錐体の体積指導に関する研究

― 教材・教具の開発とその実践的検討 ―

矢部　敏昭*・林　　学**

A Study of Teaching Triangular Pyramid Volume in Mathematical Learning

YABE Toshiaki, HAYASHI Manabu

I　問題の所在

小学校では，過去において，角柱と円柱の体積の求め方について扱ったことはあるが，角錐と円錐の体積について扱ったことはない。錐体の体積に関する内容は，現行の学習指導要領が平成4年度より実施されたのにともなって，中学校より移行されたものである。

文部省指導書，啓林館指導書を概観すると，それらの指導は，実験・実測をもとにして考えるものであるとなっている。なぜならば，錐体の体積が同底・等高の柱体の体積の3分の1である理由は，中学校でも理論的には無理であり，高等学校の内容になるからである。中学校でも実験をして帰納的に理解を図ればよいのであるが，小学校に移行された理由を，啓林館指導書では次のように述べている[1]。

「…ところが，中学校では，その実験も行われないことがあったので，実験ならば小学校でていねいに扱われることを期待されての新内容の登場というわけである。」

小学校でも，実験器具の準備，実験の精度を考えると難しいものがある。そのことを考えると，錐体の体積の授業は結果を指導して公式を活用するという授業になりがちである。

また，文部省指導書・算数編では，次のように述べられている[2]。

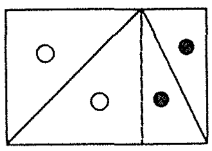
「三角柱などの簡単な角柱と円柱の体積，及び三角錐などの簡単な角錐と円錐の体積を求めることを学習する。このとき，底面積と高さを測定し，それらを用いた計算によって立体の体積を求める。なお，角錐や円錐の体積については，同底，等高の角柱や円柱の体積と比較させ，その1/3に等しいことを実験，実測によって調べる程度とする。」

1　錐体の体積公式の表現とよみ

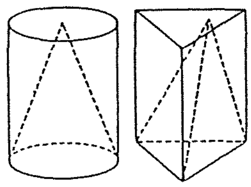
（三角形の面積）＝（底辺）×（高さ）÷2という公式の意味は，小学校第5学年の学習内容である。このとき，三角形の面積は，任意に与えられた三角形の底辺と高さによって決まる長方形（底辺を横，高さを縦）あるいは，平行四辺形の半分であるというとらえ方から理解されることが一般的である。

つまり，図―1のような説明が実際の指導において用いられ理解していくのである。

しかし，錐体の体積については，同底，等高の柱体をもとに，（錐体の体積）＝（底面積）×（高さ）÷3を理解していくことはどうかというと，上記の式を読むと，錐体の体積は底面と高さで決まる柱体の体積の3分の1であるということはわかるが，三角形の面積公式の説明に用いられるような図に相当するものは，本教材が取り扱われる前までの既習内容には求めることができない。また，もし錐体の体積を求める数学的な活動によって，上記の公式を導き出そうとすると，その具体的な図が見当たらず，果たして柱体の3分の1であるかの判断は一層困難な問題となる。任意に与えられた三角錐と同底・等高の三角柱を対比してみても，3分の1，あるいは÷3は見えてこないのである（図―2）。ここに理解の難しさがある。



図―1



図―2

2　比較の対象物としての同底・等高の柱体への着目

錐体の求積に当たっては，同底・等高の柱体と比較し，その柱体の体積の3分の1に等しいことを，実験・実測によって考察していくのであるが，その際に児童にとっては，何故ゆえに同底，等高の柱体に対比させるのかは疑問をもつところである。なぜなら，前述した三角形と長方形・平行四辺形との関係では，児童はそれまでに色板による構成をはじめとする数多くの素地経験をもってきているが，錐体と柱体についてはそれに対応するような経験が前学年までの学習内容には見いだすことができないからである。

しかし，これらの数学的な経験が不足している，あるいは全くないからといって，唐突に同底・等高の柱体を提示することは考えてみたい。本研究は，この点に研究の1つの視点を設け，いかに同底・等高の柱体に着目させるかということについて，1つの指導の工夫を施したものである。

言い換えれば，未知なる錐体の求積に際して，既知なる柱体をもとに問題解決していく過程に，豊かな数学的な見方・考え方がもたらされ，また，その過程を通して既知なるものをもとに未知なるものを求めていくという，算数の創造的な活動が期待できると考えたからである。

* 鳥取大学教育学部数学科教育教室
** 鳥取大学教育学部附属小学校

キーワード：錐体の体積，対比と類比，推測の構成

II　研究のねらいと方法

1　研究のねらい

本研究は，Ｉにおいて指摘した２つの問題点について，その指導のための教材・教具を開発するとともに，それらの教材・教具を用いた指導を実際に展開し，小学校に新たに位置づけられた錐体の求積に関する指導のあり方を考究するものである。

柱体の体積や錐体の体積を考えるに当たり，児童にとってはその１つの考える道筋として面積からの対比や類比が考えられる。さらに，このことをもとに体積に着目していくならば，とりわけ錐体の求積においては，どのような柱体との対比が望ましいかは議論を必要とするところであろう。そして，もし児童が同底・等高の柱体を比較の対象物として認めるならば，その体積の関係が柱体の1/4より大きく，1/2より小さいことを推測できるかである。このことが本研究の１つのねらいである。

本研究の第２のねらいは，同底・等高の柱体との関係において構成した推測（柱体の1/4より大きく1/2より小さい）をもとに，もし仮に柱体の1/3であると仮設するならば，以下に示すような児童の思考の流れに即した数学的な活動が展開できるものと考えた。

