抽象と分析

田　畑　博　敏

はじめに

フレーゲ(Gottlob Frege：1948-1925)が言語分析や論理体系構築、さらに（大成功には至らなかったが）論理主義という数学の哲学の構想において大きな足跡を残したことは、今日ではよく知られるようになった。それに伴い、研究の視点や方法も多様化している。最近、現在のフレーゲ研究の動向を紹介した書物(1)（海外の研究者の邦訳論文集）が出版された。その書物には、「新論理主義」（または「新フレーゲ主義」）と呼ばれる、一群の研究者達によるフレーゲ論理主義の再構成のプロジェクに関わる諸論考のみならず、「新論理主義」に批判的な立場の論考も含まれている。さらには、「フレーゲ構造」というラムダ計算のあるモデル構造を構築した画期的論文の紹介もなされている。この最後の仕事は、一見するとフレーゲの方法とは懸け離れているようにも見えるが、「関数」についてのフレーゲの捉え方を発展させたものであることが、広く認められている。

このような研究の現状を踏まえつつ、小論では、フレーゲのオリジナルの分析方法に立ち返って、その独創性と生産性を確認したい。確かに、「新論理主義」はフレーゲの意図を汲み取ろうと試み（これには批判があるとはいえ、一定の成功を収めていると思われる）、「フレーゲ構造」の構成はフレーゲの思考の可能性をとことんまで追究するものであるが、どちらもフレーゲのオリジナルの方法からは離れている。前者はフレーゲの「再構成」であり、後者は「発展形態」である。そのような再構成や発展形態によって論じられるフレーゲの独創性と生産性を、小論ではフレーゲ自身のやり方の中に探ってみたい。そうすることで、フレーゲの分析方法が実際にどのようにして編み出されたかが、その生成の現場から理解できるからである(2)。

第１節では、抽象による生産性が最初の力を発揮するのは文字と記号の使用の場面である、ということを見る。第２節では、「アーギュメントと関数への分析」というフレーゲの分析方法の独創性に迫る。第３節では、一般性が量化という表現手段を獲得するプロセスを確認する。第４節では、高階の関数の使用により得られた格段の表現力が、フレーゲの重要な論理的概念の定義にどう生かされるかを見る。最後に、第５節では、値域と抽象の原理に含まれる矛盾とフレーゲの分析方法の特質を考察することを通じて、いくつかの教訓を導く。

１．文字と記号の使用

フレーゲが論理体系構築に伴う論理分析を実行するのに必要とした道具は、「算術の言語をモデルにした式言語」である。その式言語では、文字と記号の使用が本質的な役割を担う。『概念記法』(*Begriffsschrift*)の第Ｉ部「表記の説明」の冒頭（§1）では、固有の意味を持つ＋、－、$\sqrt{}$、0、1、

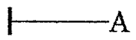
2のような文字と、不特定の数や関数を表す文字（アルファベット a、b、c 等）を区別すべきことが強調される。その上で、後者の種類の文字が有する「不確定性」のゆえに、例えば、

$$(a+b)\ c = ac+bc$$

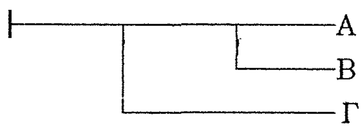
の場合のように、命題の普遍性――すなわち、任意の数 a、b、c に対して分配律が成り立つという、その普遍妥当性 (**Allgemeingiltigkeit**) ――が(イタリックの)ラテン文字 *a*、*b*、*c* を用いることにより表現される。普遍性ないし一般性を表現するためのラテン文字、スコープ（作用範囲）指示を伴う全称量化子表現のためのドイツ文字とくぼみ(**Höhlung**)、さらに省略ないしアーギュメント座を表現するギリシア文字の使用、という３種類の文字の区別をフレーゲは行う。これらは、後述するように、単なる表記上の区別に留まるのではなく、論理的な分析によって析出されてくる重要な論理的・概念的区別を表示するための表現手段である。これらの文字は、内容線（後の水平線）、判断線、判断記号、真理関数記号といった、フレーゲ創始になる記号とともに用いられることは言うまでもない。

さて、ここで、文字使用に関して微妙な問題がある。上で、フレーゲが使う文字は、ラテン文字、ドイツ文字、ギリシア文字の３種類である、と述べた。文字の種類としてはこれで正しいが、ギリシア大文字とギリシア小文字の使用法には違いがある。(そこで、使用法も含めた文字の種類として、ラテン文字、ドイツ文字、ギリシア大文字、ギリシア小文字の４通りに分類することもできる[3]。)

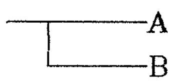
まず、『概念記法』で最初に登場するのはギリシア大文字である。『概念記法』§2 で、フレーゲは、Aを「反対の磁極は互いに引き合う」という表現の省略として挙げ、



