ISSN 1881–6134

鳥取大学数学教育研究
Tottori Journal for Research in Mathematics Education

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

数学教育における一般化に関する研究

–学習者の推論の仕方に焦点を当てて–

吾郷将樹　*Masaki Ago*

vol.19, no.1
Apr. 2016

鳥取大学 数学教育学研究室

目次

第1章　序章

本章では，研究の目的・方法を述べる。1.1 では本研究の目的と目的設定に至った背景を述べる。1.2 では目的を実現する為の方法を述べ，1.3 では本論文の構成について述べる。

1.1.　研究の目的

日々の数学学習において求められるスキルの 1 つとして，個々が創造的に思考し，問題解決を行うことがいわれている。Zazkis(2007)によれば、このスキルは特殊の中に一般をみる一般化の内容もその 1 つとして挙げることができると指摘されている。また，そうした一般化を行い発展させることは決して新たな問題などではなく, これまでにも多くの研究者によって強調されてきている。

例えば Davidov（1990）は,「子どもの一般化への発展は学校での指導の主要な目的の 1 つである」と指摘している。また Lee（1996）は,「代数，そして数学のすべてはまさにパターンを一般化することである」と述べている。さらに Mason（1996）は,「一般化は数学の心臓である。もし仮に教師がその存在に気付いていないならば, そして生徒自らが一般化を表現することを試みる習慣がないのであれば, そのとき数学的思考は生じないだろう」と述べている。

このことからも, 数学学習における一般化の重要性は広く認められているといえる。また実際に一般化は，数学の様々な場面で広く適用されるものであり, 代数の内容（Mason, 1996),幾何の内容（Yerushalmy，1993）問わず行われ，幅広い学年が対象ともされている。

しかしながら，そうした幅広い領域，学年が対象とされているということもあり, そこには一般化ができないという困難性も存在し, 一般化は多くの学習者にとって挑戦的課題であることも広く認められている。そしてこの現実は，教師を始め，数学教育に携わる者に次のような暗黙の問いをもたせているのではないだろうか。

どのようにすれば, 生徒を上手く一般化に導くことができるのだろうか。

この問いに答える為, 先行研究の中では一般化とはどういうものなのかについてのさらなる洗練がなされているといえる。その中のいくつかのものとして以下のものが挙げられる。

（1）一般化の異なる種類への分類。
（2）一般化へ向かう学習者の異なるアプローチの仕方の分類。

詳しくは第 2 章で述べるが，先行研究においてはこうした一般化の種類や一般化へ向かうアプローチの仕方にはいくつかあるということがいわれている。そしてこれらの分類により, 個々の学習者が行った一般化, もしくは一般化へ向かうアプローチの仕方にラベリングを施し, この学習者はどういう一般化を行ったのかという分析が行われている。

しかしその反面，これらの一般化，もしくは一般化へのアプローチの仕方の違いはどのような要因によって生じてきているのか, ということについてはあまり明らかにされてはいない。これよりどれだけ一般化, もしくは一般化へのアプローチの仕方の分類が行われたとしても, 教師が実際に授業の中で意図した一般化を学習者に促したい場合に, どういう働きかけをすればよいのかということが明確に示されていないといえる。

以上のことから先行研究の中では, 学習の中でみられた学習者の実態から一般化の種類, または一般化へ向かうアプローチの仕方についてより細かく分類が行われてきたことが伺える。ただし, 実際に指導する際の議論は不足しているのではないか。

本研究では，これまでの先行研究を踏まえ，このような一般化の違いは学習者の推論の仕方によって起こり得るものではないかと考えた。そこで，一般化へ向かう学習者の推論の仕方に着目することにより議論を行っていく。そして，一般化へ向かう学習者の推論の仕方を特徴付け, 一般化と学習者の推論の仕方との関係について考察を行う。さらにそれらのことを踏ま

え，どのような推論の仕方を行うことで，よりよい一般化が達成されるのかについて明らかにすることを目的とする。

1.2.　研究の方法

本研究は, 一般化へ向かう学習者の推論の仕方に焦点を当て, 一般化と学習者の推論の仕方との関係について考察を行い, どのような推論を行うことでよりよい一般化が達成されるのかについて明らかにすることが目的である。そしてこの目的を達成する為，以下に示す研究課題を設定した。そして，研究課題ごとの研究方法を記述する。

