第一階論理の特徴

田　畑　博　敏

はじめに

われわれは言語を用いて世界を記述する。すると、当然のことに、記述内容や記述様式は用いる言語の表現能力に依存する。論理や数学で用いられる標準的な言語としての第一階（述語）論理の言語（第一階言語）には、ある種の制約があり、そのことにより、記述される世界（構造）の姿が多様な仕方で現れる。本論では、この第一階論理が持つ言語としての表現能力の特徴を考察する。第一階論理が描く世界は、構造$\mathfrak{I}$＝〈A、$\langle f_i\rangle_{i\in I}$、$\langle R_j\rangle_{j\in J}$〉として与えられる。構造$\mathfrak{I}$とは、対象の領域としての非空の集合 A と、A 上で成り立つ関数 f_i(の列)および関係 R_j(の列)の三組から構成される抽象的な世界である。言語としての第一階論理は、文結合子と量化子という論理語に加え、個体を表す項（定項と変項）および述語記号と関数記号を備え、項と式（文）の形成規則と計算体系とが整備されている。さらに、これらの言語が取る値（＝意味）が形式的な意味論（モデル論）として用意されている(1)。個体項にのみ量化の作用範囲を限定するという第一階言語の制約によって、第一階論理には表現できることとできないことがある（その代表的な例を第１節で見る）。しかし、制約があるとはいえ、第一階論理は、よく研究されている多くの数学的な構造を、公理と呼ばれ構造を定義する有限個の文の集合を与えることで、充分よく表現する能力を持つ（第２節）。そのような第一階論理には、これを形式的体系と見たとき、さまざまなメタ定理が成り立つ。このことも、第一階論理の特徴の一つである。特に、コンパクト性定理は、第一階論理の言語としての表現能力に関わり、例えば、「有限性」や「無限性」といった性質の公理化可能性（＝定義可能性）に直結する（第３節）。しかし、レーベンハイム・スコーレム定理というメタ定理は第一階論理の表現力の弱さ・欠点ともみなされる一方で、このメタ定理から帰結する非標準モデルに関わる多様な結果は、論理の方法が持つ有効性を実証するものである（第４節）。以下では、このような形で、第一階論理の著しい特徴のいくつかを取り上げ、それらの哲学的意義を考察する。

１．第一階論理で表現できること、できないこと

第一階論理で表現できることのうちには、数に関するいくつかの概念や命題がある。

１．１ 「少なくとも」(at least)

「少なくとも n 個の対象（＝領域の要素）が存在する」という概念（これをϕ_nと表す）は、以下のように、第一階論理の（等号‘＝’を含む）論理記号だけで表現できる：

$$\varphi_n \equiv \exists y_1 \exists y_2 \cdots \exists y_n \bigwedge_{1 \le i < j \le n} y_i \neq y_j$$

（ここで、‘≡’は左辺の概念が右辺で定義されるということを示すメタ言語のつもりであり、同一性を主張するのが目的ではない。以後も使用する。）
n を数詞を予想する変項と見ると、φ_n は n についての（第一階の）概念となるが、n に具体的な数詞を代入すると、ある具体的な個数以上の対象の存在を主張する命題が得られる。例えば、n＝３の場合は、「少なくとも３個の対象が存在する」という命題が、

$$\varphi_3 \equiv \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \ (y_1 \neq y_2 \wedge y_1 \neq y_3 \wedge y_2 \neq y_3)$$

と表現される。

１．２ 「たかだか」(at most)

また、「たかだか（多くとも、せいぜい）n 個の対象しか存在しない（0 個の場合も含む）」という概念は、以下のように、第一階論理の言語で論理的に表現できる：

$$\chi_n \equiv \forall x_0 \forall x_1 \ldots \forall x_n \bigvee_{0 \le i < j \le n} x_i = x_j$$

n に具体的な数詞、例えば‘３’を代入して、n＝３として χ_3 を作れば、これは「たかだか３個の対象しか（領域には）存在しない」という命題を表現する：

$$\chi_3 \equiv \forall x_0 \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_0 = x_1 \vee x_0 = x_2 \vee x_0 = x_3 \vee x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \vee x_2 = x_3)$$

「少なくとも n 個存在する」が丁度 n 個の変項を用いて連言で表現されるのに対して、「たかだか n 個しか存在しない」の方は１個多い n+1 個の変項を用いて選言で表現できるという違いはあるが、いずれも類似の仕方で数概念を、第一階の論理記号のみを用いて表現することができる。

１．３ 「丁度 n 個存在する」と有限・無限

以上の二つの数概念、すなわち、「少なくとも n 個の対象が存在する」という概念と「たかだか n 個の対象しか存在しない」という概念を用いて、すなわち、それらの表現を連言で結合することにより、「丁度 n 個の対象が存在する」という概念を、$\varphi_n \wedge \chi_n$ として表現できる：

$$\begin{aligned}\varphi_n \wedge \chi_n \equiv & \exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_n \bigwedge_{1 \le i < j \le n} y_i \neq y_j \\ & \wedge \forall x_0 \forall x_1 \ldots \forall x_n \bigvee_{0 \le i < j \le n} x_i = x_j\end{aligned}$$

言い換えると、有限の個数についての概念を第一階論理は表現できる。「丁度 n 個の対象の存在」を表現するとき、具体的に数値を決定していないとはいえ、「n 個」の‘n’はあくまで一定の、固定された有限の数が意図されている。従って、有限性そのもの（有限性一般）を表現している訳ではない。では、「有限性」は第一階論理の言語で表現できるのか。これはできないこと、たとえ無限個の論理式を使ってもできないこと、が分かっている。さらに、「無限性」はどうか。「無限個の多

くの対象が存在する」ということを、無限個の定項を援用し、無限個の論理式を用いれば表現できる。定項を援用しないで純粋に論理的な言語で無限性を表現する方法として、よく知られたデデキントの定式化がある。すなわち、ある集合（領域）A が無限である（無限の要素を含む）とは、A から A 自身の真部分集合の上への（＝その部分集合全体をカヴァーする）単射（異なる要素を異なる要素へと移す写像＝１価関数）が存在する、というのがその定義の仕方である。A が有限集合であれば、A の真部分集合の要素の個数は A 自身の要素の個数より小さくなるから、対応させる先の要素の個数が少なくなってしまう。ところが、単射は定義域の要素の「多さかげん」をそのまま保って対応させるから、有限集合の相手先の要素の数が足りず、重複せざるを得ない。よって、単射は存在しえない。そういうことができるのは無限集合にかぎる。そこで、これが無限集合たること（「無限性」）の定義と見なされる。しかし、これを表現するには、一階の論理言語ではできない。全称記号‘∀’を関数（または関係）記号にも作用させる二階の量化が必要があり、（少なくとも）二階の論理言語に訴えざるを得ないからである。

