセプションのモデル化に関する研究（Balacheff, 2000a, 2000b；L'Atelier des Conceptions, 2002, Balacheff & Gaudin, 2003）は，前節の認識論的障害の克服過程に限定されたもの以上に，より一般的な状況をその射程に置く。以下では，フランス数学教授学における問題意識の描写から始めて，そこでのコンセプションのモデル化を概観してみよう。

先ず，子どもの認識（*knowing*）を捉えるに当たって，その本性として，子どもの直面する問題あるいは問題場面を強調する。教授学的状況（*didactical situations*）の基本的な要請は，各々の問題場面が子どもの認識を示唆する行動を要求すること，そして，すべての行動には（何らかの）認識が内包されていることを確認する。すなわち，我々は，子どもの認識を捉えようとするとき，観察可能な子どもの行動に依存していることを確認するのである。実際，行動は，個人の認知的特徴に依存し，と同様に，その個人を取り巻く環境にも依存する。しかし，こ

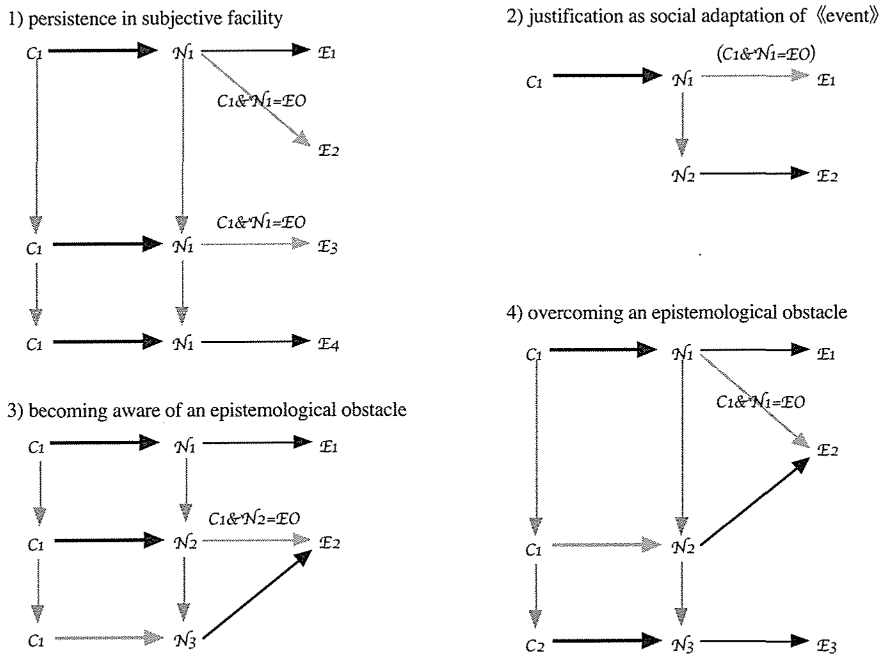


図５　$\mathcal{C}(C,\mathcal{N},\mathcal{E})$ モデルによる子どものコンセプションの変容

の個人，環境は，複雑な実体であるといえる。問題は，その複雑さのすべてが考察の対象となるというのではなく，知識との関連においてそれらの複雑な実体を投影する部分集合として，主体（*subject*）とミリュー（*milieu*）という用語を置く。このミリューという語は，フランス数学教授学において中核をなす概念の一つであり，学習過程において主体と相対するシステムを意味する。ただその用いられ方は，従来必ずしもそうであるわけではないものの物的対象の比重が高かったのに対し，これを拡張して，認識を生み出す手段としての記号的表象及び相互作用を統合するものとして捉えようとする。従って，認識は，主体，あるいはミリューのみに帰せないものであり，対照的に主体とミリューの相互作用として捉えようとする。換言すれば，主体/ミリュー・システムにおいて，何らかの撹乱（*pertubation*）に続く均衡を取り戻すことの必要条件として相互作用を位置づける。$\mathcal{C}$（$\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, Σ）モデルにおいて，子どもの直面する問題は，主体/ミリュー・システムにおける重要な撹乱を意図するものとなる。従って，教師の役割は，教授的意図に照らし合わせて受け入れられると認められる認識が現出するように，主体とミリューにおけるそれらの相互作用を通じての何らかの出会い（*encounter*）を組織することであるといえる。また，学習とは，主体/ミリュー・システムの均衡を再構成する過程であると位置づけられる。ただし，それは，主体の行為とミリューからのフィードバックとの間にあるギャップが主体によって認識されるときにのみ撹乱が発生すると認められることになる。我々が日々の学習指導で経験する中で，こうしたギャップが主体（子ども）によって認められないという状況がある。我々は，それが認識の反映としてみられるとき，こうした気づかれないギャップを誤り（*error*）と呼ぶ。認識を構成するためには，こうした誤りを自覚し，これらを克服する必要がある。場合によっては，こうした誤りを否定し新しい認識に置き換えるときでさえ，実用的な妥当性が残ることもある。例えば，小数は，「点のある整数」ではないが，そのように考えれば計算上極めて有用であるといったようにである。