研究課題 1 : 一般化の違いは，どのような要因によって起こり得るのか

先ず先行研究より, 一般化にはどういう種類分けがなされているのか, どのようなアプローチの仕方があるとされているのかについて整理していく。また，そうした一般化に対して，これまで学習者はどのような一般化を行っていることが確認されているのか, またどういう方法で多様な一般化を捉えようとする試みが行われてきたのかについて, Pytlak（2012）, Ciosek（2012），Kolar and Cadez（2012）らのケーススタディの分析を行う。

加えて本研究では, どのようにすれば一般化を捉えることが可能となるのか, その為の作業的枠組みの提案を行う。そして, その作業的枠組みを通して検証を行うこととする。

次に，作成した作業的枠組みからみえた事柄を踏まえ，一般化へ向かう際の学習者の推論の仕方（数的な推論，幾何的な推論）について，さらに詳しく明らかにしなければならない。

研究課題 2 : 数的な推論，幾何的な推論とはそもそも何ものであるのか，いかに解釈し捉えるか

数的な推論，幾何的な推論における数的，幾何的に対して，さらに詳細に記述している文献として，Rivera and Becker (2004, 2006a, 2008), Chua and Hoyles(2010a, 2010b, 2011)がある。これらに基づき，一般化へ向かう学習者の推論の仕方はどのように捉えることができるのかについて考察を行う。

本研究における学習者の推論の仕方を規定したのち, これらの推論の仕方と一般化との間にはどのような関係が認められるかについて示さなければならない。

研究課題 3 : 一般化と学習者の推論の仕方とには，どのような関係が認められるか

学習者の推論の仕方が一般化へ及ぼす影響について, 事例を基に分析を行う。

最後に，これまで主に一般化と数的な推論，幾何的な推論との関係について考察を行ってきた。それに比べて，数的幾何的な推論については, 本研究の中においてほとんど議論できておらず，また Chua and Hoyles(2010a)もこの点についてあまり述べていない。Chua and Hoyles(2010b)によれば，数的な推論, 幾何的な推論の両方を含んでいる数的幾何的な推論というものは, 幾何的な推論から数的な推論への切り替えによって行われる傾向があるとしている。一方で，その逆の場合では至らないと指摘している。この指摘に伴い，本研究では次の研究課題について明らかにしなければならない。

研究課題 4 : 数的な推論から幾何的な推論への切り替えは起こり得るのか。起こり得るならば，この切り替えが一般化の学習場面で果たす役割とはどのようなものか

数的な推論と幾何的な推論の関連付けを意識した事例を基に, 数的な推論から幾何的な推論への切り替えは起こり得るのか，起こり得るとすれば，この切り替えが一般化にもたらす有用性にはどのようなものがあるのかについて明らかにする。また本研究において, 数的幾何的な推論とはどのように捉え直されるものであるのかについて述べる。

このように研究課題を解決し，本研究の目的を達成する。

1.3. 本論文の構成

本論文においては，先ず第 2 章においてこれまで先行研究において述べられてきた一般化，もしくは一般化へ向かうアプローチの仕方の分類について整理を行う。

第 3 章では，先行研究を踏まえ，多様な一般化を捉える為の作業的枠組みの提案を行う。そして，その作業的枠組みを通して事例を分析することから，一般化へ向かう学習者の推論の仕方に焦点を当てて考察を行っていく。

第 4 章では，Rivera and Becker(2004, 2006a, 2008)，Chua and Hoyles(2010a，2010b，2011)らを基に，本研究では一般化へ向かう学習者の推論の仕方についてどのように捉えていくのかについて検討を行う。

第 5 章では，一般化と学習者の推論の仕方との関係について分析する。

第 6 章においては，数的な推論から幾何的な推論への切り替えは起こり得るのかについて事例を基に検証する。そして数的な推論から幾何的な推論へと向かうその有用性を明らかにすることにより，本研究の目的の達成をはかる。

第 2 章　一般化及び，一般化へ向かうアプローチの仕方の分類

本章では，2.1 と 2.2 を通して，先行研究における一般化及び, 一般化へ向かうアプローチの仕方の分類について整理を行う。

2.1.　一般化の異なる種類への分類

本論を展開するにあたり，先ずは，これまでの先行研究の中では，一般化という用語がどのように定義，あるいは捉えられてきたのかについて整理していく。なぜならば，詳しくはこれから述べていくが，一般化には多様な意味，あるいは様式が存在するといわれている。第 3 章において，本研究の中では一般化をどのように捉えることができるのかについて考察していくが, その上で対象とする一般化について整理することは不可欠であるといえるからである。