しかし、本論では、第一階論理の表現力の弱さを、高階論理でどう克服するかという問題ではなく、そのような表現力の制約にも関わらず、第一階論理の持つ柔軟性と多様性を追究することを目指す。そこで、次節で、第一階論理の公理化可能性、すなわち、どのような概念を定義できるかということの具体例に当たる。

2. 公理化可能性

論理言語が有効に用いられるのは、例えば、数学的構造をいかに正確に定義するか、という場面においてである。数学的構造で成り立つ（＝真である）文を体系的に含意する原理的文を公理とみなし、そのような構造で真である文と公理との集合を、理論（theory）と見なす。例えば、群（group）という代数的構造において、それが群である限りにおいて成り立つ事柄の言語的表現（＝文）の集合が、群の理論である。逆に、いくつかの原理的命題（＝公理）とその帰結の集合（＝理論）を成り立たせる構造、つまり群の構造は、そのような理論のモデルである。こうして、論理言語には、そのような理論の中核となる概念や命題を、または理論のモデルである構造のあり方を、原理化ないし公理化という仕方で定式化する（定義する）ことが求められる。第一階論理には、概念や構造を定義し公理化できる能力がどの程度備わっているのか？以下、公理化可能な性質、公理化可能な構造、公理化可能な理論という三つの観点から、第一階論理の定義能力を調べよう。

2．1　公理化可能な性質(axiomatizable property)

構造の持つある性質が公理化可能である（第一階論理で定義可能である）ということはつぎのように定義される。

２．１．１　定義

性質 P が**公理化可能な**（axiomatizable）性質である

⇔言語 L が存在し、L の文の決定可能な集合 Σ（$\Sigma \subseteq \mathrm{SENT(L)}$）が存在して、

（$\forall \mathfrak{C}$）$\mathfrak{C}$が構造であるならば、$\mathfrak{C}$が Σ のモデルである（$\mathfrak{C} \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$）⇔$\mathfrak{C}$が P をもつ。

この定義の言わんとすることは以下のようなことである。性質 P は構造$\mathfrak{C}$が持つ性質であるから、そのことと、P を言語的に表現する文がその構造で成り立つこととが同じことになるような、文の集合がなければならない。しかも、この文集合は、任意の文が当該集合に属すか否かを有限回のス

テップで判定できるような手続き（決定手続き）を備えたものでなければならない。

さらに、ある性質が有限の言語で公理化可能である（＝記述する文である公理が有限個で済む）ことは、つぎのように定義される。

2．1．2 定義

性質Pが**有限的に公理化可能**（finitely axiomatizable）である

⇔Pが公理化可能な性質であり、しかも（Pを記述する）公理の集合が有限集合である。

いくつかの実例を見よう。

（1）「無限性」、すなわち、構造の要素の数が無限個在ることの表現は、先のφ_nを、すべての自然数nごとに具体化することによって得られる。すなわち、定義2.1.1での文の集合Σを、

$$\Sigma=\{\varphi_n \mid 1<n\}$$
$$=\{\varphi_n \equiv \exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_n \bigwedge_{1\le i<j\le n} y_i \neq y_j \mid 1<n\}$$
$$=\{\exists y_1 \exists y_2 y_1 \neq y_2,$$
$$\exists y_1 \exists y_2 \exists y_3\ (y_1 \neq y_2 \wedge y_1 \neq y_3 \wedge y_2 \neq y_3),$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \}$$

とすることで表現できる。公理の集合Σの要素は第一階論理の言語で記述された文であり、任意の文がΣに属すか否かを決定する方法もあるが、Σの要素の個数は無限個である。このように、第一階論理で「無限性」を表現するには無限個の論理式を必要とするのであり、有限個の公理では表現できない。よって、「無限性」という性質は第一階論理で公理化可能ではあるが、有限的に公理化可能ではない。これについては、第3節で再考する。

（2）「n個の要素を持つ（$0<n$）」という性質は有限的に公理化可能である。実際、$n=1$のとき、構造の領域が空ではないと仮定すれば、$\forall x \forall y\ (x=y)$により、その仮定がなければ、$\exists x \forall y\ (y=y \rightarrow y=x)$によって、それぞれ表現できる。また、$1<n$のとき、$\varphi_n \wedge \chi_n$によって表現できる。それゆえ、（構造の領域が非空であると仮定して）

$$\Sigma=\{\ (\varphi_n \wedge \chi_n)\ \vee \forall x \forall y\ (x=y)\ \}$$

とおけばよい。

（3）「無限性」の公理化に関して、いくつかの注意すべき論点がある。「少なくとも2つの元を持つ稠密で(dense)かつ線形順序(linear order)をなす順序構造」という概念は、以下の文γ_1～γ_6の連言によって公理化可能である。

$\gamma_1 \equiv \forall x\ (x \leqq x)$・・・反射性

$\gamma_2 \equiv \forall x \forall y\ (x \leqq y \wedge y \leqq x \rightarrow x=y)$・・・反対称性

$\gamma_3 \equiv \forall x \forall y \forall z\ (x \leqq y \wedge y \leqq z \rightarrow x \leqq z)$・・・推移性

$\gamma_4 \equiv \forall x \forall y\ (x \leqq y \vee y \leqq x)$・・・比較可能性

$\gamma_5 \equiv \forall x \forall y\ (x \leqq y \wedge x \neq y \rightarrow \exists z\ (x \leqq z \wedge z \neq x \wedge z \leqq y \wedge z \neq y))$・・・稠密性(density)

$\gamma_6 \equiv \exists x_1 \exists x_2\ (x_1 \neq x_2)$・・・少なくとも2個の要素があること

これらの公理が実現した（これらの公理が成り立つ）構造はすべての要素の個数が無限でなければならない。つまり、これらの公理（とその帰結）に対する有限モデルは存在しない。仮に、有限モデルがあったとする。順序が線形順序であるから、各要素に自然数の番号を付して一列に並べることができるはずである。しかし、隣り合う番号を持つ隣り合う要素e_1とe_2の間に第三の要素は存在しないから、γ_5の稠密性が成り立たず、当の有限モデルがγ_1～γ_6のすべての公理を満たすという仮定に矛盾する。よって、有限モデルは存在しない。だが、$\Delta \equiv \{\gamma_1、\gamma_2、\gamma_3、\gamma_4、\gamma_5、\gamma_6\}$と

