ISSN 1881–6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

「重心」の知の構成に関する研究

–教授人間学理論を視座として–

荻原友裕　*Tomohiro Ogihara*

vol.20, no.2
Jan. 2018

鳥取大学 数学教育学研究室

目次

序章
本研究の目的と方法

本章では，本研究の目的・方法について述べる。
0.1 では，本研究の背景と目的について述べる。
0.2 では，本研究の目的を達成するための方法論を述べる。
0.3 では，本論文の章構成について述べる。

0.1　本研究の目的

近年の国際的な数学教育学研究をとりまく動向として,「科学としての数学教育学」という立場が強調される傾向にある。これには，様々な立場が存在するものの，その一つには,「我々の目的は，数学の教授・学習にかかわる現象・過程についての知識の基本体系を構築することである」(Balacheff, 1990)といった立場に代表されるフランス数学教授学がある。フランス数学教授学の立場においては，数学の教授・学習に関わる現象，あるいはより一般的には様々な知的集合体（institution，詳しくは 1.1 参照）における数学的知識の普及（diffusing of mathematical knowledge in social institutions)は，まさに数学教授学研究の対象である（Brousseau, 1997)。したがって，現在行われている教授・学習に関わる現象について分析し、知識の体系を構築したり、現在では行われていない教授・学習に関わる現象についてその理由や背景を分析し、同様の知識の体系に構築することは一つの研究として認められるといえるだろう。

現行（平成 11 年告示版）の学習指導要領において，重心は高等学校で扱われる教材となっている。特に数学 A の「三角形の性質」において，三角形の重心や外心，内心が扱われる。さらに平面図形の単元は,「円の性質」となり、その範囲では四角形と外接円や内接円の関係について扱われる。しかしながら，数学 B の「ベクトル」における「平面上のベクトル」や数学Ⅱにおける「図形と方程式」において「三角形 ABC の重心 G」が「四角形」や平面上での「4 点」の重心について扱われることはない。例えば数学 A の教科書では,「三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ線分を中線という」としたうえで,「三角形の３本の中線の交点 G を三角形の重心という」としており，同様の記述が他の教科書においてもみられる。つまり，現行の教科書においては,「三角形の重心」について定義しており，一般の重心については扱われていない。

では，一般の重心について求めることは，容易なことであるのだろうか。詳しくは 2.2.4 において述べるが，筆者らが大学生 50 名に四角形の重心について調査を行ったところ，数学的に正しく解決することができたのは 14 名（28%）であった。このことからだけで帰結することはできないものの，少なくとも，現状のカリキュラムにおける一般の重心の扱いがなされていないことには，先述した科学としての数学教育学における、教授・学習に関わる知識の体系の構築という意味において、数学教授学研究としての課題が認められる。

したがって，本研究では，以下の２つの研究課題を検討する。

（１）現在の学習者の実態は，重心という教材に関するどのような教授方法の帰結として認められるか

（２）現行のカリキュラムでは教えられておらず，扱われない一般の平面図形における多角形の重心について，学習者はどのような活動をすることが可能であるか

（１）で述べている，「現在の学習者の実態」とは，上で述べた一般の重心について求めることができない現状を指す。（１）については，本研究が依拠する「科学としての数学教育学」における，教授・学習にかかわる現象・過程についての知識の構築として現状を理解することである。

（２）については，（１）と同様に学習に関わる現象についての知識として理解することであり，学習者が自然に多角形の重心について学ぶことが可能であるかということを理解することである。

後述するが，本研究の立場としては「現行のカリキュラムでは問題があるため，変更する」ということを主張するものではない。例えば，数学 A における「三角形の性質」という単元は図形についての論証を行う上で，三角形のみを考えることがう

まく機能していると考えられる。本研究はあくまでも，重心に関する現行の教授・学習はどのようなことが行われ，現象としてはどのように理解され得るのかを知識として構築することが目的である。

0.2　本研究の方法

0.1 において導出された 2 つの研究課題に対して，本研究が行う方法について述べる。

（１）現在の学習者の実態は，重心という教材に関するどのような教授方法の帰結として認められるか

本研究を行うにあたり，「重心という教材が学校数学でどのように扱われているのか」をどのように理解するかを明確にする必要がある。重心とは他の教材と同様に，学校数学のために存在するものではなく，紀元前からアルキメデスらによって扱われてきた数学的（あるいは物理学的）知識である。その知識が学校で扱われる数学になるまでの過程を明らかにすることが（１）に対する方法の１つとして考えられる。

そこで本研究では教授人間学理論 Anthropological Theory of the Didactic における，教授学的転置過程を視点として用いる。教授学的転置過程を用いることによって，学術的に存在している知識が，ある制約や条件をもった institution のなかでどのような知識として生息しているか，それが別の institution へ転置した時にはどのようになるかを理解することが可能であり，これは（１）の研究課題を明らかにする方法として適当であると考えられる。

（２）現行のカリキュラムでは教えられておらず，扱われない一般の平面図形における多角形の重心について，学習者はどのような活動をすることが可能であるか

（２）の研究課題の意図としては，教師による教授行為によって得られた知識を基に行う学習者の活動を前提とした多角形の重心について求めるような活動は想定していない。学習者が

真に主体的な活動として行う学習場面を想定したうえで，その活動の制約や条件あるいは限界について理解することを意図している。したがって，教授人間学理論の範疇にある世界探究パラダイムに基づいた学習場面を分析することを通して，学習者の条件や制約，活動の限界について視る。

0.3　本論文の構成

本論文においては，まず第１章で，本研究で用いる方法として，教授人間学理論について記述する。本研究では主に，教授人間学理論における教授学的転置やそれを外在的に視るための基本認識論モデル，人間の行為について記述するプラクセオロジーを用いるため，それらについて詳しく述べる。

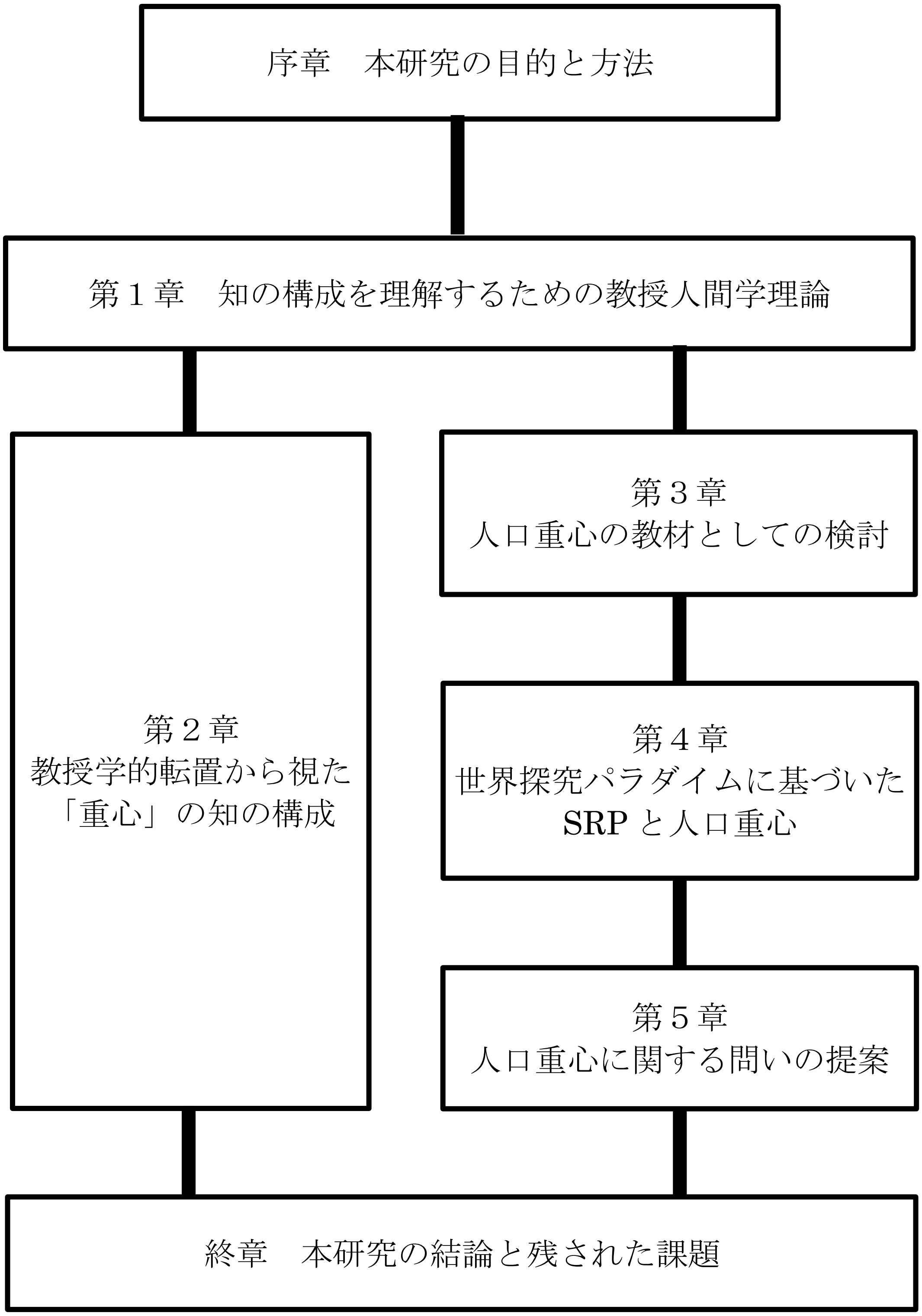
第２章では，研究課題（１）に対応して，教授学的転置過程を一つひとつ明らかにし，その転置間を視ながら基本認識論モデルを設定する。

第３～５章では，研究課題（２）に対応して，新たな問いを提案し，その問いに基づいた活動の分析を行う。第３章では，新たな問いを設けるにあたり必要となる「人口重心」についての知の構成を視る。

第４章では，活動を設計するにあたり，主体的な活動を行うための理論的基盤となる世界探究パラダイムについて記述する。特に，現行のいわゆる記念碑訪問主義における活動と世界探究パラダイムにおける活動の差異を示したうえで，研究課題（２）を明らかにするための必要性を述べる。

第５章では，本研究が提案する問いの分析を行う。提案する問いに対するアプリオリ分析と，問いに基づく実際の活動をアポステリオリ分析することによって，学習者がどのような活動を行うことができ，行うことができないかを記述する。

終章では，本研究の結論として，研究課題（１）と（２）に対する解決を整理し，目的の達成をはかる。


序章　本研究の目的と方法
第１章　知の構成を理解するための教授人間学理論
第２章
教授学的転置から視た
「重心」の知の構成
第３章
人口重心の教材としての検討
第４章
世界探究パラダイムに基づいた
SRP と人口重心
第５章
人口重心に関する問いの提案
終章　本研究の結論と残された課題

第 1 章
知の構成を理解するための方法：教授人間学理論

1.1　教授人間学理論(Anthropological Theory of the Didactics)
1.2　教授学的転置と基本認識論モデル
1.3　プラクセオロジー分析

本章では，本研究に用いる教授人間学理論とその下地となった転置理論，人間の行為について分析する枠組みであるプラクセオロジーについて説明する。

1.1 では，教授人間学理論について説明する。
1.2 では，学術的にまとめられた知識が学習者に学ばれるまでの過程を捉えるための教授学的転置について説明する。
1.3 では，人間のすべての行為について分析するための枠組みであるプラクセオロジーについて説明する。

1.1　教授人間学理論(Anthropological Theory of the Didactic)

第 1 章では，研究課題のどちらにも用いる理論について大まかな背景及び本研究の扱う内容について記述する。

学校で教えられる（数学の）内容あるいは知識は，間違ったものではなく絶対的なものであると捉えられがちであるが，必ずしもそうではない。それらの知識は社会のニーズによって学校教育（学校数学）に持ち込まれたものであり，学校数学に持ち込む作業の過程において，様々な制約や条件を基に転置が行われていると考えられる。このように，何らかの知に対して転置を視る理論として，，教授学的転置理論 Theory of Didactic Transposition（以下，DT）がある。この理論は，より大きな理論である教授人間学理論 Anthropological Theory of the Didactic（以下，ATD）のサブ理論として位置付けられる。DT は，1970 年代後半からフランスのシュバラール（Chevallard, Y.）によって築かれたものである。さらに，この知の本性や知識も含めた教授・学習にかかわるものを，対象 : O，人 : X，知的集合体 : I を構成要素としてモデル化を行い，また，プラクセオロジーなどの概念を取り入れることによって ATD を構築した。

以上のことから，ATD の背景には DT を基盤としてきたという歴史があることや，他のプラクセオロジーなどの概念も含めて, ATD は知の本性や性質について理解するための理論であり，規範理論ではない。したがって, ATD によって記述されるのは，ある institution における知についてのみであり，こうあるべきであるということは記述されない。