が「反対の磁極は互いに引き合う」という判断を意味する、としている[4]。しかも、この判断に付された註（原文では‘＊)’、邦訳では‘4)’） において、フレーゲは、ギリシア大文字を省略として用いることを明記している[5]。この文字‘A’がラテン大文字ではなくギリシア大文字であることは、例えば、続く『概念記法』§5での判断：



で、文字‘Γ’が出現していることから明らかである。ここでの A、B、Γが何の省略であるかは示されていない。しかし、同じ§5の少し手前で、



の意味の説明を行うとき、Aが「3×7＝21」を意味し、Bが「太陽が輝いている」を意味するとされる[6]ことから、上の A、B、Γが確定した特定の意味をもつ表現（この場合は特定の文）の省略

とされていることが分かる。

もちろん、ギリシア大文字は文の省略としてのみならず、例えば、（特定の性質を表す）述語や（数のような）対象を表す表現の省略としても用いられる。『概念記法』§12 では、X をある性質表現の省略として、

$$\vdash\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\top\!\!-\!\!\overset{\mathbf{a}}{\smile}\!\!- X\ (a)$$　（ここで‘a’をドイツ文字として使う）

が「性質 X をもたないものが幾つか存在する」を意味すると説明される(7)。このような述語文字として、‘X’の他に‘Λ’、‘P’、‘Ψ’などが使用されている。そして、同書§24 では、

$$\vdash\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!- f\ (\Gamma, \Delta)$$

が「Δは手続き f をΓに適用した結果である」を意味するとされる(8)。ここでは、文字‘Δ’‘Γ’は対象の表現の省略とされている。

このように、ギリシア大文字は確定した特定の意味を表す表現の省略のために用いられるのが基本である。ところが、必ずしも特定のものではなく、不特定のものの省略として、あたかも、アーギュメント座（アーギュメント（＝項）の占める場所）を表すかのように説明される用法がある。例えば、『概念記法』§10 で、フレーゲは、「アーギュメント（項）A の一つの不確定な関数を表現するため」に、

$$\Phi\,(A)$$

を用い、「二つのアーギュメント（項）A と B の、これ以上何も定まっていない関数を意味する」ために、

$$\Psi\,(A,B)$$

を用いる、と説明する(9)。ここで、文字‘Φ’や‘Ψ’は、確定した意味をもつ（特定の）関数ではなく、「不確定な」関数を表す、とされる。これまで、確定した意味を持つ表現の省略であったものが、意味の不確定なもの（ここではフレーゲの関数）の省略となっている。ここで、「省略」の用法が変わったのだろうか？

ところで、ギリシア小文字には、ギリシア大文字に与えられた「省略」という役割とは異なる役割が与えられている。すなわち、アーギュメントの占める場所を表示する、という役割である。しかし、ここでギリシア大文字に与えられた、不確定な関数の省略という用法は、他の多くの関数を受け入れる場所という意味での「アーギュメント座の表示」という（本来はギリシア小文字に与えられる筈の）用法につながるものである。すなわち、第 1 階の特定の関数名で占められる場所、つまり第 2 階関数のアーギュメント座の表示という用法に道を開くものである。もちろん、フレーゲ自身はアーギュメント座の表示という用法は、原則として、ギリシア小文字に担わせているし、上記『概念記法』§2 の註＊）では、（何の省略であるかについて）「私がそれらについて特に説明を行わない場合には、読者はそれらに適当な意味を与えられたい」(10)としている。つまり、確定した意味をもつものの省略も、不確定な意味をもつものの省略も、どちらの省略もありうることをフレーゲは認めている。

文字による表現の省略（代理）は、省略（代理）されるものとするもの（文字）の間に本質的つながりが無いとき、多くのものの代理可能性（代入可能性）へとつながる。さらに、フレーゲの概念分析の文脈では、その省略される元の表現が関数や概念の表現であるとき、文字のもつこの抽象力は階層性（高階の関数・概念）の導入の可能性を生み出す。高階の関数や概念の成立は文字のもつこの抽象力に負うのである。これは、文字化が生み出す生産性（表現力）の一つである。どのような種類の文字が使われようと、省略（代理）されるものと文字とのつながりが任意であるならば、文字化によって、そのような抽象力が生まれる。『概念記法』でのギリシア大文字の「省略」の用法の「揺れ」のなかに、そのことが端なくも露呈している。このような「文字化の生産性」は、「アーギュメントと関数への分析」および「量化」というフレーゲの独創によって、自立的「論理」——すなわち、それだけで算術を展開するに足る強力な表現力をもつ「論理」——の構築を可能にした。そこで、節を改めて、「アーギュメントと関数への分析」を追究しよう。

2. アーギュメントと関数への分析

『概念記法』§9、§10 での関数の説明において、フレーゲは、文をアーギュメント（項）と関数に分析する方法を示している。その方法の基本原則は、文のある部分（表現）を可変なものと見なし、残りの部分を定常的（不変的）部分（表現）と見なす、という単純なものである。例えば、