するとき、Δのモデルが必ず無限モデルとなるからといって、この集合Δが「無限性」を公理化する公理系と言えるだろうか？答えは NO である。なぜなら、無限構造がすべて稠密な(dense)構造である必要はないからである。例えば、構造〈ℕ、≦〉は無限構造である（領域の要素の個数が無限個ある）が、その順序は稠密ではない（自然数は離散的に存在するから稠密ではあり得ない）。

以上のことに関連して、算術の公理系$\Gamma=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$を考える。$\alpha_1$～$\alpha_3$の公理はつぎのものである（ここで、cは定項、fは関数記号である）：

$\alpha_1 \equiv \forall x\ (c \neq fx)$・・・「cは最初の元である」、または「cはfの値域に属さない」

$\alpha_2 \equiv \forall x \forall y\ (fx=fy \rightarrow x=y)$・・・fの単射性

$\alpha_3 \equiv \forall y\ (y \neq c \rightarrow \exists x\ (y=fx))$・・・「c以外の要素はすべて何かの後者である」

この公理系（公理集合）Γのモデルとなる構造は必ず無限構造である。だからといって、「無限性」の公理化がこの公理系Γでなされる訳ではない。Γのモデルとしては、構造〈ℕ、0、s〉がある。0（ゼロ）が定項cの解釈となり、後者関数sが関数記号fの解釈である。後者関数sは、ℕからℕ自身の真部分集合の上への単射である。まさに無限構造であるから、そのような単射である関数が存在しうる。しかし、Γのモデルとならない無限構造〈ℕ、0、I〉および〈ℕ、0、f_0〉が存在する。ここでIは同一性関数：$I(x)=x$、f_0は定数値関数0：$f_0(x)=0$である。構造〈ℕ、0、I〉および〈ℕ、0、f_0〉が持つ関数Iとf_0は、いずれも、ℕからℕ自身の真部分集合の上への単射では**ない**。それにも関わらず、これらの構造は無限構造である。このことが意味することは、公理系Γは、これら三つの構造：〈ℕ、0、s〉、〈ℕ、0、I〉、〈ℕ、0、f_0〉に共有された「無限構造である」という性質を定義してはいないということである。公理系Γが公理化したのは、ある特定の無限構造の、特定の定項の特定の性質と、特定の関数sの（無限構造でしか持ち得ない）特定の性質とである。無限構造でしか持ち得ない特定の性質とは、まさに、「自分自身の真部分集合の上への単射である」ということであるが、このような単射がその構造に「ありうる」ということが、無限構造の「無限性」に他ならない。それが、あらゆる無限構造に共有された性質である。しかし、「ありうる」ということを言語的に表現するには、量化表現が必要である。Γが定義しているのは、特定の関数が「自分自身の真部分集合の上への単射である」という性質を持つということであり、そのような性質を持つ単射がその構造に「存在する」ということではない。それが、元来構造の持つ「無限性」というものをΓが公理化したことにならない理由である。Γがなしたことは、構造そのものの持つ「無限性」という性質を公理化したのではなく、無限構造でしか実現しない「…なる単射である」という性質をある関数が持っている、ということの記述である。言い換えると、構造自体がもつ「無限性」という性質は、第一階論理によってではなく、以下のように、第二階論理で表現せざるを得ないのである。

$$\exists f\ [\forall x\ \{x \in A \rightarrow \exists^1 y\ (y \in B \wedge fx=y\} \wedge \forall x \forall y\ (fx=fy \rightarrow x=y)$$
$$\wedge \forall y\ (y \in B \rightarrow \exists^1 x(fx=y \wedge x \in A)) \wedge B \subseteq A \wedge B \neq A]$$

2.2 公理化可能な構造

いくつかの構造は、第一階論理の言語によって公理系を定義できるとき、公理化可能であるといわれる。

2.2.1　定義

構造のクラス$\mathfrak{K}$が公理化可能である

⇔タイプ〈δ、μ〉の言語Lの文の決定可能な集合Σが存在して、

$\mathfrak{K}=\mathrm{Mod}(\Sigma)$である。

この定義の意味は、構造（のクラス）が公理化可能とは、それらの構造がそこで実現しているような公理(文)の集合Σ（それは帰属するか否かが有限回のステップで決定できる集合である）が存在する、ということである。

2. 2. 2　定義

構造のクラス$\mathfrak{K}$が有限的に公理化可能である(finitely axiomatizable)

$\Leftrightarrow$いくつかの文の連言αが存在して、$\mathfrak{K}=\mathrm{Mod}(\alpha)$である。

構造（のクラス）が有限的に公理化可能であるとは、それが、有限個の文（＝公理）の連言のモデルとなっているということである。

いくつかの実例を見よう。

（1）群（group)という代数的構造は、以下のような、有限個の公理の連言α_Gによって定義できるから、有限的に公理化可能である。

$\alpha_G \equiv \forall x \forall y \forall z\ (x+(y+z)=(x+y)+z)$・・・‘+’の結合律

$\wedge \forall x(x+e=e+x=x)$・・・‘e’は‘+’に関する単位元（中性元）

$\wedge \forall x \exists y\ (x+y=e)$・・・‘+’に関する逆元の存在

ここで、‘e’は0項関数記号であり、‘+’は2項関数記号である。

（2）可換群（commutative group）も、つぎの公理α_{GC}で定義できるので、有限的に公理化可能である。

$\alpha_{GC} \equiv \alpha_G \wedge \forall x \forall y\ (x+y=y+x)$・・・交換律が成り立つ群

（3）代数的構造である環（ring）は有限的に公理化可能である。環を定義する公理は、つぎのα_Aである。

$\alpha_A \equiv \alpha_{GC} \wedge \forall x \forall y \forall z\ (x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z)$

$\wedge \forall x \forall y \forall z\ (x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z))$

$\wedge \forall x \forall y \forall z\ ((x+y)\cdot z=(x\cdot z)+(y\cdot z))$

環の公理は、可換群の公理に、連言で、‘・’の結合律、‘・’の‘+’に対する左からと右からの分配律を結びつけたものである。

（4）可換環(commutative ring)も、環の公理に‘・’の交換律を追加した公理α_{AC}によって、有限的に公理化可能である。

$\alpha_{AC} \equiv \alpha_A \wedge \forall x \forall y\ (x\cdot y=y\cdot x)$

（5）代数的構造である体（field）は、つぎの公理α_Cによって有限的に公理化可能である。

$\alpha_C \equiv \alpha_{AC} \wedge \alpha_U \wedge \alpha_D \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5$