次節の 1.2 と 1.3 において，ATD における教授学的転置過程と基本認識論モデル及びプラクセオロジーについてより詳しく述べる。

1.2　教授学的転置過程と基本認識論モデル

前述したように，学校数学は学校の中で無からつくられたものではない。ある学術的な集団，例えば，過去の人も含めた（別々に存在していたというわけではないが）数学者 institution や物理学者 institution らによって築かれた「学術的知識」をもとに構成される。このように，教授学的転置過程は，学校数学を適切に解釈しようとするものであり，その各々の起源が数学的知識を生み出す institution，すなわち数学を扱う特定の社会（集団）や場所の中にあるとする。その中において，「教えられるべき知識」は学術的知識の中から institution の何らかの条件や制約が働いたうえで，選択したことが認められる。この条件・制約は国や学校，教室が異なれば，institution も異なるため，その結果として顕在化する「教えられた知識」も異なる。しかしながら，それは必ずしも教室内の要因によるものだけではなく，より上位の institution での知の決定に影響を受けていると指摘される。

また，重心は後述するように歴史的に数学者や物理学者らによって様々な求め方や解釈，すなわち学術的知識が生み出されてきた。したがって，教授学的転置過程を視ることによって，重心という知が，教授・学習の場においてどのような転置をたどっており，その中で何が教えられ，何が教えられないか，つまりそこには institution のどのような条件・制約があるのかを明らかにする必要があり，それらを分析することが可能であると考えられる。

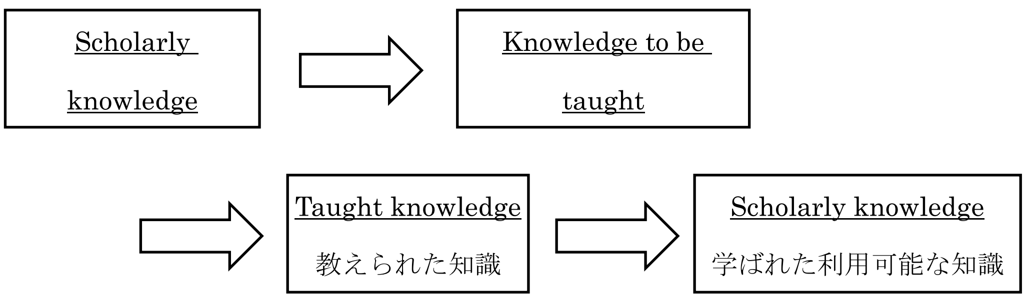


図 1.2.1　教授学的転置過程

それぞれの転置間についての説明は以下のとおりである。「学術的知識」とは，過去の人間も含めた数学者 institution や物理学者 institution らによって築かれた知識である。

「教えられるべき知識」とは，学術的知識を基にあるノースフェールによって生産された知識である。具体的には，例えば，日本であれば文部科学省 institution が学習指導要領という知識を構成する。また，教科書やテキストなども，教科書執筆者 institution やテキスト執筆者 institution らによって（おそらくは）学術的知識を基に構成された知識である。

さらに，学校や教室では教科書がそのまま扱われることはほとんどないだろう。授業者である教師 institution らにより，学習者の実態に応じてさらに再構成された知識が「教えられた知識」である。

そして最終的には児童・生徒などの学習者 institution らによって「学ばれた利用可能な知識」が構成される。その意味としては，授業で扱われた知識がそのまま学習者 institution に息づくのではなく，彼らが授業で扱われた知識について自分なりに創造したり，解釈を行ったりする活動を通して，それぞれ個人個人の知識を構成するということである。一つの教室の institution であればある対象についてかなり共通の認識をもつことにはなることが期待されるが，それを構成する主体である学習者 institution の活動はすべて異なると考えられるため，その結果構成される知識も異なると考えられる。

以上のようにして，学術的知識から学ばれた利用可能な知識までの転置の過程には，それぞれの institution の条件や制約によって構成される知識が異なると考えられる。これがまさに教授学的転置や教授人間学理論で捉えたい知の本性であり，これを視るための視点として institution の重要さが認められるだろう。

また，筆者を含めて研究を行う研究者は，この転置の過程におけるどの institution にも属さない。それぞれの知識や institution の条件や制約を視るためには，研究者はこれらの知識とは断絶してみることが要求される。したがって，それぞれの知識や institution，さらには転置の間を視るために，外的な立場として, 基本認識論モデル reference epistemological model を設ける必要がある。これは，学術的知識を構成する数学コミュニティ，教えられるべき知識を構成する教育システム，教えられた知識を構成する教室（学校，教師など）という３つの institution についてのデータを視ていくことで作り上げられる。

以上のことを基にして，第 2 章において研究課題（１）の達成をはかる。

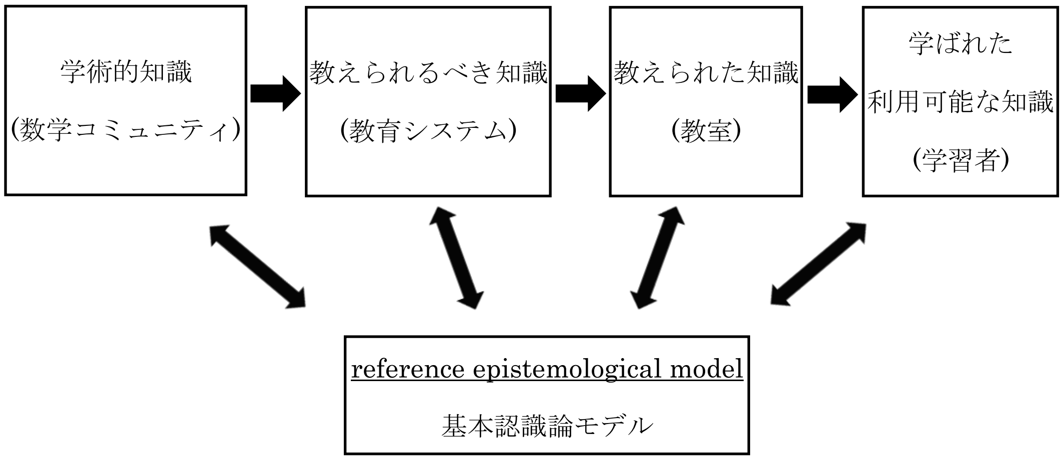


図 1.2.2　研究者の（外的な）立場を示す基本認識論モデル

1.3　プラクセオロジー分析

プラクセオロジーpraxeology について Chevallard(2006)は以下のように述べている。

1 つのプラクセオロジーは，何らかの方法で，人間行為一般を分析することを可能にする基本単位である

つまり，人間のある行為についてその背景にはどのような理由が考えられるのかを分析する概念である。

プラクセオロジーは「praxis（実践)」と「logos（理論)」という２つが組み合わさった造語である。その構成要素としては，字実践部 praxis block と実践部を正当化したり，妥当化したり，記述したりするための理論部 logos block という２つの block がある。実践部は観察可能なことであるのに対して，理論部は観察不可能であり，立場の異なる人によっては，ある人間の行為における理論部が異なることが想定されることも考えられる。

実践部はさらに，タスクタイプ type of tasks とテクニック techniques という構成要素から成る。タスクタイプは何らかのタスクを少なくとも１つ含んだものであり，テクニックとはこのタスクタイプを行う上での解決方法である。

理論部はテクノロジーtechnology とセオリーtheory から構成される。テクノロジーとは実践部を理解するための記述であり，なんらかのタスクタイプに対してどのようなテクニックが行われたのかを正当化するものである。さらにそのテクノロジーを正当化するものがセオリーである。上述したように，この理論部は観察不可能であるため，セオリーが異なれば，必然的にテクノロジーは異なる。逆に，異なるテクノロジーであっても一つのセオリーによって正当化されることは考えられる。

これらのプラクセオロジーの概念を整理するために具体的な例を用いて説明する。「目上の方に物を渡す」というタスクタイ

プがあるとき，「右手で渡した」という行為がテクニックであるとする。この記述そのものが現象をどのように捉えたかという意味でテクノロジーである（例えば，右手に着目している点において，すでに事実から抽出された現象の記述へと変わっている）。このテクノロジーに対して，ある人からすれば「目上の方には利き手で物を渡す」という正当化が行われるかもしれない。しかしながら，ヒンドゥー教徒からすれば「不浄の左手でない右手で物を渡した」というように正当化が行われることも考えられる。

以上のように，プラクセオロジーは人間のいかなる行為についても分析することを可能にする。したがってそれは学習行為であったりあるいは教授行為や研究という行為についても分析可能である。しかしながら本研究においては学習行為についてのみプラクセオロジーを用いる。（特にこの場合のプラクセオロジーを数学プラクセオロジーmathematical praxeology と呼ぶことがある。）

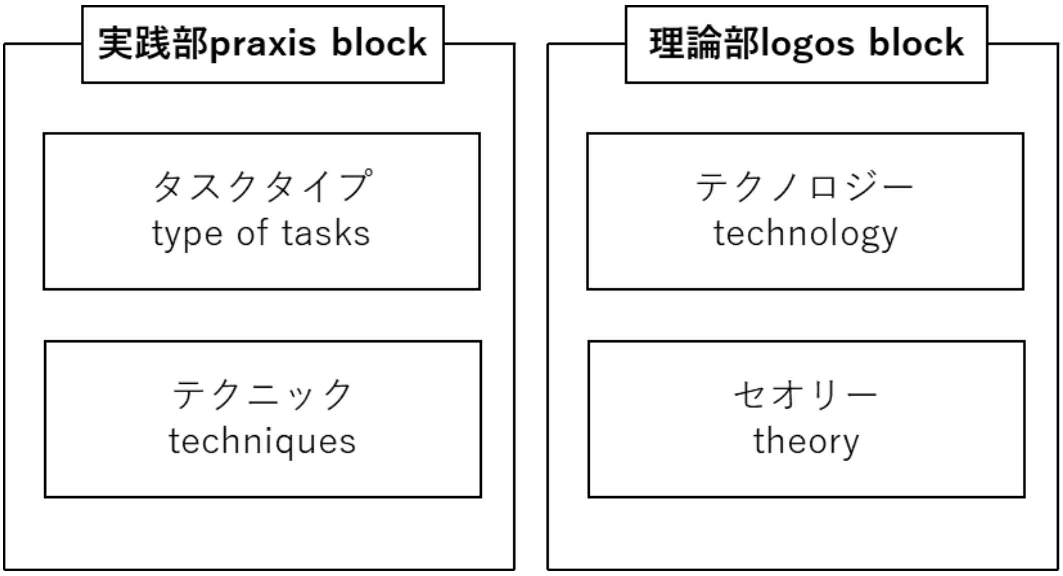


図 1.3.1 プラクセオロジーとその構成要素

第１章の要約

教授人間学理論（ATD）における教授学的転置過程を視ることで, 数学者 institution や物理学者 institution によって構成された学術的知識から学習者 institution によって構成される学ばれた利用可能な知識までの転置の過程を institution の条件や制約を明らかにすることが可能である。

また，その過程に置いて，研究の外的な立場となる基本認識論モデルを設けることで，転置間を分析することが可能となる。また，人間のいかなる行為についても分析することを可能にするプラクセオロジーという概念（数学プラクセオロジー）を用いることで，学習活動を分析する

第２章
教授学的転置から視た「重心」の知の構成

本章では，数学者・物理学者たちがまとめた「重心」が学習者へと学ばれる過程を視て，転置間にどのような条件・制約があるかを基本認識論モデルを設定することで分析する。

2.1 では，教授学的転置を用いて「重心」を視ることができる理由を述べる。

2.2 では，「重心」のそれぞれの institution における知の構成を視る。

2.3 では，それぞれの institution の条件・制約を転置間を視ながら考察する。

2.4 では，「重心」の転置に対する外的な立場である基本認識論モデルを設定する。

2.1　「重心」の教授学的転置を視ることの妥当性

重心について，初めて数学的に記述したのは，アルキメデスであるといわれている。しかしながら，現在発見されているアルキメデスの著書の中では、重心という概念は定義なしに用いられているため，一般には失われてしまった著書の中にその定義があったのではないかとされている。また，現在発見されている著書では,「平面のつりあいについてⅠ・Ⅱ」のⅠの方で平行四辺形や三角形，台形についての直線図形の重心について扱われている。

この著作は，7 つの要請（前提として認められるもの）と 15 の命題について扱っているが，命題６「共測な２量は，それらの重さの比を逆にした距離において，互いにつり合う」と命題 ７「共測でない量は，それらの重さの比を逆にした距離において，つり合う」というてこの法則をモーメントの考え方を用いて証明している。しかしながら，現在の数学教育において，重心を扱う前に，モーメントの考えを扱うようなことはしない。

以上のことから，重心は過去の数学者（または物理学者）institution によって知識が構成されてきているが，その構成された知識がそのまま学校教育の中で扱われているわけではない。したがって，その間には転置の作業が行われていると考えられるため，重心について教授学的転置の過程を視ることは可能であると考えられる。

2.2　「重心」の教授学的転置過程

以下において，重心に関する学術的知識から学ばれた利用可能な知識までのそれぞれの知識を視る。

ここで，本来であれば教師や実際に行われた授業を分析することによって「教えられた知識」を記述することができるが，本研究では，実際の授業を観察することがかなわなかったため，教科書の内容をそのまま行うものとして，教科書分析を行うことで，「教えられた知識」について記述する。