「水素ガスは炭酸ガスより軽い」

の中の「水素ガス」を他の同種の表現である「酸素ガス」「窒素ガス」で置き換えても文が生成される。すなわち、

「酸素ガスは炭酸ガスより軽い」
「窒素ガスは炭酸ガスより軽い」

が生成される。これらの文で、「水素ガス」「酸素ガス」「窒素ガス」が可変的部分で、残りの「(　)は炭酸ガスより軽い」が定常的部分である。フレーゲは、この間の原則をこう説明する：

> 「このように一つの表現を可変的と考えることによって、その表現は、関係の全体を表す定常的な構成要素と、他の記号によって置き換えることができるとみなされる記号で、しかもこの関係に立つ対象を指す記号とに分かれる。私は前者の構成要素を関数（Function）、後者をその項[アーギュメント]（Argument）と呼ぶ。」(11)

ここで、一つの文において、どの部分を可変的部分（アーギュメント=項）と見なし、どの部分を定常的・不変的部分（関数）と見なすかは、解釈次第である。最初の文「水素ガスは炭酸ガスより軽い」の「炭酸ガス」をアーギュメント（項＝可変部分）と見なし、残る「水素ガスは（　）より軽い」、言い換えると「(　)は水素ガスより重い」を関数（定常部分）と見なすこともできる。従って、例えば、表現：

「太陽系の質量の中心点は、内的力だけが太陽系に作用するならば、少しも加速しない」

で、二箇所現れる表現「太陽系」を、一方の箇所のみアーギュメント（可変部）と見なすか、両方ともアーギュメントと見なすかにより３種類の解釈があるから、３つの関数が取り出せることになる。こうして、フレーゲは「アーギュメントと関数への分析」を以下のように説明する：

「一つの表現——その内容は、判断可能である必要はない——において、一つの単純な、あるいは複合的な記号が、一つまたはそれ以上の場所に現れ、かつ、それを、これらの場所のすべて、あるいは幾つかにおいて、他のものによって、しかし、至る所で同じものによって置き換えることができると考えるならば、これによって変らずに現れる表現の部分を関数、置き換えることのできる部分をその項［アーギュメント］と呼ぶ。」(12)

さらに、例えば、「水素ガスは炭酸ガスより軽い」において、「水素ガス」と「炭酸ガス」の二つの表現をアーギュメント（項）と見なすことで、二項関数「(　) は (　) より軽い」を得る。最初の出発点となる文「水素ガスは炭酸ガスより軽い」をギリシア大文字を使って、Ψ(A,B) と表示すれば、この文が二つのアーギュメントと（一つの）二項関数とに分析されたことを明示できる。また、このΨ(A,B) のΨが、「(　) は (　) より軽い」という確定した意味をもたない、不確定な関数だとしよう。すると、

$$\vdash\!\!\text{——}\,\Psi(A,B)$$

は、「Bは A に対してΨ関係に立つ」あるいは「Bは A に対して手続きΨを適用した結果である」と翻訳できる(13)。こうして、Ψ(A,B) の他に、X(A,B) やΦ(A,B) といった形で、B が A に対して、Ψ とは別の関係に立つことが考えられる。すると、二つのアーギュメント（項）A、Bについての別の関数が表現されているから、Ψ(A,B) を、A、B を固定して、Ψをアーギュメントと見なすことができる。そのとき、(　) (A,B) は、１階の関数をアーギュメントと見なす２階の関数となる。このような高階関数（これについては第４節で詳述する）を正式に表すには、ギリシア大文字‘Ψ’の代わりにギリシア小文字‘φ’を使って、φ(A,B) と表現される。

可変部分と定常部分に分ける、という分析方法はある種の抽象の方法である。可変な部分を捨て去ることにより、残された部分が独立した考察対象として浮かび上がるからである。こうして、「アーギュメント（可変部分）と関数（定常部分）への分析」という抽象の方法は、高階関数の導入という強力な生産性をもたらすのである。だが、その方法がそのような威力を発揮するためには、一般性を表現するための量化という表現手段と結びつかねばならない。次節でそれを考察する。

３. 一般性と量化

まず、フレーゲの例から引こう(14)。文：

「数 20 は四つの平方数の和として表すことができる」

と

「あらゆる正の整数は四つの平方数の和として表すことができる」

を比較しよう。前者では、「数 20」をアーギュメントとして残りの部分を関数と見なす、という分析が可能であるのに対して、後者では、「あらゆる正の整数」をアーギュメントとする解釈は誤りである、とフレーゲは断言する。なぜなら、「数 20」と「あらゆる正の整数」を同じランクの概念と見なすことはできず、それゆえ、「数 20」について叙述できることがそのままの形では「あらゆる正の整数」についても叙述できるわけではないからである。ここで、一般性という概念のもつ高階性が問題にされている。

では、「一般性」とは何であり、どのように表現されるのか？『概念記法』§11 での「一般性」の説明において、ドイツ文字による量化という表現手段と、それの特殊なケースとしての、ラテン文字による（現在「自由変項」と呼ばれる文字使用に相当する）表現手段とが、提示される。フレーゲの説明はこうである：