ただし、可換環の公理に追加される公理α_U、α_D、α_4、α_5は、それぞれ以下のものである。

$\alpha_U \equiv \forall x\ (u\cdot x=x\cdot u=x)$・・・‘u’は‘・’に関する単位元である

$\alpha_D \equiv \forall x \forall y\ (x\cdot y=e \rightarrow x=e \vee y=e)$・・・ゼロの非ゼロのみによる分割の非存在

$\alpha_4 \equiv e \neq u$・・・加法単位元と乗法単位元は異なる

$\alpha_5 \equiv \forall x\ (x \neq e \rightarrow \exists y\ (x\cdot y=u))$・・・非ゼロの元に対する‘・’に関する逆元の存在

（6）標数（characteristic）がpである（1＜pでpは素数)体のクラスは、公理α_{CCP}により、有限的に公理化可能である。

$\alpha_{CCP} \equiv \alpha_C \wedge u+\ldots^{p}+u=e$

体は、$\forall x\ (p\cdot x=x\cdot x\cdot \ldots^{p}\cdot x=e)$となる最小整数pが存在するとき、「標数pを持つ」と言われる。このとき、pは必ず素数となる。

（7）標数ゼロ（$p=0$）の体は、公理化可能ではあるが、有限的に公理化可能ではない。というのは、標数ゼロの体を定義する公理の集合Δの中に、無限個の公理を用いざるを得ないからである。

$\Delta=\{\alpha_C\} \cup \{u+u\neq e、u+u+u\neq e、\ldots、u+\ldots^{p}+u\neq e、\cdots\}$

すなわち、標数 p がいかなる素数でもないことを示すために、$\{u+u\neq e、u+u+u\neq e、\cdots、u+\cdots^{p}+u\neq e、\cdots\}$ という無限個の公理が必要となるからである。

（8）部分順序（partial order）構造は有限的に公理化可能である。定義公理はβ_{PO}である。

$\beta_{PO}\equiv\forall x\ (x\leqq x)$・・・'≦' の反射性

$\wedge\forall x\forall y\ (x\leqq y\wedge y\leqq x\rightarrow x=y)$・・・'≦' の反対称性

$\wedge\forall x\forall y\forall z\ (x\leqq y\wedge y\leqq z\rightarrow x\leqq z)$・・・'≦' の推移性

（9）線型順序（linear order）構造は有限的に公理化可能である。定義公理は、部分順序の公理に比較可能性を追加した、つぎのβ_{LO}である。

$\beta_{LO}\equiv\beta_{PO}\wedge\forall x\forall y\ (x\leqq y\vee y\leqq x)$

（10）整列順序（well-order）構造〈A、R〉は公理化可能では**ない**。なぜなら、整列順序であることを定義づけるには、(i)〈A、R〉が線形順序の関係構造であり、かつ(ii)$X\subseteq A$である任意の非空集合 X について、X が最小元を持つことを述べねばならないが、この(ii)の事柄を第一階論理の言語では表現できないからである。

2.3 公理化可能な理論

最後に、構造で成り立つ事柄を表現した文の集合である理論 T は、理論の要素である文がそれ（=Σ）の論理的帰結となる（$T=Cn(\Sigma)$）ような、公理の決定可能な集合Σが存在するとき、公理化可能である（または有限的に公理化可能である）と言われる。

2.3.1 定義

理論 T が公理化可能である（axiomatizable）

$\Leftrightarrow(\exists\Sigma)\ (\Sigma\subseteq SENT\ \&\ \Sigma$は決定可能な集合である$\&\ T=Cn(\Sigma))$

右辺は「理論 T がそれの論理的帰結であるような公理の決定可能集合Σが存在する」を意味する。

2.3.2 定義

理論 T が有限的に公理化可能である

⇔T が公理化可能であり、かつ公理の集合Σが有限集合である。

いくつかの実例に当たろう。

（1）群のクラス$\mathcal{g}$の理論 $Th(\mathcal{g})$は有限的に公理化可能である。なぜなら、群のクラス$\mathcal{g}$について、$Th(\mathcal{g})$ が群の公理α_G（つまり$\Sigma=\{\alpha_G\}$）の論理的帰結である（$Th(\mathcal{g})=Cn(\mathcal{g})$）、と言えるからである。もちろん、この場合の公理の集合Σは有限集合である。同様に、可換群、環、体などの理論もすべて有限的に公理化可能である。

（2）実数の理論は公理化可能である。実際、実数構造$\mathfrak{R}\equiv\langle\mathbb{R}、0、1、+、\cdot\rangle$の理論 $Th(\mathfrak{R})$は、実数の公理の無限集合Σ（体としての実数構造は標数ゼロであるから公理も無限集合となる）の論理的帰結である、すなわち、$Th(\mathfrak{R})=Cn(\Sigma)$であるからである。

（3）自然数の構造$\mathbb{N}_s\equiv\langle\mathbb{N}、0、S\rangle$に関する理論は公理化可能である。公理は $P1\wedge P2\wedge P3_\phi$である。ただし、

$P1\equiv\forall x\ (c\neq fx)$・・・ゼロはいかなるものの後者でもないこと

$P2\equiv\forall x\forall y\,(fx=fy\rightarrow x=y)$・・・後者関数 f の単射性

$P3_{\phi} \equiv \varphi(c) \land \forall x\,(\varphi(x) \to \varphi(fx)) \to \forall x \varphi(x)$・・・数学的帰納法

である。ここで、$P3_{\phi}$は正確には公理シェーマであり、φ(x)に第一階論理の言語で書かれた式を代入することで無限の公理を算出する。しかし、それらの公理はせいぜい可算無限個しかなく、自然数全体の領域のすべての部分集合（これは非可算無限個存在する）をカヴァーしてはいない。数学的帰納法を元来意図された強い形の主張にするには、第一階論理では不十分であり、第二階論理が必要である。

3. コンパクト性定理

第一階論理は、多くの興味深いメタ定理を持っている。以下では、それらのいくつかを取り上げ、言語の表現能力の観点から、それらが含意する哲学的意味を考察する。まず最初に、コンパクト性定理を考察する。