さらに80年代，様々なカテゴリーの下に，学習者のミスコンセプションについての研究が展開されたことを受け，こうした研究はすべて，子ども，すなわち学習者を当該の知識の所有者としての大人，すなわち専門家と基本的に異なる主体として見ていたことが指摘される。こうした見方の背景には，ミスコンセプションというものに対して何らかの正しい当該の知識というものが割り当てられることが前提とされていたことによる。しかし，上述の認識論的障害の概念に示されるように，誤りについてのミスコンセプションとの認識論的立場の違い，あるいはそのパラダイムの違いを明確に顕示する。すなわち，誤りは，無視，不確実さ，偶然の効果だけでなく，望ましいと判断され成功裡であったような先行する知識の効果でもあるとし，ある種の誤った認識は，学習には必要であるとするのである。というのは，なぜそのような認識が誤りであるかという自覚は，新しい認識に必要とされるからである。

以上述べた前提の下に，次のような４つ組のコンセプションのモデル$\mathcal{C}$（$\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, Σ）が提起される。

$\mathcal{C}$（$\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, Σ）
- $\mathcal{P}$：問題の集合
- $\mathcal{R}$：オペレーターの集合
- $\mathcal{L}$：表象システム
- Σ：制御構造（*control structure*）

ここでは，Balacheff (2000a) の上げる関数の例に基づいてこのモデルを見ていこう。学習者の視点から見たものとして，グラフと曲線は代数的表現（式）に結びついて存在するべきである，といったアイデアがあるが，これらは，例えば描けるもの，といったような要請に従うものである。ここで，グラフと曲線は，２つの異なる実体であり，この意味で区別される必要がある。すなわち，曲線は式で表現された幾何的対象であるのに対して，グラフは例えば点をプロットしたりするような関数の表現である。これまでには捉えにくかったこうした２つの子ども

のコンセプションを異なるものとしてモデル化することを試みるのである。実際には，曲線-代数的コンセプション（C_{CA}）と代数的-グラフコンセプション（C_{AC}）として次のようにモデル化される。

$$C_{CA} = (\mathcal{P}_{CA},\ \mathcal{R}_{CA},\ \mathit{Graphic\text{-}symbolic},\ \Sigma_{CA})$$
$$C_{AC} = (\mathcal{P}_{AC},\ \mathcal{R}_{AC},\ \mathit{Symbolic\text{-}graphic},\ \Sigma_{AC})$$

２つのモデルにおいて，共通に*graphic*と*symbolic*のレジスターが用いられているが，C_{CA} では，曲線が代数的表現を持つことが基準となっているのに対して，C_{AC} では，代数的表現が描くことが可能なグラフに結びついていなければならないということが基準となる。しかし，このことは直接観察されるものではなく，そのために，問題場面やその他の要素が必要となり，これらによってコンセプションを特徴づけようとするのである。

また，例えば，２つのコンセプションについて一般性を次のように表現することが可能となることが示される。

Let us consider two conceptions

: $C\,(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{L}, \Sigma)$ et $C' = (\mathcal{P}', \mathcal{R}', \mathcal{L}', \Sigma')$

Generality : [C is more general than C'] if it exists a function of representation $f : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$, *so that for all problems p from* $\mathcal{P}'$ *then* $f(p)$ is the statement of a problem from $\mathcal{P}$.