推測１
錐体の体積＝同底・等高の柱体の1/3

↓

言い換え
同底・等高の柱体の体積＝錐体の体積の３倍

↓

推測２
錐体を３つ合わせると同底・等高の柱体ができる

2　研究の方法

推測１の構成に関しては，児童の直観に依るところが大きいと思われる。それは，とりわけ面積（表面積や側面積）からの推測においては，同底･等高の柱体の1/2より小さいことは導けるものの,柱体の1/4より大きいことは実際の具体物をみることによって，感覚的な把握に依るところであろうと思われるからである。

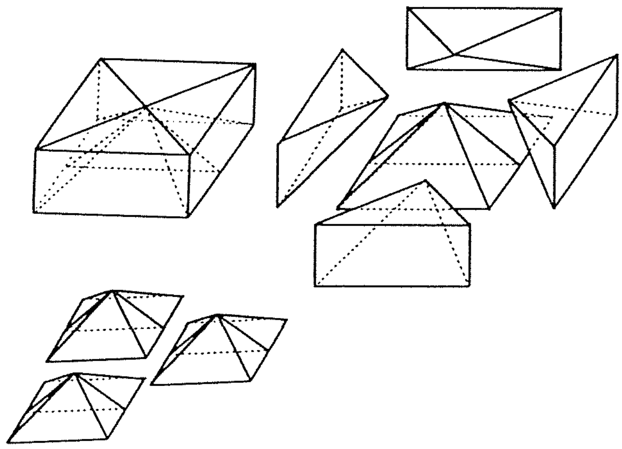
しかし，求めようとする三角錐と同底・等高の三角柱を実際に手にしその体積について考察するとき，その推測が単なる推測にとどまらず，ある程度の確信を得てその推測を支持することが望ましい。そのためには，次のような立体の見方は必要なものと思われる。つまり，柱体を分割してその一部分として錐体をみる見方と，その逆に錐体をいくつか組み合わせて１つの全体として柱体をみる見方である。

そして，支持された「推測１」を子どもたちの具体的な数学的活動「推測２」へと結びつけていくものとして「言い換え」の活動が位置づけられるのである。

以上の観点に立って授業の展開を考えるとき，「推測１」を導き，さらに「言い換え」をもとに「推測２」を導く具体的な教材･教具として，どのような三角錐を提示するかが問題となる。また，本研究は錐体の体積について考察をしてきた過去の歴史的な業績を返りみながら，錐体の体積公式の発見，及び体積公式の意味に関する先行研究をもとに，その過程にみられる求積のアイディアと考え方を学び，授業展開に生きる示唆を得るものである。

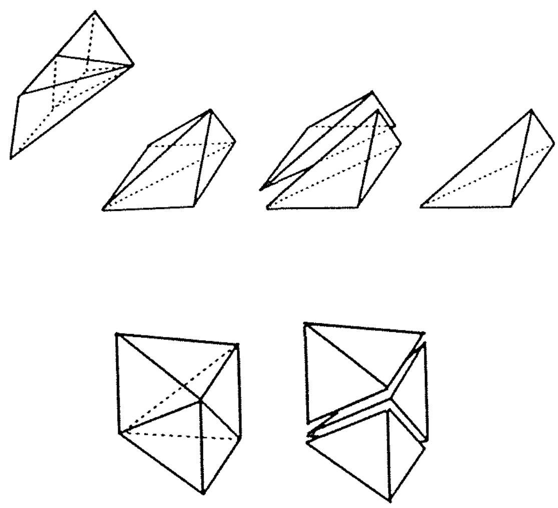
本研究で開発した具体物は，児童の感覚的な把握を容易にするために，直角三角形を底面とする三角錐を考え，それは以下に示す，既によく知られた四角錐と四角柱の具体物をもとに，その一辺に沿って切断することによってできる三角錐を具体物として開発したものである。これは，３つの三角錐を組み合わせることによって，同底・等高の三角柱を作り上げることが可能であり，四角錐と四角柱の考察においても用いることができるばかりでなく，児童の納得のいく構成活動への展開が可能であることから考えたものである。

四角柱の上面の実線及び四角柱の内部の点線によってできる平面で切断すると，６片の四角錐に分割される。それらの２片を組み合わせると同底・等高の四角錐が３組構成されるのである（図―３）。



図―３　四角柱と四角錐の関係

６片のうちの１片に着目して図―４のように２分割し，さらに２分割してできる三角錐を，「推測２」の構成活動の単位とするのである。つまり，三角柱と同底・等高の三角錐の間には，図―４にみられるような関係が存在するのである。



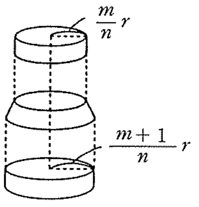
図―４　三角柱と三角錐の関係

III　錐体の体積公式の意味

1　錐体の体積の発見[3][4][5][6]

錐体の体積，球の体積・表面積の求め方は，古代ギリシャでデモクリトス（BC460年頃～370年頃)，ユウトクスス（BC409年～355年)，アルキメデス（BC287年～212年）によって，発見・証明されている。そこでの考え方は，原子論的考え方と呼ばれるものである。数学における原子論的考え方というのは，例えば，直線や円を点という原子の集まりとみたり，錐体を底面に平行な薄片という原子の集まりとみたりして考察する方法のことである。デモクリトスは，錐体を底面に平行な薄片に切りそいで考察したものと，今日では推測されている。その論法は，現在区分求積法と呼ばれるものである。次に，数学的な円錐の体積の求め方を示す。

円錐を底面に平行な平面で切って，薄い円盤に分解する。底面の半径をｒ，高さをｈとする。ｈをｎ等分して，その分けた点(m･h)/n（m＝１，…，ｎ－１）を通って底面に平行な平面で円錐をｎ個の薄い部分に分ける。この各部分は円盤ではないが，円盤に近いものになる（図－５)。