3.1 コンパクト性定理

コンパクト性定理とは、

Γを言語Lの文の集合とする：Γ⊆SENT（L）；もしΓの任意の有限部分集合がモデルを持つならば、Γもモデルを持つ、

というものである。この定理は、形式的演繹体系の導出（証明）を式の有限列と前提すれば、ゲーデルの完全性定理からの論理的帰結として導かれるが、モデル論的手法によって独立に証明することもできる（証明は省略する）。

3.2 コンパクト性定理の論理的帰結

文の集合Γがモデルを持てば、当然、Γの中のすべての文がそのモデルで真となるから、Γの有限個の文を集めて作るΓのどんな部分集合もモデルを持つ。よって、Γがモデルを持つことと、Γの任意の有限部分集合がモデルとなることとは、コンパクト性定理によって、同値となる。すなわち、Γがモデルを持つ⇔Γのすべての有限部分集合がモデルを持つ。

さて、このコンパクト性定理の論理的帰結として、有限性、すなわち、領域の要素（＝対象）の個数が有限個であるという性質は公理化できない（第一階論理の言語の文の集合として表現できない）、ということが成り立つ。

3.2.1 「有限性」は公理化可能でない。

《証明》

背理法による。仮に、有限性が公理化可能であるとする。すると、ある言語L（タイプ$\langle \mu, \delta \rangle$とする）の文の集合Σが存在して、以下のことが成り立つ：

構造の全クラス$\mathbf{M}$の中の任意の構造$\mathcal{A}$に対して、

$\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(\Sigma) \Leftrightarrow \mathcal{A}$は有限である。

（ここで、Mod(Σ)は、Σ中のすべての文が真となる構造、つまりΣのモデルとなる構造、のクラスである：$\mathrm{Mod}(\Sigma) = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \vDash \Sigma\}$。）しかし、このことは不可能である。なぜなら、もしこれが成り立てば、Σは、あらゆる有限個数に対応するモデルを持つ必要があるから、任意に大きな有限のモデルを持つことになるが、そのことは、つぎの補題（3.2.2）によって、Σが無限モデルを持つことを含意する。しかし、仮定により、Σは有限性を公理化しているから、Σのモデルは有限であって無限ではあり得ない。よって、矛盾である。こうして（背理法により）、「有限性」は公理化可能で

はない。(Q.E.D.)

3.2.2 【補題】: Γを、任意に大きな有限のモデルを持つ文の集合とする。このとき、Γは無限モデルをもつ。

《証明》

「少なくとも n 個の要素を持つ」ということを表現する文 φ_n の可算無限個の集まりをΓに加えて、Γを拡張することを考える。拡張したΓのすべての有限部分集合はモデルを持つが、**コンパクト性定理**により、拡張したΓそのものもモデルを持つ。しかし、このモデルは無限モデルとなる。いま、上記のやり方でΓを拡張した文の集合をΓ^*とする:

$$\Gamma^* = \Gamma \cup \{\varphi_n \mid 1 < n\}$$

ここで、φ_nは「少なくとも n 個の要素が存在する」ということを表現する文である。すなわち、

$$\varphi_n \equiv \exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j$$

さて、これから、$\Delta \subseteq \Gamma^*$であるすべての有限集合$\Delta$がモデルを持つことを確かめる。いま、

$$\Delta \subseteq \Gamma \cup \{\varphi_{i1}、\cdots、\varphi_{ip}\}$$

とおくことができる。(φ_{i_1}、…、φ_{i_p}はΓを拡張するときに用いた無限個のφ_nの中の有限部分である。)そして、i_1、…、i_pの最大値を m とする。すなわち、

$$\mathrm{Max}\{i_1、\cdots、i_p\} = m$$

一般に、$M \subseteq N$ ならば $\mathrm{Mod}(N) \subseteq \mathrm{Mod}(M)$である[(2)]。ゆえに、上で$\Delta \subseteq \Gamma \cup \{\varphi_{i1}、\cdots、\varphi_{ip}\}$とおいたから、

$$\mathrm{Mod}(\Gamma \cup \{\varphi_{i1}、\cdots、\varphi_{ip}\}) \subseteq \mathrm{Mod}(\Delta) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

である。また、一般に、$\mathrm{Mod}(M \cup N) = \mathrm{Mod}(M) \cap \mathrm{Mod}(N)$が成り立つ[(3)]から、

$$\mathrm{Mod}(\Gamma \cup \{\varphi_m\}) = \mathrm{Mod}(\Gamma) \cap \mathrm{Mod}(\{\varphi_m\}) \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

である。さらに、$\mathrm{Mod}(\{\varphi_m\}) = \mathrm{Mod}(\{\varphi_{i1}、\cdots、\varphi_{ip}\})$ だから、

$$②の右辺 = \mathrm{Mod}(\Gamma) \cap \mathrm{Mod}(\{\varphi_{i1}、\cdots、\varphi_{ip}\}) = \mathrm{Mod}(\Gamma \cup \{\varphi_{i1}、\cdots、\varphi_{ip}\})$$

よって、②より、

$$\mathrm{Mod}(\Gamma \cup \{\varphi_m\}) = \mathrm{Mod}(\Gamma \cup \{\varphi_{i1}、\cdots、\varphi_{ip}\})$$

従って、①より、

$$\mathrm{Mod}(\Gamma \cup \{\varphi_m\}) \subseteq \mathrm{Mod}(\Delta) \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

が導ける。

ところで、Γは任意に大きな有限モデルを持つ文の集合だったから、少なくとも m 個の要素から成る有限モデルを持つことができる。そのようなモデルの一つをAとする。すると、$A \in \mathrm{Mod}(\Gamma \cup \{\varphi_m\})$である。なぜなら、文$\varphi_m$は「少なくとも m 個の要素が存在する」と述べている文であるから、Aで文φ_mが真となるからである。よって、③より、$A \in \mathrm{Mod}(\Delta)$。

こうして、$\Delta \subseteq \Gamma^*$である任意の有限集合$\Delta$が有限モデル($=A$)を持つことが確かめられた。そこで、**コンパクト性定理**により、Γ^*そのものもモデルを持つことになる。ところで、「少なくとも n 個の要素が存在する」を表現する文であるφnから作られる文の可算無限集合$\{\varphi n \mid 1 < n\}$のモデルは、無限モデルである。

いま、$\Gamma^* = \Gamma \cup \{\varphi n \mid 1 < n\}$ の持つモデルを B とすると、B も無限モデルである。なぜなら、$\mathrm{Mod}(\Gamma^*) = \mathrm{Mod}(\Gamma) \cap \mathrm{Mod}(\{\varphi n \mid 1 < n\})$ で、$B \in \mathrm{Mod}(\Gamma^*)$より、$B \in \mathrm{Mod}(\Gamma)$ かつ$B \in \mathrm{Mod}(\{\varphi n \mid 1 < n\})$ となるが、$\{\varphi n \mid 1 < n\}$ のモデルは無限モデルだったから、そのようなモデルの一

つであるBも無限モデルでなければならないからである。すると、$B \in \mathrm{Mod}(\Gamma)$ より、無限モデルBはΓのモデルであるから、Γは無限モデルを持つ。(Q.E.D.)

