様相と証明可能性（I）

田　畑　博　敏

（平成３年６月30日受理）

§１　概　　観

１．１　様相論理

通常の古典論理に，「必然性」や「可能性」，あるいはそれらに関連する「含意」といった概念を表す語彙を付加した体系（古典論理の拡張体系）の論理的研究が，様相論理である。様相論理では，「…は必然である」「必然的に…である」という言葉使いは，文演算子とみなされ，記号“□”で表す。また，「…は可能である」という言葉使いも，“◇”という文演算子で表す。こうして，“A”を任意の文とするとき，“□A”は「Aは必然である」と読み，“◇A”は「Aは可能である」と読む。□と◇とは相互に定義できる。すなわち，□を原始記号とするとき，“◇A”は“¬□¬A”と定義でき，逆に◇を原始記号とするとき，“□A”は“¬◇¬A”と定義できる。

さて，本論では，様相論理の□を“…は証明可能である”と読み，◇を“…は無矛盾である”と読む解釈を取るときの様相命題論理の体系を考察する。このような体系は，クルト・ゲーデルにちなんでGと呼ばれるが，ゲーデルの有名な定理（とくに形式的算術体系の無矛盾性に関する定理）に関連する興味深い結果を導くことになる。[1]　Gにおいても，大部分の様相命題論理が文とみなす表現を文とするが，定理についてはGはある特徴を持っている。Gの公理は，すべてのトートロジーと，$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ という形式のすべての文であり，さらに，

$$\Box(\Box A \to A) \to \Box A$$

という形の文が公理に加わる。Gの推論規則はモドゥス・ポネンスと必然化である。Gにおいては，例えば“$\Box p \to p$”は定理ではない，という一見奇妙なことが起こる。これは，Gが必然性というよりむしろ証明可能性の概念の研究のために考案された体系であることに起因する。

様相論理の研究は，ソール・クリプキが「可能世界意味論」という新しい形の意味論を導入して以来，大幅に進歩した。[2]　クリプキは，可能世界と呼ばれる要素からなる集合（領域）Wと，Wの

要素間に成り立つ二項関係（接近可能性の関係と呼ばれる）Rと，領域のメンバーと文変項から成る各対に真理値を付与する関数Pとの三者から構成された順序三組〈W，R，P〉を，様相文の解釈のモデルとする。ここでは，文は各世界ごとに真理値が決まる。すなわち，要素文（＝文変項）は各世界で関数Pにより直接に真理値が与えられ，真理関数的複合文の真理値は通常の仕方でその世界での各要素文の真理値から計算される。□Aという形の文がある世界αで真であるのは，その世界から接近可能な（つまり，αと関係Rを満たす）すべての可能世界で文Aが真であるとき，かつそのときにかぎる。こうして，演算子□は，二項関係を備えた非空の集合上で定義された一種の量化子とみなされる。また，文はあるモデルのすべての可能世界で真であるとき，そのモデルで妥当であると言われる。クリプキは，様相論理に関する以下の形の多数の健全性および完全性定理を証明した。すなわち，様相論理のよく知られた体系の定理である文は，ある性質を持つ（接近可能性という）二項関係の定められたすべてのモデルで妥当な文と一致する。

ところで，様相命題論理の体系は，その定理の集合がすべてのトートロジーと　□（A→B）→（□A→□B）という形のすべての文を含み，モドゥス・ポネンスと必然化と代入について閉じているならば，正規的（normal）と呼ばれる。よく研究されている様相命題論理の体系T，S4，B，S5 とともに，体系Gも正規的体系である。体系Gにもクリプキ流の健全性定理・完全性定理が成り立つ。すなわち，関係Rは，

$$\cdots\cdots w_3 Rw_2 \ \& \ w_2 Rw_1 \ \& \ w_1 Rw_0$$

であるような，いかなる無限列：

$$w_0,\ w_1,\ w_2,\ w_3,\ \cdots\cdots$$

も存在しないとき，よく基礎づけられている（well-founded）と呼ばれるが，Gの定理は，接近可能性関係の逆関係がよく基礎づけられておりかつ推移的であるようなすべてのモデルで妥当な文と一致する。

以下ではこのようなGの構文論的かつ意味論的性質を研究するが，□を「証明可能性」と解するとき，それは正確には「算術での証明可能性」である。そこで次に，算術について概観する。

1．2　ペアノ算術

ここで考察の対象となる算術は，ペアノ算術（Peano arithmetic：以下，PAまたは単に「算術」と記すことがある）として知られる，数学的帰納法の公理と，後者，加法，乗法を支配する公理を持つ古典第一階の形式的算術である。これは，ゲーデルの不完全性定理が標準的な仕方で証明されるという観点から見たときに，もっとも普通に問題にされる形式的理論である。

さて，ゲーデルはペアノ算術（PA）の各言語表現，すなわち，記号，（論理式のような）記号の有限列，（証明のような）記号の有限列の有限列の各々に自然数を一対一に機械的に割り当てる方

法（これをゲーデル数づけという）を考案した。そのような割り当てによって各表現に割り当てられた自然数は，その表現の「ゲーデル数」と呼ばれる。ペアノ算術においては，数（以後，0を含む自然数のことを数と呼ぶ）nを表す数詞は，ゼロ記号0にn個の後者記号′を付加した表現である。（例えば，数5に対する数詞は0′′′′′であり，数ゼロの数詞は0である。）

そこで，PAの表現Fのゲーデル数に対する数詞を表す記法を導入する。この数詞を，

$$\ulcorner F \urcorner$$

で表示する。また，「FはPAの定理である」ということを意味するのに，

$$\vdash_{PA} F$$

と書く。

1．2．1　算術における証明可能性

ゲーデル数づけの技法によって，式Bew(x)（beweisbar つまり“証明可能な”に由来し，「ゲーデル数xの式はPAで証明可能である」を意味する）をPAの中で構成できる。そしてこの式は以下の三つの条件を満たす。

PAのすべての文S，Qに対して，

（Ⅰ）もし $\vdash_{PA} S$ ならば，$\vdash_{PA} \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$

（Ⅱ）$\vdash_{PA} \mathrm{Bew}(\ulcorner (S \to Q) \urcorner) \to (\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner Q \urcorner))$

（Ⅲ）$\vdash_{PA} \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \urcorner)$

以後，$\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$に，「Sが証明可能である」と主張している文（Sの証明可能性を表現した文）として言及する。さて，上の（Ⅰ）の条件によれば，もし文SがPAで証明可能であれば，Sの証明可能性を表現した文もまたPAで証明可能である。また，この条件は様相論理における必然化規則，すなわち，$\vdash A \Rightarrow \vdash \Box A$ に似ている。条件（Ⅱ）によれば，もし条件法とその先件が証明できるならば，その後件も証明できる。これは様相論理での□の配分原理：$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$に以ている。さらに条件（Ⅲ）によれば，（Ⅰ）の内容，つまり「Sが証明可能ならば，Sの証明可能性を表理した文も証明可能」ということを表理する文がPAで証明可能である。これは様相論理での，$\Box A \to \Box\Box A$という原理に似ている。

ゲーデルはその論文において，きわめて巧妙なやり方で，「Sは証明できない」ということを主張する文Sと（彼が考察した算術体系Pで）同値になる文を構成した。[3] その構成は相当に一般的なテクニックを用いたものであって，PAにおいても同様に実行できる。それによって，PAの任意の一項述語 P(x) に対して，

$$\vdash_{PA} S \rightleftarrows P(\ulcorner S \urcorner)$$

となるような文Sが存在するということ（対角化補題と呼ばれる）を示すことができる。

$S \rightleftarrows P(\ulcorner S \urcorner)$ が（理論Tで）証明可能であるような文Sは，述語P(x)の（Tにおける）不動点

(fixed point) と呼ばれる。こうして，ゲーデルは述語 $\neg$Bew(x)（のPでの対応物）の(Pにおける）不動点—— $\neg$Bew(x) の不動点は特に“ゲーデル文”と呼ばれる——をいかに構成するかを示した。

ある理論の言語で作られた文（＝自由変項を含まない論理式）は，その理論で証明も反証（否定形の証明）もされないとき，その理論の決定不能文と呼ばれるか，またはその理論では決定できないと言われる。理論は，その中に決定不能文が存在するとき，（構文論的に）不完全であると言われる。

1．2．2　ゲーデルの定理

さて，ゲーデルによれば以下のことを示すことができる。

（1）もし PA が無矛盾であれば，$\neg$Bew(x) のいかなる不動点も証明可能ではない。

（2）もし PA が“ω無矛盾”という無矛盾性より強い性質を持てば，$\neg$Bew(x) のいかなる不動点も反証されない（不動点の否定形が証明できない)。

ところで，$\neg$Bew(x) の不動点はれっきとして存在するから，

（3）もし PA がω無矛盾ならば，PA は不完全である（ゲーデルの第一不完全性定理)。

ゲーデルの第一不完全性定理は 1936 年にロッサーによってより強い形に改良された。すなわち，“ω無矛盾”というこの定理のもつ前提をより弱い“無矛盾”に置き換えて，定理自体を強くすることができることが示された。さらに，つぎのことを示すことができる。

（4）その先件が PA の無矛盾性を表現する PA の文であり，それの後件が $\neg$Bew(x) の不動点であるようなすべての条件法は証明可能である。

従って，これと（1）によって，

（5）もし PA が無矛盾であれば，PA の無矛盾性を表現する文は PA では証明できない（ゲーデルの第二不完全性定理)

を示すことができる。(5) の逆は明らかである。というのは，矛盾した理論においてはその言語に属する文のすべてがその理論で証明できるから，対偶により，その理論で証明できない少なくとも一つの文がその理論に存在すればその理論は無矛盾であるから，である。

ところで，「PA の無矛盾性を表現した文」とはどういう文か，そのことをここではっきりさせておく。「矛盾した理論」の定義として，以下の同等な四つの定義がある。すなわち，

①その言語に属するすべての文がその理論で証明可能ならば，その理論は矛盾している；

②ある文とその否定形がともにその理論で証明可能ならば，その理論は矛盾している；

③その否定が明らかに定理であるような，ある特定の文がその理論で証明可能ならば，その理論は矛盾している；

④少なくとも一つの矛盾がその理論で証明可能ならば，その理論は矛盾している。

以上の定義と同様よく用いられ，以後われわれが主として考察することになる定義は，

(※) ⊥がその理論で証明されるならば，その理論は矛盾している，

というものである。ここで，“⊥”は常に偽の真理値を与えられるゼロ項命題結合子である。またこれとは対照的に，“⊤”は常に真の真理値を与えられるゼロ項命題結合子である。⊥と条件法によってpの否定：¬pは，p→⊥と定義できる。われわれは，⊥を原始記号として持つようなPAのヴァージョンについて考察しているものとする。すると，PAの無矛盾性を表現するPAの文としては，

$$\neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)$$

という文を採ることになる。そこで，(5)はこう言い換えることができる：

$\nvdash_{PA} \bot$　ならば，$\nvdash_{PA} \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)$。

1．2．3　ヘンキンの問題とレーブの定理

ここで，これまで暗黙に前提していたPAの意味論（モデル論）を明確にしよう。PAの標準モデルは，まずその領域としてゼロを含むすべての自然数を持つ。数詞**0**はこの標準モデルで数ゼロを指示し，以下同様にn個の′を伴う**0**，または数詞**n**は数nを指示する。また，′，+，・はそれぞれ自然数上の後者，加法，乗法を指示する。式Bew(x)が数nについて標準モデルで真となる（あてはまる）のは，数nがPAでの証明可能な式のゲーデル数であるとき，かつそのときにかぎる。こうして，SをPAの文とするとき，Bew(⌜S⌝)が（標準モデルで）真となるのは，Sが(PAで)証明可能な文であるとき，かつそのときにかぎる。というのは，Bew(⌜S⌝)が真であるのは，数詞⌜S⌝によって指示される文Sのゲーデル数について，Bew(x)があてはまるとき，かつそのときにかぎるからである。また，PAのすべての定理は標準モデルで真である。従って，PAは無矛盾である(文Sとその否定形が標準モデルでともに真になることはありえない)。すると，文 $\neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)$ は真であり，1．2．2の(4)によって，$\neg \mathrm{Bew}(x)$ の不動点（$\vdash_{PA} S \rightleftarrows \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$ であるような文S）は $\neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)$ から導出されるから，このような不動点もすべて真である。

ところで，ヘンキン（L. Henkin）はBew(x)の不動点，すなわち，

$$\vdash_{PA} S \rightleftarrows \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$$

となるような文Sについての問題を提出した。[4] このような文Sは，「Sは証明可能である」という主張と同値である。いわば，それ自身の正当性を自己言及という形で主張している文（このような文はヘンキンにちなんで“ヘンキン文”と呼ばれる）である。この文Sはすべて証明可能（従って真）なのか，それともすべて証明不可能（従って偽）なのか？それとも，あるものは証明可能であり，あるものはそうではないのか？このヘンキンの問題に対する答は，レーブ（Löb）によって与えられた。[5] レーブは，

すべての文Sに対して,

$$\vdash_{PA} \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to S \quad ならば, \quad \vdash_{PA} S$$