> 「判断の表現においては、├── の右側にある記号結合は、つねに、そこに現れている一つの記号の関数と見なすことができる。このアーギュメントの代わりにドイツ文字を書き、また内容線に、例えば、
>
> $\vdash\!\!\!-\!\!\!\overset{\mathbf{a}}{\smile}\!\!-X(\mathbf{a})$　（‘a’ をドイツ文字と見なす）
>
> のように、この同じドイツ文字が現れるくぼみをつけると、これは、その項として何を取ろうともこの関数は事実である、という判断を意味する(15)。」

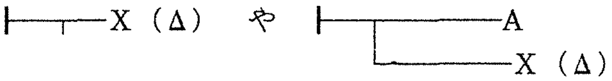
こうして、「くぼみ(Höhlung)」を伴うドイツ文字によって、全称量化が導入される。「その項として何を取ろうともこの関数は事実である」という説明からも察せられるように、ドイツ文字とくぼみは一般性を表わす。その一般性は「├──Φ(Γ)、├──Φ(Δ)、├──Φ(E)・・・等々のすべて」という意味での、非関数表現（＝対象表現）に関わる一般性のみならず、「├──Φ(Γ)、├──X(Γ)、├──Ψ(Γ)・・・のすべて」という意味での関数表現に関わる一般性にも及ぶ。よって、

$\vdash\!\!\!-\!\!\!\overset{\mathbf{f}}{\smile}\!\!-\mathbf{f}(A)$　　（‘f ’ をドイツ文字と見なす）

という表現が可能である。ドイツ文字とくぼみから個々の判断を演繹するとき、くぼみは消える。では、なぜくぼみが必要なのか？「くぼみは、文字によって示されている一般性が関わる範囲を定める。その作用範囲の内部においてのみドイツ文字はその意味を保持するにすぎない」(16)からである。それゆえ、

$\vdash\!\!\!-\!\!\!\top\!\!-\!\!\overset{\mathbf{a}}{\smile}\!\!-X(\mathbf{a})$　や　$\vdash\!\!\!-\!\!\!\top\!\!-\!\!-A$ / $\llcorner\!\!-\!\!\overset{\mathbf{a}}{\smile}\!\!-X(\mathbf{a})$　において、

これらから、くぼみを消して



が導けるとはかぎらないのは、一般性が、前者の場合は否定の内部においてのみ成り立ち、後者の場合は条件文の前件においてのみ成り立つにすぎないからである。単純にくぼみが消せるのは、くぼみが判断記号 $\vdash\!\!-\!\!-$ の直後に位置する

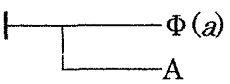
$$\vdash\!\!-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-X(\mathfrak{a})$$

のような場合にかぎる。このような場合にのみ、$\vdash\!\!-\!\!-X(\Gamma)$ や $\vdash\!\!-\!\!-X(\Delta)$ が直接に導かれる。

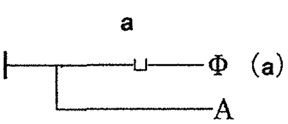
そこで、一般性の意味が判断線の直後から始まる場合という、特殊なケースの代入として、くぼみを消して、ドイツ文字の代わりにラテン文字を代入することが許される。

> 「ラテン文字は常に判断全体の内容を作用範囲としてもつ。・・・ラテン文字は、まだ判断に現れていないドイツ文字によって常に置き換えることができる。その際、くぼみは判断線の直後に置かれなければならない。例えば、a が $X(a)$の項の場所にのみ現れるなら、
>
> $$\vdash\!\!-\!\!-X(a)$$
>
> の代わりに
>
> $$\vdash\!\!-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-X(\mathfrak{a})$$
>
> と置くことができる。」(17)

上記の引用の最後の部分は、全称汎化（全称化）の推論を許す原理である。これは、くぼみが判断線の直後に現れた場合であるが、そうでない場合の全称汎化も条件つきで認められる。すなわち、Aにラテン文字 a が現れず、かつ$\Phi(a)$のアーギュメントの場所にのみ a が現れるとき、



から、



という、作用範囲を一部に限定した全称汎化が許される(18)。

4. 高階の関数

フレーゲの「論理」の生産性は、量化と高階の関数が結びつくとき、最も発揮される。そこで、まず、高階の関数がどのようにして形成されるか、ということから考察しよう。以後、量化の記号

