ラッセルのパラドクスとフレーゲの論理主義

田　畑　博　敏

(平成２年６月30日受理)

はじめに

フレーゲの,「言語の哲学」ではなく「数学の哲学」を考えるとき，ひとはある種の絶望感に襲われる。「数学の哲学」におけるフレーゲの仕事が,「今なお興味深いものではあるが，根本的な点で古めかしい」(ダメット[1]) だけであれば，まだしも救われる。しかし,「ラッセルのパラドクス」に代表される種々の論理的矛盾の発見によって,「算術は論理学に還元できる」という，フレーゲがその生涯を賭けて遂行しようとした「論理主義」のプログラムは破綻した，あるいはもっと悪いことに，そもそも「論理主義」は不可能である，という常識(?)すら存在するかに見える。しかし，果たしてその通りなのだろうか？「論理主義」は完全に死滅したのであろうか？この小論の目的は，実はそうではないということ,「論理主義」は復活しうる，少なくとも論理的に再構成しうるということを，N. コッキアレッラが最近提出した解釈[2]に拠って示すこと，である。以下，小論全体の概要を示す。まず，フレーゲの「論理主義」に決定的打撃を与えたパラドクスのラッセルによる発見の経緯を見て(§１)，フレーゲ自身のそれについてのインフォーマルな説明を聞く(§２)。ついで，フレーゲの体系に即して矛盾が導出されることを確認したのち(§３)，フレーゲの修正の試みにも拘わらず新たな矛盾が出現したという歴史的経過に触れる(§４)。そうして，新たな反省に基づく立直しを図り(§５),「論理主義」を論理的に再構成する(§６)。更に，この再構成された体系の（相対的な）無矛盾性を確かめて(§７)，ひとまず，結論と見通しに到る(§８)。

§1．パラドクスの発見

まず，フレーゲの『算術の基本法則』[3]の中に，論理的矛盾という形で発見されたパラドクスがいかなるものであったか，ということを確認することから始めることにする。十年余りに亘ってなされた文通の端緒をなすフレーゲ宛の手紙（1902年６月16日付）において，ラッセルはやや興奮した口調でそのパラドクスに触れている。

「wを，“それ自身に述語づけられない述語である”という述語だとします。wはwに述語づけられるでしょうか？［wがwに述語づけられるとしても，述語づけられないとしても，その］どちらからも，矛盾が生じます。したがって，wは述語ではない，と結論しなければなりません。同様に，一つの全体として見られたときの，それ自身の要素ではない諸クラスの，（一つの全体としての）クラスというものも，存在しません。以上のことから，一定の状況下では，確定した集合が一つの全体を形成しないことがある，と私は結論します。」[4)]

ここでは，二つの異なる形でパラドクスが述べられている。一つは，言わば大雑把な形での[5)]「述語づけ」の語法で述べられた矛盾であり，他方は，クラス（ないしは集合）に関する「メンバー性」の語法で述べられた矛盾である。

第一の定式化は大雑把なものではあっても，そのような把握の背景となる動機がきわめて異常なものであるとか，または文法的に破格な現象を扱うものだ，という訳ではもちろんない。たしかに，通常，われわれは言葉によって，言葉以外の「もの」や「こと」に言及する場合が多い。例えば，“このりんごはまだ酸っぱい”とか“こんど納入されたワープロは印字装置がよく故障する”等々，と。しかし場合によっては，言葉によって，対象としての言葉そのものについて，あるいは言葉のはたらきや性質について，語ることもある。例えば，“「静かだ」は形容詞ではなく形容動詞に分類される”とか，“ギリシア語のアオリストの用法はフランス語の単純過去のそれに似ている”等々，と。したがって，述語というものを，それ自身に述語づけられるか否かで分類することは，当然考えられる。述語がそれ自身に述語づけられるのは，述語の表現している性質が，対象としての述語そのものにあてはまるとき，かつそのときのみである。例えば，“日本語で表現できる”という述語は，れっきとした日本語で表現されているから，つまり，この述語が表現しようとする性質にそれ自身あてはまるから，それ自身に述語づけられる。また“無臭である”という述語も，対象としてのこの言葉・この述語そのものに匂いはないから，それ自身に述語づけられる。しかし，“lang”というドイツ語は，ドイツ語の単語としては“zusammentreffend”や“deutschamerikanisch”に比べると決して長くはないから，それ自身に述語づけられるとは言えないであろうし，“甘味のある”という述語も，（比喩的に使われないかぎり）それ自身に述語づけられはしない。こうして，あらゆる述語を，それ自身に述語づけられるものとそうでないものとに分類しようとすることは，さして不自然な企てではない。しかし，“それ自身に述語づけられない”という，述語分類のための言葉を新たな述語と認定し（この認定自体の妥当性はもちろん問題になりうるが今は問わない），この述語について，これがいずれの部類の述語に分類されるか，と不用意に問うた途端，背理に陥るのである。すなわち，“それ自身に述語づけられない”という述語がそれ自身に述語づけられるならば，この述語は自らが表現する性質（＝不可自己述語性）をそれ自身有しているから，その性質によってこの述語はそれ自身に述語づけられないことになる。逆に，述語“それ自身に述語づけられない”がそれ自身に述語づけられないならば，この

述語は自ら表現している性質を有することになるから，「述語づけ」の定義によって，この述語はそれ自身に述語づけられることになる。こうして，いずれに分類されてもその反対の類に戻されてしまう。これは背理である。

それに対して，第二の定式化では，クラスとその要素の関係，すなわち，「メンバー性（要素性）」の語法によって，矛盾の導出が語られる。“要素 a はクラス A のメンバーである”を“$a \in A$”と記すならば，今日の標準的な語法（第一階述語論理）では，以下のような手順で矛盾が導かれる。まず，つぎのような，内包の原理(Comprehension Principle)と呼ばれる法則が前提されている，と考えられる[6]：

（CP）　$\exists y \forall x\ (x \in y \rightleftarrows Fx)$ ……………………[1]

（x についての任意の述語“Fx”が与えられたとき，F であることが，それの要素たることの必要十分条件であるような，クラス y が存在する）。

“Fx”として特に，“$\sim(x \in x)$”（x はそれ自身に属さない，x はそれ自身の要素ではない）を取る。すると，[1]より

$$\exists y \forall x\ (x \in y \rightleftarrows \sim (x \in x)) \quad \cdots\cdots [2]$$

が直ちに導かれる。この存在命題[2]で存在が主張されているようなクラスを，“R”とする。そのとき，[2]より，

$$\forall x\ (x \in R \rightleftarrows \sim (x \in x)) \quad \cdots\cdots [3]$$

（すべてのものについて，R に属する（R の要素である）ことがそれ自身に属さない（それ自身の要素でない）ことに対して必要十分である）

となる。全称命題[3]が前提する任意の対象のうち，特に先ほどのクラス“R”を取る（いわゆる全称例化）と，[3]より，

$$R \in R \rightleftarrows \sim (R \in R) \quad \cdots\cdots [4]$$

が出て，これから命題論理（トートロジーの変形）[7]によって，

$$R \in R \& \sim (R \in R)$$

が導かれる。これは矛盾である。

§2．フレーゲ自身のインフォーマルな説明

それでは，フレーゲ自身は，ラッセルの発見したパラドクスをどのように理解し，説明したのであろうか？フレーゲにとって，「述語づけ」は「概念への対象の帰属(fallen unter)」という関係である。「ａはＦである（対象ａが性質Ｆをもつ）」(Fa)と語ることは，「概念への対象の帰属関係」を主張することである。しかも，フレーゲの場合，クラスは概念の外延として登場する。フレーゲは，『算術の基本法則』第二巻の「あとがき」[8]の冒頭で，パラドクスの出現の経緯を，まず日常の言葉使いによって，(整理すれば）つぎのように説明している。