さて、無限性という性質は公理化可能ではある（2.1節参照）が、有限的に公理化可能ではない、ということがコンパクト性定理の帰結としてもたらされる。このことをつぎに考察しよう。

3．2．2「無限性」は公理化可能であるが、有限的に公理化可能ではない。

《証明》

すでに見たように(2.1 節)、「無限性」は公理化可能である。しかし、「有限性」は公理化可能ではない（3.2.1 節）。Mを全構造のクラス、$\mathfrak{R}$を有限構造のクラスとすれば、無限構造のクラスはM$-\mathfrak{R}$となる。ところが、$\mathfrak{R}$は公理化可能ではない(3.2.1節)ので、以下の補題3.2.3によって、無限構造のクラス、すなわち、M$-\mathfrak{R}$は有限的に公理化することはできない。つまり、無限であるという性質（「無限性」）は、有限個の公理(＝文)によって公理化する（定義する）ことはできない。
(Q.E.D.)

3．2．3【補題】: 構造のクラスKが有限的に公理化可能である⇔Kおよびその補クラスM$-$Kがともに公理化可能である（Mは全構造のクラス)。

《証明》

[⇒] 構造のクラスKが有限的に公理化可能であるから、$K=\mathrm{Mod}(\alpha)$とおける。ここで、αは有限個の公理の連言であり、$\mathrm{Mod}(\alpha)$はαのモデルであるような構造のクラスである。よって、Kは公理化可能である。また、任意の構造が文の空クラス$\varnothing$のモデルとなるから、$M=\mathrm{Mod}(\varnothing)$である。さらに、任意の構造$\mathfrak{J}$につき、($\mathfrak{J} \vDash \alpha$) でない$\Rightarrow \mathfrak{J} \vDash \neg\alpha$だから、$\mathfrak{J} \notin \mathrm{Mod}(\alpha)$ならば$\mathfrak{J} \in \mathrm{Mod}(\neg\alpha)$である。よって、$M-K=\mathrm{Mod}(\varnothing)-\mathrm{Mod}(\alpha)=\mathrm{Mod}(\varnothing)\cap\mathrm{Mod}(\neg\alpha)=M\cap\mathrm{Mod}(\neg\alpha)=\mathrm{Mod}(\neg\alpha)$である。こうして、Kの補クラスM$-$Kも公理化可能である。

[⇐] Kも、その補クラスM$-$Kも、ともに公理化可能だとする。すなわち、ある文の集合Γ、Δが存在して、$K=\mathrm{Mod}(\Gamma)$、$M-K=\mathrm{Mod}(\Delta)$とする。ところで、$K\cap(M-K)=\varnothing=\mathrm{Mod}(\Gamma)\cap\mathrm{Mod}(\Delta)=\mathrm{Mod}(\Gamma\cup\Delta)$。こうして、文の集合$\Gamma\cup\Delta$はモデルを持たないから、**コンパクト性定理**によって、モデルをもたない、$\Gamma\cup\Delta$のある有限部分集合が存在する。それを$\{\phi_1, \cdots, \phi_n, \chi_1, \cdots, \chi_m\} \subseteq \Gamma\cup\Delta$とする。このとき、$\mathrm{Mod}(\phi_1, \cdots, \phi_n, \chi_1, \cdots, \chi_m)=\varnothing=\{\ \}$である。いま、$\phi_1, \cdots, \phi_n \in \Gamma$、$\chi_1, \cdots, \chi_m \in \Delta$としても、一般性は失われない。3.2.2の証明での註と、$\mathrm{Mod}(\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}\cup\{\chi_1, \cdots, \chi_m\})=\varnothing$ により、$\mathrm{Mod}(\phi_1, \cdots, \phi_n)\cap\mathrm{Mod}(\chi_1, \cdots, \chi_m)=\varnothing$。$\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}\subseteq\Gamma$より、$K=\mathrm{Mod}(\Gamma)\subseteq\mathrm{Mod}(\phi_1, \cdots, \phi_n)$。$\{\chi_1, \cdots, \chi_m\}\subseteq\Delta$より、$M-K=\mathrm{Mod}(\Delta)\subseteq\mathrm{Mod}(\chi_1, \cdots, \chi_m)$。これらによって、$\mathrm{Mod}(\phi_1, \cdots, \phi_n)\subseteq\mathrm{Mod}(\Gamma)=K$ が成り立つ(4)。こうして、$K=\mathrm{Mod}(\phi_1, \cdots, \phi_n)$ である。従って、$K=\mathrm{Mod}(\phi_1\wedge\cdots\wedge\phi_n)$ であるから、Kは有限的に公理化可能である。(Q.E.D.)

3．3 非標準算術の存在

コンパクト性定理からのその他の帰結として、非標準算術のモデルが存在する。いま、われわれが直観的に知っている算術の構造を、$N=\langle\mathbb{N}, 0, S, +, \cdot\rangle$で表す。このとき、算術構造Nで真となる文の集合Th（N）——すなわち、Nの理論——のモデルでNと同型でない構造$\mathfrak{M}_0$が存在する。

《証明の概略》

Lを構造Nに適切な言語とする。L*を、新しい0項関数記号（＝個体定項）**k**をLに追加して生

成されるLの拡大とする。また、$\Sigma^* = \mathrm{Th}(N) \cup \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とする。ただし、α_nは、**k** によって表示される個体が数 n ではないと主張する文、すなわち、

$$\alpha_n \equiv k \neq f \cdots^n fc$$

である。このとき、α_nのすべての有限部分集合はモデル$\mathfrak{M}$を持つことが、**コンパクト性定理**により示される。$\mathfrak{M}$には、Th（N）のモデルとはなるが、Nとは同型でないモデルである、$\mathfrak{M}$の還元構造$\mathfrak{M}_0$が存在する。(Q.E.D.)