図－5

よって，上の円の半径は，

$$\frac{\frac{m}{n}\cdot h}{h}\cdot r=\frac{m}{n}\cdot r$$

となり，同じ高さをもち，上の円を底面とする円柱の体積は，

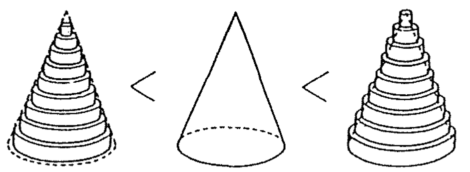
$$\pi\cdot\left(\frac{m}{n}\cdot r\right)^2\cdot\frac{h}{n}=\frac{\pi m^2r^2h}{n^3}$$

である。

下の円の半径は$\frac{m+1}{n}\cdot r$で，同じ高さの円柱の体積は，

$$\pi\cdot\left(\frac{m+1}{n}\cdot r\right)^2\cdot\frac{h}{n}=\frac{\pi(m+1)^2r^2h}{n^3}$$

となり，求める体積は上の円柱と下の円柱の間にあるから，以下の関係が導かれる（図－６)。



$$\frac{\pi(0^2+\cdots\cdots+(n-1)^2)r^2h}{n^3}<\triangle<\frac{\pi(1^2+\cdots\cdots+n^2)r^2h}{n^3}$$

$$\frac{\pi\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}r^2h}{n^3}<\triangle<\frac{\pi\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}r^2h}{n^3}$$

$$\frac{\pi r^2h}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)<\triangle<\frac{\pi r^2h}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

図－6

ここで分け方を次第に細かくしていくと，つまりｎを次第に大きくしていくと，円錐の体積の左右の式は，どちらも(πr²h)/3の値に近づいていく。

$$\frac{\pi r^2h}{6}\cdot1\cdot2\leqq\triangle\leqq\frac{\pi r^2h}{6}\cdot1\cdot2$$

$$\frac{\pi r^2h}{3}=\triangle=\frac{\pi r^2h}{3}$$

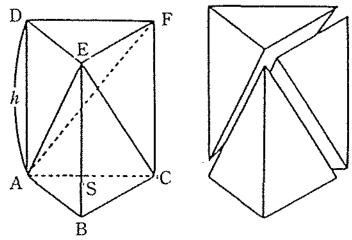
よって，体積は(πr²h)/3となる。

πｒ²hは円柱の体積であるから，円錐の体積はその３分の１であることがわかる。

2　錐体の体積公式の意味

矢野健太郎氏は，「中学生に納得がいく程度の，いささか理論的な説明がほしい」として，次のような提案をしている[3]。

底面積をＳ，高さをｈとする直三角柱ＡＢＣ－ＤＥＦを考え，ＡとＥ，ＡとＦ，ＥとＣを結べば，３つの三角錐に分けることができる（図－７)。これは，前章で示した図－４である。



図－7

そのとき，３つの三角錐は互いに底面の面積が同じで，高さも同じになっているとみることができる。そこで，カバリエリの原理から導かれる「同じ底面をもち，高さも等しい２つの角錐は同じ体積をもっている」を証明しないで認めることによって，一般の三角錐Ｅ－ＡＢＣの体積Ｖは，Ｖ＝1/3･Shとなり，それを一般の多角錐に適用し，最後に円錐を求めることによって，錐体の体積は同底，等高の柱体の３分の１になることを理解させようとしている。

カバリエリの原理とは,「２つの立体をある定まった平面に平行な平面で切ったとき，常に切り口の面積が等しいならば，２つの立体の体積は等しい」というものである。

この提案全てを受け入れることはできない。なぜなら，カバリエリの原理を理解するための教具は示されているものの，小学生には理解が難しいように思われるからである。

そこで,「直三角柱を３つの同体積の三角錐に分けることができ，しかも，同底，等高になっているとみることができる。」というアイデアを発展させて，小学生に納得のいく×1/3，÷３の意味を考えてみることにする。

直三角柱（底面が直角三角形である三角柱）が３つの同じ体積の三角錐に分けることができるということは，それを２つ合わせたものが四角柱（直方体）である。つまり，四角柱も同じ体積の３つの四角錐に分けることができるということである。また,「直三角柱が３つの同体積の三角錐に分けることができ，しかも，同底，等高になっている」という性質が成り立つのであるから，底面が正三角形の三角柱，底面が直角三角形でない不等辺三角形の三角柱についても成り立つことが予想され，実際に切ってみると，確かに，今述べた性質は成り立つことがわかるのである。

以上の考察により，本研究の授業展開においては，小学校段階での取り扱いを考慮して，×1/3，÷３の意味づけを次の２点とした。

①実験・実測によって，錐体はその錐体と同底・等高の柱体の体積の３分の１であることを推測する。

②側面が底面に垂直である，どんな三角柱・四角柱でも，同じ体積の３つの三角錐・四角錐に分けることができる。したがって，(柱体の体積)×1/3，÷３としてもよい。

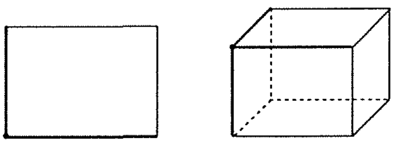
ここで問題になるのは，文部省の指導内容との整合性をどうつけるかである。文部省は，角錐については正角錐，円錐については直円錐を考えている。しかも，各教科書会社が扱っている錐体は直錐体(側面が合同な二等辺三角形になっている錐体)である。