人間のクラスについて，それが人間であると主張するひとは誰もいない。ここに，「それ自身に属さない（それ自身の要素ではない）クラス」の例がある。したがって，

「ξはそれ自身に属さない（それ自身の要素ではない）クラスである」

という概念があることになる。そして，この概念の外延は，

それ自身に属さない（それ自身の要素ではない）諸クラスのクラス

ということになる。これを，「Ｃ」とする。すなわち，

Ｃ＝それ自身に属さない諸クラスのクラス

とする。

さて，このとき，

$\boxed{\text{ＣはＣに属するか？}}$

という問題が起こる。この問題に取り組む際，確認しておくべき，概念と概念の外延としてのクラスとの間で成り立つ原則が，二つある。一つは，

(※)対象ａが概念Ｇに帰属する(fallen unter)とき，ａはその概念Ｇの外延$\dot{\varepsilon}G(\varepsilon)$であるところのクラスに属する

という原則であり，もう一つは，

(※※)対象ａがクラスに属するとき，ａは当のクラスがそれの外延$\dot{\varepsilon}G(\varepsilon)$となっているところの概念Ｇに帰属する

という原則である。[9]

さて，ＣはＣに属するか？

(i)　ＣがＣに属する

と仮定する。このとき，(※※)によって，Ｃは，クラスＣがそれの外延となっているところの概念，すなわち，「ξはそれ自身に属さないクラスである」という概念に帰属する。言い換えると，ＣはＣ

に属さない。以上により，

Cがcに属するならば，CはCに属さない

ということになる。

逆に，

(ii)　CがCに属さない

と仮定する。するとこのとき，Cはそれ自身に属さないクラスの一つである。言い換えると，Cは「ξはそれ自身に属さないクラスである」という概念に帰属する。それゆえ，(※)によって，Cは，この概念の外延であるクラス，つまり，それ自身に属さない諸クラスのクラス，すなわちCに属する。以上により，

CがCに属さないならば，CはCに属する

ということになる。

こうして，いずれにせよ，論理的矛盾（CはCに属しかつ属さない）に陥る。

§3．矛盾の形式的導出と原因の摘出

パラドクスについて日常語でインフォーマルな説明をした後に，フレーゲは，『算術の基本法則』の体系内部で矛盾が導かれることを，彼の概念記法(Begriffsschrift)によって示している。そしてその過程で，矛盾の導出に使われた諸原理の中で「怪しい」ものを検討し直すことによって，矛盾発生の原因を突きとめようとする。それは以下のようになされる（フレーゲ自身の記法や説明法を今日のものに一部変更する）[10]。

まず，“Δはそれ自身に属さないクラスである”は，

$$\exists G\,(\dot{\varepsilon} G(\varepsilon)=\Delta \,\&\, {\sim} G(\Delta))$$

と書ける。そこで，“それ自身に属さない諸クラスのクラス”を“C”と略記する：

$$C=\dot{\alpha}\,\exists G\,(\dot{\varepsilon} G(\varepsilon)=\alpha \,\&\, {\sim} G(\alpha))。 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (〒)$$

すると，この略記法(〒)によって，“Cはそれ自身に属さないクラスである”は，

$$\exists G\,(\dot{\varepsilon} G(\varepsilon)=C \,\&\, {\sim} G(C))$$

と表現される。(Vb)，すなわち$\dot{\varepsilon} F(\varepsilon)=\dot{\alpha} G(\alpha) \rightarrow (Fx \rightleftarrows Gx)$によって，

$$\dot{\varepsilon} F(\varepsilon)=\dot{\alpha}\,\exists G\,(\dot{\varepsilon} G(\varepsilon)=\alpha \,\&\, {\sim} G(\alpha))$$
$$\rightarrow (F(C) \rightleftarrows \exists G\,(\dot{\varepsilon} G(\varepsilon)=C \,\&\, {\sim} G(C)))。$$

これと，上の(〒)と，基本法則(Ⅲa)：$(a \rightleftarrows b) \to (f(b) \to f(a))$の事例：

$$(F(C) \rightleftarrows \exists G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = C \& \sim G(C))) \to (\exists G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = C \& \sim G(C)) \to F(C))$$

および命題論理によって，

$$\exists G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = C \& \sim G(C)) \to (\dot{\varepsilon}F(\varepsilon) = C \to F(C))。\cdots\cdots(\alpha)$$

(α)の“F”を全称化して，

$$\exists G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = C \& \sim G(C)) \to \forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = C \to G(C)),\ \cdots\cdots\cdots\cdots(\beta)$$

つまり，Cがそれ自身に属さないクラスであれば，Cはそれ自身に属するクラスである。

他方，基本法則(Ⅱb)：$\forall F(M\beta F(\beta)) \to M\beta G(\beta)$により，

$$\forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = C \to G(C)) \to (\dot{\varepsilon}F(\varepsilon) = C \to F(C))。\cdots(\gamma)$$

“$F(\xi)$”を“$\exists G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = \xi \& \sim G(\xi))$”とすると，$(\gamma)$から，

$$\forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = C \to G(C))$$
$$\to [\dot{\alpha}(\exists G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = \alpha \& \sim G(\alpha))) = C \to \exists G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = C \& \sim G(C))]\quad(\delta)$$

ここで上の略記法(〒)により，$\dot{\alpha}(\exists G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = \alpha \& \sim G(\alpha))) = C$は$C = C$であることに注意すると，$(\delta)$から，

$$\forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = C \to G(C)) \to \exists G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = C \& \sim G(C))\quad(\varepsilon)$$

が出る。つまり，Cがそれ自身に属するクラスならば，Cはそれ自身に属さないクラスである。この(ε)から，定理(Ig)：$(p \to \sim p) \to \sim p$によって，

$$\exists G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = C \& \sim G(C))。\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\zeta)$$

(ζ)と(β)から

$$\forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = C \to G(C))。\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\eta)$$

ところが，命題(ζ)と(η)は矛盾である。誤りは法則(Vb)にしかありえない。したがって，(Vb)は偽であるにちがいない。

こうして，フレーゲの探索によって捜査線上に浮かび上がってきた最有力の容疑者（矛盾を引き起こした原因）は，法則(Vb)，すなわち

$$(\mathrm{Vb}):\ \dot{\varepsilon}F(\varepsilon)=\dot{\alpha}G(\alpha)\rightarrow(Fx\rightleftarrows Gx)\cdots\cdots[6]$$

という原理であった。これは，まさに以前からその自明性についてフレーゲ自身が懸念を抱きながらも基本法則とせざるを得なかった[11]ところの法則(V)：

$$(\mathrm{V}):\ \dot{\varepsilon}F(\varepsilon)=\dot{\alpha}G(\alpha)\rightleftarrows\forall x\,(Fx\rightleftarrows Gx)\cdots\cdots[7]$$

の半分：$\dot{\varepsilon}F(\varepsilon)=\dot{\alpha}G(\alpha)\rightarrow\forall x\,(Fx\rightleftarrows Gx)$と同値である。実際，矛盾を引き起こした原因である法則(Vb)の否定形が，直接に他の諸原理から導けるのである。（上の導出が（Vb）の誤りであることの間接証明ならば，今度は同じことの直接証明が与えられることになる。）この直接的な(Vb)の否定の導出について，フレーゲはまずインフォーマルに説明した後，二通りの形式的な導出を実行してみせる。[12]以下に，そのインフォーマルな説明を聞こう（形式的導出の方は省略する）。

まず，値域(Wertverlauf)というもの——これの特殊例が概念の外延である——は，その存立に疑わしい点があるので，『算術の基本法則』I巻§25での一般的な第二階関数“$M_\beta\phi(\beta)$”の記法を使って，

$$\dot{\alpha}\exists G\,(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon)=\alpha\,\&\sim G(\alpha))，\text{すなわちCは，}$$
$$M_\beta\exists G\,(M_\beta G(\beta)=\beta\,\&\sim G(\beta))$$

