パラドクスの起源

―フレーゲの「意味」論の問題点―

田畑博敏(平成6年6月20日受理)

はじめに

ダメットは最近の著書『フレーゲ:数学の哲学』の中でこう述べている:

「フレーゲの『算術の基本法則』体系の矛盾は、定式化の不注意に起因するたんなる事故(破局的なものではあるが)ではなかった。1906年8月までに、それは、理論の枠組み内部では――すなわち、原始語としての抽象作用素と値域の同一性の条件を支配する公理とをもってしては――処理しきれない、ということをフレーゲは発見していた。しかし、その基礎にある誤りは、集合論の基礎に関わる間違いより一層深刻なものであった。それは、彼の全哲学に影響する誤りであった。」(1)

では、何が問題だったのか?パラドクスを導くに至るフレーゲの思考の線のどこに問題があったのか?以下では、ダメットの解釈を参考にしながら、パラドクスの起源ともいうべき、『算術の基本法則』の体系構成に当たっての、フレーゲの哲学的論理学と意味論――特に「意味(指示)」と「2階の量化」の扱い――の持つ問題点に焦点を当ててみたい。それによって、パラドクスが「フレーゲの全哲学に及ぼした深刻な影響」がどのような形のものだったか、を明らかにしたい。

§ 1 パラドクス

今日、いわゆる「ラッセルのパラドクス」が標準的な集合論⁽²⁾の中で論じられるときは、つぎのような取り扱いを受ける。まず、内包の原理(principle of comprehension)と呼ばれる以下の原理が素朴に前提されている、と考えられる:

クラス x についての任意の述語 Fx について

 $\exists y \forall x \ (x \in y \Leftrightarrow Fx).$

任意の述語 "Fx" として," ¬ (x ∈ x)"をとると,

 $\exists y \forall x \ (x \in y \Leftrightarrow \neg \ (x \in x)).$

存在が主張されているクラスをRとする(存在例化)と、

 $\forall x (x \in R \Leftrightarrow \neg (x \in x)).$

これから普遍例化により,

 $R \in R \Leftrightarrow \neg (R \in R).$

となり矛盾に至る。そこで、矛盾を防止するために、クラスと集合の区別を始め、内包の原理を限定する(ツェルメロの分出公理等)などさまざまな措置がとられ、信頼のおける原理から「公理的」に展開しようということで「公理的集合論」の話が始まる。

ところで、ラッセルが発見しフレーゲを驚かしたオリジナルな「ラッセルのパラドクス」は、これとはややスタイルを異にする。⁽³⁾二人の文通の端緒をなすフレーゲ宛の手紙(1902年 6 月16日付)で、ラッセルはパラドクス発見をこう報告する:

「w を、"それ自身に述語づけられない述語である"という述語だとします。w は w に述語づけられるでしょうか? [w が w に述語づけられるとしても、述語づけられないとしても] どちらの答えからも矛盾が生じます。従って、w は述語ではない、と結論しなければなりません。同様に、一つの全体として見られたときの、それ自身の要素ではない諸クラスの(ひとつの全体としての)クラスというものも、存在しません。以上のことから、一定の状況下では、確定した集合が一つの全体を形成しないことがある、と私は結論します。」(4)

これに対する返信(1902年6月22日付)の中で、フレーゲはパラドクスに驚いたことを述べたのち、ラッセルの定式化の中で「述語がそれ自身に述語づけられる」という言い方が不正確だとして、彼自身の定式化を提案する:

「従って、私ならば"概念がそれ自身の外延に述語づけられる"と言うでしょう。もし、関数 $\Phi(\xi)$ が概念ならば、私はその外延(または対応するクラス)を" $\epsilon \Phi(\epsilon)$ "で示します(ただし、これの正当化に関して私は現在疑いを持っていますが)。それゆえ、" $\Phi(\epsilon)$ " または" $\epsilon \Phi(\epsilon)$ 0 $\epsilon \Phi(\epsilon)$ 0 が概念 $\Phi(\epsilon)$ 0 のそれ自身の外延への述語づけということになります。」 (5)