一般化を区別したり, 分類したりする研究はいくつも行われている。Dorfler（1991）もまたその 1 人であるが，その理由を次のように述べている。「一般化という用語または，それに似た用語はとてもよく用いられる。しかし，これは大抵“一般化”の直感的な理解にすがることによって，その言葉の意味に関して, 共通のものであるとみなすことというような浅はかな捉え方である。そのような捉え方では，例えば一般化することの結果と同様に, そのプロセスの形式が根本的に異なるものもあることを無視することになる」と述べている。

そして，Dorfler（1991）は，一般化のプロセスを経験的と理論的という 2 つに区別している。経験的一般化とは，対象から共通の特徴，または共通の特性を認識することである。Dorfler（1991）によれば，ある対象や状況の中で共通の特徴を比較し，求めることは一種の明確な活動ではあるが，この活動は一般の構造や特性を求めることに関連する方法ではないとしている。一方でこれとは対照的に，理論的一般化とは不変性は同一であるとみなされ，模範によって置き換えられる。そのとき一般化はその不変性の抽象を通して構成されるとしている。Dorfler（1991）は，経験的一般化は主にその次の理論的一般化を行う為の手段として役立つだろうと述べている。

同様の議論は，Radford（2003）においてもみられる。

Radford（2003）は，一般化を事実による一般化，文脈による一般化，記号による一般化の 3 つへと区別を行っている。事実による一般化とは，数的な活動を一般化することであり，文脈による一般化は, それら活動の対象もまた一般化することであると述べている。また記号による一般化は，代数的言語の理解とその利用を含むものであるとしている。

Radford（2003）によれば，事実による一般化は，一般化の形式をさらに洗練する為の重要な基礎になると指摘している。これら Dorfler（1991）と Radford（2003）の指摘は，一般化をプロセスという視点からみたときに，2 つ，あるいは 3 つに分類することができるということを指摘している。

また一般化を行った結果, そこからみられた学習者の知識や取り組んでいる問題などの違いからの分類も行われている。Harel and Tall(1991)はこれを，拡張的一般化 : 存在しているシェマの適用可能範囲を, そのシェマの再構成なしに拡大すること，再構成的一般化 : 適用可能範囲を広げる為に，存在しているシェマを再構成すること，選言的一般化 : 新しい内容へと移るとき，新たなシェマが構成される，の 3 つへと区別をしている。

さらに Yerushalmy（1993）もまた，一般化の方法には以下のタイプが存在するとし，帰納による事例からの一般化 : 個々の事例を調べ，そこに共通にみられる特性を抽出し，一般的に表現すること，記述からの一般化 : 既に推測あるいは証明された記述を含んだより一般的な表現で表すこと, 定義の変更による一般化 : 古い定義の意味を拡張し，それらを含むように定義をより広く変え，拡張していくこと，の 3 つをあげている。これと同様の指摘は，Krygowska（1979）によっても行われており，それぞれの説明は後に記述するが，帰納による一般化，推論を一般化することによる一般化，特定の場合を一様にすることによる一般化，繰り返しの知覚による一般化の 4

つのタイプが存在するとしている。

これらより, それぞれの研究者によって着目している視点は異なってはいるものの, 数学教育における一般化はいくつかの種類へと分類が行われてきた。しかしながら，これらの中にはそのような一般化の違いはどのような要因によって起こってくるものなのかについて明らかにされていないもの, 曖昧なものが存在する。

例えば，Harel and Tall(1991)の述べる 3 つの種類の一般化というものは, 学習者の知識もしくは扱っている問題によって違いが生じてくると捉えることができる。この指摘については間違ってはいないといえる。しかし一方で，詳しくは後述するが, 同じ学年の学習者同士であっても異なるタイプの一般化を行うこともある。また異なる学年の学習者同士であっても同じタイプの一般化を行うこともあることが先行研究の中でも観察されている。さらに扱っている問題についても，同じ問題でも見方を変えてみれば, 複数の種類の一般化を行うことができることも事例を通して検証可能である。したがって，このような一般化の分類の仕方については, 学習者の知識や問題に完全に依存するものではないといえる。