さらに，こうしたコンセプションのモデル化により，認識（*knowing*）はコンセプションの集合として捉えることができ，さらに概念（*concept*）は認識の集合として捉えることができることが指摘される（図６）。(L'atlier des Conceptions, 2003)

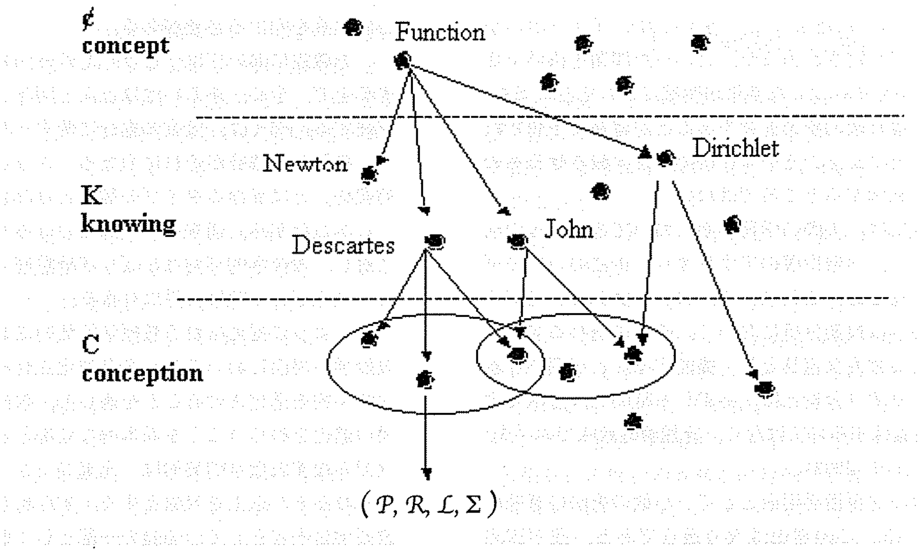


図６　*conception*(C)，*knowing*(K)，*concept*(¢)

４．３　$C\,(C, \mathcal{N}, \mathcal{E})$ モデルと $C\,(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{L}, \Sigma)$ モデルの比較

上記両モデルは，ともにコンセプションの《関係論的》モデル化であった。この点を両者の属性（カテゴリー）に基づいて検討してみよう。

先ず，$C\,(C, \mathcal{N}, \mathcal{E})$ モデルにおいては，《*conviction*》と《*notion*》の組で記述される認識の仕方で《*event*》を見ることを主張するのに対し，$C\,(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{L}, \Sigma)$ モデルにおいては，問題場面の認識の重要性を問題の集合としての$\mathcal{P}$としてカテゴリーの第一に組み込む。また，$C\,(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{L}, \Sigma)$ モデルにおけるオペレーターの集合としての$\mathcal{R}$ は，その意味規定から$C\,(C, \mathcal{N}, \mathcal{E})$ モデルにおける《*notion*》に符合するものであると見ることができる。それらは，ともに何らかのテンプレートとして用意されるのではなく，子どもの逐次の変容をそのダイナミズムとして記述することを意図したものである。さらに，$C\,(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{L}, \Sigma)$ モデルにおける制御構造としてのΣ は，$C\,(C, \mathcal{N}, \mathcal{E})$ モデルにおける《*conviction*》の機能と対等なものであるとみなせる。これらは，上記のダイナミズムの背景として評価，（価値）判断，コントロールするものであった。

一方，両モデルの相違点として，$C\,(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{L}, \Sigma)$ モデルにおいては，表象システムとしての$\mathcal{L}$がモデルの要素として明確に組み込まれているのに対して，$C\,(C, \mathcal{N}, \mathcal{E})$ モデルにおいては，これが顕在化されることなく，その様相としては《*notion*》と《*event*》によって記述される中に潜在的に含まれる。$C\,(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{L}, \Sigma)$ モデルにおいては，数学学習における表象の重要性が顕著に主張されていると受け止められる。

以上の議論は，下表（表１）の通り示される。

表１　$C(C,\mathcal{N},\mathcal{E})$ モデルと $C(\mathcal{P},\mathcal{R},\mathcal{L},S)$ モデルの対応

$C(\mathcal{P},\mathcal{R},\mathcal{L},\Sigma)$	$C(C,\mathcal{N},\mathcal{E})$
$\mathcal{P}$ (*is a set of problems*)	《*event*》
$\mathcal{R}$ (*is a set of operators*)	《*notion*》
$\mathcal{L}$ (*is a representation system*)	《*notion*》 & 《*event*》
Σ (*is a control structure*)	《*conviction*》