4. レーベンハイム・スコーレム定理

いくつかの理論は必ず無限モデルを持つ。すなわち、それらの理論は、領域の要素（＝個体、対象）の個数が有限であるような構造では、真とならない（成り立たない）のである。ところが、レーベンハイム・スコーレム（Lowenheim-Skolem）定理によれば、無限モデルを持つ理論でカテゴリカル（範疇的）であるような、そういう理論が存在しなくなる。理論がカテゴリカルであるとは、それらのモデルである構造が同型である（isomorphic：構造の領域の間に関係を保存するようなバイジェクション＝全単射の写像が存在する）ということであるが、そのためには、構造の領域の基数が等しくなければならない。しかし、レーベンハイム・スコーレム定理によれば、無限モデルを持つ理論においては、異なる無限基数を持つ複数のモデルが必ず存在する。従って、それらのモデルの間に、同型写像は存在しえず、理論はカテゴリカルではありえない。

また、レーベンハイム・スコーレム定理によれば、可算言語の文の集合がモデルを持つとき、その集合は可算モデルを持つから、第一階論理では、自然数の基数と実数の基数との間の区別をつけることができない。第一階論理は、レーベンハイム・スコーレム定理が成り立つことによって、自然数の理論あるいは実数の理論を同型にまで特徴づけること――すなわち、それらの理論を実現させるモデルを同型という、同一でなくとも、機能・役割の上で極めて同一に近いものにまで、理論の意味内容を一義的に絞り込むこと――ができない。よって、第一階論理は、いくつかの非標準モデル、すなわち、本来意図した意味内容とは異なる性質を有するモデル、を出現させることになる。言い換えると、そのような非標準モデルは意図された本来のモデルと同型ではないが、そこでは、意図されたモデルで成り立つ文と同じ文が、かつそれらのみが成り立つようなモデルである。

実数の代数の分野で、そのような新しい非標準モデルを研究する分野として創始されたのが非標準解析である。これは、ライプニッツの無限小解析の夢を実現したものと見なせる。従って、非標準解析は、第一階論理の持つ柔軟性という長所がもたらした成果である。しかし、S. シャピロの意見では、上方および下方のレーベンハイム・スコーレム定理が成り立つことは、第一階論理の欠点（defect）である[(5)]。なぜなら、任意の無限基数 **k** を持つモデルが文の集合に対して存在するが、これらのモデルは文の集合の意味を確定することができないからである。

さて、レーベンハイム・スコーレム定理にはレーベンハイムから始まるいくつかのヴァージョンがあるが、歴史的順序とは逆に、Tarski と Vaught による現代的ヴァージョンを中心にして、それから議論を始めることにする。

4．1　下方レーベンハイム・スコーレム定理（Tarski-Vaught 版）

Lを基数ρの言語とする。基数αのすべての構造$\mathfrak{A}$、基数γのすべての部分集合 $C \subseteq A$ およびγ、$\rho \leqq \beta \leqq \alpha$であるすべての基数$\beta$に対して $C \subseteq B$ かつ$\mathfrak{A}$の初等的部分構造である（$\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$）基数$\beta$の

構造Bが存在する。

《証明の概略》

Cを含む（$C \subseteq B_0$）基数βの、Aの部分集合B_0から出発して、Aの部分集合の鎖（chain）：$B_0 \subseteq B_1 \subseteq \cdots \subseteq A$　を作る。各B_i (i=1, 2, 3, …) は基数βを持つ。こうしてできる$B = \bigcup_{n \in N} B_n$に制限した$\mathfrak{A}$、すなわち、$\mathfrak{A} \restriction B$が$\mathfrak{A}$の初等部分構造であり（$\mathfrak{A} \restriction B \prec \mathfrak{A}$）、この$\mathfrak{A} \restriction B$が求める構造である。この最後の段階で、存在命題$\exists x \phi$がある構造$\mathfrak{A}$で充足されるとき、その証拠（witness）となる文ϕがその構造で充足される、という初等部分構造の判定基準を使う。(Q.E.D.)

4．1．1　系（レーベンハイム・スコーレム定理）

Γを基数γの文の集合とする。もしΓがγ以上の基数α（$\alpha \geqq \gamma$）を持つならば、そのとき、$\gamma \leqq \beta \leqq \alpha$であるようなすべての基数$\beta$（$\beta \geqq \omega$）に対して、$\Gamma$は基数$\beta$のモデルを持つ（$\omega$は自然数の集合の基数）。

4．1．2　系（スコーレム：１９２０）

もしΓがモデルを持つような文の可算集合（可算無限集合を含む）であるとき、Γは可算モデルを持つ。

4．1．3　系（レーベンハイム：１９１５）

もし文ϕがモデルを持つ（＝充足可能である）ならば、そのとき、ϕは可算モデルを持つ。

4．1．4　系

実数の理論は可算モデルを持つ。

4．1．5　系

ツエルメロ・フレンケル集合論は可算モデルを持つ。

これまでは、無限構造が与えられると、常にその初等部分構造を見出すことができた。これにより、同じ式が成り立つようなより小さい構造が常に存在することになる。これから、逆に、モデルとなるある基数を持つ構造が与えられたとき、その構造より大きい基数を持ち、その最初の構造が初等部分構造となるような、拡大構造が存在することを示す。

4．2　上方レーベンハイム・スコーレム定理（Tarski-Vaught 版）

Lを基数ρの言語とする。基数α（$\alpha \geqq \omega$）を持つすべての構造$\mathfrak{A}$に対して、およびすべての基数$\beta \geqq \alpha$、ρに対して、$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$である構造$\mathfrak{B}$が存在する。

《証明の概略》

$\beta \geqq \alpha$、ρとし、$\underline{a}$をAの枚挙、$\langle c_k \rangle_{k<\beta}$を言語$L(\langle \mathfrak{A}, \underline{a} \rangle)$に存在しない新しい定項の系列として、言語$L(\langle \mathfrak{A}, \underline{a} \rangle) \cup L(\langle \mathfrak{A}, \underline{a} \rangle)$で、以下のような文の集合$\Gamma$を作る：

$$\Gamma = Th(\langle \mathfrak{A}, \underline{a} \rangle) \cup \{\neg c_\xi = c_\delta \mid \xi < \delta < \beta\}$$

このΓがモデルを持つことを示す。その際、**コンパクト性定理**が使われる。そして、基数β以上の基数を持つ構造$\mathfrak{C}$で、$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$となるものが存在することを示す。よって、$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$となるような、基数が$\beta$である構造$\mathfrak{B}$が存在することが、下方レーベンハイム・スコーレム定理から、示せる。(Q.E.D.)