で置き換える。基本法則(IIb)：$\forall G M_\beta G(\beta)\rightarrow M_\beta F(\beta)$で，第二階関数“$M_\beta\phi(\beta)$”として，“$M_\beta\phi(\beta)=a\rightarrow\phi(a)$”を取り，第一階関数“$F(\xi)$”として，“$\exists G\,(M_\beta G(\beta)=\xi\,\&\sim G(\xi))$”を取る。すると，（IIb）の事例としてつぎのことが成り立つ：

$$\forall G\,(M_\beta G(\beta)=a\rightarrow G(a))\rightarrow[M_\beta\exists G\,(M_\beta G(\beta)=\beta\,\&\sim G(\beta))=a$$
$$\rightarrow\exists G\,(M_\beta G(\beta)=a\,\&\sim G(a))]。$$

これは“$p\rightarrow(q\rightarrow\sim p)$”という形なので，対偶と巾等律より，つぎの“$p\rightarrow\sim q$”を得る：

$$\forall G\,(M_\beta G(\beta)=a\rightarrow G(a))\rightarrow$$
$$\sim[M_\beta\exists G\,(M_\beta G(\beta)=\beta\,\&\sim G(\beta))=a]。\cdots\cdots(\mu)$$

再び，対偶により

$$M_\beta\exists G\,(M_\beta G(\beta)=\beta\,\&\sim G(\beta))=a\rightarrow$$
$$\exists G\,(M_\beta G(\beta)=a\,\&\sim G(a))。\cdots\cdots(\nu)$$

簡単のために，“$\exists G(M\beta G(\beta)=\xi \,\&\sim G(\xi))$”の代わりに“$F(\xi)$”とおき，“a”の代わりに“$M\beta F(\beta)$”とおくと，($\nu$)は，$M\beta F(\beta)=M\beta F(\beta)\rightarrow F(M\beta F(\beta))$となっているから，先件が削除されて，結局($\nu$)より，

$$F(M\beta F(\beta))$$

を得る。すなわち，第一階関数F(x)がアーギュメントのときの，第二階関数$M\beta\phi(\beta)$の値$M\beta F(\beta)$が，もとの第一階関数に帰属する。

他方，すぐ上と同じ置き換えによって，(ν)から，

$$\exists G\,[M\beta G(\beta)=M\beta F(\beta)\,\&\sim G(M\beta F(\beta))]$$

を得る。すなわち，第二階関数$M\beta\phi(\beta)$のアーギュメントとなったとき，$F(\xi)$がそうなったときの値$M\beta G(\beta)$と同じ値$M\beta F(\beta)$を取る(i.e. $M\beta F(\beta)=M\beta G(\beta)$)が，しかし，この値$M\beta G(\beta)$つまり$M\beta F(\beta)$は，それ自身［$=G(\xi)$］には帰属しないところの概念$G(\xi)$が存在する。言い換えると，1アーギュメントの第一階関数をアーギュメントとして取るすべての第二階関数$M\beta\phi(\beta)$に対して，つぎのような二つの概念$F(\xi)$，$G(\xi)$が存在する：

$M\beta F(\beta)=M\beta G(\beta)$であるが，$F(M\beta F(\beta))$かつ$\sim G(M\beta F(\beta))$である，

つまり，$M\beta F(\beta)=M\beta G(\beta)\rightarrow[F(M\beta F(\beta)\rightleftarrows G(M\beta F(\beta))]$ではない！

ここに，法則(Vb)：$\dot{\varepsilon}F(\varepsilon)=\dot{\alpha}G(\alpha)\rightarrow(Fx\rightleftarrows Gx)$の反例が存在する。

こうして，フレーゲは，法則(Vb)の否定を他の法則から直接に導くことによって，矛盾発生の真の原因を，この法則(Vb)と断定するのである。

§4．修正と新しい矛盾

法則(Vb)の否定形に到る導出過程を観察することによって，フレーゲは，(Vb)の反例となる二つの概念――すなわち，それらの外延は同一であるが，その外延が一方の概念には帰属しても，他方の概念には帰属しないような二つの概念――に，「概念ϕの外延である」という（第二階の）概念が関与していることに気づく。これまで「外延」の同一性の基準は，[7]の法則(V)によって与えられていたが，(V)の半分である(Vb)（=[6]）が否定されるかぎり，いまや新しい基準が要求される。フレーゲは，それをつぎのものとする：

「一方の概念の外延が他方の概念の外延と同一であるのは，まさしくつぎの場合である，すなわち，第一の概念に帰属する対象が，その第一の概念自身の外延を除き，すべて第二の概念に帰

属し，また逆に，第二の概念に帰属する対象が，その第二の概念自身の外延を除き，すべて第一の概念に帰属する場合」。[13]

すると，法則(V)に取って代わるべきものは，

$$(V')：\dot{\varepsilon}F(\varepsilon)=\dot{\alpha}G(\alpha) \rightleftarrows \forall x\ [x \neq \dot{\varepsilon}F(\varepsilon)\ \&x \neq \dot{\alpha}G(\alpha) \rightarrow (Fx \rightleftarrows Gx)] \quad \cdots\cdots[8]$$

であり，矛盾の元凶と見られた(Vb)に取って代わるべきものは，

$$(V'b)：\dot{\varepsilon}F(\varepsilon)=\dot{\alpha}G(\alpha) \rightarrow [x \neq \dot{\varepsilon}F(\varepsilon) \rightarrow (Fx \rightleftarrows Gx)] \quad \cdots[9]$$

となる。このとき，確かに，以前のような形（§3参照）での矛盾は，防止することができる。(実際，こういう風になる。$F(\xi)$を，$\exists F(\dot{\varepsilon}F(\varepsilon)=\xi\&\sim F(\xi))$，つまり“$\xi$はそれ自身に帰属しない概念の外延”とし，$C=\dot{\alpha}\exists F(\dot{\varepsilon}F(\varepsilon)=\alpha\&\sim F(\alpha))$とすると，(V'b)より，$C=\dot{\alpha}G(\alpha) \rightarrow [C\neq C\rightarrow\ \exists F(\dot{\varepsilon}F(\varepsilon)=C\&\sim F(C))\rightleftarrows G(C)\}]$。ここで，$C\neq C$は常に偽であるから，この式は常に真である。すなわち，そこから矛盾が出ることは阻止された。)

フレーゲはこの修正によって，『算術の基本法則』の体系が維持できると考えたようである。ところが，後になって，フレーゲの修正案(V'b)に対応する法則を含む体系から矛盾が導けることが見出された。[14]クワインは，(V'b)のクワイン版である，

$$\forall y\ [y\neq\hat{x}F(x)\rightarrow(y\in\hat{x}F(x)\rightleftarrows F(y))] \cdots\cdots[10]$$

(概念Fに対応するクラス抽象体$\hat{x}F(x)$以外のすべてのものは，
このクラス抽象体に属するときかつそのときのみ，Fである)

という仮定と，少なくとも二つの対象が存在することを主張する

$$\exists x\exists y\ (x\neq y) \cdots\cdots[11]$$

という仮定，および基本的と思われる他のいくつかの定義から，矛盾を導いて見せた。[15]

§5．論理主義は死んだ？　——反省と展望——

それでは，新たな矛盾の出現によってフレーゲの体系は崩壊し，彼の「論理主義」は死んだことになるのであろうか？以下で私は，N．コッキアレッラに拠って，そうではないこと，論理主義の再構成が可能であることを示したい。