フレーゲは『基本法則』第Ⅱ巻の付録で、ラッセルが発見したパラドクスをさまざまな角度から 検討する。まず、パラドクスの内容を言葉で説明したのち、彼の概念記法により、『基本法則』の 体系のなかでそれがどう導かれるかを以下のように示す。(論理記号を今日の線形のものに書き改める。ただし、今日では "⇔" と書くのが普通である部分をフレーゲに倣って "=" と書くが、これは以下の議論に関係するからである。)

まず、"Δはそれ自身に属さないクラスである"は、

$$\exists G \ (\dot{\varepsilon} G(\varepsilon) = \Delta \land \neg G(\Delta))$$

と書ける。そこで、"それ自身に属さない諸クラスのクラス"を" Γ "と略記する:

$$\Gamma = \dot{\alpha} \, \exists G \, (\dot{\varepsilon} \, G \, (\varepsilon) = \alpha \, \land \, \neg \, G \, (\alpha)) \, . \, \dots \, (\%)$$

すると、"Γはそれ自身に属さないクラスである"は、

$$\exists G(\dot{\epsilon} G(\epsilon) = \Gamma \land \neg G(\Gamma))$$

と表現される。基本法則(V)の半分と同値な

(Vb):
$$\dot{\epsilon} f(\epsilon) = \dot{\alpha} g(\alpha) \rightarrow (f_X = g_X)$$

によって,

$$\dot{\varepsilon} f(\varepsilon) = \dot{\alpha} \exists G(\dot{\varepsilon} G(\varepsilon) = \alpha \land \neg G(\alpha))$$

$$\rightarrow (f(\Gamma) = \exists G(\dot{\varepsilon} G(\varepsilon) = \Gamma \land \neg G(\Gamma)),$$

これと、上の(%)と、基本法則(Πa): $(a = b) \rightarrow (f(b) \rightarrow f(a))$ の事例:

$$(f(\Gamma) = \exists G(\dot{\epsilon} G(\epsilon) = \Gamma \land \neg G(\Gamma)))$$

$$\rightarrow (\exists G(\dot{\varepsilon} G(\varepsilon)) = \Gamma \land \neg G(\Gamma)) \rightarrow f(\Gamma))$$

および命題論理: $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ によって、

(1)の f を全称化して,

$$\exists G(\dot{\epsilon} G(\epsilon) = \Gamma \land \neg G(\Gamma)) \rightarrow \forall G(\dot{\epsilon} G(\epsilon) = \Gamma \rightarrow G(\Gamma)), \dots (2)$$

つまり、 Γ がそれ自身に属さないクラスであれば、 Γ はそれ自身に属するクラスである。この(2)は \neg A \rightarrow A という形をしていることに注意しよう。

他方、基本法則(Πb): $\forall FM\beta(F(\beta)) \rightarrow M\beta(g(\beta))$ により、

$$\forall G(\dot{\varepsilon} G(\varepsilon) = \Gamma \rightarrow G(\Gamma)) \rightarrow (\dot{\varepsilon} f(\varepsilon) = \Gamma \rightarrow f(\Gamma))$$
(3)

" $f(\xi)$ " ε " $\exists G(\xi G(\varepsilon) = \xi \land \neg G(\xi))$ " $\xi G(\xi)$ " ξ

$$\forall G(\dot{\epsilon} G(\epsilon) = \Gamma \rightarrow G(\Gamma)) \rightarrow$$

$$[\dot{\alpha} (\exists G(\dot{\epsilon} G(\epsilon) = \alpha \land \neg G(\alpha)) = \Gamma \rightarrow \exists G(\dot{\epsilon} G(\epsilon) = \Gamma \land \neg G(\Gamma))] \cdot \dots \cdot (4)$$