しかしながら，表記が異なれば同時にそれにまつわる思考そのものが異なると考えることが自然である。実際，$\mathcal{C}(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{L}, \Sigma)$ モデルにおいても，表象システム（$\mathcal{L}$）が異なることによって他のすべてのカテゴリーは異なるものとして記述されていると見ることもできる。そこで次章では，上記の議論を考慮しつつ，コンセプションモデルの実際の活用として，$\mathcal{C}(\mathcal{C}, \mathcal{N}, \mathcal{E})$ モデルを用いた学習指導のアプリオリ分析を展開する。

5．小数の乗法の意味の拡張

コンセプションモデルの実際の活用を考える上で，おそらく普通に指摘され得ることは，そのモデルを実際の学習指導の場面で子どものコンセプションを的確に把握する道具として用いようとすることであろう。しかしながら，こうしたモデルの利用は，上述の《*conceptual knowledge*》と《*procedural knowledge*》(*cf.* 3.3) で示されたように，各々のカテゴリーがいかなる基準に基づいて特定され得るか，といった問題を再浮上させるのみならず，仮にそのような基準が明確にされたとしても，実際の特定作業には経験的熟練を要することが容易に予想される。これは，コンセプションモデルの機能性を半減させるものであり，本研究の意図するところではない。

そこで，本研究では，実際の学習場面においてのモデルの活用というのではなく，学習指導のアプリオリ分析においてモデルを活用する立場をとる。これにより，コンセプションモデルは，授業設計あるいは授業分析において，それに携わるすべてのものが共有できる強力な道具として機能することが期待される。ここで，アプリオリ分析とは，必ずしも時間的な意味で学習指導の「先」を意味するのではなく，認識論的意味での「先」を想定している（宮川，2002）。

本研究では，扱う学習指導場面として「小数の乗法の意味の拡張」を取り上げる。この理由は次の通りである。我が国の算数・数学教育において，意味の拡張が問題とされることは，故中島健三氏に代表される数々の主張以来，その中心的話題であったといっても過言ではない。しかしながら，近年の実践研究においては，この「意味の拡張」が意識的に取り上げられることが減少の傾向にあるといえる。（例えば，「新しい算数研究」誌（東洋館出版社）1990年４月号～2001年12月号の実践報告「今月の指導」において，語「拡張」を含む稿は僅かに４件である。[*4)]）こうした現状に鑑み，併せて昨今の教育問題における「基礎・基本の充実」の動向に対し，算数・数学教育研究が真に問題とすべき事柄の１つとして「意味の拡張」の学習指導を検討することには意義があるものと考えることによる。

また，コンセプションモデルを学習指導場面のアプリオリ分析に用いるに当たり，後述する「教授学的契約」の概念を導入する。我々の目的は，子どものコンセプションがいかなる状態にあり，またそれがどのように変容するかを記述することではなく，教授学習過程において，いかなる状態にあるべきであり，またどのように変容するべきかに焦点を当てることにあるからである。

5．1　教授学的契約

教師によって準備され，かつ持ち込まれた教授学習場面において，児童・生徒は，一般に与えられた（数学的）問題の解決に取り組む。そうした取り組みは，教師の恒常的な指導法としての発問，手立て，あるいは様々な制約（*constraints*）を児童・生徒が解釈することを通じて行われる。こうした，ある意味では特殊な教師の習慣は，児童・生徒によって期待されるものであり，また逆に，これらに対する児童・生徒の活動は，教師によって期待されるものである（溝口，2000）。換言すれば，教師と学習者の間の互恵的な責務（*reciprocal obligation*）として両者は認められる。

フランス数学教授学（*cf.* Brousseau, 1997）においては，教授学的状況（*didactical situation*）を教師と児童・生徒/ミリュー・システム（*student-milieu system*）の間の言わばゲームとして記述する。いかなるゲームにおいても，ルールと戦略が存在する。特に，教師と児童・生徒／ミリューシステムの間のゲームにおいては，そのようなルールや戦略は教授内容（知識）に固有のものとして認められ，これを「教授学的契約（*didactical contract*）」と呼ぶ。従って，ゲームのプレーヤーやあるいはゲームそのものの進化を語ろうとすれば，知識と教授学的契約の両方に議論を向ける必要がある。