その前にまず，フレーゲの論理主義がいかなるものであったか，という反省から始めよう。フレーゲの論理主義は，

(1)算術（実質上，幾何学を除く全古典数学）の諸概念は，純粋に論理的な概念によって定義できる，

(2)算術の諸法則は，純粋に論理的な演繹によって，基本法則から導出できる，

の二点に要約される。ここで注意すべきことは，算術がクラスに関する「メンバー・シップの理論」に還元されるのではなく，「述語づけの理論」に還元されるということである。つまり，フレーゲの言う「論理」はクラスの理論ではなく，第二階述語論理である，ということである。

さて，算術はさまざまの“もの”を取り扱う。フレーゲは，不飽和性をその特徴とする「関数」と，飽和性をその特徴とする「対象」という，「関数　対　対象」の基本的区別を設定し，更に関数の間にレベルの差を設けた。しかし，対象の間にはレベルの差は設けていない。そして，算術を実際に展開するに際しては，高階の関数の直接的な扱いを避けて，関数と対象の基本的区別に帰着させようとする。例えば，(1)第二階の概念に第一階の概念を対応させ，(2)第一階の概念に値域(Wertverlauf)と呼ばれる特殊な対象（関数としての値域が外延である）を対応させる。(例：「４の平方根が存在する」に対して，「概念“４の平方根”は充たされる」が対応する。）すなわち，フレーゲによれば，「第二階の関数は一定の仕方で第一階の関数によって表現され，そしてその第二階関数のアーギュメントとして現れる第一階関数は，それの値域によって表現される（『算術の基本法則』§25)。すなわち，

$$\forall Q \exists F \forall G \ [Q(G) \rightleftarrows F(\dot{\varepsilon} G(\varepsilon))] \quad \cdots\cdots [12]$$

である。このように，概念に対して二重の相関物——第二階の概念に対応する第一階の概念，および第一階の概念に対応する値域という対象——をフレーゲは設定した。このことの集約的宣言が，法則（V）：

$$\dot{\varepsilon} F(\varepsilon) = \dot{\alpha} F(\alpha) \rightleftarrows \forall x\,(Fx \rightleftarrows Gx) \quad \cdots\cdots [7]$$

である。つまりここでは，右辺での第一階概念間の相互包含という第二階概念が，左辺で，それら第一階概念に対応する対象としてのこれらの概念の外延（＝値域）の同一性という，第一階の概念で置き換え可能である，と主張されている。しかし，先に見たように，この法則こそ，パラドクスの元凶であった。

パラドクスを避けつつ，以上のようなフレーゲの論理主義の要求を満たす体系には，どのようなものがあるであろうか？フレーゲの『算術の基本法則』の体系には，命題論理の外，つぎの四つの基本法則がある[16)]：

(Ⅱa)：$\forall x Fx \rightarrow Fa$　　(Ⅱb)：$\forall F\,(M\beta F\beta) \rightarrow M\beta G\beta$

(Ⅲ)：$G\,(a=b) \rightarrow G\,(\forall F\,(Fb \rightarrow Fa))$

(Ⅴ)：$\dot{\varepsilon} F(\varepsilon) = \dot{\alpha} G(\alpha) \rightleftarrows \forall x\,(Fx \rightleftarrows Gx)$

(Ⅵ)：$\iota\varepsilon\,(a=\varepsilon)$。

パラドクスが出ない程度にはこの体系より弱く，しかも，それ以外の点では，フレーゲの論理主義を実行しうるに十分なほど強い体系があるだろうか？節を改めてそれを取り扱うことにする。

§6．論理主義の再編成に向けて

さて前節では，フレーゲのいう「論理」の体系として，彼自身の第二階述語論理の体系が提示された。このフレーゲの体系とほぼ同程度の強さを持ち，しかも，①（フレーゲの体系での(Vb)に対応して）パラドクス発生の原因となる内包の原理(CP)に考察の焦点を絞ることができ，②明示的に(CP)を原理としている他の体系との比較がしやすい，という点で優れている第二階述語論理の体系として，以下の体系を用意する。[17)]

命題論理（トートロジー）

(A1) $\forall u\ (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall u \phi \rightarrow \forall u \psi)$ ……………………u は個体または述語変項

(A2) $\phi \rightarrow \forall u \phi$ ……………………u は ϕ の中に自由には現れない個体または述語変項

(A3) $\exists x\ (a=x)$ ……………………a は単称名でここに x は自由には現れない

(LL：ライプニッツの法則) $a=b \rightarrow (\phi \rightleftarrows \psi)$

……………a，b は単称名で，ψ は a のいくつかを b で置き換えて式 ϕ から得られる式

(CP：内包の原理) $\exists F^n \forall x_1 \cdots \forall x_n\ [F(x_1, \cdots, x_n) \rightleftarrows \phi]$

…………F^n は ϕ に自由には現れず，$x_1, \cdots, x_n$ は ϕ に自由に現れる互いに異なる個体変項

推論規則：モドゥス・ポネンス(MP)　$\vdash \alpha,\ \vdash \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \vdash \beta$

普遍汎化(UG)　$\vdash \phi \Rightarrow \vdash \forall u \phi$

ここで，概念（一般に関数）の相関物を表現する工夫，すなわち，フレーゲの「概念の外延」：$\dot{\varepsilon}F(\varepsilon)$ に相当する工夫として，λ 抽象体(λ－abstract)を導入する。(むろん，λ 記号はフレーゲのものではないが，複合述語の表現として気息記号がついた $\dot{\varepsilon}$ ($\varepsilon^2=1$)のような記法をフレーゲは用いている(*PMC* p.161 ff.)。フレーゲにとって，この記法は「名詞化された述語」を意味しない。その点，λ 記号を導入することはフレーゲから離れるように思われるが，これはフレーゲの $\dot{\varepsilon}G(\varepsilon)$ と $\dot{\varepsilon}G(\varepsilon)$ の両方の役割を兼ね備えることができると同時に，法則(V)をも救えるのである。§7参照。）この λ 抽象体は，つぎの λ 変換原理(λ－Conversion Principle)に従う。[18)]

$$(\lambda\text{-Conv})\qquad [\lambda x_1 \cdots x_n \phi]\ (a_1, \cdots, a_n) \rightleftarrows \phi\,(a_1/x_1, \cdots, a_n/x_n)$$

これを一般化すると，

$$(\forall/\lambda\text{-Conv})\qquad \forall x_1 \cdots \forall x_n([\lambda x_1 \cdots x_n \phi]\ (x_1, \cdots, x_n) \rightleftarrows \phi)$$

となる。また，λ 抽象体が述語変（定）項であることを主張する，つぎの法則を定める。

(Id：同一性)　$[\lambda x_1 \cdots x_n P(x_1, \cdots, x_n)] = P$ ……………ここで P は n 項述語変（定）項

そして，λ 抽象体を含む第二階述語論理のための論理文法を明確に定める。それは以下のものである。

タイプ0の表現は単称名を，タイプ1の表現は命題形式または整成式を，$n \geqq 1$ なるタイプ $n+1$ の表現は n 項述語を表すとして，タイプ n の有意味表現 ME_n をつぎのように帰納的に定義する：

(1)任意の個体変（定）項 a につき $a \in ME_0$，任意の n 項述語変（定）項 F^n につき　$F^n \in ME_{n+1}$ および $F^n \in ME_0$;

(2) a，$b \in ME_0$ ならば，$(a = b) \in ME_1$;

(3) $\pi \in ME_{n+1}$ かつ $a_1, \cdots, a_n \in ME_0$ ならば，$\pi(a_1, \cdots, a_n) \in ME_1$;

(4) $\phi \in ME_1$ かつ $x_1, \cdots, x_n$ が相異なる個体変項ならば，
$[\lambda x_1 \cdots x_n \phi] \in ME_{n+1}$;

(5) $\phi \in ME_1$ ならば $\sim \phi \in ME_1$;