2.2.1　「重心」の学術的知識

M.B.Balk(1960)は以下のように系統的に三角形の重心について考えている。

(１)質点の重心について

質点 A の質量 a を(A，a)として表すことを示したうえで，2 つの質点 A，B の重心を「線分 AB 上にあって，てこの法則を満たすような第 3 の点 C のことである」(M.B.Balk,1960,p.18)として定義している(図 2.2.1.1)。

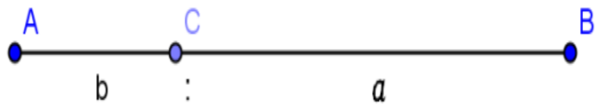


図 2.2.1.1：てこの法則を満たす第三の点 C

さらに，2 つの質点の合成という概念を導入し，質点(A，a)，(B，b)の重心 C の質量は a+b であるとし，(C，a+b)と表されるとしている。

以上から，いくつかの質点の重心を求める際に 2 つの質点の重心を考えることでいくつかの質点を求めている。

また，いくつかの質点の重心を求めるにあたって以下の 2 つの性質をもとにしている。

① n 個の質点の重心の位置は，これらの点を次々に合成していく順序に無関係である(n 個の質点からなる系の重心の一意性の定理)。
② n 個の質点からなる系の重心の位置は，いくつかの質点をそれらの合成でおき換えても変わらない(質点群の組わけ可能の定理)。

次に，図 2.2.1.2 のような 2 つの質点 P，Q とそれらの重心 Z の軸 MN との距離について考え，いくつかの質点とそれらの重心の軸との距離について求めさせている。この軸との重心の距離は，後述する線分の重心及び面の重心を求めるための根拠となる求め方である。

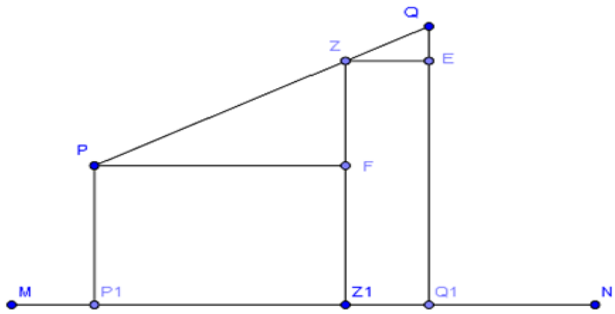


図 2.2.1.2：座標平面上の質点Ｐ,Ｑに対する重心Ｚ

したがって，座標平面上で 3 点(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)の重心を求める式 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ は等しい質点の重心について求めていると解釈される。

(２)線分の重心について

次に線分について考えるために，長さ 1 の，針金の切片の質量をδ(線密度)で表し，長さｌの質量をｌδと表せることを示した上で，「線分の重心はその中点である」(M.B.Balk,1960,p44)と定義している。

さらに，折れ線や曲線の重心について考えるときには，線分に分け，それぞれの重心を考え，前述した質点と軸の距離を考える方法を用いることで求められるとしている。

(３)平板の重心について

次に，平板の重心を求めるために，先程と同様に面積１の質量をδ(面密度)として，面積Ｓの平板の質量をＳδと表せることを示した上で，長方形の平板の重心を「その重心は長方形の対角線の交点になる」(M.B.Balk,1960,p49)と定義している。

さらに，図 2.2.1.3 のような長方形でできた多角形や任意の閉曲線で囲まれた平板の重心については，それらの面に長方形を敷き詰め，それぞれの重心を考え，前述した質点と軸の距離を考える方法を用いることで求められるとしている。

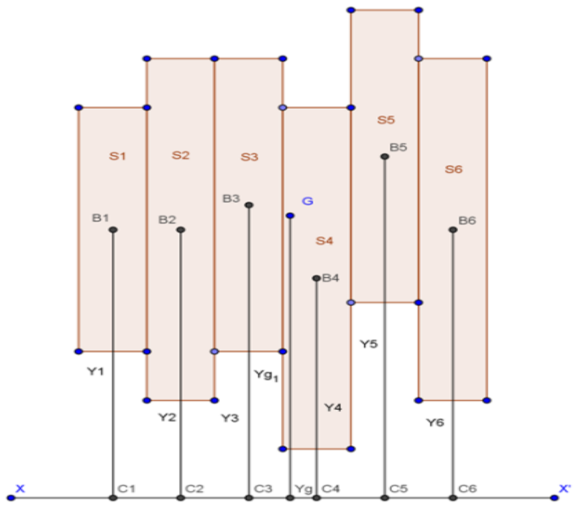


図 2.2.1.3：複数の長方形の面積の重心Ｇ

例えば，これらを三角形の重心についてまとめるとそれぞれ三角形の頂点の重心(図 2.2.1.4)，三角形の線分の重心(図 2.2.1.5)，三角形の面積の重心(図 2.2.1.6)のように解釈できると Balk はまとめている。

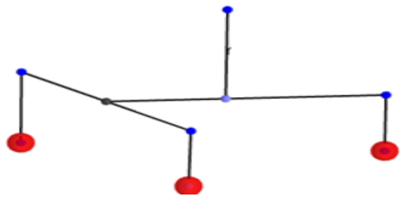


図 2.2.1.4：三角形の頂点の重心(質点の重心)

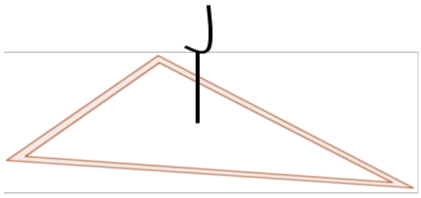


図 2.2.1.5：三角形の周の重心(線分の重心)

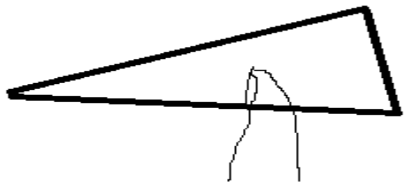


図 2.2.1.6：三角形の面積の重心(平板の重心)

これらの３通りの三角形の重心の解釈によって得られる３つの点は必ずしも一致しない。具体的には，三角形の頂点の重心と面積の重心についてはともに中線上に存在するため，常に一致するが，周の重心については正三角形のとき以外は一致しない

また，それぞれの重心の解釈を四角形で考えると，四角形の頂点の重心と面積の重心は平行四辺形のとき以外には一致しない。

以下，一般に使われている場合ではなく，上記の重心について述べるとき，「頂点の」等や「異なる」などの接頭語がつかないときには，「重心」と「　」付きで記述する。

2.2.2　「重心」の教えられるべき知識

学習指導要領において，試案の時期（昭和 22 年）では重心

はてこや仕事とともに記述されていた。その目標として，第７学年において「単一機械のはたらきを調べて, その理解を深め, 日常生活に用いることを指導すること。また，力の初歩的観念を得させること。」として，力，てこや仕事について扱う。そのうえで第８学年における目標では,「力や重心の基本的な法則を理解し，これを用いること。」として,「力の分解・合成」や「物の坐り」について扱っている。その中では重心の意味についても扱われており，Balk の解釈にもとづくと，質点の重心や平板の重心についても扱われていたと考えられる。

また，現在では，数学 A における内容として，以下のように記述されている。

「⑶ 図形の性質
平面図形や空間図形の性質についての理解を深め，それらを事象の考察に活用できるようにする。
ア 平面図形
⑺ 三角形の性質
三角形に関する基本的な性質について，それらが成り立つことを証明すること。」

解説では，この内容について以下のように記述がある。

「ここでは，中学校での学習内容を基にして直接扱える程度の三角形の性質として，外角の場合も 含めた角の二等分線と辺の比の関係，重心，内心，外心などの性質を扱い，これらの図形の性質を 図形の考察に活用できるようにする。」

したがって，平面図形における,「三角形の性質」という単元の中で，重心は他の教材と並列して扱われている。

2.2.3　「重心」の教えられた知識

学習指導要領で記述されたものを参考にしながら，検定を受けた教科書では，三角形の性質の単元において，外心，内心と並列して記述している。その扱い方については前述したように，三角形の中線について定義したのち，三角形の重心について定義している。

また，いくつかの教科書ではその参考図として，重心に糸をつけて，三角形をつりさげる図や三角形を支える図（図 2.2.1.6）を掲載している。

中線を定義したのちに三角形の重心について定義する以外の記述のされ方として，啓林館の「Ole！ 数学シリーズ 数学A」がある。この教科書では，最初に水平とは何か，円形の板を吊るして水平になる位置はどこかを考えさせる。次に，三角形の板を吊り下げて水平にするにはどの位置で吊り下げればよいかを考えさせる。そのために，頂点に糸をつけると，対辺の中線を通ることを確認する（図 2.2.3.1）。そして，三角形の平板に糸をつけて水平に吊り下がる位置が中線の交点上にあるため，それを証明するという構成になっている。

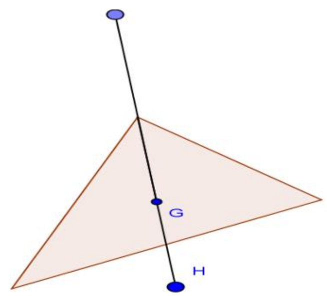


図 2.2.3.1:頂点につけた糸の延長にある重心G

2.2.4　「重心」の学ばれた利用可能な知識

飯島(1988)では，図 2.2.4.1 や図 2.2.4.2 のような T 字型，L 字型の板の重心について大学生 75 名に行った調査を分析している。

「問題：図のような形をした板の重心を求めよ」

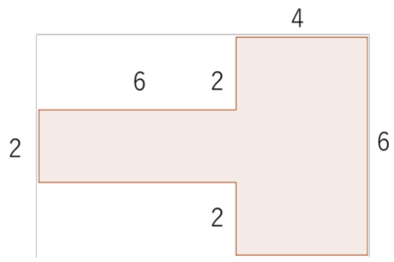


図 2.2.4.1：問１の図　Ｔ字型の板

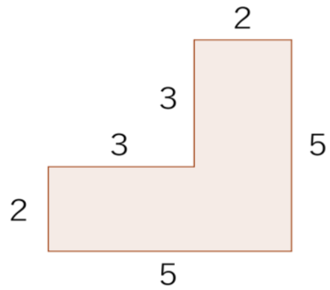


図 2.2.4.2：問２の図　Ｌ字型の板

その結果としては以下の表 2.2.4.1 のとおりである。

表 2.2.4.1：飯島(1988)の調査結果

	正答	誤答	無答	計
問１	１０ (13%)	６２ (83%)	3 (4%)	75 (100%)
問２	5 (7%)	５４ (72%)	１６ (21%)	７５ (100%)

飯島は調査の分析において，Ｔ字型については「２つの図形の重心を結ぶ線分G_1G_2を面積の逆比（2：1）に内分する点がG」を正答にしており，Ｌ字型についても同様（ただし，面積の逆比が 3：5）である。

また，誤答の例として様々なものを示しているが，その中には図 2.2.4.3 のような，「いくつかの重心に分けて考えた　G_1G_2の中点がG」も誤答だとしている。

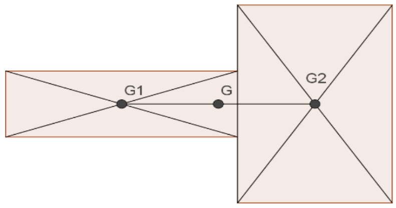


図 2.2.4.3：誤答とされている T 字型の重心G

しかし，これらを単純に誤答としてもよいのだろうか。この調査問題は板の重心について調査しているため，Balk の重心の解釈にもとづいたとしても誤答となることは間違いない。しかしながら，この回答は頂点（質点）の重心の求め方を行っている。飯島はその他ということで論文には示していない回答もあるが，問題にある図形について，頂点（質点）の重心や周（線分）の重心について求めている回答がある可能性が考えられる。現行の（又は，飯島(1988)の調査対象である学生に行われていた）学習指導要領（教えられるべき知識）やそれにもとづいた教科書，学校で行われる授業での内容（教えられた知識）は，三角形の重心についてのみが扱われ，一般の図形の重心や Balk の 3 通りの重心の解釈は扱われていない。したがって，問題の文言にある，「板の重心を求めなさい」とされても，学生にとってはその意味が理解できず，

「板の重心$=\dfrac{x_1+x_2+\cdot\cdot\cdot\cdot+x_n}{n}$（左辺は平板の重心を意味し，右辺は質点の重心を求める式であると解釈され，それらは必ずしも一致しないため『＝』では結べない)」という誤った推測をもとに回答を行った生徒がいることも考えられる。

そこで，改めて筆者らは，図 2.2.4.4 のような特殊でない四角形について調査を行った。対象や問題は以下のとおりである。
調査の対象：国立大学学生（1,2,3 年生）50 名
問　　題：下の図の四角形について，重心を求めなさい。また，その位置を図に示しなさい