１つの柱体から合同な３つの直錐体ができれば，÷３の理解はしやすいができない。ここでは，任意に与えられた三角形から長方形に帰着させた考え方の逆を考え，与えられた三角柱，四角柱（直方体）を，３つの同体積の三角錐，四角錐に分けることができないかを考える。そして，分けることができることをもって，÷３の意味づけを行い，また，÷３のできる理由にしようとするものである。しかも，それが同底・等高であれば，三角形の面積公式と対比させて，底面積と高さが等しい錐体の体積は等しいことを理解させたいと考える。このことをもって，直錐体の体積を導くのである。

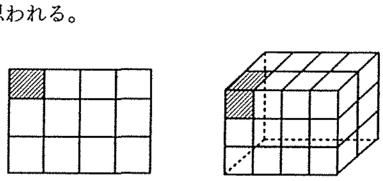
Ⅳ　実践への具体化と指導展開案

1　推測の構成

立体の求積を考える場合，児童はまず立体を観察することから始まる。そして，その観察は立体を構成する辺の長さや角の大きさについてである。それは，体積を求めるに当たって体積を直接の考察の対象とするよりは，むしろ立体の大きさが何に依存するかを考え，また，より入手しやすい量としての辺の長さに着目することによって，ものごとの本質を見抜いていく数学的な見方・考え方がもたらされると思われるからである。そして，もし既習の面積の求積において経験した数学的な活動が想起されるならば，１つの頂点に集まる三辺の長さへの着目は，より一層容易になる。



また，長方形の内部にすき間なく詰められた単位の正方形の個数を求めた数学的な活動の経験からは，直方体の内部に詰められる立方体の個数を求める活動への着目も容易にもたらされるものと思われる。



さて，私達がある事柄Ａについて考察を加えようとするとき，Ａを考える何かもとになるものがあるはずである。仮にそれをＢとする。すると，Ｂをもとにして A を考えていくことになる。ここでは，これを「ＡとＢを対比して考える」，または「ＢからＡを類推する」ということにする。そして，このことは単純にＡとＢを比較することによって，Ａの特徴を知ることであってもよい。また，Ｂの性質をもとにＡを考えることであってもよいとする。

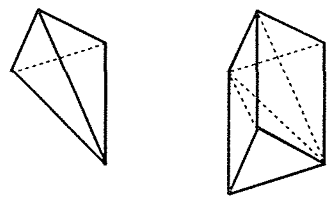
このように設定されたＢとの対比，あるいはＢからの類推によって，Ａを考える出発点とすることは，学習指導において，以下のような利点が児童にもたらされるものと考える。

① 考察に際して，学習内容（対象）は異なるものの，同じような数学的な経験が展開されるので，学習対象への働きかけが容易となる。

② 学習内容に対して，既習の知識・技能及び見方・考え方が機能しやすくなり，数学的な活動自体が明確になる。

③ 対比・類推を意識することによって，そこで生み出される数学的な活動及び獲得される数学的な内容は，関連づけられた知識（確かな知識）内容となる。

本実践への具体化に向けては，Ⅱ.2で示した観察の対象としての錐体と，これに同底・等高の柱体を対比させることによって，児童にとって感覚的ではあるが，およそ錐体の体積が柱体の1/3になるのではないかという推測を構成させる。もちろん，児童の中には錐体(A)は柱体(B)の1/2，あるいは1/4になるのではないかという推測も予想される（推測１）。



いずれにしても，これらの推測をもとに，もし仮に錐体の体積が柱体の1/3とするならば，錐体(A)を３つ合わせることによって，同底・等高の柱体ができるのではないかと言い換えの過程を通して，柱体を構成する具体的な活動へつなげるものである（推測２）。同様に，もし仮に1/2あるいは1/4とするならば，やはり，錐体(A)を２つ，あるいは４つ合わせて柱体を構成する活動が同時に展開されるのである。

実際，この推測２に対応する柱体の構成活動は，一般に行われている実験･実測の活動（例えば，錐体の中に水や砂を入れ，何倍で柱体を満たすか）に比べてはるかに児童にとっては難しい。しかし，そこには図形に対する見方・考え方としての構成要素への着目をはじめとして，例えば垂直な辺が交わる１つの頂点が柱体を構成したときの外側に表れることや，錐体の側面が三角形であることから柱体においてはこれら２つの側面を合わせることなど，多くの数学的な見方・考え方がもたらされるものと思われる。これらの見方・考え方は，柱体を構成する活動において一層錐体の観察を深める機会になるものと考えるのである。

また，ある推測をもとに，もし仮にその推測が成り立つものとして生産的に思考を進め，学習を展開していくことは，その具体的な数学的な活動自体に目的を見いだすことができ，さらに発見の喜びと創造の驚きがもたらされるものと考える。

2　本時の指導展開案

本単元は，立体の表面積から柱体の体積，そして錐体の体積という流れの中に位置づけたものである。そして，錐体の体積＝柱体の体積÷３，あるいは柱体の体積＝錐体の体積×３の式の意味を，上述してきた具体的な数学的な活動を通して理解させていくものである。