は、フレーゲのオリジナルの「くぼみとドイツ文字」ではなく、今日使われている量化記号∀、ヨとゴチック体（太字体）で表す（論理結合子も同様)。いま、

$$\Psi(\Gamma, \Delta)$$

を「ロミオはジュリエットを愛する」または「ロミオはジュリエットに対して愛するという関係に立つ」という表現（文）であるとする。ここで、文字‘Γ’は「ロミオ」の記号表現、文字‘Δ’は「ジュリエット」の記号表現であるとする。上記の表現$\Psi(\Gamma, \Delta)$から、‘Γ’を抜き取る（抽象する)。すると、$\Psi((\ ), \Delta)$が得られる。空白部分を明示するため、空白をギリシア小文字‘ξ’で埋めて得られる表現：

$$\Psi(\xi, \Delta) \qquad \text{（または、新たに}\Phi(\xi)\text{とも書き直せる）}$$

は、「ξはジュリエットを愛する」という1階の概念（1890 年代以降、概念は関数値が真理値となる関数と見なされる）が形成される。すると、最初の表現$\Psi(\Gamma, \Delta)$は、「ジュリエットを愛する」という性質を対象ロミオがもつ、ということを表現していると見ることができる。すると、「ジュリエットを愛する」という性質である1階概念$\Psi(\xi, \Delta)$は、「ロミオによってもたれている」という（性質についての）高次の性質である2階概念$(\ )(\Gamma, (\ ))$に属することになる。この2階概念は、

$$\phi(\Gamma, \zeta)$$

と表せる。1階の性質は2階の性質をもつ。言い換えると、1階概念は2階概念に属する。

ところで、「量化」は高階概念である。$\forall \mathbf{a}\Phi(\mathbf{a})$から$\Phi(\xi)$を抽出して$\forall \mathbf{a}\phi(\mathbf{a})$を作ると、これは「(1階）概念$\phi$は普遍的である」を意味する2階概念となる。『概念記法』第Ⅲ部§24 の定義 69 における定義項は、

$$\forall \mathbf{d}\forall \mathbf{a}((F(\mathbf{d}) \wedge f(\mathbf{d}, \mathbf{a})) \supset F(\mathbf{a}))$$

である[19]。これを$\Psi(F, f)$と略記する。$\Psi(F, f)$は、「性質Fは関係f上を遺伝する」を意味する。これは、性質Fと関係fという二つの1階関数が　$\forall \mathbf{d}\forall \mathbf{a}((\phi(\mathbf{d}) \wedge \chi(\mathbf{d}, \mathbf{a})) \supset \phi(\mathbf{a}))$——$\Psi(\phi, \chi)$と略記——という関係、すなわち、「$\phi$が$\chi$上を遺伝する」という2階の関係に立つことを意味している。同じく『概念記法』§26の「関係上の先後関係」の定義 76 での定義項は、2階量化を含む次の式である[20]：

$$\forall \mathbf{F}[(\Psi(\mathbf{F}, f) \wedge \forall \mathbf{a}(f(x, \mathbf{a}) \supset \mathbf{F}(\mathbf{a}))) \supset \mathbf{F}y]$$

この式は「xのf上のすべての後者がもつような、(f上で）遺伝する任意の性質を、yももつ」、言い換えると「xはf上でyに先行する」を意味する。これは、関係f上での対象xとyとの関係を叙述している。言い換えると、関係fと対象xと対象yが2階関数：$\forall \mathbf{F}[(\Psi(\mathbf{F}, \chi) \wedge \forall \mathbf{a}(\chi(\xi, \mathbf{a}) \supset \mathbf{F}(\mathbf{a}))) \supset \mathbf{F}\zeta]$ の下に属することを意味する。

このように、(2階関数の一種である）2階概念を有効に使うことによって、フレーゲの定義は生産的なものとなる。実際、上で見た「関係上の遺伝性」や「関係上の先後関係」は2階概念（ないし2階関係）として定義されている。『算術の基礎』§48 で、フレーゲはカントに言及して、概念

の「収集力」についてこう述べている[21]。

> 「概念のもつ収集力は、[カントの言う]総合的統覚[22]の統合力を遥かに凌駕している。後者を用いても、ドイツ帝国の成員を一つの全体に統合するのは不可能であろうが、しかし、彼らを「ドイツ帝国の成員」という概念の下にもたらして、数えることはできるのである。」

1階概念の性質としての2階概念は、1階概念の徴表ではない。徴表(Merkmal)とは、フレーゲにとって、概念の構成要素であるが概念の性質ではない。徴表は概念の下に属するものの性質である。ある概念に徴表を新たに付加することによって、その概念の適用範囲（外延）を狭めて新たな概念が形成される。例えば、概念「三角形」に「等辺」という徴表を付加することにより、「等辺三角形」という新たな概念が形成される。しかし、「存在」「一意性」「数」などの概念は徴表の付加（すなわち徴表の合併）によって生成されるのではなく、「概念の性質」「概念の概念」として生成される。

> 「例えば、「直角を有する」は「直角三角形」という概念の性質ではない。しかし、直角を有する、直線で囲まれた、等辺な三角形は存在しないという命題は、「直角を有する、直線で囲まれた、等辺な三角形」という概念の性質を述べている。この概念には数ゼロが付与されるのである。この点で存在は数と類似している。」[23]