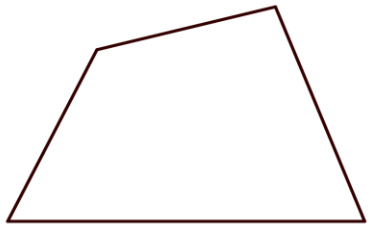


図 2.2.4.4：調査問題の四角形

その結果は以下のとおりである。

表 2.2.4.2：Balk の解釈にもとづく調査結果

	頂点	周	面積	誤答・無答	計
人 (%)	3 (6)	0 (0)	11 (22)	36 (72)	50 (100)

飯島(1988)と同様に，三角形でない図形に対する重心を求めることができたのは 14 人(28%)と正答率は低かった。また，その内訳としては面積（平板）の重心を求めた回答が多かった。

2.3　それぞれの転置間と条件・制約

本節では，前節で視たそれぞれの知識について，それらを構成する institution にある条件や制約についても記述しながら，それぞれの転置について述べる。

2.3.1　学術的知識－教えられるべき知識

昭和 22 年の文部省という institution によって，生活に密接に関わる内容が選定されている。これは戦後である当時は，アメリカの教育哲学者 J. Dewey の影響を受けて，経験主義的カリキュラムが主体となっていたためである。その中で，てこや機械なども数学の内容として扱われていた。そして，その単元の中で，重心も扱われており，このような体系の位置づけは，Archimedes や Balk の扱い方と同様である。

したがって，昭和 22 年の学習指導要領において質点や平板などの様々な重心の解釈について扱っていたのは，経験主義的な条件が重心の体系と合っていたためであると考えられる。

しかしながら，現在では，数学 A の「三角形の性質」という単元において扱われており，一般の重心について扱う必要がなく，重心の意味や法則についても考える必要がない。重心をこのような位置づけにする要因としては，学習指導要領解説にある以下の記述を根拠に考察することができる。

また，「事象を数学的に考察する能力を養い」と示されている。この能力は, ある課題に関心をもち, その解決に当たって, これまでに学習した知識等をもとにして一般的な方略などを見付け，それを用いて適切に処理する学習を通して育成される。例えば，三角形の重心を扱う際に，三つの中線が 1 点で交わることに関心をもち，必要な既習の知識等を活用してその理由を考察するとともに，それを適切に表現できるようにする。」

したがって，なぜ三角形の重心が中線の交点上にあるのかを考察することではなく，3 本の中線の交点が 1 点で交わること

を考察の対象として，証明することとして要求されている。この「三角形の性質」について学ぶことが，学術的知識から教えられるべき知識への転置間の制約として働いている。それによって，重心は重さや力，てこの法則などにもとづいて扱われる必要がなく，あくまでも三角形の性質の一つとして教えられるべき知識に位置づいている。

そのため，学術的知識として Balk によって生み出されてきた，てこの法則や平面における重心の 3 通りの解釈が教えられるべき知識では扱われていないと考えられる。

2.3.2 教えられるべき知識－教えられた知識

三角形の性質として位置づかせた重心ではあるものの，「重心」という言葉の意味を示すことが教科書では行われている。換言すれば，現行の学習指導要領としては前述したように，「中線の交点が 1 点で交わること」が考察の対象とされている。しかしながら教科書では，三角形の平板を重心の位置から吊り下げたり，重心の位置で支えたりする図 2.2.1.6 が掲載されている。これは，考察の対象でない重心の意味や法則について生徒 institution に教えるために，図 2.2.1.6 のような図が掲載されていると考えられる。これは，外心・内心がその言葉の意味の通り，外接円・内接円の中心として記述されることと同様に，重心が重さの中心であるという意味を生徒 institution に与えていると指摘することができる。したがって教えられるべき知識から教えられた知識の転置間においては，教師 institution（本来であれば，教科書の執筆者 institution）の条件が働いたと考えられる。

2.3.3 教えられた知識－学ばれた利用可能な知識

ここでは，筆者らが行った調査をもとに考察を行う。三角形の重心について学んだ学生らが四角形の重心について求める

場面において行ったことは，正答・誤答を含め，四角形を 2 つの三角形にすることがみられた。これらは当然であるが，重心について求めるための知識が三角形の重心の求め方のみであることが制約として考えられる。例えば，以下のように，四角形を三角形に分け，それぞれの重心を結ぶ線分を三角形の面積の逆比に内分する点として求める方法(図 2.3.3.1)や，四角形を 2 通りの三角形に分け，それぞれの重心を結ぶ線分の交点として求める方法(図 2.3.3.2)が挙げられる。

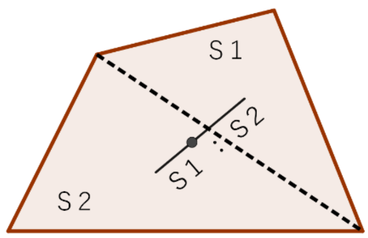


図 2.3.3.1：三角形に分け，逆比に分ける方法

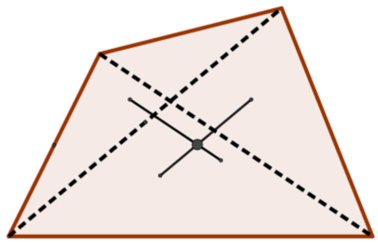


図 2.3.3.2：2 通りの 2 つの三角形に分ける方法

また，四角形の頂点の重心を求める方法としては，各頂点の中点をとり，それらの中点同士の中点を重心としている方法(図 2.3.3.3)や，座標平面上に四角形をうつし，各頂点の平均である，

$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)$として求める方法(図 2.3.3.4)である。

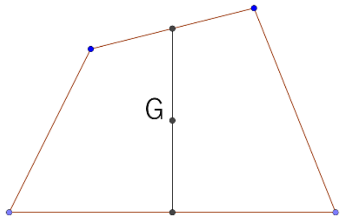


図 2.3.3.3：頂点の中点同士の中点を求める方法

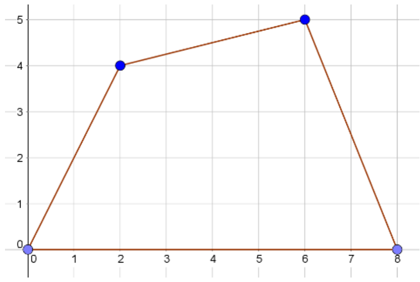


図 2.3.3.4：座標平面上にうつす方法

図 2.3.3.1 や図 2.3.3.2 は四角形の面積の重心の求め方としては正しく，図 2.3.3.3 や図 2.3.3.4 は頂点の重心として求める方法として正しい。

ただし，このような頂点の重心について求めようとする回答が低かったのは，重心のイメージとして（図 2.2.1.4 のような）各頂点の平均というイメージがなく，面積をもとにしたつりあいをイメージしたことが予想される。これは，教科書において，または授業において三角形の重心にイメージを与えるものとして，三角形を糸で吊り下げたり一点で支えたりする図 2.2.1.6 が学生に影響を与えたと予想される。

2.4　基本認識論モデルの設定

前節に示した現在の教授学的転置過程に対する，本研究の立場を明確にする。この立場は，それぞれの知識に対する研究者の外的な立場として，文部科学省や学校，生徒などのそれぞれの institution にある，それぞれの知識がどのような転置の過程を経ているのかを分析するために，研究者の認識論的な考察の位置づけを明確にするとともに，分析の手法を示唆するものである，基本認識論モデル（以下，REM）を設定する。

本研究における REM は主に，Balk の重心の 3 通りの解釈をもとに構成される。

また，3.5 で述べた各転置間における institution の条件・制約について分析する際には，すでに上述の REM をもとに分析を行っている。

以上の条件・制約を根拠として REM を基に現行のカリキュラム（学習指導要領，教科書の構成）について指摘されるのは，重心を「三角形の性質」に位置付けたことによって，重心についてのより豊かな解釈を学ぶ方法が失われていることである。学術的知識及び教えられた知識（本稿では，教科書）では，重心に対する重さの意味を考えることが示されているが，教えられるべき知識（本研究では，学習指導要領）では，「三角形の性質」を考察の対象としているため，重さの意味を考えずに重心の学習が進められるように構成されている。したがって，座標平面や平面上のベクトルにおいても，三角形の重心についてのみ扱うことしかできていない。

また，教科書上には，三角形を吊り下げる図や一点で支える図 2.2.1.6 が掲載されているが，これは面積の重心のモデルとして解釈されるものである。一方で，座標平面や平面上のベクトルにおいて用いられる式は各頂点の平均の考え方に基づいており，これは頂点の重心と解釈されるものである。したがって，

教科書上では 2 通りの異なる解釈が暗黙的に用いられており，その意味については教えられる構成となっていないことが指摘される。

したがって，本研究における REM に基づくとき，現行のカリキュラムの問題点として以下の 2 つが指摘される。

①豊かな「重心」の解釈を求める方法が失われている
②教科書では暗黙的に 2 通りの異なる重心の解釈が載せられている

第 1 章でも述べたように，上記の問題点はあくまでも「重心」という教材に焦点を置くことによってあらわれる問題点であるが，現行のカリキュラムは図形の性質について三角形に限定している。このことによって，論証を対象とする現行のカリキュラムにおいては，「三角形の」性質について論証することが条件としてうまく機能していると考えられる。したがって，本研究では現行のカリキュラムの改善を求めるものではない。

第２章の要約

「重心」は紀元前からアルキメデスらによって築かれた知識であるが，それがそのまま学校数学で扱われているわけではない。したがって，教授学的転置を視ることが可能である。

重心に関する４つの「学術的知識」，「教えられるべき知識」，「教えられた知識」，「学ばれた利用可能な知識」については以下のように整理される。

「学術的知識」: 質点，線分，平板という図形の解釈から，平面図形について重心には３通りの解釈の方法がある。

「教えられるべき知識」: 学習指導要領の試案の時期では手この法則を扱われたうえで「重心」について扱われていたが，現行の学習指導要領では「三角形の性質」が対象となっているため，てこの法則などについては扱われない。

「教えられた知識」: 教えられるべき知識がそのまま転置されつつも，重さの意味づけを与える図も用いている。

「学ばれた利用可能な知識」: 三角形の重心の求め方については問題ないが，四角形や一般的な平面図形についての重心について求めることは容易ではない。

またそれぞれの知識とそれを構成する institution の条件や制約について M.B.Balk の 3 通りの重心の解釈を基本認識論モデルとして用いると，以下の 2 つの点について，現行のカリキュラムでは問題があることが指摘される。

①豊かな「重心」の解釈を求める方法が失われている
②教科書では暗黙的に 2 通りの異なる重心の解釈が載せられている

第3章
人口重心の教材としての検討

本章では，本研究で提案する問いに関わる人口重心についてまとめたうえで，第2章で設定した基本認識論モデルの視点から知の構成について分析する。

3.1 では，人口重心について定義と算出方法などについて述べる。

3.2 では，人口重心を求めるために用いられる「重心」の知の構成を基本認識論モデルの視点から視る。

3.1　人口重心に関する学術的知識

総務省統計局では,「人口重心とは，人口の１人１人が同じ重さを持つと仮定して，その地域内の人口が，全体として平衡を保つことのできる点」とされており，５年に１度行われる国勢調査をもとに，各市町村，各都道府県そして日本の人口重心が求められている。

人口重心については，基本的に以下の式によって求められる。

$$X = \frac{\Sigma\ Wi\ Xi}{\Sigma\ Wi} \qquad Y = \frac{\Sigma\ Wi\ \ Yi}{\Sigma\ Wi}$$

X　　，**Y**　：人口重心の経度，緯度

Xi　，**Y i**　:基本単位区ごとの面積の中心点の経度, 緯度(注)

Wi　　：基本単位区ごとの人口

ただし，これは世界を平面として捉えており，地球の球形であることを考慮すると，誤差が生じる。この誤差をなくす方法として，いくつかの算出方法があり，日本では 2000 年まで，以下の式によって算出されていた。

$$X = X_0 + \frac{\Sigma Wi\ (Xi - X0)\ [\ 1 - (Yi - Y0) \times \alpha\ ]}{\Sigma Wi} \div [\ 1\ - (Yi\ - \ Y0) \times\ \alpha\ ]$$

$$Y = \frac{\Sigma Wi\ (Yi - Y0)}{\Sigma Wi}$$

X0　，**Y0**：前回調査の人口重心の経度，緯度

Xi　　，**Yi**：第 i 市（区）役所・町村庁舎の経度，緯度

Wi　　：第 i 市区長村の人口

$\boldsymbol{\alpha}$　　：緯度の異なりによる経度の補正係数

この算出方法は，2005 年の国勢調査から米国などでも用いられている以下の式によって定義されている。

$$X = \frac{\Sigma\ Wi\ \ Xi\ \ \cos(Yi)}{\Sigma\ \ Wi\ \ \cos(Yi)} \quad Y = \frac{\Sigma\ Wi\ \ Yi}{\Sigma Wi}$$