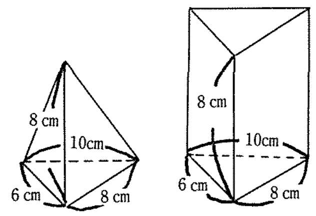
(1)本時の目標（第２次第４時）

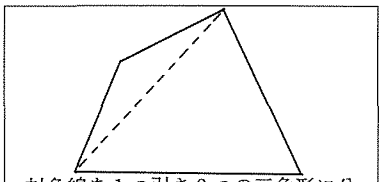
錐体の体積は，その錐体と同底・等高の柱体の体積の３分の１であることがわかる。

・錐体の体積が柱体の体積の３分の１であるということは，同体積をもつ３つの錐体を合わせることで柱体ができることを知る。

・また，錐体の体積が柱体の体積の3分の1であるということは，同体積をもつ3つの錐体に分けられることを知る。

(2)学習過程

学習活動と発問	子どもの反応と取り組み	教師の支援
1　三角錐，四角錐，円錐の体積を考えるための対象物を決定する。 T　錐体の体積を知りたい。他のどんな立体と対比して考えればよいだろうか。それはなぜだろう。	C　底面が合同，即ち，底面積が等しく，高さが等しい柱体を考えればよい。錐体の体積は，直接測定できそうもないから，求めることができる柱体の体積のいくらになっているか考えればよいと思うから	1　既習事項の中で，直接測定できないものを直接測定できるもので表現したものが想起できるようにする。 できないもの―できるもの ・面積―辺の長さ，半径 ・体積―辺の長さ ・速さ―道のりと時間 ・円周―直径
2　三角錐の体積は，三角柱の体積のどれぐらいになるか推測する。 T　直接錐体の体積は考えられないから，考えやすい物（柱体）を基にして推測しよう。 三角柱の○<三角錐 三角錐<三角柱の□ 根拠を明らかにして，○や□に合う数を考えなさい。	 C　三角柱の$\frac{1}{4}$<三角錐 三角錐<三角柱の$\frac{1}{2}$	2　面積から推測できるようにする。 ・一側面の面積から ・側面積から ・表面積から ・切り取って残りと比べて
3　教師実験によって，三角錐の体積は，同底，等高の三角柱の体積のだいたい$\frac{1}{3}$になることを知る。 T　三角錐の体積は，三角柱の体積の$\frac{1}{3}$になることが正しいとしたら，三角錐の体積を求める式は，言葉でどう表現できますか。	C・(三角錐の体積)＝ (三角柱の体積)×$\frac{1}{3}$ ・(三角錐の体積)＝ (三角柱の体積)÷3 ・(三角錐の体積)＝ (底面積)×(高さ)×$\frac{1}{3}$ ・(三角錐の体積)＝ (底面積)×(高さ)÷3	3　$\frac{1}{3}$が正しいとしたとき，いろいろな公式を思い出し，言葉の式が作れるようにする。
4　三角錐の体積が三角柱の体積の$\frac{1}{3}$になるとしたら，それはどういうことか考える。 T　三角錐の体積が三角柱の体積の$\frac{1}{3}$になることが正しいとしたら，4つの式は何を意味しているだろうか。	C　三角柱を，3つの同体積の三角錐に分けることができるということです。 C　同体積の三角錐3つで，1つの三角柱ができるということです。	4　式変形に目を向けるようにし，式を具体的に読むことができるようにする。 ・(三角柱の体積)＝ (三角錐の体積)□( ) □には演算記号，( )には数を入れることができるようにする。 ・÷3，×3の意味を想起できるようにする。
5　同体積の三角錐3つで，1つの三角柱ができることを知る。与えられた3つの三角錐が同体積であることを知る。 T　3つの三角錐を見て気づいたことはありませんか。	・同体積の三角錐3つで三角柱を作る。 C　底面積と高さが等しい。	
6　四角錐の体積を求める式を考える。 T　(三角錐の体積)＝ (三角柱の体積)×$\frac{1}{3}$が正しいとすると，	C　(四角錐の体積)＝ (四角柱の体積)×$\frac{1}{3}$	6　四角形の内角の和，四角形の面積を求めるときに，三角形に分割して考えたことが想起できるようにする。

学習活動と発問	子どもの反応と取り組み	教師の支援
四角錐の体積を求める式はどうなりますか。それはなぜですか。	となります。四角錐を縦半分に切ると，2つの三角錐に分けることができます。それぞれが，三角柱の$\frac{1}{3}$で，三角柱2つで四角柱ができるから，四角錐の体積は四角柱の体積の$\frac{1}{3}$になります。	 対角線を1つ引き2つの三角形に分けて考えましょう。
T　この式の意味は何ですか。	C　四角柱を，3つの同体積の四角錐に分けることができるということです。 C　同体積の四角錐3つで，1つの四角柱ができるということです。 ・3×3×3の四角柱を3つに分けた四角錐が同体積であるという実験を見る。	・同体積の四角錐3つで四角柱ができることを操作によって実感できるようにする。
T　3つの四角錐を見て，どんなことに気づきますか。	C　底面積と高さが等しい。 ・3×3×4の四角柱を3つに分けた四角錐が同体積であるという実験を見る。 ・3×4×5の四角柱を3つに分けた四角錐が同体積であるという実験を見る。	・同体積の四角錐3つで四角柱ができることを操作によって実感できるようにする。 ・同体積の四角錐3つで四角柱ができることを操作によって実感できるようにする。
7　三角錐，四角錐の体積の学習でわかったこと，新たな問いを考える。 T　自己評価をした後，ノートにわかったこと，問いをかきなさい。	C　同体積の錐体を3つ合わせると，1つの柱体ができる。5角錐でもできるだろうか。 C　底面積と高さが等しい錐体は，体積が本当に等しくなるだろうか。	7　よくわかったこと，納得のいかないこと，疑問に思ったことを出させるようにし，理解を深めることができるようにするとともに，問題意識の継続・深化を図ることができるようにする。

Ⅴ　指導の実際

1　教師の支援

立体の表面積→柱体の体積→錐体の体積という順で学習を進める。本時までに柱体の体積を学習しているから，錐体の体積はどうなるのだろうという問題意識はもっている。そこで，錐体の求積を考えるに当たって，何と対比して考えればよいのだろうか。どのように考えて導き出せばよいのだろうか。なぜ，そうなるのだろうか。そのような問題意識をまずもたせたい。

「錐体の体積はそれと同底・等高の柱体の体積の3分の1である」という予想に至るまでの実験は，本時の目標を達成させるための大きな支援である。なぜならば，「なぜ3分の1になるのか」という問いに対する解答は，実験結果を真として活用するだけの授業では理解が浅いと思われるからである。