であることを示した(レーブの定理)。こうして，それ自身の証明可能性の主張と同値なすべての文は証明可能である。

さて，このレーブの定理とゲーデルの第二不完全性定理とは密接な関連を持つことが知られている。すなわち，まずレーブの定理は，単一文によるPAの拡張に対するゲーデルの第二不完全性定理からの直接の帰結である。$\neg S$を公理として付加することによりPAを拡張した結果をPA^+としよう：$PA^+ = PA + \{\neg S\}$。PA^+が無矛盾であるのはSがPAで証明できないとき，かつそのときにかぎる（実際，もし$\vdash_{PA} S$なら$\vdash_{PA^+} S$だからPA^+は矛盾するし，逆にPA^+が矛盾しておれば$\vdash_{PA} \neg S \to S$，ゆえに$\vdash_{PA} S$となる)。従って，PA^+の無矛盾性を表現する文は，PAにおいても，ゆえにPA^+においても，$\neg \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$と同値である。こうして,

$\vdash_{PA} \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to S$

$\Leftrightarrow$　$\vdash_{PA} \neg S \to \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$

$\Leftrightarrow$　$\vdash_{PA^+} \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$

$\Leftrightarrow$　PA^+の無矛盾性を表現した文がPA^+で証明可能である,

であるから，ゲーデルの第二不完全性定理（PA^+が無矛盾ならば，PA^+の無矛盾性を表現した文はPA^+では証明できない）によって,

$\Leftrightarrow$　PA^+が矛盾

$\Leftrightarrow$　$\vdash_{PA} S$,

となる。すなわち，もし$\vdash_{PA} \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to S$　ならば，ゲーデルの第二不完全性定理により，$\vdash_{PA} S$　である。

逆に，PAに対する第二不完全性定理は，レーブの定理から直ちに帰結する。実際，こうなる。いまPAが無矛盾，つまり$\nvdash_{PA} \bot$とすると，レーブの定理により，$\nvdash_{PA} \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner) \to \bot$　である。ゆえに，$\nvdash_{PA} \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)$。　（なぜなら，もし$\vdash_{PA} \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)$ならば，$\vdash_{PA} \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner) \to (\mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner) \to \bot)$（トートロジー）だから，$\vdash_{PA} \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner) \to \bot$となるからである。）ここで，$\neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)$はPAの無矛盾性を表現したPAの文だから，PAが無矛盾ならば，PAの無矛盾性を表現した文はPAでは証明できない，ということになる。

1．3　様相論理と算術

1．3．1　翻訳による対応づけ

さて，これから様相論理とPAとの関連を考える。その際，様相論理の各式にPAの式を対応させる翻訳を定義することでそれを具体化する。まず，その翻訳の基礎として，様相論理の各文変項

p_i に算術の式Qを割り当てる関数ϕ（すなわち$\phi(p_i)=Q$）を定義し，この関数ϕを実現(realization)と呼ぶ。この実現という関数によって，様相論理の文Aの実現ϕの下での翻訳(translation) A^ϕ をつぎのように帰納的に定義する。

Aが文変項のとき，　$A^\phi = \phi(A)$

$A=\bot$ ならば，　$A^\phi = \bot^\phi = \bot$

$A=\neg(B)$ ならば，　$A^\phi = \neg(B^\phi)$

$A=(B \& C)$ ならば，　$A^\phi = (B^\phi \& C^\phi)$

$A=(B \vee C)$ ならば，　$A^\phi = (B^\phi \vee C^\phi)$

$A=(B \rightarrow C)$ ならば，　$A^\phi = (B^\phi \rightarrow C^\phi)$

$A=\Box B$ ならば，　$A^\phi = \mathrm{Bew}(\ulcorner B^\phi \urcorner)$

（‘◇’は‘¬□¬’の略式の記法とみなし，最外側の括弧は誤解のないかぎり省略する。）

こうして，例えば，　$\phi(p) = 0'+0' = 0''$　とすると，

$$((\Box p \rightarrow p)\& p)^\phi = (\mathrm{Bew}(\ulcorner 0'+0' = 0'' \urcorner) \rightarrow 0'+0' = 0'')$$
$$\& \ 0'+0' = 0''$$

である。また，ϕが何であれ常に，

$$(\neg\Box\bot \rightarrow \neg\Box\neg\Box\bot)^\phi = \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner\bot\urcorner) \rightarrow \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner\neg\mathrm{Bew}(\ulcorner\bot\urcorner)\urcorner)$$

であり，これはPAに対する第二不完全性定理を表現するPAの文である。さらに，Aが様相論理の文でSがPAの文であり，　$A^\phi = S$　ならば，

$$(\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A)^\phi = \mathrm{Bew}(\ulcorner(\mathrm{Bew}(\ulcorner S\urcorner) \rightarrow S)\urcorner) \rightarrow \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$$

であり，これは，もし $\mathrm{Bew}(\ulcorner S\urcorner) \rightarrow S$ が証明可能ならばSも証明可能である，ということ（レーブの定理）を主張する算術の文である。こうして，$\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$ の形のGの各公理のすべての翻訳はレーブの定理のある事例が成り立つということを主張する。そういった翻訳の各々は，後に見るように，それ自身証明可能である。実際，Gの各定理の翻訳はすべて算術の定理となる。

さて，その定理の翻訳がすべて算術の定理となるようないかなる様相論理の体系も，$\Box p \rightarrow p$を定理とすることはない。というのは，Sが $\neg\mathrm{Bew}(x)$ の不動点，すなわち $\vdash_{PA} S \rightleftarrows \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner S\urcorner)$ であり，$\phi(p)=S$ とすると，PAの無矛盾性によって，$\nvdash_{PA} \mathrm{Bew}(\ulcorner S\urcorner) \rightarrow S$ であるからである。(もし，$\vdash_{PA} \mathrm{Bew}(\ulcorner S\urcorner) \rightarrow S$　ならば，　$\vdash_{PA} \mathrm{Bew}(\ulcorner S\urcorner) \rightarrow \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner S\urcorner)$，　ゆえに $\vdash_{PA} \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner S\urcorner)$，ゆえに $\vdash_{PA} S$ となり，$\neg\mathrm{Bew}(x)$　の不動点SがPAの定理となるが，これは先の 1．2．2 の(1)に反するからである。）　こうして，もし$\phi(p)$ が $\neg\mathrm{Bew}(x)$ の不動点であれば，ϕの下での $(\Box p \rightarrow p)$ の翻訳はPAの定理ではない。（このことはまた，つぎの理由からも分かる。$\phi(p)=\bot$，　$\vdash_{PA}(\Box p \rightarrow p)^\phi$ ならば，そのとき，$\vdash_{PA} \mathrm{Bew}(\ulcorner\bot\urcorner) \rightarrow \bot$，ゆえに $\vdash_{PA} \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner\bot\urcorner)$。しかし，第二不完全性定理により，これはPAが矛盾であることを導く。）

1．3．2　実証文

様相論理Gを研究することにより，算術（PA）の証明可能性や無矛盾性に関する興味深い事実を知ることができる。例えば，「算術は無矛盾である」ということを表現するPAの文は $\neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)$ であるが，これは $\neg\Box\bot$ の翻訳である。また，「算術が無矛盾ならば，算術の無矛盾性を表現した算術の文は算術では証明できない」（第二不完全性定理）を表現する算術の文は $\neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner) \rightarrow \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner) \urcorner)$ であるが，これは $\neg\Box\bot \rightarrow \neg\Box\neg\Box\bot$ の翻訳である。$\neg\Box\bot$ のようないかなる文変項も含まない様相論理の式の算術への翻訳を実証文（deictic sentences）と呼ぶ。　実証文は実現 ϕ のいかんに拘わらず，文変項を含まない様相文に一意に対応し，　$\mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)$ と，$\bot$，$\top$ を含む真理関数から構成される算術の文（従って自由変項を含まない）である。実証文は算術の証明可能性と無矛盾性についてある事を主張しているから，実証文に対応しかつGに属する文（なぜGに属さねばならないかは直ぐ後に述べる）の証明可能性と真偽を調べることによって，算術の証明可能性と無矛盾性に関する主張の証明可能性と真偽を知ることができる。

ゲーデルは，$\vdash_{PA} S \rightleftarrows \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$ であるような文S，つまり，それ自身の証明不可能性の主張と同値な文，いわゆるゲーデル文の構成の仕方を示したが，われわれはゲーデル文以外に，それ自身の証明可能性の主張と同値な文，いわゆるヘンキン文，また，それ自身の反証可能性の主張と同値な文，それ自身の反証不可能性の主張と同値な文，等々のクラスについて研究することになろう。さらに，ゲーデルは，ゲーデル文が実証文である無矛盾性の主張と同値になること，すなわち，$\vdash_{PA} S \rightleftarrows \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$ なるSについて $\vdash_{PA} S \rightleftarrows \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)$ であることを示した。またレーブは，すべてのヘンキン文，つまり $\vdash_{PA} S \rightleftarrows \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$ なるSが，これも実証文である $\top (= \neg \bot)$ と同値である，つまり $\vdash_{PA} S \rightleftarrows \top$ であることを示した。ゲーデル文やヘンキン文等は，様相命題論理の記法と実現の概念によって定義されるある自然なクラスに分類される。そして，そのようなクラスに対しては，そのクラスの全メンバーがそれと同値になるような実証文が存在することがわかっている（ベルナルデイとスモリュンスキーの定理[6]）。　こうして，ゲーデルとレーブが確立した証明可能性と無矛盾性に関する事実は，Gに関するさまざまの定理・メタ定理を証明することによって，成り立つことの証明が得られる。ではなぜ，体系Gでなければならないか？これに対する答はソロヴェイの完全性定理が与える。

1．3．3　ソロヴェイの二つの完全性定理

R．ソロヴェイは，様相論理Gの諸定理は，それのすべての翻訳が算術の定理となるような，そういう様相文のクラスに外ならないことを示した。[7]　この定理をGに関するソロヴェイの第一完全性定理と呼ぶ。注意すべきことは，ここでの「完全性」はモデルのそれではなく，実現の完全性のことを述べているという点である。□を「…は証明可能である」と読むことによって，様相論理の文は証明可能性についての諸原理を表現しているとみなすことができる。すると，ソロヴェイの第

一完全性定理は，様相論理のどの文が証明可能性についての証明可能な原理であるのか，との問いに決着をつける。

では，様相論理のどの文が証明可能性についての真なる原理であるのか？これについても，ソロヴェイのもう一つの完全性定理が答える。標準モデルにおいて，算術の定理はすべて真である。従って，すべての文Sについて，Bew(⌜S⌝)→S は真である。(レーブの定理により，Bew(⌜S⌝)→S　が証明可能であるのはSが証明可能であるとき，かつそのときにかぎる。しかし，Sが証明可能であろうとなかろうと，Bew(⌜S⌝)→S　は真である。）こうして，□A→Aの形のすべての文のすべての翻訳は真である。この翻訳は，算術が無矛盾であるかぎり算術の定理ではない。そうすると，Gの定理の翻訳である算術の定理（これらはすべて真である）以外に，算術の証明可能性に関する真なる原理があることになる。では，そのような算術の真理に対応する様相論理の体系は何か？そこで，Gの定理の翻訳にBew(⌜S⌝)→S を加えた算術の真理に対応する様相論理の体系を考える。つまり，Gのすべての定理と□A→A の形のすべての様相文を公理とし，（算術の真理はモドゥス・ポネンスに関して閉じているから）モドゥス・ポネンスに関して閉じた様相論理の体系をG^*とする。このG^*は（必然化について閉じていないから）正規体系ではないが，G^*のすべての定理のすべての翻訳は算術の真理である。逆に，G^* に対するソロヴェイの第二完全性定理により，ある任意の様相文のすべての翻訳が算術の真理ならば，その様相文はG^*の定理である。

1．3．4　以後の計画

われわれは，様相論理Gと他の体系の比較から始め，Gに関するかぎりでの算術に関する事実を確認する。ついで，Gの意味論を検討し，規範モデルおよび木の方法によるGの完全性定理に触れる。さらに，ベルナルデイとスモリュンスキーの定理とその一般化，そしてソロヴェイの完全性定理，S4の定理のある証明論的取り扱い，Gに対するクレイグの補完定理等に至る予定である。

§2　Gと他の正規様相論理との比較

2．1　様相命題論理G

本節では，様相命題論理Gの構文論的（証明論的）性質について調べ，他の正規体系との比較を行う。

まず，様相文を定義するために，以下の記号の可算無限列を用意する：

$$\bot,\quad \rightarrow,\quad \Box,\quad (\ ,\quad),\quad p_1,\quad p_2,\quad p_3,\ \cdots\cdots\cdots$$

‘⊥’は「偽」を表す0項命題結合子であり，‘→’は条件法，‘□’は「必然性」の演算子，‘(’と‘)’は括弧，p_1以下は文変項である（適宜，p_1，p_2，p_3の代わりにp，q，r等で代用させることがある)。A，Bを文変項上を走るメタ変項として用いる。さて，様相文（modal sentences）を