このようなフレーゲの分析から分かることは、多くの重要な論理的概念が高階の概念であるということである。実際に、2階概念の活用は『算術の基礎』で一層進められる。概念「古典論理での真理値」「4以下の素数」「11 より大きいトランプの絵札」はすべて同数的(gleichzahlig)である。すなわち、これらの概念には丁度2個の対象があてはまる。そこで、これらの概念に数2を帰属させるために「同数性(Gleichzahligkeit)」の概念が定義される。（1階の）概念ϕとχが同数的である（$\phi \approx \chi$）とはこう定義される[24]：

$$\exists f[\forall x(\phi(x) \supset \exists ! y(f(x, y) \wedge \chi(y))) \wedge \forall y(\chi(y) \supset \exists ! x(f(x, y) \wedge \phi(x)))].$$

（概念ϕに属する対象と概念χに属する対象との間に、1対1（上への）関数[全単射]が存在する）

同数性は、二つの概念の下に属する対象が同数であることを定義する。その定義は、二つの（一階）概念間に全単射の関数が存在すると主張する、2階概念によって与えられる。この同数性の概念によって、つぎの「ヒュームの原理（HP）：」が定式化される：

$$\text{(HP)} \qquad \#F = \#G \longleftrightarrow F \approx G$$

（概念Fに帰属する数#Fと、概念Gに帰属する数#Gとが同一であるのは、概念Fと概念Gとが同数的であるとき、かつそのときにかぎる）

ヒュームの原理は、二つの概念に帰属する二つの数（基数）が同一であることの必要十分条件がそれらの概念の同数性であること、を主張している。この原理は、同数性という、数に対応する概

念間の２階概念に訴えることにより、二つの数の同一性を与えるのみである。任意の対象ξが数＃F と同一であるどうか、を決定するものではない。すなわち、$\#F=\xi$をヒュームの原理では決定できない（いわゆるシーザー問題)。そこで、数の定義そのものが求められる。それは「値域」によって与えられる。すなわち、(１階の）概念Ｆと同数的である（$F\approx\phi$)、そのような概念ϕの外延（一般的には関数の値域）として、「概念Ｆに帰属する数＃F」が定義される：

$$\#F = {}'\phi(F\approx\phi)$$

これを抽象化すれば、$\#\chi = {}'\phi(\chi\approx\phi)$が得られる。これは、「概念に帰属する数」という関数（１階概念に対象を対応させる２階関数）を定める。このように、値域が高階関数の定義に利用される。しかし、値域の導入は２階関数と結びつくことで大きな表現力を発揮するとともに、矛盾を招来する。これについては、節を改めて論じよう。

5. 値域と抽象の原理

さて、値域(Wertverlauf)――概念の値域が外延である――に関する基本原理は、以下の基本法則Ｖである：

$$(\mathrm{V})\qquad {}'\varepsilon F(\varepsilon) = {}'\varepsilon G(\varepsilon) \longleftrightarrow \forall \mathbf{a}\ (F(\mathbf{a}) \longleftrightarrow G(\mathbf{a}))$$

（関数（概念）F の値域（外延）が関数 G の値域と同一であるのは、関数 F と関数 G が同じアーギュメントに対して常に同じ関数値をもつとき、かつそのときにかぎる）

この式の高階の形式(25)は以下のものである：

$$(\mathrm{V}')\qquad {}'\phi M(\phi) = {}'\phi N(\phi) \longleftrightarrow \forall \phi\ (M(\phi) \longleftrightarrow N(\phi))$$

ここで、$M(\phi)$を$F\approx\phi$の、$N(\phi)$を$G\approx\phi$の省略形とみなせば、(V’) から以下の式が得られる：

$$(*)\qquad {}'\phi\ (F\approx\phi) = {}'\phi\ (G\approx\phi) \longleftrightarrow \forall \phi\ (F\approx\phi \longleftrightarrow G\approx\phi)$$

この式（＊）の左辺は、数の定義により$\#F=\#G$と同値であり、右辺は、‘$\approx$’が同値関係（反射律、対称律、推移律が成立する２項関係）であることによって、$F\approx G$と同値である。それゆえ、この式から、$\#F=\#F \longleftrightarrow F\approx G$というヒュームの原理が得られる。

これらヒュームの原理と基本法則Ｖに特徴的なことは、つぎのような「抽象の原理」と呼ばれる式の一例であることである：

$$[\alpha]=[\beta] \longleftrightarrow E\ (\alpha, \beta)$$

ここで、右辺のＥ（α、β）は同値関係であり、左辺の$[\alpha]$と$[\beta]$はＥによるαとβの（それぞれの）同値類である。フレーゲの二つの原理（ヒュームの原理と基本法則Ｖ）の場合では、同値類は値域であり、同値関係は同数性と同外延性である。抽象の原理では、ある対象間の同一性（左辺）が同

値関係という緩い同一原理（右辺）によって定義される。ここで同値類は、そのような緩い同一性を与えられた新しい対象である。このような、抽象の原理に基づく同値類によって新しい対象を定義する方法は、「抽象の定義」と呼ばれることがある(26)。