記法(※)により、 $\dot{\alpha}$ (∃G($\dot{\epsilon}$ G(ϵ) = α \wedge ¬ G(α))) = Γ は

 $\Gamma = \Gamma$ であることに注意すると、(4)から、

$$\forall G(\dot{\epsilon}G(\epsilon) = \Gamma \rightarrow G(\Gamma)) \rightarrow \exists G(\dot{\epsilon}G(\epsilon) = \Gamma \land \neg G(\Gamma)) \dots (5)$$

が出る。つまり、Γがそれ自身に属するクラスならば、Γはそれ自身に属さないクラスである。(5)

は(2)の逆で、 $A \rightarrow \neg A$ という形をしている。この(5)から、定理: $(A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$ によって、

$$\exists G (\mathring{\epsilon} G(\varepsilon) = \Gamma \land \neg G(\Gamma)). \dots (6)$$

(6)と(2)から

$$\forall G (\dot{\epsilon} G (\epsilon) = \Gamma \rightarrow G (\Gamma))$$
....(7)

ところが、(6)と(7)は矛盾である。以上の導出の中で、誤りは法則(Vb)にしかない、とフレーゲは考えた。すなわち、

(Vb):
$$\dot{\epsilon} f(\epsilon) = \dot{\alpha} g(\alpha) \rightarrow (fx = gx)$$

は偽である。ということは、基本法則(V)、すなわち、

(V):
$$\dot{\epsilon} f(\epsilon) = \dot{\alpha} g(\alpha) = \forall x (fx = gx)$$

も真ではありえない。フレーゲは(V)に替わるものとして,

$$(V') : \dot{\varepsilon} f(\varepsilon) = \dot{\alpha} g(\alpha)$$

$$= \forall x [x \neq \dot{\varepsilon} f(\varepsilon) \land x \neq \dot{\alpha} f(\alpha) \rightarrow (fx = gx)]$$

を、さらに矛盾の元凶(Vb)に替えて

$$(V'b)$$
: $\dot{\varepsilon} f(\varepsilon) = \dot{\alpha} g(\alpha) \rightarrow [x \neq \dot{\varepsilon} g(\varepsilon) \rightarrow f(x) = g(x)]$

を取るという修正案を提出するが、これからも矛盾が出ることが後に示された。⁽⁶⁾

§ 2 起 源

このようなパラドクスに至るフレーゲの思考の線はどのようなものであったか、これが以後の課題である。上で引用したラッセルへのフレーゲの返信(1902年6月22日付)で、フレーゲは矛盾発生の帰結として、

- (1) 同一性の一般性を値域の同一性へと変形することは常に認められるとはかぎらない,
- (2) 基本法則 V は誤りである,
- (3) 『基本法則』 I 巻§ 31でのフレーゲの説明は、あらゆる場合の記号結合に意味 (Bedeutung) を確保するのに十分ではない、

という三つのことを挙げている。 $^{(7)}(1)$ の「同一性の一般性を値域の同一性へと変形すること」というのは,法則Vのことであり,(1)は(2)と同じことであるが,すでにこの時点でフレーゲは値域に関わるこの法則の誤りを見抜いていた。そして(3)で言われていることは,フレーゲの体系構成の前提にある哲学的論理学の矛盾発生への関与を示唆する。 \S 31での説明はフレーゲにとって,「無矛盾性の証明」の役割を担うはずであった。 $^{(8)}$ しかし,それは結局,「証明」にはなっていなかったのである。以後, \S 31に至るフレーゲの思考過程を跡づけ,矛盾発生にそれがどう関わっていたかを考察しよう。

『算術の基本法則』(以下"GGA"と略記)では、体系の統一的かつスムーズな展開のためであろう、「意味」(Bedeutung)の観点から、対象とその表現の一元化が押し進められる。構文論的には文は真理値の名前とされ、通常の対象を表示する固有名と同列に扱われる。文と固有名のこの構文論上の同化と平行して、それらが意味する対象についても一元的な扱いが見られる。真理値は確かに特異な対象ではあるが、対象の一種であることに変わりはない。現実的対象 vs 抽象的対象、真理値 vs 数といった区別以上に、対象と関数(それを表示する飽和表現 vs 不飽和表現)の区別が基本であった。しかし、そのような一元化は何によって保証されるのか。