つぎのように帰納的に定義する。

（1）⊥は様相文である；

（2）各文変項は様相文である；

（3）AとBが様相文ならば，（A→B）も様相文である；

（4）Aが様相文ならば，□Aも様相文である。

□Aを「Aの必然化」と呼ぶ。また，⊥，□⊥，（□⊥→⊥）のような文変項を含まない様相文を「文変項無しの文」または「純然たる文」と呼ぶ。

0項命題結合子‘⊥’を原始記号として採用する理由は主としてつぎの三点である。まず第一に，命題計算で常に偽という値を持つ‘⊥’は，‘→’とともにすべての命題結合子を表現できるという意味での命題結合子の「完全系」を形づくることである。第二に，もし⊥が原始記号であれば，体系が無矛盾であることを，「⊥はその体系の定理ではない」（つまり$\nvdash \bot$）と，きわめて簡潔にかつ一般的に表現できることである。第三に，⊥が原始記号であれば，ある文変項無しの文の存在が保証されることである。いくつかの文変項無しの文は，算術のいくつかの重要な命題の「代表」となる。例えば，□⊥は算術は矛盾しているという（偽の）命題を代表し，$\neg\Box\bot\rightarrow\neg\Box\neg\Box\bot$は第二不完全性定理を代表する。

さて，他の命題結合子や様相演算子についての定義をしておく。

$$\neg A = \text{Df. } (A\rightarrow\bot)$$

$$\top = \text{Df. } \neg\bot$$

$$(A\vee B) = \text{Df. } (\neg A\rightarrow B)$$

$$(A\,\&\,B) = \text{Df. } \neg(A\rightarrow\neg B)$$

$$(A\rightleftarrows B) = \text{Df. } (A\rightarrow B)\,\&\,(B\rightarrow A)$$

$$\Diamond A = \text{Df. } \neg\Box\neg A$$

また，後に必要となる「部分文」の帰納的定義を与える。

（1）すべての文はそれ自身の部分文である；

（2）（B→C）が文Aの部分文のとき，B，CもAの部分文である；

（3）□Bが文Aの部分文のとき，BもAの部分文である。

ここで，様相命題計算というものを，計算の公理と呼ばれる文の集合に計算の推論規則と呼ばれる文上の関係の集合が伴うものとして理解する。その計算における文の証明は，通常のように，各構成要素が計算の公理かまたは列内の先行する文から推論規則によって直接に導かれる文であり，その最後の文が当の文であるような，文の有限列である。（文BがA_1，…，A_nから推論規則Rによって直接に導かれるのは，$\langle A_1, \ldots, A_n\rangle \in R$のとき，かつそのときにかぎる。）また，文が計算の定理であるのは，その計算においてその文の証明が存在するときである。（‘$\vdash A$’によって「Aは

Lの定理である」を意味する。）モドゥス・ポネンスはすべての順序三つ組：$\langle A, (A\to B), B\rangle$を含む関係である。必然化はすべての順序対：$\langle A, \Box A\rangle$ を含む関係である。代入は，ある文変項p_1, …, p_n, およびある文C_1, …, C_n に対して，BがAにおけるp_1, …, p_nの各出現をそれぞれC_1, …, C_nの出現で置き換えて得られる結果であるようなすべての順序対$\langle A, B\rangle$を含む関係である。BがAから代入によって直接に導かれるとき，BはAの代入例と呼ばれる。

ここで正式に様相命題論理Gを定義する。Gの公理はすべてのトートロジー，□の配分公理，すなわち $\Box(A\to B)\to(\Box A\to\Box B)$ の形のすべての様相文，および $\Box(\Box A\to A)\to\Box A$ の形のすべての様相文である。Gの定理は上の三種類の公理を含み，モドゥス・ポネンス，必然化，代入の三つの推論規則に関して閉じた文の集合である。

さて，トートロジーと□の配分公理を含み，モドゥス・ポネンスと必然化と代入に関して閉じている体系を正規体系と呼ぶ。Gも正規体系である。これから考える正規体系のうち，T，S4，B，S5 が$\Box p\to p$ を定理とするのに対して，Gはこれを定理とはしない。もし定理ならば，必然化により，$\Box(\Box p\to p)$ も定理だから，公理 $\Box(\Box p\to p)\to\Box p$ から$\Box p$ も定理，従ってpが定理となり，任意の文が定理となり矛盾する。しかし，後に見るように，Gは無矛盾である。ゆえに$\Box p\to p$ はGの定理とはなり得ない。

2．2　正規体系

ここで，Gを他の正規体系と比較するために，Gを含む七つの正規体系である様相命題計算を定義する。すべてのトートロジーとすべての配分公理（$\Box(A\to B)\to(\Box A\to\Box B)$ の形の文）は各体系の公理である。各体系の推論規則はモドゥス・ポネンスと必然化である（代入規則は派生することをすぐ後に示す)。計算Kは他の公理を持たない（七つのうちの最小体系である)。計算K4の他の公理は$\Box A\to\Box\Box A$という形の文である。計算Tの他の公理は$\Box A\to A$という形の文である。計算S4の他の公理は$\Box A\to A$と$\Box A\to\Box\Box A$という形の文である。計算Bの他の公理は$\Box A\to A$と$A\to\Box\Diamond A$という形の文である。計算S5の他の公理は$\Box A\to A$と$\Diamond A\to\Box\Diamond A$という形の文である。計算Gの他の公理は，$\Box(\Box A\to A)\to\Box A$ という形の文である。

体系Lの定理がすべて体系Mの定理であるとき，体系Mは体系Lの拡張である（または，LはMへと拡張された）と言われる。そこで，“Lのすべての定理はMの定理である”を‘L⇒M’と略記すると，上の定義から明らかにつぎのようになる。

$$\begin{tikzcd} & G & \\ & K \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & K4 \arrow[d, Rightarrow] \\ S5 & T \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & S4 \\ & B & \end{tikzcd}$$

実は，以後に証明する定理によれば，実際にはこの七つの体系はつぎのような関係にあることが判明する。

$$\begin{array}{ccccc} K & \Rightarrow & K4 & \Rightarrow & G \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \\ T & \Rightarrow & S4 & & \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \\ B & \Rightarrow & S5 & & \end{array}$$

さて，これら七つの体系が正規であることを示す。それには，七つの体系がすべてのトートロジーと配分公理を含み，モドゥス・ポネンスと必然化を推論規則としたから，これらの体系の定理のあらゆる代入例が再びその体系の定理となることを示せば十分である。Aを，七つのうちの任意の一つの体系の定理とし，Bを，Aにおける文変項 $p_1, \cdots, p_n$ の各出現をそれぞれ $C_1, \cdots, C_n$ の出現で置き換えた結果とする。$A_1, \cdots, A_m(=A)$ をその体系におけるAの証明とせよ。文Dに対して，D° を，Dにおける各 p_i のすべての出現を各 C_i で置き換えて得られる結果とする。そのとき，$A^{\circ}=B$ である。ここで，$A_1^{\circ}, \cdots, A_m^{\circ}$ はBの証明であることを確かめたい。そのために，まず，その体系の公理の代入例はすべて再びその体系の公理であること，をまず確かめる。これは，公理が実際には公理シェーマであることから明らかである。つぎに，モドゥス・ポネンスと必然化の関係は‘°’の操作を通じても保存されることを示す。実際に，A_k が A_i と $Aj(=A_i\rightarrow A_k)$ からモドゥス・ポネンスによって得られたとすれば，$Aj^{\circ}=(A_i\rightarrow A_k)^{\circ}=A_i^{\circ}\rightarrow A_k^{\circ}$ だから，A_k° は A_i° と Aj° からモドゥス・ポネンスによって得られる。また，$A_k(=\Box A_i)$ が A_i から必然化によって得られたとすると，$A_k^{\circ}=(\Box A_i)^{\circ}=\Box A_i^{\circ}$ だから，A_k° は A_i° から必然化によって得られる。こうして，上の七つの体系はすべて正規体系であることが示された。

また，正規体系は真理関数的帰結についても閉じている。実際，もしBが，正規体系の定理 $A_1, \cdots, A_n$ の真理関数的帰結ならば，そのときBもその体系の定理である。なぜなら，Aは，$A_1, \cdots, A_n$ とトートロジー $(A_1\rightarrow(\cdots(A_n\rightarrow B)\cdots))$ から，モドゥス・ポネンスをn回適用することによって得られるからである。さらに，$A\rightarrow B$ が正規体系Lの定理ならば，$\Box A\rightarrow\Box B$ もLの定理である。というのは，$\vdash_L A\rightarrow B$ ならば，必然化により $\vdash_L\Box(A\rightarrow B)$，配分公理より $\vdash_L\Box(A\rightarrow B)\rightarrow(\Box A\rightarrow\Box B)$，ゆえにモドゥス・ポネンスにより $\vdash_L\Box A\rightarrow\Box B$ だからである。それゆえ，$A\rightleftarrows B$ が正規体系の定理ならば，$\Box A\rightleftarrows\Box B$ もその体系の定理である。Kは他のすべての正規体系へと拡張されるという意味で，最小の正規体系である。

さてここで，以後の考察に必要なかぎりで，いくつかの定理（正確にはメタ定理）を記録しておく。

2．3　いくつかの定理

<u>定理２―１</u>　（‘２―１’の‘２’は§２の２であり，‘１’はそこでの通し番号。以下同様。）

すべての文A，Bについて，

$$\vdash_K \Box(A \& B) \rightleftarrows (\Box A \& \Box B)。$$

《証明》

$A \& B \to A$ はトートロジーだから，$\vdash_K A \& B \to A$。必然化と配分公理により，$\vdash_K \Box(A \& B) \to \Box A$。同様に，$\vdash_K \Box(A \& B) \to \Box B$。ゆえに命題計算により，$\vdash_K \Box(A \& B) \to \Box A \& \Box B$。逆はこうなる。$\vdash_K A \to (B \to A \& B)$ （トートロジー）から必然化と配分公理により，$\vdash_K \Box A \to \Box(B \to A \& B)$。しかるに配分公理より，$\vdash_K \Box(B \to A \& B) \to (\Box B \to \Box(A \& B))$。これらから命題計算により，$\vdash_K \Box A \to (\Box B \to \Box(A \& B))$，すなわち $\vdash_K \Box A \& \Box B \to \Box(A \& B)$。こうして，$\vdash_K \Box(A \& B) \rightleftarrows (\Box A \& \Box B)$。　Q. E. D.

定理２―２

すべての文 $A_1, \cdots, A_n$ について，

$$\vdash_K \Box(A_1 \& \cdots \& A_n) \rightleftarrows (\Box A_1 \& \cdots \& \Box A_n)。$$

《証明》

定理２―１をn―１回使う。すなわち，$\vdash_K \Box(A_1 \& \cdots \& A_n) \rightleftarrows (\Box A_1 \& \Box(A_2 \& \cdots \& A_n)) \rightleftarrows (\Box A_1 \& \Box A_2 \& \Box(A_3 \& \cdots \& A_n)) \rightleftarrows \cdots \rightleftarrows (\Box A_1 \& \cdots \& \Box A_n)$。ゆえに，$\vdash_K \Box(A_1 \& \cdots \& A_n) \rightleftarrows (\Box A_1 \& \cdots \& \Box A_n)$。　Q. E. D.

定理２―３

Lを正規体系とする。そのとき，

$$\vdash_L A_1 \& \cdots \& A_n \to B \quad ならば，\quad \vdash_L \Box A_1 \& \cdots \& \Box A_n \to \Box B。$$

《証明》

$\vdash_L A_1 \& \cdots \& A_n \to B$ とすると正規性より（つまり，必然化と配分公理より），$\vdash_L \Box(A_1 \& \cdots \& A_n) \to \Box B$，しかるに定理２―２より $\vdash_L \Box(A_1 \& \cdots \& A_n) \rightleftarrows (\Box A_1 \& \cdots \& \Box A_n)$，ゆえに $\vdash_L \Box A_1 \& \cdots \& \Box A_n \to \Box B$。　Q. E. D.

系１

Lが正規体系であり，かつ $\vdash_L A \to B$ ならば，$\vdash_L \Diamond A \to \Diamond B$。

《証明》

Lが正規で $\vdash_L A \to B$ とする。対偶より $\vdash_L \neg B \to \neg A$。定理２―３により，$\vdash_L \Box \neg B \to \Box \neg A$，ゆえに対偶より $\vdash_L \neg\Box\neg A \to \neg\Box\neg B$，つまり $\vdash_L \Diamond A \to \Diamond B$。　Q. E. D.

系２

Lが正規体系ならば，$\vdash_L \Diamond A \& \Box B \to \Diamond(A \& B)$。

《証明》

$\vdash_L B \& \neg(A \& B) \to \neg A$ （トートロジー）。定理２―３より，$\vdash_L \Box B \& \Box\neg(A \& B) \to \Box\neg A$。

ゆえに，$\vdash_L \Box B \to (\Box\neg(A \& B) \to \Box\neg A)$，後件の対偶により，$\vdash_L \Box B \to (\neg\Box\neg A \to \neg\Box\neg(A \& B))$。ゆえに，$\vdash \neg\Box\neg A \& \Box B \to \neg\Box\neg(A \& B)$，すなわち $\vdash_L \Diamond A \& \Box B \to \Diamond(A \& B)$。 Q. E. D.