そこで，(錐体の体積)＝（柱体の体積）÷3

(柱体の体積)＝（錐体の体積）×3

の意味を追究させることによって理解を深めることを考える。その意味は，三角柱，三角錐で考えると，三角柱をうまく切ると，3つの同じ体積の三角錐に分けることができるということである。逆に言うと，同じ体積の三角錐を3つ合わせると三角柱ができるということである。その事実を示すことが数学的に錐体の体積公式を導くことができない場合の，理解を深めるための支援である。その三角錐を調べると，同底・等高になっているのである。そこに子どもたちにとっての驚きがあると思われるからである。また，このことは問題意識の継続・深化につながるものと考える。

2　授業の実際（◈は授業者のコメント）

◈　柱体と錐体の名前を発表させた後，次のように問い，錐体の体積を考える場合の対象物を決定しようとした。

T　錐体の体積を知りたい。何と比較して，体積を考えたらよいか。

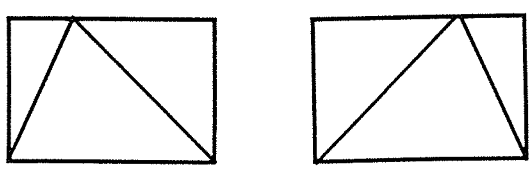
C　柱体と比べてみたらよい。

T　なぜ？。

C　例えば，三角錐と三角柱だったら，比べる時は底面の大きさと高さが同じだったら比べやすいから。

C　柱体と比べてみたらよいと思います。ただし，底面と高さが同じ柱体と比べて，高さと底面が同じということは，柱体の中に錐体を入れてみて，体積は柱体の何倍かということを考えればよいからです。

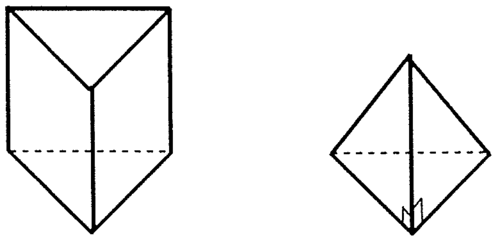
◈　なぜ，同底・等高の柱体と対比して考えるのかを理解させるための支援として，次の図を提示して三角形の面積公式を作ったときの考え方を想起させようとした。



1つの例だけでなく，円周を直径の3.14倍，円の面積を半径を1辺とする正方形の面積の3.14倍と表したことなどを挙

げ，既に知っている量・測定しやすい量を使って，未知なる量・測定しにくい量を表してきた経験を思い起こさせれば，錐体とよく似た柱体を考えることの必然性がよりよく理解されたと考える。これは，「関数の考え」と呼ばれるものである。

◆　ここで，底面が１辺４cmの正三角形，高さが６cmの三角柱と三角錐を与えて，錐体の体積が柱体の体積のどれだけになるかを考えさせた。



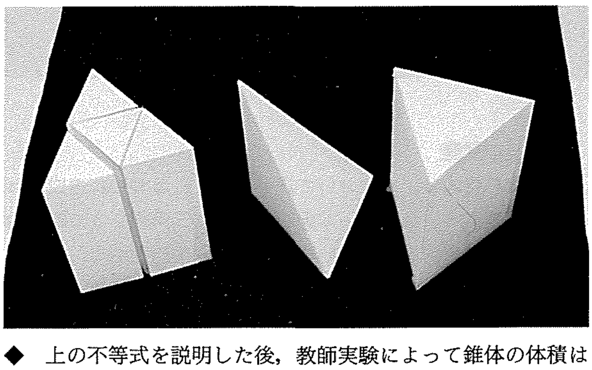
「柱体の□＜錐体＜柱体の△」という不等式の□と△に当てはまる数を考えさせた。授業者は，□＝1/4，△＝1/2を考えていた。自力解決に入って２分後に，体積だけでなく側面積・表面積も小さくなっていることに気づかせ，側面積・表面積で評価するように支援した。もちろん，側面積や表面積で考えさせたねらいは，あくまでも１つの推測を構成させることにあった。しかし，10分間という多くの時間を費やし，また電卓の使用を認めたものの，不等式を作ることは子どもたちにとってやや難しかったように思われた。

1/4については，底面が２cmの正三角形である三角柱（元の三角柱の体積の1/4）の側面積と比較することによった。
（三角錐の側面積は38㎠，三角柱の側面積は36㎠）。

また，1/2 については，側面積，表面積の減った割合を考えることによった。

側面積：38÷72=0.527…，表面積：45÷86=0.523…

子どもの直観に依るところが大きいことを考えるとき，与えた正三角形の１辺や高さの値については再考が必要であり，また上記の計算を子どもたちに強いることも反省しなければならなかったと思われる。



◆　上の不等式を説明した後，教師実験によって錐体の体積は柱体の体積の３分の１になりそうなことに気づかせる。それが仮に正しいとした上で式を作り，その式の意味を考える（式を読む）活動に入っていった。作った式は次の通りである。実験には砂を使った。次頁の写真が実験に使った教具である。

・(三角錐)＝（底面積)×（高さ)×1/3
・(三角錐)＝（底面積)×（高さ)÷３
・(三角錐)＝（三角柱)×1/3
・(三角錐)＝（三角柱)÷３
・(三角柱)＝（三角錐)×３