この時期のフレーゲにとって、対象としてまず考えられるのは真理値である。しかし、もちろん、真理値だけでは算術を展開することはできない。そこで導入されるのが関数の値域(Werthverlauf)である。これは、『概念記法』出版以来の概念記法に対する最大の補足である、とフレーゲ自身が語るものである(GGA,I§9)。これによりアーギュメントの領域が拡張される。「関数 $\Phi(\xi)$ と関数 $\Psi(\xi)$ がすべてのアーギュメントに対して同値となる丁度そのとき、関数 Φ の値域 $\Phi(\xi)$ と関数 Ψ の値域 $\Phi(\xi)$ は同一である」、として値域は文脈的に定義され導入される(GGA,I§3)。関数が概念(その値が常に真理値である関数)であるとき、値域は概念の外延と同一視される。法則 $\Psi(\xi)$

(V):
$$\dot{\epsilon} f(\epsilon) = \dot{\alpha} g(\alpha) = \forall x (f(x) = g(x))$$

は、この値域の文脈的定義であるとともに、値域の同一性の基準を与える。それは同時に関数のある種の対象化と読める。「同一性の一般性を値域の同一性に変形する」というフレーゲの言葉は、関数の同一性の、対象の同一性への帰着(関数ないし概念間の同一というそれ自身第二階の概念を対象間の同一性という第一階の概念へと帰着させること)と受け取れる。関数と対象の区別が、こういう形である種の相対化を被る。(数が存在論的に何であれ、数を主題化することが数を対象として扱うことを要求するのと平行に、関数を主題化する——例えば、その同一性を問題にする——とき、関数をある形で対象化せざるを得ないためである。)

対象と関数の区別を相対化して、関数の同一性を対象の同一性に帰着させることは、いわば縦の方向での「対象の一元化」であるのに対して、横の方向での一元化、値域がそもそも何であるか ($\epsilon=\epsilon$ f(ϵ)で ϵ に値域以外の、文も含む固有名が代入されたときの値は何か)、真理値と値域が どう違うか、という問題も、値<真>を水平線関数の値域: ϵ (—— ϵ)つまり {<真>} と同一視し、値<偽>を値域: ϵ ($\epsilon=\neg$ \forall x(x=x)、つまり {<偽>} と同一視するという便法によって、ひとまず解かれる(GGA,I § 10)。

さてこのような、固有名と文の同化、真理値と値域の同化に裏打ちされた「対象の一元化」を背景に、「正しく形成された名前は何らかの意味を持つ(bedeuten)」という指導原理(GGA,I § 28)が実現することの説明が『基本法則』 I § 31でなされる。§ 31での説明の基礎にあるのは、§ 29で

- の(i)名前の意味獲得の規約と、§30での(ii)名前の構成方法である。
 - (i) 名前の意味の獲得規約は5項目に亙って述べられる。例えば、
 - ①固有名 (対象名) が意味を持つのは, (a) 1 アーギュメント 1 階の関数を表す有意味表現のアーギュメント座にその固有名を代入した結果が意味を持ち,かつ (b) 2 アーギュメント 1 階関数の有意味表現のアーギュメント座の一方にその固有名を代入した結果が有意味な 1 アーギュメント 1 階関数の有意味表現となる場合であり,

また.

②1アーギュメント1階関数名が意味を持つのは、有意味な固有名をそのアーギュメント座に 代入した結果が有意味である場合である、

といった具合である。フレーゲの意図としては、これらが持つ循環性は、明らかに有意味な固有名や関数名を確保することによって解消できる(これの規約を「意味を持つこと」の定義とは受け取ってくれるな、とフレーゲは釘をさしている:GGA,I § 30)。

もう一つは、(ii)名前の構成方法である。これには二通りあって、第一の方法は、関数名のアーギュメント座に名前を代入する方法である。例えば、

[A] 固有名は

- (1) 固有名と1アーギュメント1階関数名から、かまたは
- (2) 1階の関数名と1アーギュメント2階関数名から、かまたは
- (3) タイプ2のアーギュメント [=1アーギュメント1階関数] を持つ2階の関数名と3階 の関数名から、構成される、