一方教室においては，こうした教授内容としての知識を説明する上で，全く，あるいはほとんど関与しないようなルールも存在する。例えば，授業の進行に関する教師と児童・生徒の間の一般的な習慣等がそれに当たる。こうしたルールは「教授学的契約」とは異なるタイプの契約とみなされる。

しかしながら，通常のゲームにおけるルールが明確であるのに対し，教授学的契約はしばしば暗黙裡であり，さらに教室ごと，文化ごとに微妙に異なり得る。

このように捉えられる教授学的契約に対して，本研究では，教授学習場面においてこれを顕在化させることで，既存の教授学的契約を進化させることを通して，教授学習内容としての知識の進化をねらうことを基本的な立場とする。このとき，本研究でみなす教授学的契約は，元来フランス数学教授学において言われるそれ以上を対象とする。すなわち，教授学的契約を，教授学習内容としての知識の一部として取り込む。これは，そうすることが必ずしも必然であるわけではなく，むしろそのように考えることで，児童・生徒の学習内容としての知識を整理し，また教授学習場面の設計においてそのような知識の整理が有効であるとみなされることによる。

5．2　小数の乗法の教授学的状況

我が国においては，「かけ算」は，はじめ小学校第２学年において「同数累加」として意味づけられる。すなわち，当初，そのような「問い」の下に考察されたものである。しかし，（時間とともに）そのような「問い」は失われ，結果としてのかけ算が残っていく。従って，小学校第５学年の児童においては，「同数累加」の意味がもはや無自覚であるほど，かけ算の形式性に精通している。

それゆえ，例えば「１mが80円のリボンを買います。リボン2.5mの値段はいくらでしょう。」（$\mathcal{A}$）という問題を提示されたとき，子どもは80×2.5の立式に対して，それほど抵抗を感じることがなくなっている。[*5)]これが，本時の教授学的問いが定立される所以である。すなわち，この意味で，*Bachelard*（1938／1993）の言う誤謬に相当するものとして受け取ることが可能である。それは，子どもの《無知》に起因するものではなく，《問いが失われたもの》としてのそれである。従って，「同数累加」として意味づけられた（はずの）かけ算の認識（*knowing*）は，「×小数」の意味づけを必要とする場面において，認識論的障害（Brousseau, 1983；溝口，1995*a*；1995*b*）

として機能する。

このとき，「意味の拡張」を意図する教授学的状況において，元の「問い」の再認識を要請する。すなわち，既存の意味（本研究では，これを教授学的契約と捉える）を大事にした上で，その限界，あるいは問題性（*problèmatique*）を顕在化するような問題の移譲（*dèvolution*）が行われる必要がある。換言すれば，新しい教授学的契約を確立するような環境（*milieu*）の構成がそれである。従って，（表象としての）80×2.5そのものに抵抗を感じることは無くとも，その意味（教授学的契約）に対して，その進化を意識化させる必要がある。

具体的には，以下のような問題の移譲を考えたい。「同数累加」として，

80×2＝80＋80　80×3＝80＋80＋80　(*a*)

である。このことは，子どもの認識においても受け入れられるものである。これは，しかし，必ずしも子どもが「かけ算の意味はそのようであった」という状態ではない。すなわち，前述の通り，子どもにおいては，かけ算の意味を「同数累加」として意味づけることの「問い」が失われた状態であり，その意味で上記の２式のみでは，ここでの教授学的状況の問題性を喚起することにはつながらない。このとき，ある子は，

80×2.5＝80＋80＋40　(*b*)

と答える。しかし，この式は，既存の教授学的契約（すなわち，「同数累加」の意味）には反するものである。ただし，この状態では，子どもはそのことに自覚的ではない。すなわち，これが認識論的障害の発現である。そこで，教師は次のような問いを提示することが教授学的に要請される。

(*a*) の意味で考えるのであれば，

80＋80＋40＝80×2＋40　(*c*)

である。換言すれば，「同数累加」によるかけ算の意味とは，《表記法》としてのそれであり，これが「×小数」の意味づけによって，《演算》としての資格を付与されることであると言える。

そこで，「80＋80＋40 を《一つのかけ算の式》で表すことはできないだろうか。また，もしそれが，80×2.5 で表されるとするならば（あるいは，そのように表し<u>たい</u>とするならば），どのように説明できるだろうか？」