(6) ϕ，$\psi \in ME_1$ ならば，$(\phi \rightarrow \psi) \in ME_1$;

(7) $\phi \in ME_1$ かつ a が個体または述語変項ならば，$\forall a \phi \in ME_1$;

(8) $\phi \in ME_1$ ならば，$[\lambda \phi] \in ME_0$;

(9) $n > 1$ ならば，$ME_n \subseteqq ME_0$。

さて，既に述べたように，この体系においてパラドクス発生に直接関わるのは内包の原理(CP)，すなわち $\exists F^n \forall x_1 \cdots \forall x_n [F(x_1, \cdots, x_n) \rightleftarrows \phi]$ である。なぜなら，この原理こそ，任意の条件 ϕ によって創られる新しい述語の存在を主張しているからである。そこで，(CP)を含意し[19]，しかも(CP)より単純で λ 抽象体を含む式：

$$(CP\lambda) \quad \exists F^n([\lambda x_1 \cdots x_n \phi] = F)$$

に考察を集中する。(これは，フレーゲが，$C = \dot{\alpha} \exists G(\dot{\varepsilon} G(\varepsilon) = \alpha \,\&\, \sim G(\alpha))$ とおいたことに相当する――§3の(〒)参照。) こうすることによって，パラドクス発生の原因を，λ 抽象体に関する内包の原理，すなわち(CPλ)に，集中的に求めることが可能となる。ところで，パラドクスを防ぐには，関数，ひいては概念間にあるとフレーゲが見なしている階層構造を反映するような，表現間の構文論的な次元差（層別化stratification）を，特に(CPλ)に現れる λ 抽象体に対して，設定せねばならない。そこで，大雑把に言って，つぎの三段階の層別化[20]を，一般に λ 抽象体，およびその中の述語（λ 抽象体も含む）と項に対して，用意する：

(i)同次層別化：項どうしはすべて同次元，述語と λ 抽象体は項より丁度一次元高い；

(ii)単純層別化：述語“＝”の両辺に現れる項どうしは同次元，その他の項どうしは同または異次元，述語と λ 抽象体はそれらに伴う項の最大次元より丁度一次元高い；

(iii)累積層別化：項どうしは同または異次元，述語とλ抽象体はそれらに伴う項の最大次元より一次元以上高い。

(i)の層別化が最も厳しく，(iii)が最も緩やかである。すると，例えば，層別化なしではパラドクスを生み出す，(CPλ)の事例である式：

$$\exists F\ ([\lambda x \exists G\ (x = G \& \sim G\ (x))] = F) \cdots\cdots [13]$$

は，累積的に層別化(iii)されてはいるが，単純にも(ii)，同次的にも(i)層別化されていない。また，パラドクスを誘発すべく，更に巧妙に仕組まれた(CPλ)の事例：

$$\exists F\ (\lambda z[\lambda xy \exists G\ (x = G \& \sim G\ (y))]\ (z,\ z)] = F) \cdots\cdots [14]$$

も，累積的(iii)かつ単純に(ii)層別化されてはいるが，同次的には(i)層別化されていない。そして確かに，これら[13]，[14]からはパラドクスが導けるのである。[21] したがって，パラドクスを防ぐためには，(CPλ)は――ゆえに(CP)は――，同次的に層別化されていなければならない。そして，この「同次層別化」の条件は，パラドクス防止を目指すかぎり，λ抽象体にのみ課せられるだけで十分である。

すると，フレーゲの「論理主義」再構成のための基礎となるわれわれの体系は，名詞化された述語を含み，同次的に層別化された(homogeneously stratified) λ抽象体を持つ第二階述語論理ということになる。これを，(λHST*)と略記する（"*"は式中に現れるλ抽象体が同次層別化されていることを示す)。すなわち，

$$(\lambda \mathrm{HST}^*) = (\text{命題論理}^*) + (\mathrm{A1}^*) + (\mathrm{A2}^*) + (\mathrm{A3}^*) + (\mathrm{LL}^*)$$
$$+ (\lambda - \mathrm{Conv}^*) + (\mathrm{CP}\lambda^*) + (\mathrm{Id}^*) + \mathrm{MP} + \mathrm{UG}$$

さて，この体系(λHST*)の無矛盾性については，以下のことがわかっている。単項述語づけをメンバーシップと見なすことより，(λHST*)は，クワインの集合論NFを少し修正した，R．ジェンセン(Ronald Jensen)の体系NFU (New Foundation with Urelements)[22] に相対的に無矛盾である。ところで，ジェンセンはNFUが弱ツェルメロ集合論[23] に相対的に無矛盾であること，すなわち，

(%)　弱ツェルメロ集合論が無矛盾ならば，NFUも無矛盾である

ことを示した。[24] したがって，この二つのことから，

(#)　弱ツェルメロ集合論が無矛盾ならば，(λHST*)も無矛盾である

ということが帰結する。

§7．相対無矛盾性

ところで，(LL*)と(λ－Conv*)とから，一般化されたフレーゲの基本法則：

$$(\mathrm{Vb}^*)\quad [\lambda x_1\cdots x_n \phi]=[\lambda x_1\cdots x_n \psi]\rightarrow\forall x_1\cdots\forall x_n(\phi\rightleftarrows\psi)\cdots\cdots\cdots[15]$$

が，(λHST*)において導ける。[25] そして，フレーゲの診断によれば，これがパラドクス発生の張本人であった。しかし，(#)によって，もし弱ツェルメロ集合論が無矛盾ならば，(Vb*)から矛盾は出ないことになる。つまり，われわれの体（λHST*）では，法則（Vb*）は生き残るのである。しかし，（Vb*）の逆命題である（Va*）：

$$\forall x_1\cdots\forall x_n\ (\phi\rightleftarrows\psi)\ \rightarrow\ [\lambda x_1\cdots x_n\phi]\ =\ [\lambda x_1\cdots x_n\psi]\ \cdots\cdots\cdots[16]$$

は――これは外延性の原理（Principle of Extensionality : Ext*）であるが――，（λHST*）からは導けない。しかし，フレーゲにとって，この外延性の原理は論理の基本法則の一つであった。[26] すなわち，この原理はできるかぎり確保しておくべき法則の一つだとフレーゲは確信していたのであった。ゆえに，この原理も再構成された「論理主義」の体系に加えることにすると，結局のところ，われわれはつぎの結論に到達する。

フレーゲの「論理主義」の再構成＝（λHST*）＋（Ext*）

さてこのとき，（λHST*）＋（Ext*）の無矛盾性，および，どの程度この体系に算術を還元できるかということは，クワインの集合論ＮＦの，ジェンセンによるヴァリエーションである，ＮＦＵとの関係に掛かってくる。これについては，つぎのことがわかっている。まず，

$$x\in y\rightleftarrows \mathrm{Df.}\ \exists F\ \ (y=F\&F\ (x))$$

と定義することにより，ジェンセンの集合論NFUは，（λHST*）＋（Ext*）に含まれ，逆に，単項述語づけをNFUのメンバーシップと解釈することにより，単項（λHST*）[27]＋（Ext*）はNFUに含まれる。したがって，単項（λHST*）＋（Ext*）とNUFは同等である。しかるに単項（λHST*）＋（Ext*）と全（λHST*）＋（Ext*）は共無矛盾，すなわち，一方が無矛盾のときかつそのときのみ他方も無矛盾である。このことと，§6の最後のパラグラフでのジェンセンの結果(%)とから，つぎのことが導かれる。

(＃＃)　(λHST*) ＋ (Ext*) が無矛盾 ⇔ NFUが無矛盾
弱ツェルメロ集合論が無矛盾 ⇒ (λHST*) ＋ (Ext*) が無矛盾

§8．結語と前途瞥見

こうして，フレーゲの「論理主義」の体系を（λHST*）＋（Ext*）と定めることによって，法則(Vb)が救われ，また，NFUに相対的に（したがって弱ツェルメロ集合論に相対的に）無矛盾性が確保できた。算術の論理への還元も，NFUがそれを実行できる（と想定される）のと，少なくとも同程度には，実行可能である。[28] これで，フレーゲの「論理主義」はひとまず再構成できたと言える。