X,　Y：人口重心の経度，緯度

Xi，Yi：基本単位区ごとの面積の中心点の経度，緯度

Wi　：基本単位区ごとの人口

基本単位区を１ｋ㎡や市町村，都道府県と変えることで，より広い地域の人口重心を求めることが可能である。

人口重心は様々な社会的問題を分析する際に用いられる。例えば，日本全体の人口重心は５年ごとの調査で少しずつ東に移動しているが，これは東京に一極集中化しているデータとなる。また，市町村ごとにみたときには，各市町村の人口重心の位置と公共施設（病院や役所，役場等）の位置がどのくらい離れているのかなどの調査にも用いられる。

3.2　基本認識論モデルから視た人口重心の知の構成

本節では，上述した人口重心という対象について，第２章で設定した REM（基本認識論モデル）を基に，分析を行う。

人口重心を求める過程には，２つの段階が想定される。

まず，構成要素である，「基本単位区ごとの面積の中心点」を定める必要がある。これは，実際には，市町村よりもさらに小規模な街区などの面積の中心点を算出するが，街区ごとのデータは総務省統計局からは公開されていないため，一般に求めようとするときには，公開されているデータから市町村ごとの面積の中心点を，最小の「基本単位区の面積の中心点」として求めることができる。ここでいう，「面積の中心点」とは，面積の重心のことである。当然であるが，各市町村の形は高さなどの凹凸を考えず，平面図形であるとしたときに，単純な多角形の形ではない。そのような形であっても，人口重心を求めるためには，面積の重心を求める必要がある。

そして，基本単位区毎の面積の中心点を算出することができたら，次にはその点に人口１人あたり１の重みをつけて人口重心を算出する段階がある。これは，ある点（位置）ごとに別々の重みを考え，その重さの比によって求めるということであるが，これは，質点の重心の考えを用いている。それぞれの点に別々の重さを考えてその比を計算する過程は，第２章の図 2.2.1.2 と全く同じである。

したがって，人口重心を算出する過程には，面積の重心を求めることと質点の重心の考えを用いるという２つの重心の解釈による求め方を行う必要がある。

第３章の要約

人口重心とは，人口の１人１人が同じ重さを持つと仮定して，その地域内の人口が，全体として平衡を保つことのできる点であり，それらは総務省統計局によって公開されているデータから求めることができる。

人口重心を求める過程には，面積の重心と質点の重心という２つの異なる重心の解釈による求め方を行う必要がある。

第４章
世界探究パラダイムに基づいた SRP と人口重心

本章では,「重心」を教材とする授業を構成するための本研究の立場とする，世界探究パラダイムについて，現行の記念碑訪問主義にもふれながら述べる。また，そのようなパラダイムを前提とした教授 - 学習の定式化を行った Study and Research Paths について記述したうえで，その可能性について述べる。

4.1 では，現行の記念碑訪問主義と世界探究パラダイムについて記述する。

4.2 では，　世界探究パラダイムに基づいた教授・学習の過程を定式化した，SRP について説明する。

4.3 では，SRP に基づいた授業の設計・分析を行う理由を述べる。

4.1　記念碑訪問主義と世界探究パラダイム

ATD では,「何を学習すべきか―何が教授争点 O になりうるのか―, そして何がその争点を学習する形態となるのかを暗黙裡に規定する規則の集まり」のことを「教授パラダイム (didactic paradigm)」とよぶ（Chevallard, 2015, p.174)。今日における学習指導のパラダイムを「記念碑訪問主義(monumentalism)」もしくは「作品訪問(visiting works)」とよび, それに代わる新しいパラダイムを「世界探究パラダイム(questioning the world)」とよぶ。

次節以降では, この記念碑訪問主義と世界探究パラダイムに焦点をあて, 重心に関する主体的な学習を前提とした授業の設計の理論的基盤を構築する。

4.1.1　記念碑訪問主義

記念碑訪問主義は現在行われているような, 作品 (学習内容) によってカリキュラムが定められているようなパラダイムである。最も古い教授パラダイムは, 例えばユークリッドの「原論」などの偉人によってつくられた知識の体系を学ぶことが行われていた。このようなものを「名作賞賛」パラダイムと呼ばれている。それが次第に「偉大な体系」について学ぶような学校パラダイムに取って代わられていった。これらはすべて,「作品訪問」パラダイムまたは「記念碑訪問」パラダイムと呼ばれている。このパラダイムの中では, 授業者はまさに記念碑（作品）を学習者に訪問させるためのガイドとしての役割を担うようなふるまいをとり, 学習者を知識の体系へと導く。したがって, 学習者が何を学ぶかは授業者や教育システムつまり学習指導要領をつくる人間によって決められる。したがって, カリキュラムは, 複数の作品（内容）によって決められる。

このパラダイムでは, 複数の偉人によって作られた様々な作品（学ぶ内容）を小さな部分にわけ, 順々に学習する。そのた

め，知識の存在理由がなく，「なぜそれが起こったのか？」や「その有用性は何か？」といったことは，一般的に答えられることのない問いとなる。しかしながら，学習者には学ぶ作品に対して，感嘆し，それを楽しむことが期待される。このような状態の長期的な結果としてシュバラール（2016）は様々な作品がゴミ箱の原理（指導された知識はすべて試験などが終わった時に忘れ去られたり，無視されたりする）によって残骸になると述べている。

4.1.2　世界探究パラダイム

記念碑訪問主義に対するカウンターパラダイムとして，世界探究パラダイムがある。このパラダイムでは，学習者が科学者の態度とされている探究の態度となることを目指す。したがって，何を学ぶかは学習者による必然性によって決められるため，授業者によって導かれるのではなく，学習者自らが決める。そのため，教師はガイドの役割ではなく，（後述するような）ひとつのミリューとして存在する。

このパラダイムの記念碑訪問主義との決定的な違いは，生涯教育も含めたパラダイムであるということである。誰かに導かれるということを前提としていないため，学習者は場所を問わず，幼児から老人まで考えられる。そしてこのパラダイムにおける活動は，既に知られた作品から学ぶのではなく，ある問いに対して，それに答えるために新たな問いを生んだり，発見した作品をもとに自身の答えを求めたりすることが行われる。そこではひとつひとつの作品に存在理由が伴って学習される。したがって，カリキュラムは学習者に自然である複数の問いによって決められる。

4.1.3　教授学的状況理論

本節では，先述したミリューや，教師からの指導がない真に

主体的な学習を行っている状況について分析するために，教授・学習にかかわる状況・場という視点を得るための教授学的状況理論 Theory of Didactical Situations（以下，TDS）について述べる。そのため，特に，TDS における①教授学的状況と亜教授学的状況の関係とその構成要素，②教授学的契約という２つについて述べる。

TDS では，教授学的状況について教師・学習者（主体）・ミリュー という構成要素を基に以下のように定める。

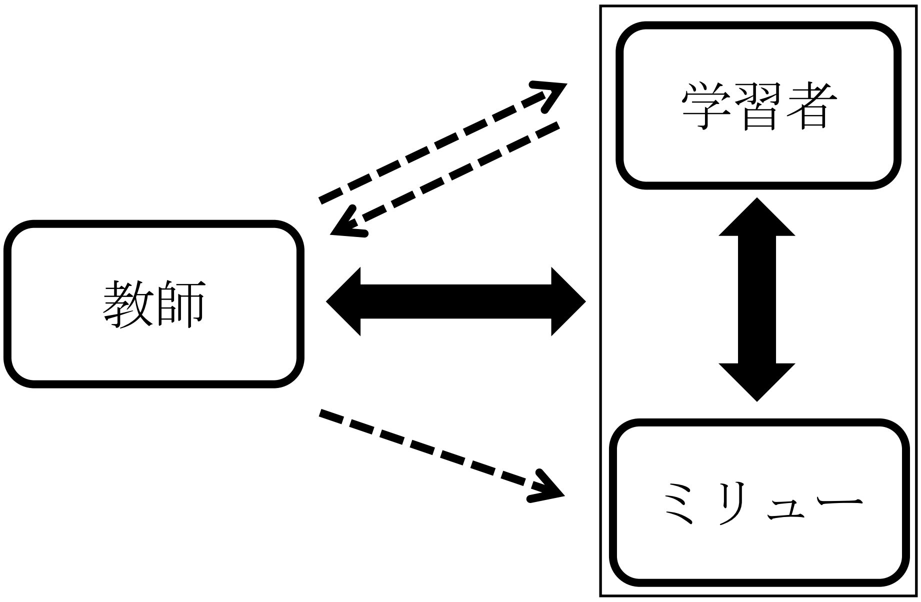
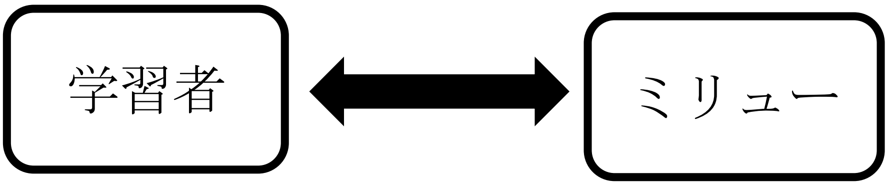


図 4.1.3.1　教授学的状況

ミリューとは，日本語では環境と訳されるが，具体的には 1 本のペンであったり，あるクラスの状況だったりと様々であるが，宮川(2002)は「学習者が何らかの働きかけ(作用)をすればそれに対し何らかの情報や反発(反作用)を与えるもの」と述べている。上記の状況は，学校の授業を想定するのであれば，学習者とミリューの相互作用に教師が事前（授業設計），あるいはその状況（授業中）において関わることを示している。このような教授学的状況に対して，図 4.1.2.2 のような教師がかかわらない状況を亜教授学的状況という。



4.1.3.2　亜教授学的状況

このような，状況における活動を主体的な活動と呼ぶ。本研究では，現在行われていない内容を対象とする学習の状況について，主体的な活動を前提として，学習者が自然にどのような問いを立てたり，自らが立てた問いに対する回答を探究するのかを分析することを目的とする。この目的を達成するこで，研究課題についても達成すると考えられる。

また，TDS では，ある授業において学習者が教師から問題を提示されることを期待して待っていたり，提示した問題について教師は生徒が静かに説くことを期待するような教師と学習者の互恵的な責務について教授学的契約と呼ぶ。このような教授学的契約は授業を成立させるうえで避けることのできないものであるが，必ずしも学習についていい影響があるわけではない。例えば，学習者は授業の中で，教師が期待している答えを考えながら問題の解決にあたることや，学習者が教師はいつも問題の回答を知っていると考えてしまうことである。このような教授学的契約のもとに行われる教授・学習における学習者は真理に対する担い手であるとはいいがたい。本研究が提案する問いとその問いに基づいた授業では，このような教授学的契約がない状況をつくり，それを前提とした活動が行われるように設計する。

4.2　Study and Research Paths

Study and Research Paths（以下，SRP）は上記の世界探究パラダイムに基づいた教授・学習の過程を定式化したものである。その構造として，以下のような要素が挙げられる。

１．数多く問いを生み出し，より多くの知識に出会えるような“生成的な強い力”をもった一つの問い Q_0 から始まる
２．この問い Q_0 に答えるために様々なメディアをもとに考察を繰り返し，いくつかの関連する問い Q_1，Q_2…を生じる
３．いくつかの関連する問い Q_1，Q_2…についての問い $Q_{1.1}$，$Q_{2.1}$…や回答 $A^{\diamond}$ を得る
４．２，３を繰り返すことで問い Q_0 に対する最終的な自分なりの回答 $A^{\heartsuit}$ を作る

上のような構造の過程を経るSRPにはいくつかの種類が考えられる。例えば,

・オープンな SRP：探究がどこに行くか事前に決めずに進める SRP
・目的づけられた SRP：何らかの教えるべき対象が存在し，それが探究の過程で生じるように設定した SRP

筆者らが本研究に用いろうとするのは，まさに，目的づけられた SRP であり，その対象が「重心」である。
また，SRP のための最初の問い Q_0 が満たすべき条件として，Garcia ら(2006)は次の３つの条件を挙げている

①数学的合法性
（教授争点として狙われるべき数学の核心をついた内容である

こと）
②社会的合法性
（数学や学校を超え，社会や世界と関連した内容であること）
③機能的合法性
（数学的関心や他の学問的関心に基づく新たな探究へと導く内容であること）

つまり，数学的な内容を含み，学習者にとって自然な問いであるために社会的な問題であり，問いQ_0に対する回答が出た後にさらなる探究が期待されるような問いであることが条件として挙げられている。

4.3　「重心」を教材とした SRP の可能性

本研究では，上記で示した ATD の範疇にある世界探究パラダイムにおける SRP を前提とした授業を設計し，その活動を分析する。

授業の設計についての理由としては，まず，現行の数学教育のカリキュラムにおいて，一般の平面図形に関する「重心」を求める活動が行われていないことにある。三角形の重心についてのみ扱われる現行のカリキュラムの中で学習を進めてきた学習者は 2.2.4 で述べたように，一般の平面図形に関する「重心」について求めることは容易ではない。したがって，学習の中で何度も「重心」について求める活動があるような授業を設計することで，知識を使いこなすようなまさに研究者のような態度を求める学習を期待する。