4．2．1　系：上方レーベンハイム・スコーレム（オリジナル版）

Γを、基数γの文の集合とする。もしΓがω以上の基数α（$\alpha \geqq \omega$）のモデルを持てば、そのとき、すべての基数β（$\beta \geqq \omega$、γ）に対して、Γは基数βのモデルを持つ。

4．3　非標準モデル

Manzano によれば、1930 年代にスコーレムは算術に対する非標準モデルの存在に気づいていた(6)。しかし、長い間、それは病理的現象として無視されていた。ところが、1950 年のヘンキン（Leon Henkin）の論文 "Completeness in the theory of types" 以来、高階論理と算術の非標準モデルがともに市民権を得はじめた。

算術についての（第一階論理による）非標準モデルがある一方で、第二階論理に対する非標準モデルがある。n 項関係の宇宙（＝領域）である族$\langle A_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$において、第二階論理での標準モデルは$A_n = \wp A^n$（$A^n$ の冪集合）であるが、非標準モデルでは$A_n \subseteq \wp A^n$であり、それらのいくつかは、真部分集合である：$(\exists m)\ A_m \neq \wp A^m$。さらに、標準解釈を持つ第二階ペアノ算術がカテゴリカルである理由は、その理論がすべての集合についての数学的帰納法を持つからである。非標準的数が存在する構造（非標準モデル）は、第二階の数学的帰納法の公理のモデルにはならない。第一階ペアノ算術がカテゴリカルでない理由は、非標準的要素を持つモデルでは、標準的数の集合（この集合について完全な形での、つまり二階の量化を含む形での、数学的帰納法が必要である）が、第一階論理の論理式で定義することができないからである。

ヘンキンの論文が出て以来、形式言語のメタ数学的研究がしばらく続いた。その後、ロビンソン（A. Robinson）によって、非標準解析（non-standard analysis）が創始された。それは、論理学の概念が微積分を展開するに十分な、無限に大きな数や無限に小さな数を与えることができることを示している。標準的な数に加えて、非標準的な数を導入しても、支障なく解析学が展開できることが示されることにより、（自然数の非標準算術と違い）実数の非標準モデルによる解析研究が、病理的現象どころか、有益かつ有効な研究方法を提供している。これは、レーベンハイム・スコーレム定理の積極的帰結といえる。

註

(1)構造に関する記法など、モデル論に関わる表現法や定理の例など、本論での多くの事例を文献[1]の M. Manzano 氏のテキストから学んだ。

(2)$M \subseteq N \Rightarrow \mathrm{Mod}(N) \subseteq \mathrm{Mod}(M)$ということを示す。いま、$M \subseteq N$ とする。ある構造$\mathcal{A}$につき、$\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(N)$、しかし$\mathcal{A} \notin \mathrm{Mod}(M)$とする。前者より、$\mathcal{A} \models N$、後者より、$\sim(\mathcal{A} \models M)$、ゆえに、ある文$\phi \in M$ があって、$\sim(\mathcal{A} \models \phi)$。ところが、仮定より$M \subseteq N$ であるから、$\phi \in N$。しかも、$\mathcal{A} \models N$ だから、$\mathcal{A} \models \phi$。よって、矛盾である。ゆえに、どんな構造$\mathcal{A}$についても、$\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(N) \Rightarrow \mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(M)$すなわち、$\mathrm{Mod}(N) \subseteq \mathrm{Mod}(M)$である。

(3) $\mathrm{Mod}(M \cup N) = \mathrm{Mod}(M) \cap \mathrm{Mod}(N)$を示す。任意の構造$\mathcal{A}$について、$\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(M \cup N)$ならば、$\mathcal{A} \models M \cup N$、つまり、構造$\mathcal{A}$は文のクラス M とクラス N の両方のモデルとなる。$\mathcal{A} \models M \,\&\, \mathcal{A} \models N$。よって、$\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(M) \,\&\, \mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(N)$、ゆえに、$\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(M) \cap \mathrm{Mod}(N)$。こうして、$\mathrm{Mod}(M \cup N) \subseteq \mathrm{Mod}(M) \cap \mathrm{Mod}(N)$　が示された。逆に、任意の構造$\mathcal{A}$について、$\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(M) \cap \mathrm{Mod}(N)$とする。集合算により$\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(M) \,\&\, \mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(N)$であるから、$\mathcal{A} \models M \,\&\, \mathcal{A} \models N$である。すなわち、構造$\mathcal{A}$は、文のクラス M のモデルであり、さらに文のクラス N のモデルでもある。よって、$\mathcal{A}$は文のクラス $M \cup N$ のモデルである。つまり、$\mathcal{A} \models M \cup N$、ゆえに、$\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(M \cup N)$。　こうして、$\mathrm{Mod}(M) \cap \mathrm{Mod}(N) \subseteq \mathrm{Mod}(M \cup N)$　が示された。

(4)さもないと、ある構造$\mathfrak{J}$が存在して、$\mathfrak{J} \in \mathrm{Mod}(\phi_1, \cdots, \phi_n)$ かつ$\mathfrak{J} \notin \mathrm{Mod}(\Gamma)$となる。後者より、$\mathfrak{J} \in M - K = \mathrm{Mod}(\Delta)$　$\therefore \mathfrak{J} \in \mathrm{Mod}(\chi_1, \cdots, \chi_m)$。こうして、$\mathfrak{J} \in \mathrm{Mod}(\phi_1, \cdots, \phi_n) \cap \mathrm{Mod}(\chi_1, \cdots, \chi_m)$ となる。これは、$\mathrm{Mod}(\phi_1, \cdots, \phi_n)$ と $\mathrm{Mod}(\chi_1, \cdots, \chi_m)$ が互いに素であること、つまり、$\mathrm{Mod}(\phi_1, \cdots, \phi_n) \cap \mathrm{Mod}(\chi_1, \cdots, \chi_m) = \varnothing$　に矛盾する。

(5)文献[2]の 80 頁参照。
(6)文献[1]の 170 頁参照。

参考文献

[1]Manzano, María : *Model Theory*, Oxford University Press, 1999.
[2]Shapiro, Stewart : *Foundations without Foundationalism, A Case for Second-Order Logic*, Oxford University Press, 1991/2000.