ところで，以上見てきたように，フレーゲは第二階述語論理を「論理」と考えているが，しかし，これが「論理」と呼ぶに最もふさわしい体系であるのかどうか，これはまた別の問題である。特に，現在「論理」という語で普通に理解されている第一階の述語論理との，表現力の比較——「完全性」その他の,体系のもつ構文論的・意味論的諸性質がどれほど成り立つのかという問題を含めて——は，「論理主義」を実行する観点から見ても，重要な論点となろう。しかし，それを検討することは，今後に残された筆者の課題としたい。

註

1) Michael Dummett, "Frege's Philosophy", in *Truth and other Enigmas*, Harvard U. P. (1978) p.88。[邦訳：マイケル・ダメット『真理という謎』藤田晋吾訳，勁草書房（1986)，45頁。]

2) Nino B. Cocchiarella, "Frege, Russell and Logicism : A logical Reconstruction", in L. Haaparanta & J. Hintikka (eds.), *Frege Synthesized*, D. Reidel (1986), pp. 197–252。

3) Gottlob Frege, *Grundgesetze der Arithmetik* (1893–1903)，以下*GGA*と略記する。また，頁づけはOlmsからの復刻版(1966)による。[英訳（抄訳）：*The Basic Laws of Arithmetic*, transl. by M. Furth, Uni. of California Press (1964), 以下*BLA*と略記。]

4) G. Frege, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Felix Meiner (1976), 以下*WB*と略記する。[英訳：*Philosophical and Mathematical Correspondence*, Basil Blackwell (1980)，以下*PMC*と略記。]

5) 実際，この手紙に対するフレーゲのラッセル宛返信(1902年6月22日付)において，フレーゲはこの定式化を"不正確な"ものと評している。*WB* ss.212-215, *PMC* pp.131-133。

6) フレーゲ自身もこの内包の原理を前提していた。というのは，この原理の第二階述語論理——後述のようにフレーゲの体系はこれである（§5参照）——での対応物である，

$$\exists F^n \forall x_1 \cdots \forall x_n \ (F\ (x_1,\ \cdots,\ x_n) \rightleftarrows \phi) \qquad (\phi \text{にFは自由には現れない})$$

は，*GGA*でのフレーゲの基本法則（Ⅱb）：$\forall F\ (M\beta F\ (\beta)) \rightarrow M\beta G\ (\beta)$ のバリエーションである，

$$\forall F^n \psi \to \psi \ [\phi / F(x_1, \cdots, x_n)]$$

から，ψとして　$\sim \forall x_1 \cdots \forall x_n [F(x_1, \cdots, x_n) \rightleftarrows \phi]$ を取ることによって，

$$\dfrac{\forall x_1 \cdots \forall x_n [\phi \rightleftarrows \phi] \quad \dfrac{\forall F^n \sim \forall x_1 \cdots \forall x_n [F(x_1, \cdots, x_n) \rightleftarrows \phi] \to \sim \forall x_1 \cdots \forall x_n [\phi \rightleftarrows \phi]}{\forall x_1 \cdots \forall x_n [\phi \rightleftarrows \phi] \to \exists F^n \forall x_1 \cdots \forall x_n [F(x_1, \cdots, x_n) \rightleftarrows \phi]}}{\exists F^n \forall x_1 \cdots \forall x_n [F(x_1, \cdots, x_n) \rightleftarrows \phi]}$$

のように導けるからである。

7)　念のために変形過程を書くと，

$$(p \rightleftarrows \sim p) \Rightarrow (p \to \sim p) \ \& \ (\sim p \to p) \rightleftarrows (\sim p \vee \sim p) \ \& \ (\sim\sim p \vee p) \rightleftarrows \sim p \ \& \ (p \vee p) \rightleftarrows p \ \& \sim p$$

8)　*GGA* ss.253-265, *BLA* pp.127-143。

9)　原則(※)および(※※)を合わせると，“F (a)⇄a∈$\acute{x}$F (x)” となるが，これは*GGA*の定理である。これの導出には，後述する問題の法則(V)が使われる。*GGA* §54, s.73, §55, s.75, また*BLA* pp.123-126参照。

10)　*GGA* s.256 u.f., *BLA* p.130 ff.。

11)　*GGA* s.vii, *BLA* pp.3−4参照。

12)　*GGA* s.257 u.f., *BLA* p.133 ff.。

13)　*GGA* s.262 u.f., *BLA* p.139 ff.参照。

14)クワインによれば，フレーゲの修正案から矛盾が出ることを1938年にレスニェウスキーが示したことをソボチンスキーが報告している。W. V. Quine, “On Frege's Way Out”, *Mind* LXIV (1955), pp.145−159, in Klemke (ed.), *Essays on Frege*, Univ. of Illinois Press (1968), pp.485−501, の註14参照。

15)　Quine, op. cit. pp.492−493。矛盾導出の過程は以下のようになる。まず，フレーゲの修正案のクワイン版として，つぎのものを置く：

$\forall y [y \neq \hat{x}F(x) \to (y \in \hat{x}F(x) \rightleftarrows F(y))]$ ……(1)

そして，少なくとも二つの対象を仮定する。すなわち，

$\exists x \exists y (x \neq y)$。……(2)

さらに，“V”, “Λ”, “ι”, “W” という四つのクラス抽象体を

$V = \hat{x}(x = x)$ ……(全体クラス)

$\Lambda = \hat{x}(x \neq x)$ ……(空クラス)

$\iota z = \hat{x}(x = z)$ ……(zから成る単元クラス)

$W = \hat{x} \forall z (x \in z \& z \in x \to x = z)$ ……(包含・被包含同一)

と定義し，この四つに対応する(1)の事例，またはその全称化を用意する。まず，ιzとWから

$\forall z \forall y [y \neq \iota z \to (y \in \iota z \rightleftarrows y = z)]$ ……(3)

$\forall y [y \neq W \to (y \in W \rightleftarrows \forall z (y \in z \& z \in y \to y = z))]$ ……(4)

となし，つぎにVとΛについては以下が直ちに対応する［∵ $(y \in V \rightleftarrows y = y) \rightleftarrows y \in V$, および$y \neq \Lambda \to (y \in \Lambda \rightleftarrows y \neq y)$と$y = y$より$y \neq \Lambda \to \sim (y \in \Lambda)$，これと対偶から］：

$\forall y (y \neq V \to y \in V)$ ……(5)

$\forall y (y \in \Lambda \to y = \Lambda)$。……(6)

(3)から，全称例化で$\forall y [y \neq \iota y \to (y \in \iota y \rightleftarrows y = y)]$ と$y = y$より，

$\forall y (y \neq \iota y \to y \in \iota y)$。……(7)

また，$x \in y \& y \in \iota z \& y \neq \iota z$とおくと，(3)より$y \in \iota z \rightleftarrows y = z$だから，

$\forall x \forall z [\exists y (x \in y \& y \in \iota z \& y \neq \iota z) \to x \in z \& z \neq \iota z]$ ……(8)

ここで，$\iota y=\Lambda$とおくと，(7)より$y\neq\Lambda\to y\in\Lambda$。ところで(6)から$y\in\Lambda\to y=\Lambda$。
それゆえ，

$\forall y\ (\iota y=\Lambda\to y=\Lambda)$。 ……(9)

もし$\iota z=z$とおくと，(3)より$y\neq z\to(y\in z\rightleftarrows y=z)$だから，$y\neq z\to\sim(y\in z)$。対偶により，$y\in z\to y=z$。ゆえに，