また，学習者にとって「重心」の考えが容易であるのかを分析することが分析を行う理由である。第 3 章で示した人口重心は，面積の重心と質点の重心という 2 通りの異なる重心の解釈による求め方を必要とする。それら 2 通りの異なる重心の解釈が学習者にとって，学習を進める上で自然に関連付けられたり，「重心」として統合されたりするような活動が見られるのかを分析する。そのためには，授業の設計において，授業者が学習者に対して「重心」として統合を促すような支援を行ってはならないため，学習者が真に主体的な学習を行っている活動を分析しなければならない。そこで，現在行われているような記念碑訪問主義を前提とした授業ではなく，世界探究パラダイムを前提とした SRP による授業を設計することが求められる。

第４章の要約

現在行われているのは記念碑訪問主義というカリキュラムが複数の作品（内容）によって決められた授業であり，そこでは知識の存在理由が問われることは一般にはない。

記念碑訪問主義のカウンターパラダイムとして世界探究パラダイムがあり，このパラダイムではカリキュラムは複数の問いによって構成される。また，学習者には科学者の態度とされている探究の態度が求められる。

この世界探究パラダイムを前提とした教授・学習の過程を定式化したものとして SRP がある。それは，生成的な強い力をもった問い Q_0 から授業が始まり，教師はガイドではなく，ミリューとして位置づく。生成的な強い力をもった問いの条件として，①数学的合法性，②社会的合法性，③機能的合法性が挙げれる。

このような SRP に基づく授業の設計・分析を行う理由として，現在のような学習者が一般の平面図形に関する「重心」について求める活動を行うことで，より「重心」について理解することが期待されることと，真に主体的な活動の分析を通して学習者は活動の中で，自然に，異なる重心の解釈を認識することができるのかを理解することの２つの理由が挙げられる。

第５章
人口重心に関する問いの提案

本章では，３章で示した人口重心について，４章で述べた世界探究パラダイムに基づいたSRP を前提とした授業を構想するための問いを提案し，プラクセオロジーの枠組みを用いて分析する。

5.1 では，本研究が提案する問いについて提示する。

5.2 では，提案する問いに対して，学習者が行う探究活動をアプリオリ分析する。

5.3 では，提案する問いをもとに行われた授業に関して，アポステリオリ分析する。

5.4 では，アポステリオリ分析などから視えてきた「重心」のカリキュラムに関する考察，検討を行う。

5.1　SRP に基づく人口重心に関する問い

第 4 章では SRP のための生成的な強い力をもった問い Q_0 の３つの条件を述べた。

①数学的合法性
（教授争点として狙われるべき数学の核心をついた内容であること）
②社会的合法性
（数学や学校を超え，社会や世界と関連した内容であること）
③機能的合法性
（数学的関心や他の学問的関心に基づく新たな探究へと導く内容であること）

上記の条件に合う生成的な強い力をもった問い Q_0 として，本研究では以下の問いを提案する。

問い Q_0：鳥取県の人口重心の位置が 2000 年から現在 2017 年ではどのように変化しているか

この提案する問い Q_0 が３つの条件を満たしている理由について記述する。

まず，①数学的合法性であるが，異なる重心の解釈があることが，学術的知識として位置づいており，数学の核心をついたものであることは明らかである。

次に，②社会的合法性であるが，第３章でも述べたように，人口重心はそれを求める目的として，ある地域における人口重心の点に対して病院などの公共施設がどのように分布しているかを分析したり，人口重心がどのように移動しているかによって，人口がどのような割合で移動しているのかを分析したりすることが可能である。例えば，1995 年から 2010 年にかけて，

人口重心は東経 136 度 45 分 46 秒　北緯 35 度 39 分 46 秒から東経 137 度 01 分 45 秒　北緯 35 度 35 分 35 秒へと少しずつ南東へ移動しており，これによって人口が全国的に見て東京周辺に集中しつつあることの根拠の一つとなる。

また，③機能的合法性について，詳細は後述するが，この問いに対する回答が得られた後には，「なぜそのように移動しているのか？」や「他の都道府県，地方ではどうなっているのだろうか？」といった様々な問いが生み出されることが期待される。

したがって，この問いは生成的な強い力をもった問い Q_0 の３つの条件を満たしている。

また，この問いに対する回答を作り出す過程において，２通りの異なる重心の解釈による求め方を繰り返し用いる必要があり，それによって，現在の学習者の重心に対する理解をより促進することを期待する。

5.2　提案する問いに対するアプリオリ分析

本節では，前節で提案した問いに対するアプリオリ分析を行う。

まず，学習を始める前の前提として学習者にもともと備わっているべき探究者の装備 praxeological equipment について述べる。

次に，実際に行う授業の設計について記述する。さらに，実際にどのように行われたかについても記述する。

最後に，活動のアプリオリ分析を行う。これは，本研究が提案する問いが，必要な探究者の装備が備わっていることを前提とした学習者によって探究されるとき，どのような活動が行われるのかを先験的に分析するものである。

5.2.1　探究者のプラクセオロジー装備（praxeological equipment）

提案する問いについて，前節までに述べた人口重心の性質や算出方法を理解するにあたり，学習者の探究について，探究者の知的装備（プラクセオロジーとしては，探究者のプラクセオロジー装備 praxeological equipment）を示しておく。これは，探究のうえで，基本的に必要である素地となるものである。

日本で現在扱われている人口重心を算出する式はすでに示してあるが，その意味を理解するために，以下の２つの知識に関する理解が必要である。

①「Σ」が総和であることの理解
②「cosXi」が三角比の余弦であることの理解

例えば，本研究が提案する問いを中学生以下に示し，中学生が探究を行っても，「Σ」や「cos X」とは何かということが問いとして生まれ，意図している「重心」でないところに教授争

点が存在してしまうと考えられる。したがって，上記の２つの知識に関する理解は本研究が提案する問いに対する探究を行う上で必要な前提，すなわち探究者の装備であるといえる。

また，実際に算出するにあたっては，緯度経度の表記方法に 10 進法のみの表記方法と「分」や「秒」を用いた 60 進法も含まれる表記方法の２通りの表記方法があることについて理解することができることも「重心」でない教授争点として存在することが考えられる。例えば，2010 年の日本の人口重心は東経 137 度 01 分 45.46 秒，北緯 35 度 35 分 35.31 秒であるが，東経 137.029179 度　北緯 35.593064 度も同じ位置を示している。この 2 つの表記方法について，最低限，「異なる表記方法である」という理解があるだけでよい。つまり，2 通りの表記方法のうち，どちらかの表記方法をもう 1 つの表記方法に変換するための知識は学習者は持ち合わせていなくてよい。その理由は，メディアには，どちらかの表記方法を打ち込むと自動でもう 1 つの表記方法へと計算し，変換するもの（ウェブサイト）が存在するためである。したがって，2 通りの表記方法を変換しながら使いこなすまでの知識は要らない。むしろ必要であるのは，そのようなメディアにたどり着くためのメディアに対するアプローチである。これについてシュバラール（2016）は，「探究者の知的装備(中略)は，オンラインやオフラインの資料の場所をうまく突き止める能力と，それらをうまく活かすために必要な知識という，二本の柱に支えられている」と述べており，この 2 通りの表記方法を変換するウェブサイトにたどり着く能力が必要であるということである。ただし，これは本研究の提案する問いに対する活動を行ううえで必要であるかどうかを述べているだけであり，2 通りの表記方法の変換には数学教育において扱ったり，考えたりする必要がないというような主張ではない。

5.2.2　授業の設計

本節では，本研究が提案する問いを提示する授業の展開やその実際について記述する。

前節で述べたように，授業は数学 I の「図形と計量」における三角比に関する知識と数学 B の「数列」における総和を求める意味である記号，Σについての知識が既習である者を対象とするため，一般的には高校 2 年生以降の者が対象となる。

また，本研究が授業を設計するうえで前提としている世界探究パラダイムに基づいた授業について，問いに対する探究を進めるうえで学習者は何を行ってよいかや，授業者はどのような存在であるかを授業者と学習者の間で決めておかなければならない。つまり，教授学的状況理論 Theory of Didactical Situations における語を用いるならば，教授学的契約 didactical contract を結んでおく必要がある。そこで，学習者には本研究が提案する問いに基づいた授業を行う前に，第 4 章で述べた記念碑訪問主義と世界探究パラダイムについて説明をする。

そして，本研究が提案する問いに基づく授業の対象である学生に事前の授業を行った。その対象，時期及び授業で扱った問いは以下のとおりである。

授業の対象：国立大学学生（1,2,3 年生）54 名
授業の時期：2017 年 5 月
授業の問い Q_0：日本で新聞紙を発行するために 1 年間でどのくらいの木が伐採されているか

この授業を行う目的は，以下のような教授学的契約を結ぶことにある。それは，学習者が探究を行う際には，インターネットや本などの使えるものは何でも使っていいことや，授業者は問い Q_0 に対する答えを持っておらず，「新聞紙とはどのくらい

の大きさであるか」などのメディアとしての働きを行うような質問に対しては答えることがあっても，「どのような活動を行えばいいのか」などの次の活動の提示を求めるような質問に対しては答えることができない，というような教授学的契約である。。

本研究が提案する問いに基づいた授業の対象と時期については以下のとおりである。

授業の対象：国立大学大学生（1,2,3 年生）54 名（事前授業と同じ学生）1 グループ 4 〜 5 名の計１２グループ
授業の時期：1 時，2 時ともに 2017 年 6 月
第 1 時　問いの提示，グループ活動
第 2 時　ポスター発表
授業の問い Q_0：鳥取県の人口重心の位置が 2000 年から現在 2017 年ではどのように変化しているか

第 1 時，２時ともに 1 時間 30 分をかけて行われた。

第 1 時の授業の導入においては，学生らに提案する問いが自然となるように，授業者が「日本のへそはどこだろうか」ということを学習者らに問う。そして，学習者らとのやりとりから，単に平面図形としての真ん中の意味ではなく，人間の集まりの意味も含めた意味としての「へそ」であることを確認する。そのような意味を含む「へそ」という言葉が，社会的には「人口重心」という言葉として存在することを示し，本研究が提案する問い Q_0を提示する。このとき，人口重心とはどのような算出方法を用いるか，重心とはどのように考えることができるのかについては説明しない。そこから，４〜５名のグループの計１２グループとなって活動を行う。

第 2 時はすべてのグループがポスターを作り終えたうえで始まり，各グループから発表者と他のグループの発表を聞く者と分けてもらい，１時間をかけてポスター発表が行われた。

グループでの活動を行った理由としては，この授業の設計に，ポスター発表を行ってもらうことにある。学習者グループによってつくられたポスターを，探究の活動過程を分析するための資料として残しておくことができる。ポスターには，複数の人数によって行われた探究について，その協働や議論の過程が顕在化しやすくなる効果がある。したがってポスターをつくる必要が本授業設計における制約となっていた。

5.2.3　授業の実際

前節で設計した授業は次項のような指導案を基に行われた。なお，この指導案に位置づく「支援」とは，一般の授業でいわれる「支援」とは異なり，次への活動の支援だけでなく，次なる問いの連鎖のための支援である。

問 Q_0：鳥取県の人口重心の位置が 2000 年から現在 2017 年ではどのように変化しているか

期待する活動 A：メディアから各年の人口重心を調べ、2017 年の位置を推測して求める

○A1：メディアの「総務省統計局」の HP から求める

2000 年：東経 133 度 47 分 34 秒
北緯 35 度 27 分 05 秒

2005 年：東経 133 度 47 分 02 秒
北緯 35 度 27 分 14 秒

2010 年：東経 133 度 46 分 23 秒
北緯 35 度 27 分 18 秒

より特殊な支援：
「メディアを用いて 2000 年の人口重心を求めよう」

より一般的な支援：
「人口重心は毎年同じように移動していくと考えてよいのかな」
「人口重心はどのような要素から求められるかな」

期待する活動 B：人口重心を求める式から、2017 年の人口重心を求める

○B1：メディアにある「総務省統計局」の HP から算出方法を求める

$$X = \frac{\Sigma \mathrm{Wi\ Xi} \cos(\mathrm{Yi})}{\Sigma \mathrm{Wi} \cos(\mathrm{Yi})} \qquad Y = \frac{\Sigma \mathrm{Wi\ Yi}}{\Sigma \mathrm{Wi}}$$