フレーゲは、抽象の原理に基づき、抽象の定義を用いて、数の同一性と数そのものを定義した。しかし、フレーゲ自身の抽象の原理である基本法則Ⅴからは矛盾が導出された。高階概念と量化とを抽象の原理と結びつけるフレーゲの分析方法（定義方法）から、さまざまな独創的・生産的概念が定義されることは、これまでの節で見たとおりである。しかし、そこに含まれる表現力の強さは、矛盾を生み出すほどに大きなものである。われわれはこのことをどのように考えるべきであろうか？これから、どのような教訓を導き出せるのか？

そこで、まず、フレーゲの分析方法の有する独創性と生産性について、その本性はどのように特徴づけられるべきか、それを探らねばならない。フレーゲの論理主義の発想の根源は、論理を純粋な思考の法則と見なすところにある。この場合の「純粋」とは、われわれの経験や直観――フレーゲが考える「直観」は多分に感性的なものである――に依存せず、それらから独立であることを意味する。経験や直観は、外界に関わるわれわれの能力である。外界の反応や外界からの情報をわれわれがある仕方で受けとめる力が経験であり、外界からの反応や情報に媒介無しに直接に接近して情報内容を理解する力が直観である。経験や直観のような感性に関わる能力は外界を理解する導き手になるが、常に誤差や誤謬がつきものであり、判断の正否の最終的な根拠とはなりえない。確実な根拠となりうるのは、そのような感性にまつわる誤差や誤謬を免れた、その意味で「純粋な」概念しかない。

概念は、少なくとも「論理的」とされる概念は、そのような感性的な誤差や誤謬とは無縁なイデア的・形式的性格をもつ。もちろん、概念も言語によって表現されねばならない。現実の言語（日本語や英語のような日常の生活言語）は、発話・筆記、聴聞・読解の場面で感性的なものと無関係ではありえず、それゆえ、さまざまな感性的制約を受ける。しかし、概念そのものはそのような感性的制約とは無縁である。こうして、現実の言語に概念の正確な表現は期待できず、新しい言語が開発されねばならない。そのような意図の下に、概念を正確に表現する手段として開発された言語が、まさにフレーゲの「概念記法」である。概念記法を用いて初めて、概念の正確な記述が可能となる。少なくとも、フレーゲにはそう考えられた。

ところで、概念記法を用いて、さまざまな概念が正確に定義されるが、そのような定義はあくまで定式化（定着）であって、人間は概念を勝手に創造できるものではない。（フレーゲはこのような形での「実在論」を終生保持し続けたように思われる。）フレーゲは、概念を正確に表現する手段としての概念記法を開発するプロセスにおいて、概念が、それだけで、きわめて強力な表現力を持ちうることに気づいた。そのことは、初期の著作『概念記法』や、これの意義を強調する同期の諸論文に見て取れる。外界に関わる直観に訴えることなく、関係（系列）上の遺伝性や先後関係、さらに数といった概念を、一層基本的・論理的概念だけを巧妙に組み合わせることによって、正確に定義し、表現できる。フレーゲは、ごく初期のころから、論理的概念のもつこうした生産力を実感したにちがいない。フレーゲは定義の有効性を、定義のもつ生産性に求めたが、そのような生産性は、概念、特に基本的・論理的概念そのもの、から生み出されるものである。しかも、そのような概念の生産性は、同時に、矛盾を生み出すほど強大なものになりうるものである（この点については、フレーゲは気づかなかったか、楽観視していたように思われる）。

それでは、概念には何らかの「統制原理」が必要なのであろうか？統制原理は自動的に働くのか？

フレーゲの考えでは、少なくとも論理的な概念においては、統制原理は最初から備わっており、生産性の暴走は放っておいても食い止められるはずであった。フレーゲが、「無矛盾性」の確認を外から行うことに対して積極的ではなく、重要性を感じていなかったふしがあることからも、そのことは推測される。しかし、論理――概念から組み立てられるものとしての論理――は、統制原理を必ずしも備えているわけではない。フレーゲの『算術の基本法則』において矛盾が発見されたことが、そのことの動かしがたい証拠である。外界についての情報無しで、その意味で自立的に、算術を展開できるほどの力をもつ論理（フレーゲの高階論理）は、大きな生産性を持つ反面、適切な統制原理を欠いていることが判明した。論理のもつ外界からの自立性（確実性）と、論理のもつ生産性との間にどのようにして折り合いをつけるべきか？場合によっては、自立性と生産性のどちらを選ぶのか、われわれは選択を迫られている、といえる。論理の規模や範囲をどのようなものに選ぶのか、これには幾つかの観点が対応している。古典論理の拡張と代替の体系選択には、古典論理との競合やそれの補完という観点が対応している。フレーゲは古典論理内部に止まったが、内部においても、高階論理に関して選択肢が存在することが明らかとなった。それは、論理のもつ自立性（確実性）と生産性との間にどのような折り合いをつけるべきか、という観点からの選択肢である。