定理2－4（同値代入）

$F(A)$（または$F(B)$）は，ある文F中のpのすべての出現を文A（またはB）の出現で置き換えた結果である。そのとき，Lが正規体系でかつ $\vdash_L A \rightleftarrows B$ ならば，

$$\vdash_L F(A) \rightleftarrows F(B)。$$

《証明》

証明は文Fの複雑さに関する帰納法による。まず，$\vdash_L A \rightleftarrows B$ と仮定せよ。もしFが⊥のとき，$F(A)$ も $F(B)$ も⊥である。$\bot \rightleftarrows \bot$ はトートロジーであるから，$\vdash_L F(A) \rightleftarrows F(B)$。もしFがpそのものであるとき，$F(A)$ はA，$F(B)$ はBだから，仮定より，当然 $\vdash_L F(A) \rightleftarrows F(B)$ である。もしFがp以外の文変項qのとき，$F(A)$ も $F(B)$ もqであり，$q \rightleftarrows q$ はトートロジーだから，$\vdash_L F(A) \rightleftarrows F(B)$。つぎに帰納のステップである。Fが$(G \to H)$とする。このとき$F(A)$は$(G(A) \to H(A))$，$F(B)$は$(G(B) \to H(B))$である。帰納法の仮定により，$\vdash_L G(A) \rightleftarrows G(B)$，$\vdash_L H(A) \rightleftarrows H'(B)$ だから，命題計算によって，$\vdash_L ((G(A) \to H(A)) \rightleftarrows (G(B) \to H(B))$，すなわち，$\vdash_L F(A) \rightleftarrows F(B)$。 最後に，Fが$\Box G$とする。帰納法の仮定により，$\vdash_L G(A) \rightleftarrows G(B)$。Lは正規体系だったから，必然化により，$\vdash_L \Box(G(A) \rightleftarrows G(B))$，ゆえに，定理2－1と命題計算により，$\vdash_L \Box(G(A) \to G(B)) \& \Box(G(B) \to G(A))$，配分公理と命題計算により，$\vdash_L (\Box G(A) \to \Box G(B)) \& (\Box G(B) \to \Box G(A))$，つまり $\vdash_L \Box G(A) \rightleftarrows \Box G(B)$，すなわち，$\vdash_L F(A) \rightleftarrows F(B)$。 Q. E. D.

以後，定理2－3，2－4は断りなしで用いるし，また，$\Box$と$\neg\Diamond\neg$，$\neg\Box$と$\Diamond\neg$，$\neg\Diamond$と$\Box\neg$，および真理関数的に同値な文を互いに自由に交換する。

定理2－5

定理2－4と同じ仮定のもとで，$\vdash_{K4} \Box(A \rightleftarrows B) \to \Box(F(A) \rightleftarrows F(B))$

《証明》

証明は定理2－4の証明のK4での形式化となる。Fが⊥のとき $F(A)$ も$F(B)$ も⊥であり，$\vdash_{K4} \bot \rightleftarrows \bot$。K4は正規だから必然化により，$\vdash_{K4} \Box(\bot \rightleftarrows \bot)$。ゆえに，$\vdash_{K4} \Box(A \rightleftarrows B) \to \Box(\bot \rightleftarrows \bot)$。 Fがpならば，$F(A)$はA，$F(B)$はBだから，トリヴィアルに，$\vdash_{K4} \Box(A \rightleftarrows B) \to \Box(A \rightleftarrows B)$。Fがp以外の文変項qのとき，Fが⊥のときと同様に $\vdash_{K4} q \rightleftarrows q$ から必然化と命題計算より，$\vdash_{K4} \Box(A \rightleftarrows B) \to \Box(q \rightleftarrows q)$。つぎに帰納のステップである。Fが$(G \to H)$のとき，帰納法の仮定より，$\vdash_{K4} \Box(A \rightleftarrows B) \to \Box(G(A) \rightleftarrows G(B))$，$\vdash_{K4} \Box(A \rightleftarrows B) \to \Box(H(A) \rightleftarrows H(B))$。しかるに，$F(A) \rightleftarrows F(B)$ は $G(A) \rightleftarrows G(B)$ と $H(A) \rightleftarrows H(B)$ の真理関数的帰結であるか

ら，定理2―3より，$\vdash_{K4}\Box(G(A)\rightleftarrows G(B))\&\Box(H(A)\rightleftarrows H(B))\to\Box(F(A)\rightleftarrows F(B))$ である。ゆえに，命題計算により $\vdash_{K4}\Box(A\rightleftarrows B)\to\Box(F(A)\rightleftarrows F(B))$。 最後にFが$\Box G$のとき，帰納法の仮定より，$\vdash_{K4}\Box(A\rightleftarrows B)\to\Box(G(A)\rightleftarrows G(B))$。ここで，$G(B)$は$G(A)\rightleftarrows G(B)$と$G(A)$の，$G(A)$は$G(A)\rightleftarrows G(B)$と$G(B)$の，それぞれ真理関数的帰結だから，定理2―3により $\vdash_{K4}\Box(G(A)\rightleftarrows G(B))\to(\Box G(A)\to\Box G(B))$，$\vdash_{K4}\Box(G(A)\rightleftarrows G(B))\to(\Box G(B)\to\Box G(A))$，ゆえに命題計算により，$\vdash_{K4}\Box(A\rightleftarrows B)\to(\Box G(A)\rightleftarrows\Box G(B))$，すなわち，$\vdash_{K4}\Box(A\rightleftarrows B)\to(F(A)\rightleftarrows F(B))$。必然化により，$\vdash_{K4}\Box\Box(A\rightleftarrows B)\to\Box(F(A)\rightleftarrows F(B))$。ところがK4に固有な公理により，$\vdash_{K4}\Box(A\rightleftarrows B)\to\Box\Box(A\rightleftarrows B)$，ゆえに，$\vdash_{K4}\Box(A\rightleftarrows B)\to\Box(F(A)\rightleftarrows F(B))$。　Q. E. D.

定理2―5はK4に関する定理であるから，K4のすべての拡張に関する定理でもある。また，この証明において，$\Box p\to p$ が使われていないことに注意しておこう。

<u>定理2―6</u>

$$\vdash_{T} A\to\Diamond A,\qquad \vdash_{T}\Box A\to\Diamond A$$

《証明》

Tに固有な公理により，$\vdash_{T}\Box\neg A\to\neg A$，ゆえに $\vdash_{T} A\to\neg\Box\neg A$，つまり $\vdash_{T} A\to\Diamond A$。 また，これと $\vdash_{T}\Box A\to A$ から $\vdash_{T}\Box A\to\Diamond A$。　Q. E. D.

<u>定理2―7</u>

$$\vdash_{S4}\Box\Diamond A\rightleftarrows\Box\Diamond\Box\Diamond A$$

《証明》

S4の固有公理により，$\vdash_{S4}\Box\Diamond A\to\Box\Box\Diamond A$。ところで，定理2―6より $\vdash_{T}\Box\Diamond A\to\Diamond\Box\Diamond A$。正規性とS4がTの拡張であることにより，$\vdash_{S4}\Box\Box\Diamond A\to\Box\Diamond\Box\Diamond A$。ゆえに，$\vdash_{S4}\Box\Diamond A\to\Box\Diamond\Box\Diamond A$。逆に，定理2―6とS4がTの拡張であることにより，$\vdash_{S4}\Box\Diamond A\to\Diamond\Diamond A$。定理2―3の系1より $\vdash_{S4}\Diamond\Box\Diamond A\to\Diamond\Diamond\Diamond A$，S4の正規性より $\vdash_{S4}\Box\Diamond\Box\Diamond A\to\Box\Diamond\Diamond\Diamond A$。一方，S4の固有公理により $\vdash_{S4}\Box\neg A\to\Box\Box\neg A$，対偶により $\vdash_{S4}\Diamond\Diamond A\to\Diamond A$，同系1により $\vdash_{S4}\Diamond\Diamond\Diamond A\to\Diamond\Diamond A$，ゆえに $\vdash_{S4}\Diamond\Diamond\Diamond A\to\Diamond A$。ここで正規性により，$\vdash_{S4}\Box\Diamond\Diamond\Diamond A\to\Box\Diamond A$。従って，$\vdash_{S4}\Box\Diamond\Box\Diamond A\to\Box\Diamond A$。以上より，$\vdash_{S4}\Box\Diamond\Box\Diamond A\rightleftarrows\Box\Diamond A$。　Q. E. D.

この定理に関連して言えば，後に全く別の根拠から，$\vdash_{G}\Box\Diamond A\rightleftarrows\Box\Diamond\Box\Diamond A$ であることが証明される。

さて，ここで正規体系S5を含む任意の正規体系は体系S4と体系Bをともに含み，かつその逆も成り立つこと，言い換えると S5＝S4＋B であること，を示す。そのために，S4＋B＝5S として，5S という新たな体系を設定する。すると，体系5S の固有公理は $\Box A\to A$，$\Box\Box A\to A$，$A\to\Box\Diamond A$であり，推論規則は，モドゥス・ポネンスと必然化である。そこで，S5と5S の

定理が一致することを示す。

定理２—８

$$\vdash_{S5} A \quad のとき，かつそのときのみ \quad \vdash_{5S} A。$$

《証明》

$\vdash_{5S} \Diamond A \to \Box\Diamond A$，$\vdash_{S5} \Box A \to \Box\Box A$，$\vdash_{S5} A \to \Box\Diamond A$ を示せば十分である。（i）$\vdash_{5S} B \to \Box\Diamond B$ だから，Ｂとして$\Diamond A$をとると，$\vdash_{5S} \Diamond A \to \Box\Diamond\Diamond A$。ところで，$\vdash_{S4} \Box\neg A \to \Box\Box\neg A$ と対偶により $\vdash_{S4} \Diamond\Diamond A \to \Diamond A$ であるから，正規性により $\vdash_{5S} \Box\Diamond\Diamond A \to \Box\Diamond A$。ゆえに，$\vdash_{5S} \Diamond A \to \Box\Diamond A$。(ii) $\vdash_{S5} \Box\neg B \to \neg B$ と対偶より，$\vdash_{S5} B \to \Diamond B$，Ｂとして$\Box A$をとると $\vdash_{S5} \Box A \to \Diamond\Box A$。ところで $\vdash_{S5} \Diamond B \to \Box\Diamond B$，Ｂとして$\Box A$をとると $\vdash_{S5} \Diamond\Box A \to \Box\Diamond\Box A$，ゆえに，$\vdash_{S5} \Box A \to \Box\Diamond\Box A$。ところで，$\vdash_{S5} \Diamond\neg A \to \Box\Diamond\neg A$ と対偶により $\vdash_{S5} \Diamond\Box A \to \Box A$，正規性より $\vdash_{S5} \Box\Diamond\Box A \to \Box\Box A$。ゆえに，$\vdash_{S5} \Box A \to \Box\Box A$。(iii) $\vdash_{S5} \Box\neg A \to \neg A$ と対偶により $\vdash_{S5} A \to \Diamond A$。ところで，$\vdash_{S5} \Diamond A \to \Box\Diamond A$。ゆえに，$\vdash_{S5} A \to \Box\Diamond A$。　Q. E. D.

定理２—９

$$\nvdash_{G} \Box p \to p$$

《証明》

各様相文ＡにA*を対応させ，もしＡがＧの定理であればＡはトートロジーであるが，$(\Box p \to p)^*$ はトートロジーでないことを示すことによって証明する。＊をつぎのように定義する：

$$\bot^* = \bot$$

$$p^* = p \quad (すべての文変項pに対して)$$

$$(A \to B)^* = A^* \to B^*$$

$$(\Box A)^* = \top。$$

つまり，A^*は，Ａにおける□を“真理演算子”とみたときの結果である。もしＡがトートロジーならば，明らかにA^*もトートロジーである。もしＡが配分公理 $\Box(B \to C) \to (\Box B \to \Box C)$ ならば，$A^* = \top \to (\top \to \top)$，つまり$A^*$はトートロジーである。また，すべてのＡに対して，$(\Box(\Box A \to A) \to \Box A)^* = \top \to \top$，つまり$A^*$はトートロジーである。こうしてＧの任意の公理Ａに対して，A^*はトートロジーである。A^* と $(A \to B)^* = A^* \to B^*$ がトートロジーならば，B^* もトートロジーである。また，A^* がトートロジーであれば，$(\Box A)^* = \top$ もトートロジーである。こうして，解釈 ＊ において，モドゥス・ポネンスと必然化はトートロジー性を前提から結論へと伝達する。ゆえに，ＡがＧの定理ならばA^* はトートロジーである。しかし，$(\Box p \to p)^* = \top \to p$ はｐと同値ではあるが，トートロジーではない。従って，$\Box p \to p$ はＧの定理ではない。

Q. E. D.

系１

$$\nvdash_K \Box p \to p$$

《証明》

定理2—9と，GがKの拡張であることによる。　Q. E. D.