X，Y ：人口重心の経度，緯度

Xi，Yi：基本単位区ごとの面積の中心点の経度，緯度

Wi ：基本単位区ごとの人口

※上記の数式は 2005 年から利用されたもの

2017 年：東経 133 度 46 分 44 秒北緯 35 度 27 分 17 秒

より特殊な支援：
「人口重心を求めるのに必要な式を求め、現在の人口重心を求めよう」

より一般的な支援：
「根拠とするデータは同じように比較してもよいかな」

より特殊な支援：
「2000 年の人口重心を現在の算出方法で求めよう」

期待する活動 C：データを修正し、2000 年から 2017 年までの人口重心を求める

○C1：2000 年のみ算出する式が異なることから、2000 年も現在の算出方法で求める

○C2：2000 年から現在までの各年ごとの人口重心の位置を求める

より一般的な支援：
「減少する各市町村の人口の割合から、今後の人口重心がどのように移動するかな」

5.2.4　活動のアプリオリ分析

前節までに述べた探究者のプラクセオロジー装備や授業を前提とした探究の過程では，以下のような問いが発生することが考えられる。

Q_{A1}：2000 年，2005 年，2010 年の鳥取県の人口重心は？

Q_{A2}：「東経～」や「北緯～」からわかることは？

$Q_{B1.1}$：重心とは？

↳$Q_{B1.2}$：質量中心はどうやったら求まるか

$Q_{B2.1}$：人口重心とは？

↳$Q_{B2.2}$：人口重心の求め方とは？

↳$Q_{B2.3}$：「（基本単位区の）面積の中心点」は？

↳$Q_{B2.4}$：2017 年の（基本単位区の）人口は？

Q_{C3}：2017 年の鳥取県の人口重心の位置は？

上記の，Q_A とは人口重心がどのような要素や定義であるかを理解する前の問い，Q_B とは人口重心について理解するための問いや，それを用いようとする問いである。そして Q_C が問い Q_0 である。

また，上記の問い Q_A～Q_C までの問いに対する回答の一例を提示する。

Q_{A1}：2000 年，2005 年，2010 年の鳥取県の人口重心は？

⇒A_{A1}：2000 年　東経 133 度 47 分 34 秒　北緯 35 度 27 分 05 秒

2005 年　東経 133 度 47 分 02 秒　北緯 35 度 27 分 14 秒

2010 年　東経 133 度 46 分 23 秒　北緯 35 度 27 分 18 秒

Q_{A2}：「東経～」や「北緯～」からわかることは？

⇒A_{A2}：鳥取県中部にあった人口重心の位置が，北西に移動している。

$Q_{B1.1}$：重心とは？

⇒$A_{B1.1}$：物体の各部に働く重力をただ１つの力で代表させるとき，それが作用する点。質量中心。

↳$Q_{B1.2}$：質量中心はどうやったら求まるか？

⇒$A_{B1.2}$：Σを含んだ計算式によって求まる。

$Q_{B2.1}$：人口重心とは？

⇒$A_{B2.1}$：人口の１人１人が同じ重さを持つと仮定して，その地域内の人口が，全体として平衡を保つことのできる点。

↳$Q_{B2.2}$：人口重心の求め方とは？

⇒$A_{B2.2}$：以下の構成要素（データ）と計算式。

$$X = \frac{\Sigma\ Wi\ \ Xi\ \ \cos(Yi)}{\Sigma\ \ Wi\ \ \cos(Yi)} \qquad Y = \frac{\Sigma\ Wi\ Yi}{\Sigma Wi}$$

X,　Y：人口重心の経度，緯度

Xi，Yi：基本単位区ごとの面積の中心点の経度，緯度

Wi　：基本単位区ごとの人口

↳$Q_{B2.3}$：「（基本単位区の）面積の中心点」は？

⇒$A_{B2.3}$：各市町村を基本単位区として，各市町村の形を多角形にみなして重心を求める。

↳$Q_{B2.4}$：2017 年の（基本単位区の）人口は？

⇒$A_{B2.4}$：鳥取市が 189,912 人で……。

Q_{C3}：2017 年の鳥取県の人口重心の位置は？

⇒A_{C3}：$A_{B2.2}$ で得られた式に $A_{B2.3}$ によって得られたデータと$A_{B2.4}$ で得られたデータを当てはめることで求める。

上記のような問いと回答の往還が図 5.2.2.1 のような変遷を経られることが考えられ, 最終的には自分なりの回答 A♥が作られることが期待される。

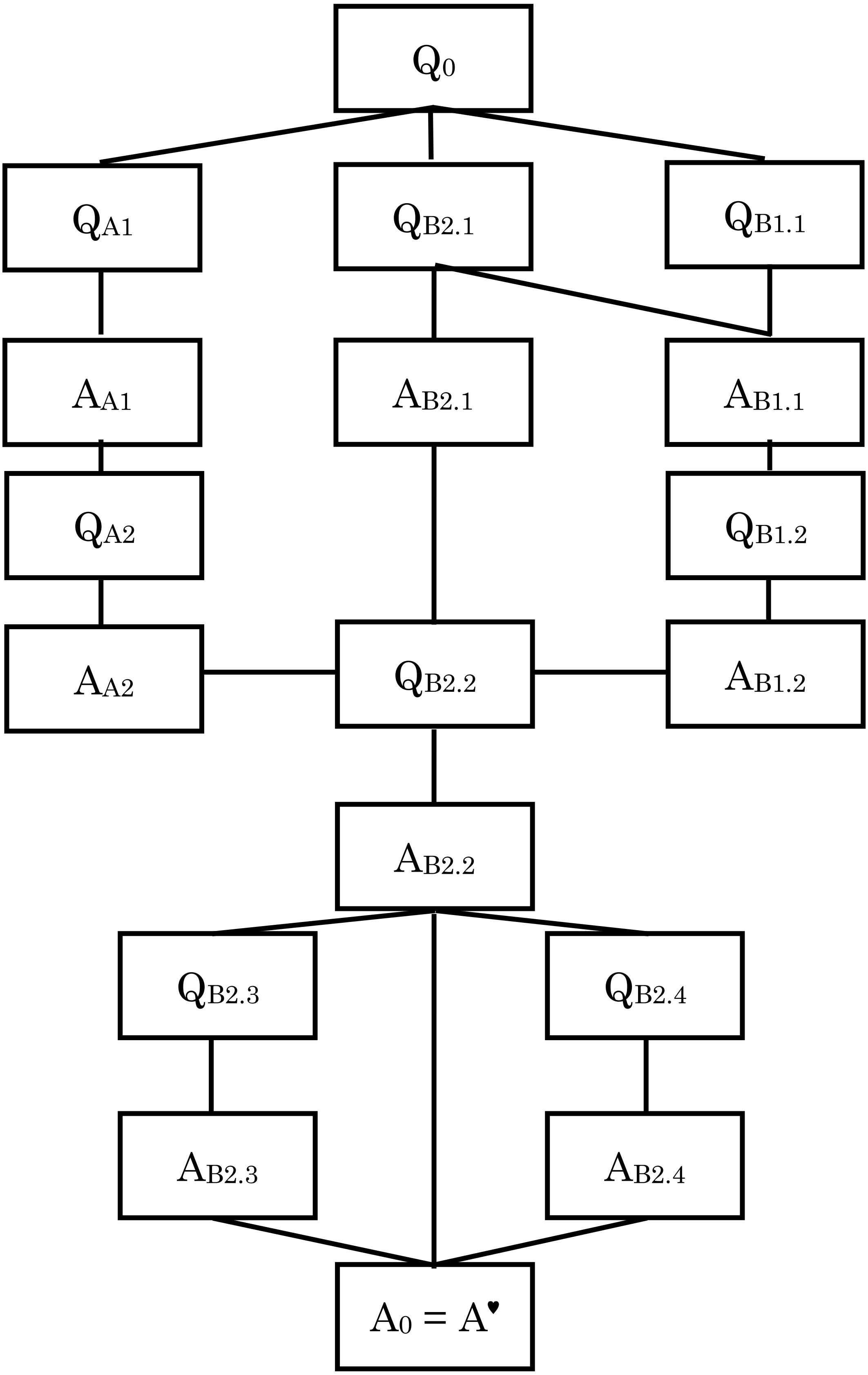


図 5.2.4.1　提案する問い Q_0 に対する探究のアプリオリ分析

本研究の考察の対象となるのは，$Q_{B2.3}$ と $Q_{B2.4}$～A_0 の平板の重心と質点の重心に関わるテクニックがどのように記述されるかである。

$Q_{B2.3}$ という面積の重心の考えをセオリーに必要とする対するテクニックとして，各市町村の地形を多角形にみなして，その多角形を三角形に分けたのち，三角形の重心を基に重心の位置を求めることが考えられる。これを行うにあたり，ウェブサイトでは，20 角形の頂点の座標を入力すれば，その面積の重心を求めるものもあるため，これを用いることも考えられる。または，面積の重心の位置は経年変化しないため，過去のデータを用いるということも考えられる。したがって，プラクセオロジー分析としては，以下の表 5.2.2.1，表 5.2.2.2 のようになる。

表 5.2.4.1　$Q_{B2.3}$ へのアプリオリなプラクセオロジー分析①

実践部	理論部
タスクタイプ： 「(基本単位区) の面積の中心点」は？	テクノロジー： 多角形は複数の三角形にわけ，三角形の重心を結ぶ線分の交点上にある
テクニック： 各市町村の形を多角形にみなし，三角形にわけ，三角形の重心を用いて求める。	セオリー： 面積の重心の考え

表 5.2.4.2　$Q_{B2.3}$ へのアプリオリなプラクセオロジー分析②

実践部	理論部
タスクタイプ： 「(基本単位区) の面積の中心点」は？	テクノロジー： 面積の中心点は経年変化しない。
テクニック： 過去のデータを参照する。	セオリー： 面積の重心の考え

$Q_{B2.4}$～A_0 という質点の重心の考えをセオリーに必要とするテクニックは，定められた式を基に計算するということが考えられる。この過程のプラクセオロジー分析は表 5.2.2.3 のようになる。これはおそらく行われることであるが，それが質点の重心の考え，つまり，てこの法則のような重さの逆比によって求めていると捉えられるかについてアポステリオリ分析で明らかにしたい。

表 5.2.4.3　$Q_{B2.4}$～A_0 のアプリオリなプラクセオロジー分析

実践部	理論部
タスクタイプ： **鳥取県の 2017 年の人口重心を求める。**	テクノロジー： 各市町村の面積の中心点に人口の重さを考え，その平均をとる。
テクニック： **人口重心の定義の式を基に，算出する。**	セオリー： 質点の重心の考え

5.3　提案する問いに対する活動のアポステリオリ分析

本節では提案した問いに基づいた授業で実際に行われた活動についてプラクセオロジーを用いて分析する。

実際に行われた授業において，ポスター発表で2017年の人口重心について求める活動が行われたのは12のグループのうち，3グループであった。また，過去の人口重心のデータから，北西に移動すると予想する A_{A2} で終わっていたグループが7グループで，人口重心の解釈を捉え間違えていたのが1グループ，発表が行えなかったのが1グループであった。

このような状況になった原因として，問題の側面からは，人口重心というものが学習者にとって身近ではなかったこと，つまり社会的合法性が弱かったことが考えられる。つまり，学習者にとって本研究が提案する問いが自然なものではなく，遠いものであったことが考えられる。

また，活動の側面からの原因としては，多くのグループが過去のデータを受けて，予想することで止まってしまい，実際に求めることが行われなかったことが挙げられる。つまり，予想した結果が妥当なものであるのかを検証するような活動が行われなかったということである。これは，例えば，学習者が科学者の態度を目指す過程にあり，つまり，探究を行うことに未熟であったため，検証を行う必要性を感じなかったことなどが原因であると考えられる。

そのなかでも最も数学的に探究活動が行われたグループの問いは以下のようであった。

Q_1：人口重心とは？
Q_2：人口重心の求め方とは？
Q_3：各市町村の人口は？
Q_4：各市町村の面積の中心点は？
Q_5：2000年と2017年の人口重心の位置は？

これらはおおよそアプリオリ分析と同じであった。このグループ（以下，グループ１）の活動についてプラクセオロジー分析を行う。

グループ１の問い Q_4の面積の重心に関するテクニックとして，「τ_4：各市町村の東端と西端の経度の平均，北端と南端の緯度の平均を面積の中心点とする」という方法を用いていた。これは，アプリオリ分析にある「多角形にみなす」ということではあったが，長方形にみなしているため，例えば下の図 5.3.1 のように明らかに面積の中心点ではないことが考えられる。これについては，グループ１の学習者 institution も理解していたが，「他にどうすればいいかわからない」と説明していた。

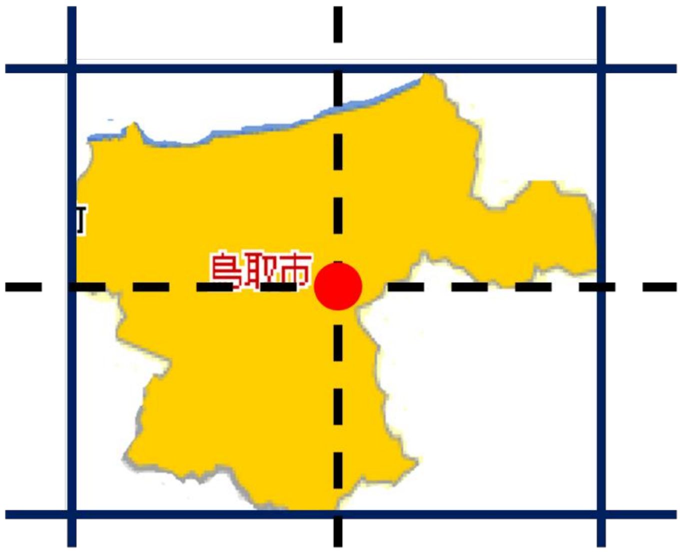


図 5.3.1 グループ１の鳥取市の面積の重心を求めるテクニック

表 5.3.1　グループ１の Q_4のプラクセオロジー分析

実践部	理論部
タスクタイプ： **各市町村の面積の中心点は？**	テクノロジー： 長方形の面積の重心は上下左右の両端の平均（対角線の交点）
テクニック： **各市町村の図形を長方形にみなして中心を求める**	セオリー： 面積の重心の考え （平板の重心の定義）