といった具合である(他の関数名も同様に構成される)。第二の方法は,固有名(文)から,その構成要素である名前を抜き取ることによる。例えば," $\Delta=\Delta$ "から " Δ "を抜いて " $\xi=\xi$ "を構成する。このようにして行われる名前の構成に際して,既存の名前から新規の名前へと有意味性は伝達されると考えられるから,『基本法則』I \S 31で実際に示されることは,原始的関数名についての有意味性を示すことである。原始的な名前として考察される関数名は,水平線 "—— ξ ",否定 "——",記述 " $/\xi$ ",条件法 "—— ξ ",同一性 " $\xi=\xi$ " の各 1 階関数名," \forall x ϕ (x)",

" $\epsilon \phi$ (ϵ)" の各 2 階関数名," $\forall F \mu \beta$ ($F(\beta)$)" の 3 階関数名であるが,この最後のもの,つまり第 2 階の量化を含む関数名については,第 1 階の量化を含む " $\forall x \phi$ (x)" の場合と同様だとして,取り立てて説明がない。ここにフレーゲの第 2 階量化への無関心が見られる。

ダメットによれば、以上のようなフレーゲの意味=言語システムと、彼の第2階量化への無関心との結合が、矛盾を誘い込む直接の原因である、という。⁽⁹⁾第2階量化の有意味性についてのフレーゲの説明はこうである(GGA.I § 25):

「 $\Omega \beta (\phi(\beta))$ をタイプ2のアーギュメント [1アーギュメント1階関数] を一つ持つ2階 の関数とし、そのアーギュメント座が" ϕ "で示されるとせよ。そのとき、 $\forall F \Omega \beta (F(\beta))$ が真となるのは、すべての適正なアーギュメントに対して、われわれの第2階の関数の値が常に値<真>となる場合である。」

第2階の量化子の出現の予備段階として、一つ以上の第1階関数名を抜き取って第2階関数名を形成する必要がある。そうしてできる第2階関数名が常に意味を持つとは、アーギュメント座に第1階関数名を代入したとき、そのすべての場合において、その結果が意味を持つことに他ならない。しかし、任意の第1階関数というとき、第2階の量化が無制限に入り込んでくる余地がある。ここに誤りの根がある。ダメットが、ラッセルのパラドクスと類似した矛盾がこれによって生じることを示している。(10)それを再構成すると、以下のようになる。

いま、2階の量化を含む、有意味な関数名 $h(\xi)$ を取る:

$$h(\xi): \forall F(\xi = \dot{\xi} F(\xi)) \cdot \cdots (1)$$

これに関連して, 第2階の関数名:

$$\dot{\varepsilon} h (\varepsilon) = \dot{\varepsilon} \phi (\varepsilon) \rightarrow \phi (\dot{\varepsilon} h (\varepsilon)). \dots (2)$$

を取る。この(2)の第2階の量化文を取る:

$$\forall F(\dot{\epsilon} h(\epsilon) = \dot{\epsilon} F(\epsilon) \rightarrow F(\dot{\epsilon} h(\epsilon)) \cdots (3)$$

(3)が意味を持つには、(2)のアーギュメント座 " ϕ " に任意の有意味な第1階関数名を代入した結果が有意味でなければならない。そこで、(1)の $h(\xi)$ で(2)の " ϕ " を満たす:

$$\dot{\varepsilon} h (\varepsilon) = \dot{\varepsilon} h (\varepsilon) \rightarrow h (\dot{\varepsilon} h (\varepsilon)) \cdots (4)$$

(4)の先件 $\dot{\epsilon}$ h (ϵ) = $\dot{\epsilon}$ h (ϵ) は成り立つから、(4)はつぎの(5):