系2

正規体系Gは無矛盾である。

《証明》

定理2—9より，Gでは証明できない式が少なくとも一つ存在するからGは無矛盾である。

Q. E. D.

ところが，Gの固有公理（の一つ）である $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ はS5の定理ではない，それゆえ，K，K4，T，S4，Bのいずれの定理でもない（S5はこれらの拡張だから）。

定理2—10

$$\nvdash_{S5} \Box(\Box p \to p) \to \Box p$$

《証明》

$\star$ をつぎのように定義する：

$$\bot^\star = \bot$$
$$p^\star = p$$
$$(A \to B)^\star = A^\star \to B^\star$$
$$(\Box A)^\star = A^\star$$

要するに，$A^\star$は，Aからすべての□を消去した結果である。このとき，$(\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B))^\star = (A^\star \to B^\star) \to (A^\star \to B^\star)$ はトートロジー。$(\Box A \to A)^\star = A^\star \to A^\star$ はトートロジー。$(\Diamond A \to \Box\Diamond A)^\star = \neg\neg A^\star \to \neg\neg A^\star$ はトートロジー。こうして，AがS5の定理ならば，$A^\star$はトートロジーである。しかし，$(\Box(\Box p \to p) \to \Box p)^\star = (p \to p) \to p = p$ はトートロジーではない。ゆえに，$\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ はS5の定理ではない。　Q. E. D.

こうして，GとTはともに無矛盾な様相論理の体系であるが，GとTのいずれをも含む（両者の拡張である）無矛盾な体系は存在しないことになる。

定理2—11

$$\vdash_G \Box p \to \Box\Box p$$

《証明》

$p \to (\Box p \,\&\, \Box\Box p \to p \,\&\, \Box p)$ はトートロジーである。ゆえに，$\vdash_G p \to (\Box p \,\&\, \Box\Box p \to p \,\&\, \Box p)$。定理2—1により，$\vdash_G \Box(p \,\&\, \Box p) \rightleftarrows \Box p \,\&\, \Box\Box p \cdots\cdots(*)$。ゆえに，定理2—4より，$\vdash_G p \to (\Box(p \,\&\, \Box p) \to p \,\&\, \Box p)$。正規性により，$\vdash_G \Box p \to \Box(\Box(p \,\&\, \Box p) \to p \,\&\, \Box p)$。ところが，Gの固有公理：$\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ の‘p’に $p \& \Box p$ を代入することにより $\vdash_G \Box(\Box($p

$\&\Box p)\to p\&\Box p)\to\Box(p\&\Box p)$。ゆえに，$\vdash_G\Box p\to\Box(p\&\Box p)$。(＊)により，$\vdash_G\Box p\to\Box p\&\Box\Box p$。ゆえに，$\vdash_G\Box p\to\Box\Box p$。　Q. E. D.

Gは正規体系だから，定理2—11により，固有公理として$\Box A\to\Box\Box A$のみを持つ正規体系であるK4のすべての定理はGの定理でもある。こうして，定理2—5は，‘K4’を‘G’に置き換えても成り立つ。すなわち，

系

定理2—4と同じ仮定をおくとき，$\vdash_G\Box(A\rightleftarrows B)\to\Box(F(A)\rightleftarrows F(B))$。

定理2—12

(a) $\vdash_G\Box(\Box A\to A)\rightleftarrows\Box A$

(b) $\vdash_G\neg\Box A\rightleftarrows\Diamond(\neg A\&\Box A)$

(c) $\vdash_G\Diamond B\rightleftarrows\Diamond(B\&\Box\neg B)$

(d) $\vdash_G\Box A\rightleftarrows\Box(A\&\Box A)$

(e) $\vdash_G\Box A\to(\Diamond B\rightleftarrows\Diamond(B\&A\&\Box A))$

《証明》

(a) Gの固有公理より，$\vdash_G\Box(\Box A\to A)\to\Box A$。また，$\vdash_G A\to(\Box A\to A)$と正規性より$\vdash_G\Box A\to\Box(\Box A\to A)$。ゆえに$\vdash_G\Box(\Box A\to A)\rightleftarrows\Box A$。

(b) (a)の両辺を否定すれば得られる。

(c) (b)でAを$\neg B$とすることから得られる。

(d) まず，定理2—11より$\vdash_G\Box A\to\Box\Box A$。ゆえに$\vdash_G\Box A\to\Box A\&\Box\Box A$。ところが定理2—1とGがKの拡張であることにより，$\vdash_G\Box(A\&\Box A)\rightleftarrows\Box A\&\Box\Box A$。ゆえに，$\vdash_G\Box A\to\Box(A\&\Box A)$。逆に，$\vdash_G A\&\Box A\to A$と正規性より$\vdash_G\Box(A\&\Box A)\to\Box A$。ゆえに$\vdash_G\Box A\rightleftarrows\Box(A\&\Box A)$。

(e) 定理2—3の系2により，$\vdash_G\Diamond B\&\Box(A\&\Box A)\to\Diamond(B\&A\&\Box A)$。これと(d)により，$\vdash_G\Diamond B\&\Box A\to\Diamond(B\&A\&\Box A)$。ゆえに，$\vdash_G\Box A\to(\Diamond B\to B\&A\&\Box A)$。逆に，$B\&A\&\Box A\to B$がトートロジーであることと，定理2—3の系1より，$\vdash_G\Diamond(B\&A\&\Box A)\to\Diamond B$。ゆえに，$\vdash_G\Box A\to(\Diamond(B\&A\&\Box A)\to\Diamond B)$。ゆえに$\vdash_G\Box A\to(\Diamond B\rightleftarrows(\Diamond B\&A\&\Box A))$。　Q. E. D.

定理2—13

$$\vdash_G\ \Box\bot\rightleftarrows\Box\Diamond p$$

《証明》

$\vdash_G\bot\to\Diamond p$，それゆえGの正規性により$\vdash_G\Box\bot\to\Box\Diamond p$。逆に，$\vdash_G p\to\top$，定理2—3の系2より$\vdash_G\Diamond p\to\Diamond\top$，正規性により$\vdash_G\Box\Diamond p\to\Box\Diamond\top$。ところが，$\vdash_G\Diamond\top\rightleftarrows\neg\Box\neg\top$，$\vdash_G\Diamond$

$\top\rightleftarrows\neg\Box\bot$，ゆえに $\vdash_G\Diamond\top\rightleftarrows(\Box\bot\to\bot)$，ゆえに正規性より $\vdash_G\Box\Diamond\top\rightleftarrows\Box(\Box\bot\to\bot)$。これと，$\vdash_G\Box(\Box\bot\to\bot)\to\Box\bot$（Gの固有公理）により，$\vdash_G\Box\Diamond\top\to\Box\bot$。ゆえに，$\vdash_G\Box\Diamond p\to\Box\bot$。ゆえに，$\vdash_G\Box\bot\rightleftarrows\Box\Diamond p$。　Q. E. D.

われわれがGに関心があるのは，GがPAのような形式的体系についての興味深い事実を示唆するからである。定理2—13の場合，これはPAの各文Sについて，「PAが矛盾するとき，かつそのときにかぎりSはPAと無矛盾であることがPAにおいて証明可能である」と主張しているとみなすことができる。また，この定理により，$\vdash_G\Box\Diamond\top\to\Box\bot$ が導けるが，これは，「第二不完全性定理（の対偶）はPAの定理である」ということを主張しているとみなしうる（これに関することは§4で扱う。）

また，定理2—13より，$\vdash_G\Box\bot\rightleftarrows\Box\Diamond A$，$\vdash_G\Box\bot\rightleftarrows\Box\Diamond\Box\Diamond A$。ゆえに，$\vdash_G\Box\Diamond A\rightleftarrows\Box\Diamond\Box\Diamond A$，すなわち，定理2—7でS4をGに置き換えることができる。

さらに，定理2—9でわれわれは $\Box p\to p$ がGの定理ではないことを示したが，このときの * の変換規則によると $(p\to\Box\Diamond p)^*$ や $(\Diamond p\to\Box\Diamond p)^*$ はトートロジーとなってしまうから，$p\to\Box\Diamond p$ や $\Diamond p\to\Box\Diamond p$ がGの定理でないことを * を使って示すことはできない。ところが，後に見るように（§4），$\Box\bot$ はGの定理ではない。このことと，定理2—13から先の二式の代入例である $\top\to\Box\Diamond\top$ と $\Diamond\top\to\Box\Diamond\top$ がGで $\Box\bot$ と同値である（実際，定理2—13より $\vdash_G\Box\bot\rightleftarrows\Box\Diamond\top$ だから，$\vdash_G(\top\to\Box\Diamond\top)\rightleftarrows(\top\to\Box\bot)\rightleftarrows\Box\bot$，$\vdash_G(\Diamond\top\to\Box\Diamond\top)\rightleftarrows(\neg\Box\neg\top\to\Box\bot)\rightleftarrows\Box\bot$）から，これらはどちらもGの定理ではないことが分かる。従って，$p\to\Box\Diamond p$ と $\Diamond p\to\Box\Diamond p$ もGの定理ではないことになる。

<u>定理2—14</u>

(a) $\vdash_G\neg\Box\bot\rightleftarrows\neg\Box\neg\Box\bot$

(b) $\vdash_G\Box(p\rightleftarrows\neg\Box p)\to\Box(p\rightleftarrows\neg\Box\bot)$

《証明》

(a) 定理2—13でpに⊤を代入して，$\vdash_G\Box\bot\rightleftarrows\Box\neg\Box\bot$。両辺を否定して $\vdash_G\neg\Box\bot\rightleftarrows\neg\Box\neg\Box\bot$。　Q. E. D.

(b) トートロジーより $\vdash_G(p\rightleftarrows\neg\Box p)\to(p\to\neg\Box p)$。正規性と配分公理により，$\vdash_G\Box(p\rightleftarrows\neg\Box p)\to(\Box p\to\Box\neg\Box p)$。定理2—13のpに¬pを代入して $\vdash_G\Box\bot\rightleftarrows\Box\neg\Box p$，ゆえに，$\vdash_G\Box(p\rightleftarrows\neg\Box p)\to(\Box p\to\Box\bot)$ ……① ところで $\vdash_G\bot\to p$，∴ $\vdash_G\Box\bot\to\Box p$，∴ $\vdash_G\Box(p\rightleftarrows\neg\Box p)\to(\Box\bot\to\Box p)$ ……② ゆえに①，②より $\vdash_G\Box(p\rightleftarrows\neg\Box p)\to(\Box p\rightleftarrows\Box\bot)$。正規性より $\vdash_G\Box\Box(p\rightleftarrows\neg\Box p)\to\Box(\Box p\rightleftarrows\Box\bot)$　GはK4の拡張だから $\vdash_G\Box(p\rightleftarrows\neg\Box p)\to\Box\Box(p\rightleftarrows\neg\Box p)$，ゆえに $\vdash_G\Box(p\rightleftarrows\neg\Box p)\to\Box(\Box p\rightleftarrows\Box\bot)$ ……③ ところで，$p\rightleftarrows\neg\Box\bot$ は $p\rightleftarrows\neg\Box p$ と $\Box p\rightleftarrows\Box\bot$ の真理関数的帰結であるから，定理2—3よ

り，$\vdash_G \Box(p \rightleftarrows \neg\Box p)\ \&\ \Box(\Box p \rightleftarrows \Box\bot) \to \Box(p \rightleftarrows \neg\Box\bot)$。　これと③より，$\vdash_G \Box(p \rightleftarrows \neg\Box p) \to \Box(p \rightleftarrows \neg\Box\bot)$　Q. E. D.