$\forall z\forall y\ (z=\iota z\,\&\,y\in z\to y=z)$ ……(10)

もし$V=\Lambda$とすると，(5)の対偶より$\sim(y\in\Lambda)\to y=\Lambda$であるが，(6)より$y\in\Lambda\to y=\Lambda$だからディレンマにより$\forall y\ (y=\Lambda)$，すなわちすべての対象が唯一のクラス$\Lambda$であることになって(2)に矛盾する。ゆえに背理法により$V\neq\Lambda$。
このことから(5)と(9)により，

$\Lambda\in V,\ \iota V\neq\Lambda,\ \iota\iota V\neq\Lambda$ ……(11)

(3)でyをΛ，zをιVとすると$\Lambda\neq\iota\iota V\to(\Lambda\in\iota\iota V\rightleftarrows\Lambda=\iota V)$，これと(11)の右の二つから，$\sim(\Lambda\in\iota\iota V)$。しかし(11)の左端より，$\Lambda\in V$。$\iota\iota V=V$とすれば矛盾。ゆえに，背理法によって，

$\iota\iota V\neq V$ ……(12)

(10)でzをιyとすると，$\iota y=\iota\iota y\,\&\,y\in\iota y\to y=\iota y$。ゆえに，$\iota y=\iota\iota y$を仮定すると$y\in\iota y\to y=\iota y$となるが，他方(7)の対偶から$\sim(y\in\iota y)\to y=\iota y$。∴ディレンマより，$\iota y=y$。まとめて，

$\forall y\ (\iota y=\iota\iota y\to y=\iota y=\iota\iota y)$ ……(13)

(12)と(13)から背理法により，$\iota V\neq\iota\iota V$を得る。そしてこれから再び(13)と背理法によって

$\iota\iota\iota V\neq\iota\iota V$ ……(14)

ここで，$\iota\iota V\neq W$かつ$\sim(\iota\iota V\in W)$と仮定する。すると，(4)でyを$\iota\iota V$とおくことで

$\exists z\ (\iota\iota V\in z\,\&\,z\in\iota\iota V\,\&\,\iota\iota V\neq z)$。

これより，(8)でxを$\iota\iota V$，yをz，zをιVに取ると，$\iota\iota V\in\iota V$かつ$\iota\iota V\neq\iota V$。これと，(3)でyを$\iota\iota V$，zをVに取ることから，$\iota\iota V=V$を得る。しかし，これは(12)に矛盾。それゆえ，背理法により，

$\iota\iota V=W\vee\iota\iota V\in W$ ……(15)

ここで，$\iota W=W$と仮定する。すると(10)でyを$\iota\iota V$，zをWに取って，$\iota\iota V\in W\to\iota\iota V=W$，これと(15)からディレンマにより，$\iota\iota V=W$。しかしこのとき，(14)によって$\iota W\neq W$。以上より，$\iota W=W\to\iota W\neq W$。ゆえに，$(p\to\sim p)\to\sim p$により

$\iota W\neq W$ ……(16)

これと，(7)でyをWに取ると$W\neq\iota W\to W\in\iota W$を得ることから，

$W\in\iota W$ ……(17)

(16)と，(4)でyをιWと取ることとから，

$\iota W\in W\rightleftarrows\forall z\ (\iota W\in z\,\&\,z\in\iota W\to\iota W=z)$ ……(18)

(18)でzをWと取り縮小すると，$\iota W\in W\to(\iota W\in W\,\&\,W\in\iota W\to\iota W=W)$。それゆえ，もし$\iota W\in W$と仮定すると，この式の後件の対偶より$\iota W\neq W\to\sim(\iota W\in W\,\&\,W\in\iota W)$となるが，(16)，(17)によって，

$\sim(\iota W\in W)$。 ……(19)

これと，(18)によって，(18)の右辺の否定，$\exists z\ (\iota W\in z\,\&\,z\in\iota W\,\&\,\iota W\neq z)$が出る。これと，(8)で$x$を$\iota W$，$y$を$z$，$z$を$W$と取ることとから，$\iota W\in W$。これは(19)と矛盾する。

16) *GGA* ss. 60–61, *BLA* p.105の§47を参照。

17) この体系は最初タルスキーによって考案され，$\forall u\phi\to\phi$（普遍例化）も公理の一つであったが，この式が他の公理から導けることがカリシュとモンタギューによって示されている。D. Kalish and R. Montague, "On Tarski's Formarization of Predicate Logic with Idetity", *Archi. f. Math. Logik u. Grundl.* 7 (1965) pp.61–79 参照。

18) λ変換についての一般的記述については，Alonzo Church, *The Calculi of Lambda Conversion*, Princeton U. P. (1941)参照。

19) (LL)から，$[\lambda x_1 \cdots x_n \phi] = F \rightarrow \forall x_1 \cdots \forall x_n ([\lambda x_1 \cdots x_n \phi](x_1, \cdots, x_n) \rightleftarrows F(x_1, \cdots, x_n))$。$(\forall/\lambda-\mathrm{Conv})$ より，$\forall x_1 \cdots \forall x_n ([\lambda x_1 \cdots x_n \phi](x_1, \cdots, x_n) \rightleftarrows \phi)$。従って，$[\lambda x_1 \cdots x_n \phi] = F \rightarrow \forall x_1 \cdots \forall x_n (F(x_1, \cdots, x_n) \rightleftarrows \phi)$。存在例化により，$[\lambda x_1 \cdots x_n \phi] = F \rightarrow \exists F^n \forall x_1 \cdots \forall x_n (F(x_1, \cdots, x_n) \rightleftarrows \phi)$。これに普遍汎化を施し述語論理の法則により，$\exists F^n ([\lambda x_1 \cdots x_n \phi] = F) \rightarrow \exists F^n \forall x_1 \cdots \forall x_n (F(x_1, \cdots, x_n) \rightleftarrows \phi)$。これから，本文の次行で導入される (CPλ)，すなわち$\exists F^n ([\lambda x_1 \cdots x_n \phi] = F)$により，(CP)，すなわち$\exists F^n (F(x_1, \cdots, x_n) \rightleftarrows \phi)$が出る。

20) 厳密には層別化の定義はこうなる。式またはλ抽象体ϕが同次的に層別化されている (homogeneously stratified) のはϕ（ϕがλ抽象体ならばϕ自身も含めて）中に含まれている項，述語，λ抽象体の集合に対する，以下のような自然数の付値 t が存在するとき，かつそのときのみである：

(1)すべての項 a，b に対して，もし $(a = b)$ がϕ中に現れていれば，$t(a) = t(b)$。すなわち，等号の両辺に現れる項どうしはすべて同次元である。

(2)$n \geqq 1$ なるすべての n について，すべての n 項述語表現πとすべての項$a_1, \cdots, a_n$に対して，もし$\pi(a_1, \cdots, a_n)$がϕに現れている整成式ならば，(イ) $t(a_j) = t(a_k)$，$1 \leqq j, k \leqq n$，かつ (ロ) $t(\pi) = t(a_1) + 1$。すなわち，一般の述語表現に伴う項どうしはすべて同次元であり（=(イ)），かつ，述語表現そのものの次元は項の次元より丁度一次元高い（=(ロ)）。

(3)すべての$m \in \omega$につき，すべての個体変項$x_1, \cdots, x_m$，およびすべての整成式ψに対して，もし$[\lambda x_1 \cdots x_m \psi]$が$\phi$中に現れていれば，(ハ) $t(x_j) = t(x_k)$，$1 \leqq j, k \leqq m$ かつ，(ニ)$t([\lambda x_1 \cdots x_m \psi]) = t(x_1) + 1$。すなわち，λ抽象体内部に現れる述語表現に伴う項どうしもすべて同次元であり（=(ハ)），λ抽象体全体の次元は，それら内部の項の次元より丁度一次元高い（=(ニ)）。