註

(1)［岡本・金子 2007］を参照。この書物には、ダメット、C・パーソンズ、ブーロス、ライト、ルフィーノ、ヘイル、アクゼル、スントホルムなどの論文が収められているが、新論理主義の提唱・批判の流れと、それとは独立なフレーゲ研究（特に「フレーゲ構造」の抽出に見られる現代的発展形態）の流れの両者がバランスよく配置されている。筆者はこの書物の書評を書いた。［田畑 2007］を参照。

(2)このような関心・アプローチは、[Macbeth 2005] にある。本論文もこれから学ぶ所が多かった。

(3) 飯田隆はこの考え方を採用して論じている。[飯田 2008]、特に、その第3節参照。

(4) BS 2頁、邦訳 11頁。『概念記法』の原テキストBSは、頁付けも含めて、BuSに収められたものによる。

(5) BS 2頁、邦訳 11頁。

(6) BS 5頁、邦訳 16頁。

(7) BS 22-23頁、邦訳 39頁。

(8) BS 57頁、邦訳 89頁。

(9) BS 18頁、邦訳 32-33頁。

(10) BS 2頁、邦訳 11頁。

(11) BS 15頁、邦訳 29頁。

(12) BS 16頁、邦訳 31頁。原ドイツ文は斜字体（イタリック）で強調されている。

(13) BS 18頁。邦訳 33頁。

(14) BS§9、17頁、邦訳 31頁。

(15) BS §11、19頁、邦訳 34頁。

(16) BS 20頁、邦訳 36頁。

(17) BS 21頁、邦訳 37頁。

(18) BS 21頁、邦訳 37頁。この推論が正しいことの理由は、こう説明される。結論が正しくなく、否定されねばならないとしよう。そのとき、Aが肯定され、

a

$—\!\!\sqcup\!\!—— \Phi$ (a)

が否定されねばならない。後者が成り立つためには、Φ(*a*)が否定されるような *a* の意味がなければならない。ところが、前提が主張することは、Aが肯定され、Φ(*a*)が否定されるような *a* の意味がある、という二つのことは同時には成り立たない、ということである。よって、矛盾にいたる。従って、結論は正しいから、肯定されねばならない。

(19) BS 55 頁、邦訳 86 頁。

(20) 60 頁、邦訳 93 頁。

(21) GLA §48, 62 頁、邦訳 108 頁。

(22) GLA の邦訳 109 頁の訳註によれば、カントは『純粋理性批判』で「経験的統覚」や「超越論的統覚」という言葉を使っており、「総合的統覚」という言い方はしていないらしい。ただし、「統覚の総合的統一 (synthetische Einheit der Apperception)」という表現は用いられるという。

(23) GLA §53, 64 頁、邦訳 112 頁。

(24) GLA §63, 71 頁、邦訳 122 頁。

(25) 基本法則Ⅴに現れる F(ξ)が対象をアーギュメントとする関数、すなわち1階関数であるのに対して、Ⅴ’に現れる関数 M(φ)は、1階関数をアーギュメントとする2階関数である。

(26) [ワイル 1969] 10 頁参照。

参考文献

※フレーゲの著作

BS: *Begriffsschrift, Eine der Arithmetischen Nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens,* Nebert, 1879.　邦訳：藤村龍雄訳『概念記法　算術の式言語を模造した純粋な思考のための一つの式言語』藤村龍雄（編）『フレーゲ著作集１』勁草書房 1999, 1-127 頁に所収.

BuS : *Begriffsschrift und Andere Aufsaetze,* Zweite Auflage, Olms, 1964.

GLA : *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* Centenarausgabe: Mit ergänzenden Texten kritisch herausgegeben von Christian Tiel, Felix Meiner, 1986. 原典頁付けはこの版による。邦訳：三平正明・土屋俊・野本和幸訳『算術の基礎［1884］　数概念についての論理数学的探究』野本和幸・土屋俊（編）『フレーゲ著作集２』勁草書房 2001, 25-174 頁に所収。

※その他の文献

[Macbeth 2005] : Danielle Macbeth, *Frege's Logic,* Harvard U. P., 2005.

[飯田 2008]：飯田隆「『概念記法』の式言語とはどんな言語なのか」『分析哲学の誕生　フレーゲ・ラッセル』89-110 頁.

[岡本・金子 2007]：岡本賢吾・金子洋之（編）『フレーゲ哲学の最新像』勁草書房 2007.

[田畑 2007]：田畑博敏「書評　岡本賢吾・金子洋之（編）『フレーゲ哲学の最新像』」、日本科学哲学会『科学哲学』40 巻 2 号 96-101 頁.

[分析哲学 2008]：日本科学哲学会（編）『分析哲学の誕生　フレーゲ・ラッセル』勁草書房 2008.

[ワイル 1969]：ヘルマン・ワイル（菅原・下村・森訳）『数学と自然科学の哲学』岩波書店 1969.

（2008年10月７日受理）