この問いをもって，初めて子どもへの問題の移譲が達成されると考えられる。

５．３　アプリオリ分析

一般に「拡張」は次のように述べられる：「論議領域Dにおいて，概念Cが条件R_1によって定義されているとき，Dを含む論議領域D'における条件R_2があって，R_2をDに制限する限り，R_1とR_2が同値であるならば，R_2は論議領域D'における，概念Cの拡張概念である。」（岩崎，2003）そうであるならば，小数の乗法の意味を拡張しようとするとき，少なくとも次のような活動が要請される：

1) 整数の場合に成り立ったかけ算の意味が，小数の場合（×小数）では不都合であることの認識；
2) 「×小数」の場合に成り立つ意味の構成；
3) 新しくつくった意味と既存の意味との比較；
4) 既存の意味を新しい意味に統合。

本時の問題場面は上述の問題($\mathcal{A}$)であるとする。しかし，これが移譲されるべき問題自体ではなく，既に述べたように《80+80+40を１つのかけ算の式で表しましょう》が本時の問題である。すなわち，上記の活動1）についての子どものコンセプションは，

$\mathcal{C}_1$ ：かけ算は「同数累加」である
$\mathcal{N}_1$ ：80＋80＝80×2，80＋80＋80＝80×3，…
$\mathcal{E}_1$ ：80＋80＋40はこれまでの考えではうまく（１つの）かけ算の式に表せない（80×2＋40）

と記述される。続く活動2）において子どもの個人差が顕在化するであろう。このとき，いずれの場合にも数直線が有効な支援として機能することが予想される（図７）。

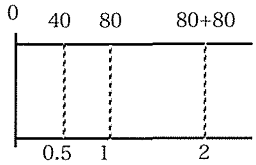


図７　数直線による乗法の操作

子どもは，“80+80+40＝80×2＋40で，40は80の半分だから，…”といった思考（操作）を数直線上で展開することでかけ算の割合による意味づけを想起する可能性がある。このとき子どものコンセプションは，

$\mathcal{N}_2$ ：40 は80（を１と見たときの）半分（0.5）の大きさである
$\mathcal{E}_2$ ：80＋80＋40＝80×2.5（80×0.5＝40）

であり，ここで子どもの《*conviction*》が転換される必然性は無い。そこで活動3）が必要とされるのである。新しくつくられた意味は，しかし「×小数（×0.5）」の場合の意味である。すなわち，拡張の場面として本時の学習を位置づけるならば，「×整数」の場合の意味との吟味が必要とされるのである。そうでなければ，子どもによっては，それぞれの場合の意味を併用して用いることも考えられる（実際の思考上そうであったとしても，そのまま独立したものでよいとすることは本時の目標ではない）。そこで，新しく構成された（$\mathcal{N}_2$，$\mathcal{E}_2$）による$\mathcal{C}_1$の見直しを行う必要がある。このとき，数直線の操作から，$\mathcal{C}_1$が棄却されて新たに

$\mathcal{C}_2$ ：割合によるかけ算の意味

が採択されることは考えにくい。ただし，子ども自身が十分に$\mathcal{C}_1$が$\mathcal{C}_2$に統合されることを期待することにも難がある。それは，数直線の操作から，C_2が仮に子ども自身によって生み出されたものであるにせよ，$\mathcal{C}_2$が$\mathcal{C}_1$を数学的に統合し得ることを自ら確認することの根拠として十分な活用が行われるかは子どもの個人差に多分に依存するからである。そこで，この拡張（統合）の場面（活動4））において，教師が最もその指導を要請される点がここに在ることが指摘される。これによって，初めて子どもは乗法の意味の拡張を達成することが期待される。

６．おわりに

本研究では，コンセプション研究の歴史を概観し，これを通してコンセプションモデルが備えるべき条件を吟味し，現在提案されている$\mathcal{C}$（$\mathcal{C}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{E}$）モデルと$\mathcal{C}$（$\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, Σ）モデルの両者を比検討した。また，実際にコンセプションモデルを活用するにあたり，アプリオリ分析による授業設計あるいは授業分析の可能性を示唆した。さらに実際のアプリオリ分析においては，小数の乗法の意味の拡張を教授学的契約の進化として特徴

づけることで，子どもの潜在的に有する認識論的障害の克服に寄与し得る可能性を示したことが指摘される。またその際，教授上教師による学習指導の重点についても示唆し得た。