定理2—14の(a)により，PAが無矛盾であるとき，かつそのときにかぎりPAの無矛盾性はPAでは証明できない，ということがPAで主張されることが分かる。また(b)により，Sがゲーデル文ならば(つまり，SがSは証明できないという文と同値であることがPAで証明されるならば)，SはPAの無矛盾性を表現した文と同値である，ということがPAで主張されることが分かる。

§ 3　算術における証明可能性

3．1　ペアノ算術

本節では，§1で概観した算術と，そこでの証明可能性に関わる概念を改めて取り上げる。ここで中心となるのは算術（正確にはペアノ算術：PA）における証明可能性（定理性）の述語であるBew(x)　に関するつぎの五つの定理である。

S，S′ をPAの任意の文とするとき，

(i)　$\vdash_{PA} S$　ならば $\vdash_{PA} Bew(\ulcorner S \urcorner)$；

(ii)　$\vdash_{PA} Bew(\ulcorner(S \to S')\urcorner) \to (Bew(\ulcorner S \urcorner) \to Bew(\ulcorner S' \urcorner))$；

(iii)　$\vdash_{PA} Bew(\ulcorner S \urcorner) \to Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner S \urcorner)\urcorner)$；

(iv)　$Bew(\ulcorner S \urcorner)$　はΣ_1　文である；

(v)　もしSがΣ_1文ならば，$\vdash_{PA} S \to Bew(\ulcorner S \urcorner)$。

以下で，これらの定理中で言及される概念を通覧し，定理の証明の素描を行う。

文Sのゲーデル数nに対するPAでの数詞を「S⌝とすると，「S⌝はn個の後者記号を伴う**0**である。すると，$Bew(\ulcorner S \urcorner)$　はBew(x)のすべての自由変項xに「S⌝を代入した結果であるが，これは「SはPAの定理である」と主張していると見てよい。このとき，上の(iii)は(iv)と(v)　から導かれる。(Σ_1文については後に定義する。)

3．1．1　言語・公理・推論規則・含意・同値・真偽・確定記述子

ペアノ算術PAは，等号を持つ古典第一階述語計算で形式化される算術の理論である。PAは<u>言語</u>として，個体定項**0**，一変項関数記号′，二変項関数記号+，および・を含む。=，⊥，→は原始論理記号である。PAの変項は正式には，x_1，x_2，… であるが，適宜x，y，z等も使う。PAの<u>定理</u>は，後者，和，積に関する公理と数学的帰納法（これのみ公理シェーマ）からの論理的帰結である。それらの<u>公理</u>（および公理シェーマ）は以下の七つである。

(1)　$\forall x(\mathbf{0} \neq x')$

(2)　$\forall x \forall y(x' = y' \to x = y)$

(3)　$\forall x(x+\mathbf{0}=x)$

(4)　$\forall x\forall y(x+y'=(x+y)')$

(5)　$\forall x(x\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0})$

(6)　$\forall x\forall y(x\cdot y'=x\cdot y+x)$

(7)　$A(\mathbf{0})\ \&\ \forall x(A(x)\rightarrow A(x'))\rightarrow\forall x A(x)$

推論規則はモドゥス・ポネンスと全称化である。

$\vdash_{PA} F\rightarrow G$ のとき，式Fは式Gを含意すると言い，$\vdash_{PA} F\rightleftarrows G$ のとき，式Fと式Gは同値である，と言うことにする。PAの文は，領域としてすべての自然数の集合を取り，$\mathbf{0}$，$'$，$+$，$\cdot$ の各々にゼロ，後者関数，加法関数，乗法関数を割り当てるPAの言語に対する標準モデルで真または偽であるとき，真または偽と呼ばれる。

また，以後の議論では，確定記述子 ι が使えるPAの変種を仮定する。(これにより，式 $F(x)$ から，$F(x)$ を満たす唯一者 $\iota x F(x)$ として項が得られる。) ι が出現している式は ι が出現していないある式と同値である。ι 項は，通常の指示対象を欠くときゼロを指示する，と仮定する。

3．1．2　証明・数詞・ゲーデル数・表現可能性・原始帰納的関数および関係

PAの証明は，以下の条件を満たす，式の有限列である。すなわち，列の各式は公理であるか，またはその式列で先行する式のモドゥス・ポネンスまたは全称化による帰結である。証明は最後の式の証明であり，定理とはその証明が存在する式のことである。

数nに対するPAでの数詞は，$\mathbf{0}$ に $'$ をn回付加した結果である。数nに対する数詞は $\mathbf{n}$ と略記する。例えば，$\mathbf{3}$ は $\mathbf{0}'''$ のことである。「F」は表現(記号列)Fのゲーデル数の数詞である。通常のやり方で，PAの記号，記号の有限列，記号の有限列の有限列にゲーデル数が割り当てられているものと仮定する。

項 $t(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ は，

任意の自然数 $i_1,\ \cdots,\ i_n,\ i_{n+1}$ について，

$$f(i_1,\ \cdots,\ i_n)=i_{n+1} \text{ ならば } \vdash_{PA} t(\mathbf{i}_1,\ \cdots,\ \mathbf{i}_n)=\mathbf{i}_{n+1}$$

が成り立つとき，n項関数fを(PAで)表現する(represent)と言われる。例えば，$x_1\cdot x_3$ は乗法関数を表現する。

原始帰納的関数(primitive recursive functions)とは，ゼロ関数 $z(x)=0$，後者関数 $s(x)=x'=x+1$，同一性関数 $id^n_i(x_1,\ \cdots,\ x_n)=x_i(1\leqq i\leqq n)$ を含み，合成と原始帰納という操作によってメンバー(要素)から生成されるすべての関数を含む，最小のクラスのメンバーのことを言う。ゼロ関数はxのすべての値に対する関数値 $z(x)$ がゼロである一項関数である。後者関数は，すべての自然数iに対して，その関数値が $i+1$ である関数である。$1\leqq k\leqq m$ であるすべての自然数m，kに対して，同一性関数 $id^m_k=(i_1,\ \cdots,\ i_m)=i_k$ が存在する。fがm項関数で，

$g_1, \cdots, g_m$ がすべてn項関数のとき，

すべての自然数 $i_1, \cdots, i_n$ に対して

$$h(i_1, \cdots, i_n) = f(g_1(i_1, \cdots, i_n), \cdots, g_m(i_1, \cdots, i_n))$$

ならば，hはfと $g_1, \cdots, g_m$ から合成によって生成されたと言われる。また，fがn項関数でgがn＋2項関数のとき，

すべての自然数 $i_1, \cdots, i_n, k$ について，

$$\begin{cases} h(i_1, \cdots, i_n, 0) = f(i_1, \cdots, i_n) \\ h(i_1, \cdots, i_n, k+1) = g(i_1, \cdots, i_n, k, h(i_1, \cdots, i_n, k)) \end{cases}$$

ならば，n＋1項関数hはfとgから原始帰納によって生成されたと言われる。

3．1．3　β関数・項帰納・原始帰納的項・項合成

自然数a，b，kに対する関数値が，aを $1+(k+1)b$ で割ったときの余りである，ある原始帰納的関数をβ関数と呼ぶ。これはつぎの性質を持つ：

任意の自然数mと，自然数の任意の有限列 $h_0, h_1, \cdots, h_m$ が与えられたとき，

$k \leqq m$ なるすべてのkに対して　$\beta(a, b, k) = h_k$

となるような自然数a，bが存在する（証明略[8]）。

項 $s(x_1, \cdots, x_n)$ が関数fを表現し，項 $t(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$ が関数gを表現し，関数hがfとgから原始帰納によって生成されると仮定せよ。われわれは，項 $s(x_1, \cdots, x_n)$ と $t(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$ から，hを表現する項 $u(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$ をいかにして構成するかを見ることにする。関数hは関数f，gから生成されるから，

任意の自然数 $i_1, \cdots, i_n, k$ について

$$\begin{cases} h(i_1, \cdots, i_n, 0) = f(i_1, \cdots, i_n) \\ h(i_1, \cdots, i_n, k+1) = g(i_1, \cdots, i_n, k, h(i_1, \cdots, i_n, k)) \end{cases}$$

となる。こうして，

$h(i_1, \cdots, i_n, m) = j$

$\Leftrightarrow k < m$ なるすべてのkに対して，

$$\begin{cases} h_0 = f(i_1, \cdots, i_n) \\ h_{k+1} = g(i_1, \cdots, i_n, k, h_k) \end{cases} \quad \text{かつ} \quad h_m = j$$

であるような有限列 $h_0, h_1, \cdots, h_m$ が存在する，

となる。ここで，先ほどのβ関数によって，自然数の有限列上の量化を自然数上の量化に置き換えうる。すなわち，

$h(i_1, \cdots, i_n, m) = j$

$\Leftrightarrow k < m$ なるすべてのkに対して

$$\begin{cases}\beta(a, b, 0)=f(i_1, \cdots, i_n)\\ \beta(a, b, k+1)=g(i_1, \cdots, i_n, k, \beta(a, b, k))\end{cases}$$

かつ $\beta(a, b, m)=j$，となる自然数a，bが存在する。

ここで，$x<y$ を $\exists z(z'+x=y)$ と定義する。$\beta(a, b, k)$ が，ある自然数iについて，$a=i(1+(k+1)b)+r$ となるような，$1+(k+1)b$ より小さい唯一の自然数rであることから，$Beta(w_1, w_2, z)$ を，項：

$$\iota y[y<(z+1)w_2)\ \&\ \exists x(w_1=x(1+(z+1)w_2)+y]$$

と定義する。さて，いま目指す項 $u(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$ を構成できる。$u(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$ をつぎの項とする：

$$\iota y\exists w_1\exists w_2[Beta(w_1, w_2, 0)=s(x_1, \cdots, x_n)\ \&\ \forall z(z<x_{n+1}\rightarrow Beta(w_1, w_2, z')$$
$$=t(x_1, \cdots, x_n, z, Beta(w_1, w_2, z)))\ \&\ Beta(w_1, w_2, x_{n+1})=y]$$

項 $u(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$ は，項 $s(x_1, \cdots, x_n)$ と $t(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$ から項帰納によって生成されたと言われる。項 $u(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$ は関数hを表現する。

原始帰納的項 (primitive recursive terms) の定義を，原始帰納的関数のそれとパラレルに帰納的定義によって与える。すなわち，ゼロ項と後者項と同一性の項を含み，項合成と項帰納によりメンバーから生成されるすべての項を含むところの最小のクラスのメンバー，と定義する。

ゼロ項は，項 $\iota y(x=x\ \&\ y=0)$ であり，ゼロ関数 $z(x)=0$ を表現する。後者項は，項 x' である。後者項は後者関数 $s(x)=x'$ を表現する。同一性の項 $Id^m_k(1\leqq k\leqq m)$ は項 $\iota y(x_1=x_1\ \&\cdots\&\ x_m=x_m\ \&\ y=x_k)$ である。Id^m_k は同一性関数 id^m_k を表現する。

$s(x_1, \cdots, x_n)$ と $t_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, t_m(x_1, \cdots, x_n)$ から項合成により生成される項は $s(t_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, t_m(x_1, \cdots, x_n))$ である。もし項 $s(x_1, \cdots, x_m)$ が関数fを表現し，各項 $t_i(x_1, \cdots, x_n)$ $(1\leqq i\leqq m)$ が各関数 g_i を表現し，関数hがfと各 g_i から合成されるならば，項 $s(t_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, t_m(x_1, \cdots, x_n))$ はhを表現する。

すべての原始帰納的項はただ一つの原始帰納的関数を表現するが，原始帰納的関数は無限に多くの原始帰納的項によって表現される。

3．2　Bew(x) の性質

3．2．1　厳格リスト

ここで，原始帰納的関数のリストである「厳格リスト」の概念を導入する。厳格リストとは，連続した正整数を添字された原始帰納的関数の有限リストであり，リスト中の各項目は，ゼロ関数，後者関数，同一性関数としてか，または先行する関数から合成または原始帰納のいずれかによって生成されたものとして，注記されたリストのことである。その注記は，先行する関数の添字数（イ

ンデックス・ナンバー）を特定し，操作を特定しなければならない。例えば，合成によって得られた関数の注記には，どの関数が f の役割を演じ，どの関数が g_1, …, g_m に対応するかが明記されていなければならない。（ゲーデルの原論文の46個の関数・関係のリストのうち，45番目までは略記された厳格リストの例となる。）そしてさらに，各厳格リストに対して，注記とインデックス・ナンバーを介して原始帰納的項をリストの各項目に結び付けることができる。

さてわれわれは，その最後の項目がPA に対する“…は…の証明である”の関係，詳しくは関係：$\{\langle m, n\rangle|$ m はゲーデル数 n の式の PA における証明のゲーデル数である$\}$ である厳格リストを持っている，と仮定する。また，そのリストの項目には PA の公理のゲーデル数の集合や，関係 $\{\langle i, j, k\rangle|$ i はゲーデル数 j，k の式からのモドゥス・ポネンスによる直接の帰結である式のゲーデル数である$\}$ や関係 $\{\langle i, j\rangle|$ i はゲーデル数 j の式からの全称化による直接の帰結である式のゲーデル数である$\}$，および関係 $\{\langle i, j, k\rangle|$ i はゲーデル数 k を持つ式列の j 番目の構成要素である式のゲーデル数である$\}$ が含まれると仮定する。すると，“…は…の証明である”の関係が，公理の集合，直接の帰結についての二つの関係，および式列とその構成要素の関係から，通常行われる仕方で得られることが確認できるはずである。[9]

このわれわれの厳格リストの最後の項目に結び付けられた項を $\mathrm{Prf}(x_1, x_2)$ とする。このとき，式 $\mathrm{Prf}(x_1, x_2)=\mathbf{0}$ を $\mathrm{Pf}(x_1, x_2)$ と書くと，$\mathrm{Bew}(x)$ は $\exists y\,\mathrm{Pf}(y, x)$ である。

3．2．2　Bew(x) の基本性質

これから，本節の目標である $\mathrm{Bew}(x)$ の五つの基本性質(i)―(v)（3．1参照）が成り立つことの確認を順次行う。まず(i)からである。われわれの厳格リストのインデックス・ナンバーと結びついた項が，対応するリストの関数を表現することに注意しよう。prf を“…は…の証明である”という関係の特徴関数とする。そのとき，$\mathrm{Prf}(x_1, x_2)$ は prf を表現する。いま，$\vdash_{PA} S$ とする。すると，PA での S の証明 P が存在する。P のゲーデル数を m，S のゲーデル数を n とする。m はゲーデル数 n の式の証明のゲーデル数だから $\mathrm{prf}(m, n)=0$。$\mathrm{Prf}(x_1, x_2)$ は prf を表現し，$\mathbf{n}=\ulcorner S\urcorner$ だから，$\vdash_{PA}\mathrm{Prf}(\mathbf{m}, \ulcorner S\urcorner)=\mathbf{0}$，すなわち，$\vdash_{PA}\mathrm{Pr}(\mathbf{m}, \ulcorner S\urcorner)$，ゆえに，$\vdash_{PA}\exists y\,\mathrm{Pr}(y, \ulcorner S\urcorner)$，つまり $\vdash_{PA}\mathrm{Bew}(\ulcorner S\urcorner)$。