その後に，質点の重心に基づいた求め方は，他の人口重心を求める活動を行ったグループも含めて，人口重心を求める式に基づいて行われていた。

以上のことから，平面図形の面積の重心については求めることが容易ではなく，その方法についても主体的な活動においては探究を行えなかったということが明らかになった。

また，人口重心について求めていた３グループや他のグループにおいて，面積の重心と質点の重心という２通りの異なる重心の解釈による求め方についてポスター発表の中で筆者が説明を行った際，学習者 institution はそのように考えることはなかったと述べていた。したがって，この２通りの求め方が「重心」として１つの概念に統合されることはなかったということが明らかになった。

5.4　カリキュラムとなる問いの検討

前節でも述べたように，本研究が提案した問いは学習者にとって自然な問いではなかったことが考えられる。

また，活動の分析を行った結果，面積の重心の考えを用いて多角形の重心を求めることは容易でないことが明らかになった。さらに本研究が提案する問いでは，平板（面積）の重心と質点（頂点）の重心の考えが学習者によって自然に，「重心」として統合されるような活動が行われないということも明らかになった。

以上のことから，本研究が提案する問いはカリキュラムにとしてどのように位置づくのかについて考察する。グループ１の学習者 institution が行った面積の中心点を求める活動のプラクセオロジーのセオリーは平板の重心の定義そのものであった。それは，多角形の面積の重心については本研究が提案する問いについて探究を行った学習者であっても求めることができない状況である。しかしながら，この「多角形の面積の中心点（面積の重心）を求めることができていない」ということがさらなる問いを生むと考えられる。つまり，本研究が提案する問いの次に，「多角形の面積の重心」が核心となっているような問い Q_0 に続くことが予測される。例えば，「鳥取市の形をしたコマを回すには，どこに芯をさせばいいのか？」のような問いが次に続き，その中でさらに「重心」を使いこなしていきながら理解が促されることが期待される。記念碑訪問主義では作品（内容）によって構成されたカリキュラムが，世界探究パラダイムでは上記のような問いの連鎖がカリキュラムになると考えられる。そして，そのようなカリキュラムの問いに対する活動の中で，グループ１に見られた面積の中心点を求める活動のセオリーが平板の重心の定義であったところから，より高次のものに高められ，学習者にとって定義まで戻らなくとも多角形の面積の重心が求められるようになることが期待される。

第5章の要約

本研究が提案する問い Q_0 は「鳥取県の人口重心の位置が 2000 年から現在 2017 年ではどのように変化しているか」というものである。

この問いに対する探究の活動を分析すると，面積の重心の考えを用いて多角形の重心を求めることは容易でないことが明らかになった。また，本研究が提案する問いでは，平板（面積）の重心と質点（頂点）の重心の考えが学習者が主体的に行う活動の中で自然に，「重心」として統合されるような活動が行われないということも明らかになった。

多くのグループが過去のデータからの予想で終わっており，検証がなされていなかった。それは科学者の態度がまだ備わっていないということが原因として考えられた。

また，本研究に続く問い Q_0 が例えば「鳥取市の形をしたコマを回すには，どこに芯をさせばいいのか？」のような多角形の面積の重心についてさらに探究する活動が行われるような問いが連鎖することによって，本研究が提案した問い自体もカリキュラムとして位置づくのではないかと考えられた。

終章
本研究の結論と残された課題

6.1　本研究の結論
6.2　残された課題

　本章では，本研究で得られた現行の「重心」に関するカリキュラムの問題点と，それに対する問いとして得られたことを結論として述べる。また，その中で残された課題についても述べる。

6.1 では，本研究で明らかにされたことについて述べる。
6.2 では，本研究ではまだ不十分な点について残された課題として記述する。

6.1　本研究の結論

序章で示したように本研究の研究課題は以下の２つであった

（１）現在の学習者の実態は，重心という教材に関するどのような教授方法の帰結として認められるか

（２）現行のカリキュラムでは教えられておらず，扱われない一般の平面図形における多角形の重心について，学習者はどのような活動をすることが可能であるか

上記の研究課題について，その結論を整理する。まず，（１）について，第 2 章で述べたように教授学的転置の過程を視ることで「重心」に関する様々な institution による知の構成について分析した。要約すれば，「学術的知識」として質点の重心，線分の重心，平板の重心があるが，「教えられるべき知識」では，以前は扱われていたものの，現在では扱われておらず，「三角形の」重心のみが扱われており，定義に重さの意味は含まない。しかしながら，教科書などに掲載されている「教えられた知識」では重さの意味付けをするような挿絵が載せられている。そして，学習者は三角形の重心については求めることができるものの，それを一般化して四角形の重心について求めることは困難であった。これらの状況を分析するとカリキュラム上の問題として①豊かな「重心」の解釈を求める方法が失われていること，②教科書では暗黙的に 2 通りの異なる重心の解釈が載せられていることの 2 点が明らかになった。

また，（２）については第３章～第５章までで問いを提案し，その問いに基づいた授業の設計・分析を行った。その結果として，多角形の面積の重心を求めることが容易ではないこと，学習者が主体的に活動を行ったときには自然に質点（頂点）の重心の考えと平板（面積）の重心の考えをひとつの「重心」として統合するような活動が見られないことが明らかになった。し

たがって，本研究が提案する問い Q_0「鳥取県の人口重心の位置は 2000 年から現在 2017 年ではどのように変化しているのか」に連鎖する問いがあり，それが世界探究パラダイムにおいてはカリキュラムとなると考えられた。

6.2　残された課題

本研究では，まだ明らかになっておらず，「指摘される」や「期待される」というようなところが多分にある。それらの点についてはより詳細に分析する必要がある。

また，本研究が提案した問い Q_0 に連鎖する問いがどのようなものであるべきかやその順序については分析を行うことができていない。

参考・引用文献

aedibus B. G. Teubneri（1881）*Archimedis Opera Omnia : cum commentariis Eutocii. e codice florentino recensuit* . latine uertit notisque illustravit J. L. Heiberg

Bosch，M. &Gascón，J.(2006)．Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*, no.58, pp. 51-65.

Bosch，M. &Gascón，J. (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Switzerland: Spinger

ボイヤー（著)，加賀美鐵雄・浦野由有（訳）(1984)．『数学の歴史 2』. 朝倉書店

Brousseau，G. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chvallard，Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counterparadigm. In S.J. Cho（Ed.）*The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematics Education* (pp.173-187). Switzerland: Springer. 〔シュバラール，Y. (2016). 大滝孝治・宮川健（訳）.「明日の社会における数学指導―来るべきカウンターパラダイムの弁護―」.『上越数学教育研究』, 第 31 号，pp.73-87.〕

Garcia, F.J., Gascon, J., Ruiz Higueras, L.,& Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. ZDM mathematics Education, 38(3),226-246

濱中裕明・大滝孝治・宮川健 (2016). 「世界探究パラダイムに基づく SRP における論証活動(2)―電卓を用いた実践を通して―」.全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 22 巻，第 2 号，pp.59-72

林栄治，斎藤憲（2009）『天秤の魔術師 アルキメデスの数学』.

共立出版
飯島康男（1988)「算数・数学の指導に取り入れる実験の意義」日本数学教育学会誌『臨時増刊，数学教育学論究』，49・50巻，pp.3-27
礒田正美（1987)．「体系化の立場から見た中２の図形指導」．日本数学教育学会誌『数学教育』，第 69 巻，pp323-332
彌永昌吉，伊藤俊太郎，佐藤徹（1979)．『数学の歴史Ⅰ　ギリシャの数学』共立出版
高校数学研究会(2010).『Ole！数学シリーズ　数学 A』新興出版社啓林館
栗田稔（1960)「問題遍歴Ⅱ　重心をめぐって」，日本数学教育学会誌『数学教育』42 巻，9 号,pp.153-155
松尾七重（1993)．「図形の概念形成の状態を特定するための視覚的モデル」．筑波数学教育研究，第 12 号 A,pp.53-62
M.B.Balk（著），鳥居一雄・宮本敏雄（訳）（1960)．『重心の概念の幾何への応用』．東京図書
宮川健（2002)．「教授学的状況理論に基づくコンセプションモデルに関する一考察」．筑波数学教育研究，第 21 号，pp.63-72
宮川健（2011)．「フランスを起源とする数 学教授学の「学」としての性格－わが国に おける「学」としての数学教育研究をめざしてー」．日本数学教育学会誌『数学教育 学論究』，第 94 巻，pp.37-68.
宮川健・濱中裕明・大滝孝治 (2016). 「世界探究パラダイムに基づく SRP における論証活動(１)―理論的考察を通して―」．第 22 巻，第 2 号，pp.25-36.
村上一三（1989)『数学教育における重心指導の問題点とそのあり方について』，日本数学教育学会誌『数学教育』，71 巻，9号,pp.352-362
杉山吉茂（1986)．『公理的方法に基づく算数・数学の学習指導』．東洋館出版

高橋陽一郎ほか（2011）『詳説　数学 A』．新興出版社啓林館

謝辞

本研究を進めるにあたり，鳥取大学や他大学の先生の方々，中学校の教員の方々，諸先輩や後輩など非常に多くの方々からご指導を賜りましたことを深く感謝いたします。

もともと，大学院に行くのではなく，教員になることを考えていた自分にとって，溝口先生や先輩である玉木さん，岸川さん，吾郷さん，和田さんなどに様々な話をしていただき，自分から大学院に行くことを決心して進めました。

大学院１年生の時は，中学校の非常勤講師やアルバイトなどで自分の研究が進まないことに危機感を感じながらも，数学を教えることの難しさと問題意識を持ち，中途半端なことにならないように励もうとしていました。しかしながら，研究の方向性を決めかねていたとき，溝口先生からご指導していただき，助けていただきました。特に，学部生の時から準備していたドイツでの ICME の参加に際し，溝口先生や中学校の先生である山脇先生にはとても助けていただきました。過去の自分からすれば，海外に行くこと自体が初めてでしたので，様々な経験ができたことは，今後の自分に活きると思います。

大学院２年生からは，研究の方向性も決まり，溝口先生の授業のなかで実践を行わせていただくなど，充実した 1 年間になったと思います。この一年間の中で，「研究とは何か」や，「理論とは何か」,「理論を用いて現象を捉えるとはどういうことか」等，数学教育学を学ぶことができたと思います。特に，学会に参加し，発表した時には，鳥取大学の OB でもある早田先生に研究としてたりないことについて指導していただけたり，ATD について大滝先生から教えていただけたりなど，他大学の先生からも指導していただき，本当に充実した１年間でした。

また，大学院の授業におきましては，矢部先生や土井先生からは自分の立場とは違った視点から様々なことを学ばせていただきました。私の理解が及ばない時には，何度も議論していた

だき，様々な例を示していただきながら教授していただくことによって，深く理解することができました。

　思えば，１つ上の先輩がおられないということから，先輩である岸川さんや吾郷さん，和田さんには学部生の時に本当に様々なことを教えていただきました。

　また，Lapin の会におきましては，山脇先生の「関数と方程式」という中学校の実践を交えた研究の過程を聞けたり，玉木さんの「動的な見方」という教材研究の一つの視点にもなり得る研究についても聞けたりと，様々なことを学ぶことができたと思います。来年からの自分も，教員という実践者であると同時に研究者としても努めてまいりたいと思います。

　また，後輩である若林さんと山本さんには夏合宿の準備や発表などで様々な仕事を任せたり，宿泊先に事前に行ったりといろいろなことをしました。本当にありがとうございました。

　そして最後になりますが，大学院に行くことに何も言わずに認めてくれた父親には感謝しております。私が高校生の時に亡くなった母親にも，様々なことを経験できたこの２年間のことを，胸を張って報告することができます。

　様々な方々からのご支援によってこのように１つの論文としてかたちにできたことに，繰り返しにはなりますが本当に深く感謝申し上げます。今後，教員として尽力していくことによって感謝を返すことができたら，と思います。

2018 年 1 月
院生室にて

鳥取大学数学教育研究　**ISSN 1881–6134**

Site URL　http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。

- 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，または その抜 粋・要約・抄録
- 算数・数学教育及び数学教育学に関わる，研究論文／実践報告
- 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
- その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決 定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDF とします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー(vol.9 以降)を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551 鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX 0857-31-5101(溝口)

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/