これらの式の意味を，子どもと教師のやりとりを通して深めていった。

T　これらの式は，どのような意味ですか。まず，かけ算について。

C　底面と高さが同じ，等しい三角錐を３つ合わせたら三角柱になる。

T　「等しい」というのは，何を意味しているのだろう。

C　底面と高さが等しいということです。

T　形が違うということをいっているのか。それとも，同じということをいっているのか。

C　形は同じということです。

T　これ（三角錐）を３つ合わせたら，三角柱ができるということだね。本当だろうか。

T　他に。

C　体積の等しい三角錐の３つ分は三角柱になっている。

T　形についてはどうですか。

C　合わせる３つの形は，同じでなければいけません。

T　○○君，３つ合わせてみて。できないでしょう。

T　今何を問題にしているのですか。

C　三角錐３つの体積と三角柱１つの体積は等しいということです。

T　体積ですね。形については問わない。もし，この式が等しければ，体積の等しい適当な三角錐を３つ合わせたら，三角柱になるということです。

T　わり算について。

C　三角柱を３つの三角錐に分けると，それはみんな体積が等しくなる。

C　三角錐は三角柱を３つに分けた１つ分。

◆　これらの発言でも式が読めているようであるが，曖昧な点がある。それは，「同じ」「等しい」という言葉である。何が同じなのか，何が等しいのかを明確にしないと深い理解は得られない。そのための教師の支援として，「形はどうか」という問い直す発問がでるのである。子どもたちは，形が同じ三角錐，もちろん体積も同じ三角錐を３つ合わせると三角柱ができると理解していた。その間違いを知らせる支援としては，同じ形の３つの錐体を与えて，どのように組み合わせても柱体ができないことを経験させることである。このことによって，今，みんなが考えているのは，形が違っても体積が等しい錐体が３つできるかどうかであるということがわかるのである。

◆　ここで，三角柱を３つの三角錐に切り，次のように発言し，教師実験によってそれらが同じ体積になっていることを確認した。次の教具を与えて，三角柱を作らせたり，三角錐を観察させたりした。

T　次に何を考えなければいけないか。これとこれ（三角柱からできる形の違う三角錐）が同じ体積になっているかどうか確かめないと，三角柱を３つの同じ体積の三角錐に分けることができるという証明にならない。

T　（実験によって）三角柱を３つの同じ体積の三角錐に分けることができるということがわかりますね。

T　体積の他に，３つ三角錐に共通することがあります。それは何でしょう。

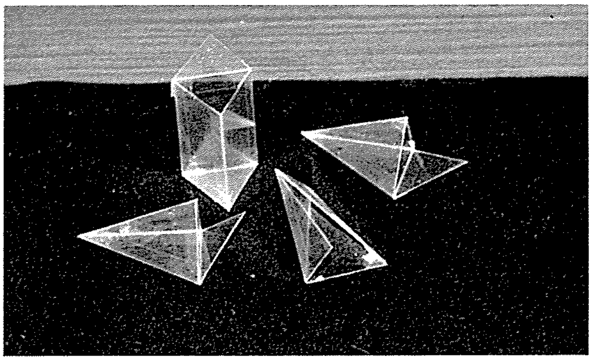
C　この３つの底面積と高さが同じになっています。

T　次に，四角柱について考えてみましょう。四角柱は，体積の等しい３つの四角錐に分けることができるだろうか。

C　できると思う。全ての形は，三角形が基になっていて，三

角柱で3つに分けることができたんだから，四角柱でも分けることができると思う。

◆　立方体を3つの四角錐に分けたものを提示するとともに，子どもたちに与え，組み立てさせたり観察させたりして授業を終える。立方体の場合は，3つの合同な四角錐に分けることができるため，実験をせずに，柱体の3分の1である，即ち，÷3をしてもよいことを理解した。



VI　実践的考察と今後の課題について

1　体積公式のよみと柱体への着目

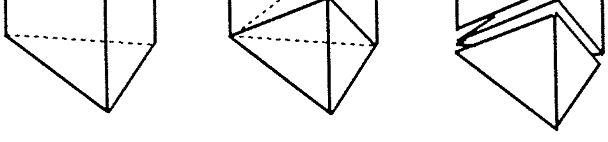
錐体の体積は中学校から移行されてきた内容である。本時は，求積公式を知り活用するという授業になりがちである。実験・実測に頼り，それを通して帰納的に導く方法でなく，「錐体の体積公式の意味」で述べたように，÷3，×3の意味するところをわり算・かけ算の意味に立ち返り考えさせ，そのモデルを提示して理解を図るという新しい授業を提案した。本時の授業での式の読みの中心は，(錐体の体積)＝ (底面積)× (高さ)÷3ではなく，(錐体の体積)×3＝ (柱体の体積) であった。 そこでの子どもたちの反応は，以下の通りであった。

C　底面と高さが同じ，等しい三角錐を3つ合わせたら三角柱になる。

C　体積の等しい三角錐の3つ分は三角柱になっている。

そこで，式を読む段階で，教師の支援として「形」にこだわったのである。形が違ってもよいということを聞いても，子ども達は納得という理解の段階までいっていない。三角柱を3つの三角錐に切ったモデルを見，実験によって同体積であることを確かめ，自分で三角柱に組み立て切ってみて，同体積であることと考え合わせたとき，はじめて÷3ができることを確信したようである。この段階にきて，錐体の体積を考えるために，同底・等高の柱体と対比して考える理由がわかったようである。

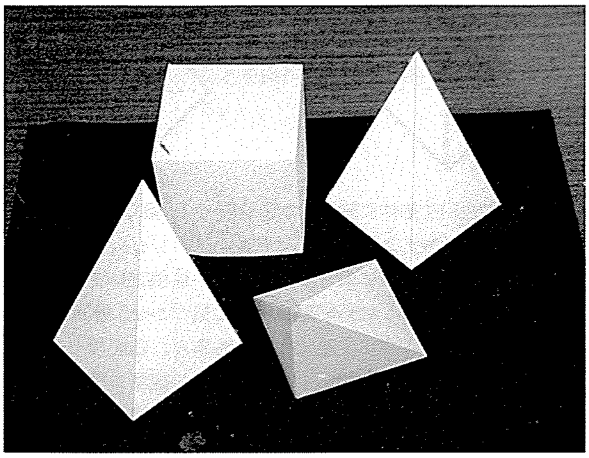
本時では，三角柱，立方体を3つの同体積の三角錐，四角錐に分けることができるモデルを提示し，子どもに組み立させたり分解させたりする活動（図—8）を取り入れたことにより，