これから，‘Bew[F]’という記法を導入する。まず，$\mathrm{sub}(i, j, k)$ が，ゲーデル数 k の式中の変項 x_j のすべての自由出現に数 i に対応する対象式 $\mathbf{i}$ を代入した結果のゲーデル数であるような，そういう原始帰納的関数とする。[10] もし k が式のゲーデル数でないならば，$\mathrm{sub}(i, j, k)=0$。もし x_j がゲーデル数 k の式に自由には現れないならば，$\mathrm{sub}(i, j, k)=k$。例えば，k が式 $x_2=x_3$ のゲーデル数ならば，$\mathrm{sub}(2, 3, k)$ は式 $x_2=\mathbf{2}$ のゲーデル数である。$\mathrm{Sub}(x_1, x_2, x_3)$ を sub に対する原始帰納的項とする。上の例を続けると，$\vdash_{PA}\mathrm{Sub}(\mathbf{2}, \mathbf{3}, \ulcorner x_2=x_3\urcorner)=\ulcorner x_2=\mathbf{2}\urcorner$。さて，F を丁度 m 個の自由変項 x_{k1}, x_{k2}, …, x_{km} を持つ PA の式とせよ。このとき Bew[F] を，

$$\mathrm{Bew}(\mathrm{Sub}(x_{k1}, \mathbf{k}_1, \mathrm{Sub}(x_{k2}, \mathbf{k}_2, \cdots, \mathrm{Sub}(x_{km}, \mathbf{k}_m, \ulcorner F \urcorner)\cdots))$$

と定義する。もしFが自由変項を一つも持たない式，つまり文であれば，Bew[F] は文 Bew(⌜F⌝) である。こうして，Bew[F] はFと同じ自由変項 x_{k1}, …, x_{km} （またはFと同じ0個の自由変項）を持つ。Bew[F] が x_{k1} への i_1 の，…，x_{km} への im の割り当ての下で真であるとき，かつそのときにかぎり $Fx_{k1}\cdots x_{km}(i_1, \cdots, i_m)$，つまりFにおいて x_{k1} に i_1 を，…，x_{km} に im を代入した結果が，PA で証明可能である。

ここで，Bew(x) と原始帰納的項とに関する基本的結果を確かめることができる。すなわち，$t(x_1, \cdots, x_n)$ が原始帰納的項だとすると，$\vdash_{PA} t(x_1, \cdots, x_n) = x_{n+1} \rightarrow \mathrm{Bew}[t(x_1, \cdots, x_n) = x_{n+1}]$ である。この結果の証明は，厳格リストのインデックス・ナンバーと結び付いた各原始帰納的項が，その数に対応する原始帰納的関数を表現するということの証明の形式化である。単純なケースの例として $\vdash_{PA} x_1' = x_2 \rightarrow \mathrm{Bew}[x_1' = x_2]$ があるが，これは以下の議論の形式化である。すなわち，もし $i_1' = i_2$ ならば，$\mathbf{i}_1$ に後者記号′を一つ付加した結果は $\mathbf{i}_2$ に外ならない，それゆえ $x_1' = x_2$ の x_1 に $\mathbf{i}_1$ を，x_2 に $\mathbf{i}_2$ を代入した結果は $\mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_2$ であるが，これはPAの定理だから $\mathbf{i}_1' = \mathbf{i}_2$ はPAの定理である。

これから，Bew[F] の記法を利用して (ii)―(v) に向かう。まず，(a) $\vdash_{PA}$ F ならば $\vdash_{PA}$ Bew[F] であることを確かめる。文SをFの普遍閉鎖体とする。すると，$\vdash_{PA}$ Bew(⌜S⌝) → Bew[F] を示せば十分である。なぜなら，$\vdash_{PA}$ F ならば全称化により $\vdash_{PA}$ S，ここで(i)より $\vdash_{PA}$ Bew(⌜S⌝)，ゆえに $\vdash_{PA}$ Bew[F] だからである。以下の議論を形式化することによって，$\vdash_{PA}$ Bew(⌜S⌝) → Bew[F] は得られる。すなわち，SはFの普遍閉鎖体だからSの証明からFの証明が構成できる。従って，Fも証明できる。

以下の議論を形式化すると，(b) $\vdash_{PA}$ Bew[(F → G)] → (Bew[F] → Bew[G]) が示される。モドゥス・ポネンスはPAの推論規則であるから，(F → G) とFの中の一定の変項に一定の数詞を代入した結果の証明があれば，それから，Gの中の同じ変項への同じ数詞の同様の代入によって得られた結果の証明が構成できる。(ii) はFとGが文であるときの (b) の特殊ケースであるから，これで(ii) は示された。

(c)　FがGを含意するならば，Bew[F] は Bew[G] を含意する。というのは，FがGを含意する，つまり $\vdash_{PA}$ F → Gとすると，(a) より $\vdash_{PA}$ Bew[F → G]，ところで(b) より $\vdash_{PA}$ Bew[F → G] → (Bew[F] → Bew[G]) だから，$\vdash_{PA}$ Bew[F] → Bew[G]，すなわち Bew[F] は Bew[G] を含意する。

(d)　FとGが同値ならば，Bew[F] と Bew[G] も同値である，ということが(c) からすぐ導かれる。

3．2．3　原始帰納的式と Σ_1 文

強い意味での原始帰納的式とは，$t(x_1, \cdots, x_n)$ が原始帰納的項の場合の式 $t(x_1, \cdots, x_n)=0$ のことである。原始帰納的式とは，ある原始帰納的項 $t(x_1, \cdots, x_n)$ に対する強い意味での原始帰納的式と同値な式のことである。こうして，$\vdash_{PA} F \rightleftarrows t(x_1, \cdots, x_n)=0$ ならば，Fは原始帰納的式である。例えば，$Pf(y, x)$ は，原始帰納的式である。原始帰納的式は，数詞や原始帰納的項の代入，変項の交換，真理関数的操作，制限付き量化といった，原始帰納的関係がその下で閉じている操作の下で閉じている。

強い意味でのΣ_1式は，強い意味での原始帰納的式中のただ一つの変項に対する存在量化である。例えば，$\exists y Pf(y, x)$ は強い意味でのΣ_1式である。Σ_1式は強い意味でのΣ_1式と同値な式である。例えば，$Bew(x)$ はΣ_1式である。Σ_1式は，数詞や原始帰納的項の代入，変項の交換・同一指定，連言，選言，制限された量化，および（原始帰納的対関数の存在のゆえに）存在量化の下で閉じているが，非限定の普遍量化や否定の下では閉じていない。Fを任意の式とすると，$Sub(x_1, x_2, x_3)$ が原始帰納的項であることと $Bew(x)$ がΣ_1式であることから，$Bew[F]$ もΣ_1式である。

Σ_1文とは，文であるところのΣ_1式のことである。ゆえに，Sが文ならば $Bew(\ulcorner S \urcorner)$ はΣ_1文である。すなわち，(iv) が成り立つ。

最後に，Σ_1完全性と呼ばれる (v) の一般形であるものを証明する。それはこうである：

$$F が \Sigma_1 式ならば，\vdash_{PA} F \rightarrow Bew[F]。$$

FをΣ_1式とする。定義により，$\vdash_{PA} F \rightleftarrows \exists x_{n+1}(t(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})=0)$……① であるような原始帰納的項 $t(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$ が存在する。ここで，$\vdash_{PA} \exists x_{n+1}(t(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})=0) \rightarrow Bew[\exists x_{n+1}(t(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})=0)]$……② を示せば十分である。なぜなら，②が示せたら，①と(d)より $\vdash_{PA} Bew[F] \rightleftarrows Bew[\exists x_{n+1}(t(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})=0)]$ だから，$\vdash_{PA} F \rightarrow Bew[F]$ が導けるからである。ところで，$Bew(x)$ と原始帰納的項との間の基本的結果として，$\vdash_{PA} t(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})=x_{n+2} \rightarrow Bew[t(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})=x_{n+2}]$ である。この x_{n+2} に0を代入して，$\vdash_{PA} t(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})=0 \rightarrow Bew[t(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})=0]$。しかし，$t(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})=0$ は $\exists x_{n+1}(t(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})=0)$ を含意するから，(c)によって，$\vdash_{PA} Bew[t(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})=0] \rightarrow Bew[\exists x_{n+1}(t(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})=0)]$。こうして，$\vdash_{PA} t(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})=0 \rightarrow Bew[\exists x_{n+1}(t(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})=0)]$。この最後の式の後件に x_{n+1} は自由変項としては現れていないから，$\vdash_{PA} \exists x_{n+1}(t(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})=0) \rightarrow Bew[\exists x_{n+1}(t(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})=0)]$。こうして②が示されたから，$\vdash_{PA} F \rightarrow Bew[F]$。

従って，SがΣ_1文ならば，$\vdash_{PA} S \rightarrow Bew(\ulcorner S \urcorner)$，すなわち(v)が成り立つ。

尚，(iii) は既述のように(iv)と(v)から直ちに得られる。

§4　証明可能性としての□演算子
―― その1 ――

4．1　様相論理の正しい原理

本節では，様相演算子□を"…は証明可能である"と解釈したときに，様相論理の「正しい原理」となるものが何であるか，について考察する。この問いを明確に定式化するために，その準備として「実現」と「翻訳」の概念を定義することから始める。

実現(realization)とは，様相論理の各文変項pにペアノ算術(PA)の言語の文(それを$\phi(p)$で表す)を割り当てる関数である。

実現ϕの下での，様相文Aの翻訳(translation)を以下のように帰納的に定義する。

(1)　$\bot^{\phi}=\bot$;

(2)　$p^{\phi}=\phi(p)$　(各文変項pに対して);

(3)　$(A\rightarrow B)^{\phi}=A^{\phi}\rightarrow B^{\phi}$;

(4)　$(\Box A^{\phi})=\mathrm{Bew}[A^{\phi}]$　$(=\mathrm{Bew}(\ulcorner A^{\phi}\urcorner))$。

上の(4)では，Aの翻訳が文Sならば，□Aの翻訳はBew[S]，すなわちBew(x)中の自由変項xにSのゲーデル数の数詞$\ulcorner S\urcorner$を代入した結果，である。この結果は，SがPAで証明可能であると主張していると解されるPAの文である。ここで，Aが文変項を含まない様相文のとき，すべての実現ϕ_1，ϕ_2に対して$A^{\phi 1}=A^{\phi 2}$であることに注意しよう。つまり，ϕがどんな実現であるにせよ，その特定化とは無関係にA^{ϕ}は真または偽であることが確定する。

さてここで，□を証明可能性の述語と解釈するとき，様相論理のどの原理が正しいかという問いを，実現ϕの概念を用いて明確に定式化することができる：

①すべての実現ϕに対して，A^{ϕ}が標準モデルで真となるような，そういう様相文Aは何か？

②すべての実現ϕに対して，A^{ϕ}がPAで証明可能となるような，そういう様相文Aは何か？

われわれはこの二つの問いのうち，②の方から先に答えることにする。結論からいえば，②の答えとなるような文Aは様相論理Gの定理である。すなわち，$\vdash_G A \Leftrightarrow \vdash_{PA} A^{\phi}$である。このことの半分，つまり$\vdash_G A \Rightarrow \vdash A^{\phi}$から示す。(これの逆：$\vdash_{PA} A^{\phi} \Rightarrow \vdash_G A$はソロヴェイの第一完全性定理であるが，これは後に考察する。)その前に，Gの部分体系であるK4についても，このことが成り立つことから見ていく。すなわち，つぎの定理が成り立つ。

定理4―1

任意の様相文Aについて，$\vdash_{K4} A$ならば$\vdash_{PA} A^{\phi}$。

《証明》

$\vdash_{K4} A$として，AがK4の公理の場合と一般の定理の場合に分けて示す。AがK4の公理の場合。

Aが様相文のトートロジー的結合のとき，A^{ϕ}もPAの言語の文のトートロジー的結合であるから，$\vdash_{PA} A^{\phi}$。Aが配分公理のとき。§3の3．1（ii）で，すべてのPAの文の対S，S′について，$\vdash_{PA} \mathrm{Bew}[(S \to S')] \to (\mathrm{Bew}[S] \to \mathrm{Bew}[S'])$ だったから，すべての実現ϕとすべての様相文の対B，Cに対して $\vdash_{PA} \mathrm{Bew}[(B^{\phi} \to C^{\phi})] \to (\mathrm{Bew}[B^{\phi}] \to \mathrm{Bew}[C^{\phi}])$ である。ところが，$\mathrm{Bew}[(B^{\phi} \to C^{\phi})] \to (\mathrm{Bew}[B^{\phi}] \to \mathrm{Bew}[C^{\phi}]) = (\Box(B \to C) \to (\Box B \to \Box C))^{\phi}$ であるから，任意の様相文B，Cに対して $\vdash_{PA} (\Box(B \to C) \to (\Box B \to \Box C))^{\phi}$。AがK4の固有公理$\Box B \to \Box\Box B$のとき。同じく3．1（iii）で，PAのすべての文Sについて $\vdash_{PA} \mathrm{Bew}[S] \to \mathrm{Bew}[\mathrm{Bew}[S]]$ であったから，すべての実現ϕとすべての様相文Bに対して $\vdash_{PA} \mathrm{Bew}[B^{\phi}] \to \mathrm{Bew}[\mathrm{Bew}[B^{\phi}]]$ である。ところが，$\mathrm{Bew}[B^{\phi}] \to \mathrm{Bew}[\mathrm{Bew}[B^{\phi}]] = (\Box B \to \Box\Box B)^{\phi}$ であるから，任意の様相文Bに対して $\vdash_{PA} (\Box B \to \Box\Box B)^{\phi}$。こうして，AがK4の公理であるとき，すべての実現ϕに対して$\vdash_{PA} A^{\phi}$ であることを示した。