と同値となる。つまり、(3)の有意味性は(5)の有意味性に依存する。ところが、(5)を(1)によって元に戻すと、

$$h (\dot{\epsilon} h (\epsilon)) : \forall F (\dot{\epsilon} h (\epsilon) = \dot{\epsilon} F (\epsilon) \rightarrow F (\dot{\epsilon} h (\epsilon)) \cdots (6)$$

こうして、『基本法則』I§31は「無矛盾性の証明」に失敗している。実際、フレーゲにとっては、基本法則から作られる文(固有名)は当然すべて値<真>を意味するはずであり、推論規則は有意味性を前提から結論に伝達するから、残るは、文を含むあらゆる名前の有意味性を確保するという§31の「証明」さえ成功したら、「無矛盾性」が確保できるはずであった(もちろん、明らか様に

フレーゲがこの場面で「無矛盾性」を問題にしている訳ではないが、インプリシットにそのような 含意がある、ということである)。

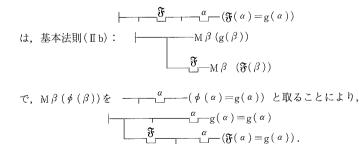
$$f(\dot{\alpha}(\dot{\epsilon}_h(\epsilon) = \dot{\epsilon}_j(\epsilon, \alpha)))$$

のような、より複雑な値域間の同一性文を含みうる。それゆえ、フレーゲの規約は十分に基礎づけられてはいない。同一性文の真理値が複雑さのより少ない名前と文の意味にのみ依存している、とは解釈できないからである。こうして、第1階の量化のみを含むフレーゲの部分システムは矛盾は免れているが、「無矛盾性の妥当な証明」を欠いている。

ともかく, § 31の不成功は, そこに至るフレーゲの哲学的論理学, ひいては彼の(論理主義のプログラムを含めての)哲学全体の枠組みを疑わせるに十分であった。

註

- (1) M. Dummett, FREGE: Philosophy of Mathematics, Harvard U. P. 1991. p. 223.
- (2) 例えば、田中尚夫『公理的集合論』培風館 1982, 45頁, 等。
- (3) 上の集合論の記法は、第1階述語論理の枠内でメンバー・シップ"∈"を原始述語とみなしている。フレーゲの『算術の基本法則』は第2階の述語論理で展開されている。もちろん、内包の原理に相当する、



すなわち、現代の記法で書けば $\exists F \forall x (F(x) \Leftrightarrow g(x)) \& E = 1$ の体系で導ける。また、内包の原理に現れる存在量化子と普遍量化子を除いた、 $x \in y \Leftrightarrow Fx$ に対応する $f(a) = a \cap \epsilon f(\epsilon)$ も導ける(『算術の基本法則』 I (以後 GGA I と略記することがある) §§ 54-55参照)。なお、以後、論理式は、ワープロや印刷の関係で必ずしもフレーゲの「概念記法」の様式には従えないことをお断りする。

- (4) G. Frege, Wissenschaftlicher Briefwechsel, Felix Meiner 1976 (以下 "BW" と略記) SS. 213-4. 英訳: Philosophical and Mathematical Correspondence, Basil Blackwell 1980 (以下 "PMC" と略記), pp. 130-131.
- (5) BW, SS. 213-4; PMC, pp. 132-3.
- (6) W. V. Quine, "On Frege's Way Out", Mind LXIV (1955), pp. 145-159 参照。なおこの論文は以下のアンソロジーに再録されている。H. Sluga (ed.), The Philosophy of Frege, Garland 1993, pp. 71-85.
- (7) BW, S. 213; PMC, p. 132.
- (8) Dummett, op. cit. pp. 215-6.
- (9) Dummett, op. cit. p. 218.
- (10) Dummett, op. cit. pp. 218-9.

[付記] 本稿は、平成5年度日本科学哲学会年次大会(1993.11.20-21.於:東京都立大学)で開催されたワークショップ「フレーゲ:『算術の基本法則』から100年」のためのプレ·プリントに加筆したものである。発表の機会を与えて頂いたオーガナイザーの飯田隆氏を始めとする関係諸氏に、この場を借りて感謝申し上げる。