残された課題として，特に実際のアプリオリ分析から示唆されるものとして，教授学的契約とコンセプションモデル$\mathcal{C}$（$\mathcal{C}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{E}$）における《*conviction*》との対応が理論的に整理されていないことがあげられる。

註

*1) ここでは，コンセプションそのものを必ずしも当該の研究の中心的対象としていないものも含む。

*2) Hanson (1986) の《理論不可性*theory-laden*》による。

*3) この他にも，$\mathcal{C}$（$\mathcal{C}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{E}$）モデルと極めて類似したモデルがSpagnolo (1999) によって提示されている。

*4) 真野祐輔氏の調査による。(溝口他, 2003)

*5) 子どもが，所与の問題場面に対して「かけ算」として立式することをもっともらしいとすることは肯定されるべきことである。子どもが「この事実を直観的な明証なるものとして受け入れている」(伊藤，1993，p.40) ことを前提とした上で，本稿の教授学的問いが成立する。

引用・参考文献

Anderson, J. R. (1976). *Language, Memory, and Thought.* Erlbaum, Hillsdale, N.J.

Artigue, M. (1992). The importance and limits of epistemological work in didactics. *Proceedings of the Sixteenth Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol.* 3, 195-216.

Bachelard, G. (1938/1993). *La formation de l'esprit scientifique, contribution a une psychanalyse de la connaissance objective.* Paris, J. Vrin. (及川 馥, 小井戸光彦訳 (1975). 科学的精神の形成. 国文社.)

Balacheff, N. (1990). Towards a *problèmatique* for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(4), 258-272.

Balacheff, N. (2000*a*). A modelling challenge: untangling learner's knowing. *http://www-didactique.imag.fr/Balacheff/TextesDivers/JIOSC2000.html*

Balacheff, N. (2000*b*). Advanced educational technology : Knowledge revisited. Liao, T. T. (ed.), *Advanced Educational Technology : Research Issues and Future Potential.* Springer NATO ASI Series F145. 1-20.

Balacheff, N. & Gaudin, N. (2003). 2 Conceptual framework. In Soury-Lavergne, S. (ed.), Baghera Assessment Project, designing an hybrid and emergent educational society. *Les cahiers du laboratoire Leibniz, n° 81*, 3-22.

Beth, E. W. & Piaget, J. (1966). *Mathematical epistemology and psychology.* (Translated from the French by W. Mays). D. Reidel Publishing Company.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles èpistèmologiques et les problèmes en mathèmatiques. *Recherches en Didactique des Mathèmatiques, 4*(2), 165-198.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigne.* La Pensee Sauvage, Editions.

Confrey, J. (1980). *Conceptual change, number concepts and the introduction to calculus.* Ph.D Thesis, Cornell University. (University Microfilms International).

Douady, A. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil/objet.* These d'Etat, Universite Paris 7.

Erlwanger, S. H. (1974). *Case studies of children's conceptions of mathematics.* Ph. D Thesis, University of Illinois at Urbana-Campaign. (U-M-I, Dissertation Information Service).

Hanson, N. R. (村上陽一郎訳). (1986). 科学的発見のパターン. 講談社.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. in Hiebert, J. (ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics.* Erlbaum, Hillsdale, N.J.

伊藤説朗 (1993). 数学教育における構成的方法に関する研究[上], 明治図書.

岩崎 浩 (2003). メタ知識の構造化，意味の明確化の試み－概念の相補性の視座から－. 全国数学教育学会第17回研究発表会配布資料.

L'Atelier des Conceptions. (2002). Le Canevas de cK ¢. *http://conception.imag.fr/protege/canevas/index.html*

Lesh, R. & Landau, M. (eds.). (1983). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.* Academic Press. NY.

Linder, C. J. (1993). A challenge to conceptual change. *Science Education, 77*(3), 293-300.

宮川 健 (2002). 教授学的状況理論にもとづくコンセプションモデルに関する一考察. 筑波数学教育研究, 21, 63-72.

Mizoguchi, T. (1993). On shifting conviction in conceptual evolution. *Proceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Tsukuba, Vol.1,* 260-267.

溝口達也 (1995*a*). 認識論的障害の克服過程の記述カテゴリーによる特徴づけ：極限概念を事例として. 日本数学教育学会誌 数学教育学論究, 63・64, 27-48.