つぎに，Aが一般の定理の場合である。このときは，二つの推論規則がϕによる翻訳のPAでの定理性に関して閉じていることを言えば十分である。まず，モドゥス・ポネンスの場合である。$\vdash_{PA} B^{\phi}$ かつ$\vdash_{PA} (B \to C)^{\phi}$ とする。ここで $(B \to C)^{\phi} = B^{\phi} \to C^{\phi}$ であるから，$\vdash_{PA} C^{\phi}$。必然化の場合。$\vdash_{PA} B^{\phi}$ とする。§3の3．1（i）より，$\vdash_{PA} \mathrm{Bew}[B^{\phi}]$。ところが，$\mathrm{Bew}[B^{\phi}] = (\Box B)^{\phi}$ だから，$\vdash_{PA} (\Box B)^{\phi}$。　Q．E．D．

この定理4―1の逆は成り立たない。なぜなら，Gの定理のすべての翻訳がPAの定理となるからである。だが，そのことを示すには，つぎの定理と一般化された対角化補題の系が必要である。

<u>定理4―2</u>

$$\vdash_{K4} \Box(q \rightleftarrows (\Box q \to p)) \to (\Box(\Box p \to p) \to \Box p)$$

《証明》

K4の正規性により，$\vdash_{K4} \Box(q \rightleftarrows (\Box q \to p)) \to (\Box q \to \Box(\Box q \to p))$ ……①　配分の公理より $\vdash_{K4} \Box(\Box q \to p) \to (\Box\Box q \to \Box p)$ ……②　K4の固有公理：$\vdash_{K4} \Box q \to \Box\Box q$ ……③　これら①，②，③より $\vdash_{K4} \Box(q \rightleftarrows (\Box q \to p)) \to (\Box q \to \Box p)$ ……④　ところで④から正規性により，$\vdash_{K4} \Box\Box(q \rightleftarrows (\Box q \to p)) \to \Box(\Box q \to \Box p)$ ……⑤　K4の固有公理より $\vdash_{K4} \Box(q \rightleftarrows (\Box q \to p)) \to \Box\Box(q \rightleftarrows (\Box q \to p))$ ……⑥　定理2―3より $\vdash_{K4} \Box(\Box p \to p) \to (\Box(\Box q \to \Box p) \to \Box(\Box q \to p))$ ……⑦　再び定理2―3より $\vdash_{K4} \Box(q \rightleftarrows (\Box q \to p)) \to (\Box(\Box q \to p) \to \Box q)$ ……⑧　以上⑥，⑤，⑦，⑧，④と命題計算により $\vdash_{K4} \Box(q \rightleftarrows (\Box q \to p)) \to (\Box(\Box p \to p) \to \Box p)$。

Q．E．D．

<u>定理4―3</u>　<u>一般化された対角化補題</u>

$P_1(y_1, \cdots, y_n, \mathbf{z}), \cdots, P_n(y_1, \cdots, y_n, \mathbf{z})$ を，すべての自由変項が $y_1, \cdots, y_n, \mathbf{z}$（ここで‘$\mathbf{z}$’は‘$z_1, \cdots, z_m$’の短縮形）のいずれかである，PAの言語の式とせよ。このとき，その中に

出現するすべての自由変項が $\mathbf{z}$ であるようなPAの言語の式 $S_1(\mathbf{z}), \cdots, S_n(\mathbf{z})$ で,

$$\vdash_{PA} S_1(\mathbf{z}) \rightleftarrows P_1(\ulcorner S_1(\mathbf{z})\urcorner, \cdots, \ulcorner S_n(\mathbf{z})\urcorner, \mathbf{z})$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\vdash_{PA} S_n(\mathbf{z}) \rightleftarrows P_n(\ulcorner S_1(\mathbf{z})\urcorner, \cdots, \ulcorner S_n(\mathbf{z})\urcorner, \mathbf{z})$$

となるものが存在する。

《証明》

$su(a, b_1, \cdots, b_n)$ を,ゲーデル数aの式の中のすべての自由変項 $x_1, \cdots, x_n$ の各々に数詞 $\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n$ を代入した結果のゲーデル数,として定義する。このsuは原始帰納的関数である。さて,$Su(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ をsuに対する原始帰納的項とする。$1 \leqq i \leqq n$ なる各iに対して,k_i を $P_i(Su(x_1, x_1, \cdots, x_n), \cdots, Su(x_n, x_1, \cdots, x_n), \mathbf{z})$ のゲーデル数,また $S_i(\mathbf{z})$ を式 $P_i(Su(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_n), \cdots, Su(\mathbf{k}_n, \mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_n), \mathbf{z})$ とせよ。われわれは,$\vdash_{PA} \ulcorner S_i(\mathbf{z})\urcorner = Su(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_n)$ を示せばよい。しかし,$S_i(\mathbf{z})$ は,ゲーデル数 k_i を持つ式 $P_i(Su(x_1, x_1, \cdots, x_n), \cdots, Su(x_n, x_1, \cdots, x_n), \mathbf{z})$ におけるすべての自由変項 $x_1, \cdots, x_n$ の各々に数詞 $\mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_n$ を代入した結果であるから,$S_i(\mathbf{z})$ のゲーデル数 $= su(k_i, k_1, \cdots, k_n)$ である。ゆえに,$\vdash_{PA} \ulcorner S_i(\mathbf{z})\urcorner = Su(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_n)$。　Q. E. D.

系:$n=1$, $m=0$ の場合の対角化補題

xを唯一の自由変項として含むPAのすべての式 $P(x)$ に対して,

$$\vdash_{PA} S \rightleftarrows P(\ulcorner S\urcorner)$$

となる文Sが存在する。

$\vdash_{PA} S \rightleftarrows P(\ulcorner S\urcorner)$ ならば,文Sは述語 $P(x)$ の不動点(fixed point)と呼ばれるが,上の系によれば,すべての一項述語は不動点を持つことになる。

定理4—4

$$\vdash_G A \text{ ならば,すべての実現}\phi\text{に対して } \vdash_{PA} A^\phi。$$

《証明》

K4がGの部分体系であり,二つは推論規則が同じであること,そしてすでに定理4—1が成立していることから,すべての様相文Aとすべての実現 ϕ について $\vdash_{PA} (\Box(\Box A \to A) \to \Box A)^\phi$ を示せば十分である。Aを様相文,ϕ を任意の実現とする。$P(x)$ を式 $(Bew(x) \to A^\phi)$ とする。一般化された対角化補題(定理4—3)に対する系により,$\vdash_{PA} S \rightleftarrows (Bew[S] \to A^\phi)$ なる文Sが存在する(ただし $Bew[S] = Bew(\ulcorner S\urcorner)$)。このことと,§3の3.1(i)より,$\vdash_{PA} Bew[(S \rightleftarrows (Bew[S] \to A^\phi))]$。$\psi$ を,$\psi(p) = A^\phi$, $\psi(q) = S$ であるような実現であるとせよ。すると,$\vdash_{PA} (\Box(q \rightleftarrows (\Box q \to p)))^\psi$ であり,かつ $(\Box(\Box p \to p) \to \Box p)^\psi = Bew[(Bew[A^\phi] \to A^\phi)] \to Bew[A^\phi] = (\Box(\Box A \to A) \to \Box A)^\phi$ である。ところが,定理4—1,4—2によって,$\vdash_{PA} (\Box(q \rightleftarrows$

$(\Box q \to p)) \to (\Box(\Box p \to p) \to \Box p))^{\phi}$，ゆえに $\vdash_{PA} (\Box(\Box A \to A) \to \Box A)^{\phi}$。

Q. E. D.

定理4—5

Gは，その定理の集合が，K4の拡張であって $\vdash_L \Box A \to A \Rightarrow \vdash_L A$ という推論規則に関して閉じている様相論理の最小正規体系Lである。

《証明》

§2の定理2—11により，GはK4の拡張である。もし $\vdash_G \Box A \to A$ ならば必然化により $\vdash_G \Box(\Box A \to A)$。ところがGの固有公理より $\vdash_G \Box(\Box A \to A) \to \Box A$，ゆえにモドゥス・ポネンスにより $\vdash_G \Box A$。再びモドゥス・ポネンスにより $\vdash_G A$。従ってGは上記の推論規則に関して閉じている。つぎに最小性。Lを，K4の拡張である様相論理の正規体系であり，すべての文Aについて $\vdash_L \Box A \to A \Rightarrow \vdash_L A$ とする。このときGの定理はすべてLの定理であることを示せばよい。そのためには，Gの固有公理 $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$ がLの定理であることを示せば十分である。まず，配分公理より $\vdash_L \Box(\Box(\Box A \to A) \to \Box A) \to (\Box\Box(\Box A \to A) \to \Box\Box A)$ ……①　$\vdash_L \Box(\Box A \to A) \to (\Box\Box A \to \Box A)$ ……②　K4の固有公理より $\vdash_L \Box(\Box A \to A) \to \Box\Box(\Box A \to A)$ ……③　以上①，②，③より命題計算によって，$\vdash_L \Box(\Box(\Box A \to A) \to \Box A) \to (\Box(\Box A \to A) \to \Box A)$ ……④　ところで，④は $\Box B \to B$ という形をしているから $\vdash_L B$，すなわち，$\vdash_L \Box(\Box A \to A) \to \Box A$。

Q. E. D.

（未完）

註

1) 様相論理Gの研究，特にゲーデルの定理との関連を追究した研究としては，Boolos, G., *The Unprovability of Consistency*, Cambridge U. P. (1979) が全体を見渡すのに便利である。本論文も多くをこの書物に負っている。また，その後の研究書として，Smoryński, C., *Self-Reference and Modal Logic*, Springer (1985) がある。嘗て筆者は様相論理（の研究）を擁護する主旨のことを書いた（"「理論」と「論理」——「論理」の特徴づけについて——" 鳥取大学教養部紀要　第17巻 (1983) p.40)。そのときもブーロスの本を念頭に置いていたが，当時は具体的に検討する余裕がなかった。そこで本論文は「証明可能性」解釈の「成果」を通しての再度の様相論理擁護論の意図を合わせ持つものである。

2) クリプキの画期的とされる成果は以下の諸論文にある。Kripke, S. A., "A complete theorem of modal logic," *Journal of Symbolic Logic* 24 (1959), pp.1-14, "Semantical analysis of modal logic I. Normal modal propositional calculi," *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 9 (1963), pp.67-96, "Semantical analysis of modal logic II. Non-normal modal propositional calculi," in J. W. Addison, L. Henkin, and A. Tarski(eds.), *The Theory of Models*, Amsterdam, (1965), "Semantical considerations on modal logic," *Acta Philosophica Fennica* 16 (1963), pp.83-94, "The undecidability of monadic modal quantification theory,"

Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 8 (1962), pp.113-16 。

3) ゲーデルのオリジナルの論文は，Kurt Gödel, “Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter System I” であるが，英語の対訳付きで著作集第一巻：Feferman et al (eds.), *Kurt Gödel Collected Works* vol.1, Oxford U. P. (1986) に収録されている。

4) Henkin, L., “A problem concerning provability”, *Journal of Symbolic Logic* 17 (1952), p.160 。

5) Löb, M. H., “Solution of a problem of Leon Henkin”, *Journal of Symbolic Logic* 20 (1955), pp.115-18 。

6) Bernardi, C., “The fixed-point theorem for diagonalizable algebras,” *Studia Logica* 34 (1975) pp.239-51 。

7) Solovay, R., “Provability interpretations of modal logic”, *Israel Journal of Mathematics* 25 (1976), pp.287-304 。

8) 証明は，通常，中国剰余定理 (Chinese Remainder Therem) と呼ばれる，一次の連立合同式の解の存在を主張する初等数論の定理を使って行われる。前原昭二『数学基礎論入門』朝倉書店 (1977), pp.187-8 参照。

9) ゲーデルの原論文（上の註 3) 参照）で確認できる。詳しい説明は前原『前掲書』9 章にある。

10) この sub が原始帰納的であることの確認も，前原『前掲書』149 頁での Sb の構成を観察すれば行える。sub と Sb は形式的に完全に同じではないが，原理的には同じものである。