もし，以上の規定から(イ)と(ハ)を落とし，(ロ)と(ニ)をより弱い要求：$t(\pi) = 1 + \max[t(a_1), \cdots, t(a_m)]$ および $t([\lambda x_1 \cdots x_m \psi]) = 1 + \max[t(x_1), \cdots, t(x_m)]$ で置き換えるとき，すなわち，述語“=”の両辺に現れる項どうしのみが同次元で，一般の述語表現およびλ抽象体に伴う項どうしは同次元でも異次元でもよく，また述語表現とλ抽象体の次元はそれらに伴ういくつかの項の持つ最大次元より丁度一次元高いとき，ϕは単純に層別化されている (simply stratified) と言う。また(イ)，(ハ)と共に(1)も落とし，(ロ)，(ニ)を更に弱い要求：$\max[t(a_1), \cdots, t(a_n)] < t(\pi)$ および $\max[t(x_1), \cdots, t(x_m)] < t([\lambda x_1 \cdots x_m \psi])$で置き換えるとき，すなわち，項どうしの次元は同次元でも異次元でもよく，また述語表現とλ抽象体の次元はそれらに伴ういくつかの項の持つ最大次元より一次元以上高いとき，ϕは累積的に層別化されている (cumulatively stratified) と言う。

21) [13]からはつぎのようにして矛盾が出る。まず，$\lambda x \exists G(x = G \& \sim G(x)) = F$とおく。ライプニッツの法則：(LL) とλ変換原理により，$\exists G(x = G \& \sim G(x)) \rightleftarrows F(x)$。(i)$F(F)$のとき。$\exists G(F = G \& \sim G(F))$。$F = G \& \sim G(F)$とすると，$\sim F(F)$が出て矛盾。(ii)$\sim F(F)$のとき，$\forall G(F = G \rightarrow G(F))$であるが，$F = F$だから，$F(F)$が出て矛盾。[14]からの矛盾はこうなる。$[\lambda z [\lambda xy \exists G(x = G \& \sim G(y))]](z, z) = F$とおくと，(LL) とλ変換原理から，$[\lambda xy \exists G(x = G \& \sim G(y))](z, z) \rightleftarrows F(z)$である。(i)$F(F)$のとき，$[\lambda xy \exists G(x = G \& \sim G(y))](F, F)$であるから，再びλ変換原理により，$\exists G(F = G \& \sim G(F))$。$F = G \& \sim G(F)$ とおくと，$\sim F(F)$ が出て矛盾。(ii)$\sim F(F)$のとき，$\sim [\lambda xy \exists G(x = G \& \sim G(y))](F, F)$ であるから，λ変換原理により，$\sim \exists G(F = G \& \sim G(F))$，すなわち$\forall G(F = G \rightarrow G(F))$。$F = F$だから，$F(F)$ が出て矛盾となる。

22) クワインの集合論NFは，“∈”を原始述語に取る第一階述語論理をベースとして，量化の公理以外に，外延性の公理：$\forall z(z \in x \rightleftarrows z \in y) \rightarrow x = y$ と，$x_n \in x_{n+1}$という形で層別化された内包の原理：$\exists y \forall x(x \in y \rightleftarrows F(x))$ をもつ集合論である。クワインによれば，“yが非クラス，つまり個体のときは，$x \in y$は「xは個体yである」のことだと解してよい”から，yが個体のときは，$x \in y \rightleftarrows x = y \rightleftarrows x \in \{y\}$ となって，これと外延性の原理とから，$y = \{y\}$ となる。す

なわち，メンバーをもたない原要素（Urelement）aが，a＝{a}になってしまう。これは一種の変則状況であると言わざるを得ない。この変則状況を打開して原要素にしかるべき地位を与えるため，外延性の原理を，$(\exists z(z\in x)\ \&\ \forall z(z\in x\rightleftarrows z\in y))\rightarrow x=y$の形に制限したものがNFUである。NFについては，W. V. O. Quine, "New Foundations for Mathematical Logic", in *From a Logical Point of View*, Harvard U. P. (1953)［邦訳：「数理論理学の新しい基礎」，クワイン『論理学的観点から』中山浩二郎・持丸悦朗訳，岩波書店（1972），101-123頁］を，NFUについては，註24）で示すR. Jensenの論文を参照。

23）弱ツェルメロ集合論というのは，"∈"と"＝"を述語に持ち，1908年にE．ツェルメロ（Ernst Zermelo）が与えた集合論の公理のうち，外延性，対，和，巾の各公理と，制限された分出公理：$\exists y\forall z(z\in y\rightleftarrows z\in x\ \&\ \phi)$をもつ集合論のことである。制限された分出公理とは，条件ϕ中のすべての量化子が何らかの集合に制限されていること，すなわち，ϕ中に含まれる量化の表現が，$\forall x\in y\psi$あるいは，$\exists x\in y\psi$の形を取っているものを言う。

24）Ronald Jensen, "On the Consistency of a slight (?) Modification of Quine's *New Foundations*", *Synthese* 19 (1968), pp.250−263。

25）（LL*）より，$[\lambda x_1\cdots x_n\phi]=[\lambda x_1\cdots x_n\psi]\rightarrow([\lambda x_1\cdots x_n\phi](x_1,\cdots,x_n)\rightleftarrows[\lambda x_1\cdots x_n\psi](x_1,\cdots,x_n))$が出るが，これに（λ−Conv*）を適用し，更にUG,（A1*），（A2*）から，$[\lambda x_1\cdots x_n\phi]=[\lambda x_1\cdots x_n\psi]\rightarrow\forall x_1\cdots\forall x_n(\phi\rightleftarrows\psi)$が導ける。

26）フレーゲの体系において，外延性の原理：$\forall x_1\cdots\forall x_n(\phi\rightleftarrows\psi)\rightarrow[\lambda x_1\cdots x_n\phi]=[\lambda x_1\cdots x_n\psi]$に相当するのは，法則（Va），すなわち$\forall x(Fx\rightleftarrows Gx)\rightarrow\dot{\varepsilon}F(\varepsilon)=\dot{\alpha}G(\alpha)$である（*GGA*§52)。この（Va）は，パラドクス発生の原因である（Vb）：$\dot{\varepsilon}F(\varepsilon)=\dot{\alpha}G(\alpha)\rightarrow(Fx\rightleftarrows Gx)$と同値な式：$\dot{\varepsilon}F(\varepsilon)=\dot{\alpha}G(\alpha)\rightarrow\forall x(Fx\rightleftarrows Gx)$の逆命題であり，これら二つの式の連言：$\dot{\varepsilon}F(\varepsilon)=\dot{\alpha}G(\alpha)\rightleftarrows\forall x(Fx\rightleftarrows Gx)$をフレーゲは論理の基本法則（V）として認定していたのであった（§3，5参照)。

27）単項（λHST*）とは，登場する述語表現を単項述語に制限した（λHST*）の部分体系である。

28）小論ではもっぱら，パラドクスの防止という観点に的を絞ったので，算術を論理に還元するという，「論理主義」を実行することについての細かい条件を考察する余裕がなかった。これは今後の課題としたい。

［付記］小論は，第三十九回西日本哲学会（1988. 12. 3－4．於福岡大学）において行った研究発表「Frege・パラドクス・論理」の草稿に加筆修正して成ったものである。発表当日，会場で鋭い質問の矢を投じて筆者を当惑させ奮起させた水崎博明・飯田隆の両氏をはじめ，拙い発表をお聴き下さり有益なアドバイスを与えられた諸先生・諸先輩方，常々筆者を励まし学ぶこと・知ることの厳しさと楽しさを示して下さる松永雄二先生に，感謝の言葉を申し述べたい。