溝口達也 (1995*b*). 数学学習における認識論的障害の克服の意義：子どもの認識論的障害との関わり方に焦点を当てて. 筑波大学教育学系論集, 20(1), 37-52.

溝口達也 (2000). 算数・数学的活動と評価. 鳥取大学数学教育研究, 2, 33-41.

溝口達也, 矢部敏昭, 姫田恭江, 真野祐輔 (2003). 小数の乗法の意味の拡張：教授学的契約の顕在化と認識論的障害の発現を視点として. 日本数学教育学会第36回数学教育論文発表会論文集, 163-168.

中垣 啓 (1984). 矛盾と均衡化. 中垣 啓(編), ピアジェの発生的認識論. 国土社. (pp.177-217)

小原 豊 (2002). 教授学的変換による無理数の学習指導について－中学校数学における「行為に埋め込まれた知識」の機能－. 筑波数学教育研究, 21, 39-46.

Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions : Operational and structual. *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Montreal, vol. 3,* pp.162-169.

Sfard, A. (1988). Operational vs. structual method of teaching mathematics-case study. *Proceedings of the Twelfth*

*International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Hungary, vol. 3, pp.*560-567.

Sfard, A. (1989). *Transition from operational to structual conception: the notion of function revisited, Proceedings of the Thirteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Paris, vol. 2,* pp.151-158.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics.* The Falmer Press.

清水美憲 (2002). 国際比較を通してみる日本の数学科授業の特徴と授業研究の課題－TIMSS ビデオテープ授業研究の知見の検討－. 日本数学教育学会誌, 84(3), 2-10.

Spagnolo, A. (1999). A *theoretical-experimental model for research of epistemological obstacles.* International Conference on Mathematics Education into the 21 st Century, Cairo (Egypt).

Stigler, J. W. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.* The Free Press, New York. (湊 三郎 (訳) (2002). 日本の算数・数学教育に学べ：米国が注目する jugyo kenkyuu. 教育出版.)

滝沢武久 (1992). ピアジェ理論の展開：現代教育への視座. 国土社.

ABSTRACT

The purpose of this study is to describe modeling《conception》and to verify the evolution of conception through the model. In the conventional research and studies, the word "conception" is in the tendency to have been used as a commonsense notion rather than it is as what was defined explicitly. That is, although it has a certain function as a tool of practices or research, the definition remains implicit and may be indicated that positioning as an object of study is not given (clearly). It can be said that the place which our study of conception contributes to educational research and practice is what is done for the science of the lesson directly. That is, it is getting to know the educational phenomenon itself and its character by explaining and describing theoretically and scientifically the teaching and learning activities and the nature of knowledge, which may be sometimes told by personal experiences. The result which will be obtained by this study offers the (scientific) guiding principle over the lesson design and lesson analysis by the teachers. On the contrary, it is our opinion that a teacher cannot perform scientific lesson design or lesson analysis without such a guiding principle . Under the above issues, we survey the following related studies: Piaget's genetic epistemology, Erlwanger's case studies of students' conceptions, and Sfard's dual nature of mathematics conception, which are classified into two streams. One is the tangible stream, which considers conception as a black box and focuses on the output from such one. Such stream is looking at knowledge as connaissance by as savoir. However, our concern is how student's connaissance changes into savoir, and to determine student's learning in this sense. (Both approaches are not shown in the schema of confrontation, rather compensated mutually, like foward and backward.) In this study, our stream is the relational. The evolution of conception is seemed in relation btween the subject and the *milieu.* Furthermore, we positively actualize to the attributes of conception which conventionally made into the tacit thing as a black box. In such approach, it is indispensable that conception is characterized by the categories of description. As the model which has such nature in a present stage, there are two models: Mizoguchi's $\mathcal{C}(\mathcal{C}, \mathcal{N}, \mathcal{E})$ model which aims to feature the overcoming an epistemological obstacle; and $\mathcal{C}(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{L}, \Sigma)$ model in the French Didactique des mathematiques. As a result of comparing both, it is shown that there are corresponding categories to each. At the final scene, we illustrate a priori analysis of the situation of expansion of the meaning of the multiplication of a decimal using $\mathcal{C}(\mathcal{C}, \mathcal{N}, \mathcal{E})$ model with the notion of didactical contract. Thereby, the functionality in a lesson design or lesson analysis of the model of conception is shown.