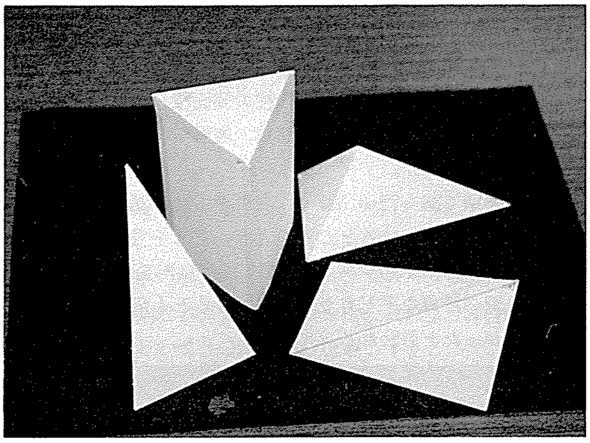


図—8

錐体の体積を考える場合の対象物としての，同底・等高の柱体を考える必然性が理解されたと考える。

さらに，本時扱かった錐体は，教科書のような正角錐，直円錐，直錐体を扱かっていないので，(錐体の体積)＝(底面積)×(高さ)÷3という公式が，底面積と高さが同じであれば体積が同じであることを主張しているのであって，形については何も言っていないということの理解は容易になったと考えられる。実はこのことも，(三角形の面積)＝ (底辺)× (高さ)÷2と対比・類推して考えればわかることなのである。





2　今後の課題

本研究の目的は，1において述べたようにおおむね達成されたものと考える。しかし，本課題であった三角錐を3つ組み合わせて三角柱を構成するという具体的な数学的活動を，一層子どもたちの手による構成活動へと高めていくためには，以下のような課題が残されたと言えよう。

その第1は，錐体の体積は柱体の体積の1/3という事実を活用することのさらなる工夫である。このことの意味を理解するまでの数学的活動を活性化するために，1回の実験結果を仮設として推測1を構成し，式を作り，その式の意味を考える活動を通して，推測2を構成していった。そして，その意味に合うモデルを提示し，分解・構成という操作を行うことによって，錐体の体積公式の意味の理解を深めていった。推測1，言い換え，推測2の構成という質の高い数学的活動及び数学的発見はあるものの，子どもたちの具体的な操作活動による発見が少なかったのではないかという点である。

第2に，数学的活動の活性化を一層考えるならば，式の意味

にあったモデル作りを考える活動を子どもたちの手にゆだねることを考えたい。そのための手がかりは，子どもの「三角柱を３つの三角錐に分けると，それはみんな体積が等しくなる。」という，わり算の式のよみである。本当に３つの三角錐に分けることができるのか，本当にそれらは同体積になっているのか，という２つの問いの追究を子どもたちにゆだねられるならば，柱体への理解を深めることができ，三角柱には３つの同じ体積の三角錐が隠れているという子どもたちにとって驚くべき事実を発見することにつながったと思われるからである。このことは，与えた三角柱のどの部分が与えた三角錐なのかをはっきりさせるために，側面の長方形に対角線を入れてた子どもの活動を取り上げ，深めるべきであったと思われるからである。

第３に，対比・類推による学習指導の定義と効果については，Ⅳ.実践への具体化と指導展開案「１.推測の構成」で考察した通りである。この学習指導は，本時のみに限るものではない。例えば，円柱の体積を考える場合であれば，円と円柱を対比させ，扇形に分けるというアイデアから類推し，扇柱に分けるというアイデアを生み出すことができるのである。子どもたちに自分なりの考えをしっかりもたせ，自らの考えを検証していく展開を工夫するならば，その過程において，子どもたちは推測の構成の仕方と合わせて，検証の手続きをも学ぶことができるのではないかと考えるからである。

最後に，本研究は錐体の求積公式について，単なる実験・実測の活動による理解にとどまらず，より数学的に豊かな活動としての推測２による柱体の構成活動を提案し，それを支える教材・教具の開発に努めた。今後は，上で述べたように式の意味に合うモデル作りを考えるとともに，柱体の多様な構成の仕方を考えていくことも課題である。

引用・参考文献

(1)　啓林館指導書　第二部　６年下　平成４年度版 p.143
(2)　文部省「小学校指導書算数編」東洋館出版 1989.6 p.44
(3)　遠山啓著「数学入門（下）」岩波書店 1960年
(4)　村田全，茂木勇著「数学の思想」ＮＨＫ 1966年
(5)　矢野健太郎著「数学史」科学新興社 1967年
(6)　矢野健太郎著「幾何学の歴史」ＮＨＫ 1972年
(7)　矢野健太郎著「数学者の手帳」新潮社 1977年 PP.133-136
(8)　拙者「蓋然的推論の論理展開と推測の構成」鳥取大学教育学部研究報告(教育科学)第36巻第２号1994.12　pp:245-261

ABSTRACT

The current Japanese Course of Study for elementary school included the teaching of pyramid volume, which used to be taught at the Lower Secondary level, at the 6th grade.

This paper tries to offer an improved instruction method for teahing the formula of pyramid volume, along with appropriate teaching materials to ensure correct understanding of this subject matter.

The following contents have been discussed in this paper;

(1) An instructional method for teaching triangular pyramid volume.
(2) Instructional materials and learning devices.
(3) Discussion and evaluation of the new instructional method and materials.