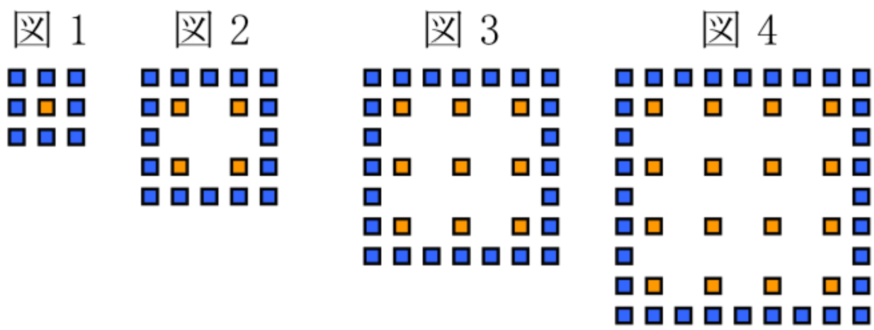
2.2.　一般化へ向かう学習者の異なるアプローチの仕方の分類

先行研究においては，一般化へ向かう学習者のアプローチの仕方に着目した分析も行われている。例えば Stacey(1989)は，自身の研究の中で生徒の大多数は，一般化をする際に n の要素を決める為に直接の比の方法を用いていることに気づいた。同様の結果は Zazkis and Liljedahl(2002)，Orton and Orton (1999) によっても報告されている。Zazkis and Liljed－ahl(2002)の中で対象とされた大学生は，与えられた連続の数の中でより大きな要素を見つける為に，一定の差のアプローチを用いていたことがみられた。また，Orton and Orton(1999)は，生徒が好んで用いた方法として，連続の要素の間の差を用いる傾向があることを報告した。

また，近年の先行研究においても，いくつかのケーススタディの中で，一般化へ向かう際の生徒による推論の仕方の違いやそれによる一般化の達成のし易さの違いについて（Pytlak, 2012)，生徒の解決の仕方（表を使うか，図を使うか）によって，行われる一般化の種類に違いがみられること（Ciosek, 2012）が報告されている。

2.2.1. Pytlak (2012) のケーススタディ

Pytlak（2012）では，次の問題が提示された。



1.　表を完成しましょう。

図の数	黄色のブロックの数	青色のブロックの数
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

2.　図 7 の場合はどうなるか。

3.　黄色のブロックと青のブロックの数が同じ数になることは起こり得るのか。

4.　とても大きな図を作りたい。黄色のブロックと青のブロックのどちらが多く必要か。

この問題は，与えられている図 1，図 2，図 3，図 4 から規則性を見出し，それ以降の図 5，図 6，図 7，…，とさらに大きい図のそれぞれの数を求めるものである。そして，Pytlak（2012）はこの事例において，子どもが規則性に気づく過程には異なる方法がみられたとし，それらを数的な推論，幾何的な推論，数的幾何的な推論と呼んでいる。ここでは，２人１組で問題解決が行われ，ある 1 組は次のような解決を行った。

2 人の生徒（A と B とする）は，先ず図 1 から図 4 までの表に対して，与えられている図を数えることで比較的早く埋めることができた。そして，次の図 5 を考えるときに，A は先ず始めに，与えられている図 1，図 2，図 3，図 4 から規則性をみつけようとした。これは Pytlak(2012)が述べる幾何的な推論である。しかし，このアプローチの仕方では上手く規則性をみつけることができなかった。そこで，今度は B が表に着目することで，表より規則性をみつけることができた。これは Pytlak（2012）が述べる数的な推論に当たる。

ここでは，図 5 の解決に向かうアプローチの仕方において，幾何的な推論では上手くいかなかった為，数的な推論の仕方に

切り替えたら上手くいったということが観察された。これより，少なくともこの問題においては，同じ一般化の結果に向かうにあたり，推論の仕方によって，一般化の達成のし易さに違いがみられたということがわかる。

2.2.2. Ciosek（2012）のケーススタディ

また，Ciosek（2012）においても，先程提示した Pytlak（2012）と同様の問題が用いられている。Ciosek（2012）は，14–15 歳，16–19 歳，数学を学んでいる学生，数学者といったそれぞれが持っている知識や経験の異なるものを調査対象とした。その中の 1 つの例として，このケースにおいても，発達段階が異なる 2 人の生徒（A と B とする）が行った解決の仕方が示されている。

まず A の生徒は，n の場合を考える際に，Krygowska（1979）が述べる帰納による一般化を行ったことがみられた。それに対して B は，同じ n の場合に向かう際に，Krygowska（1979）が述べる推論を一般化することによる一般化を行ったことが確認された。これらより，同じ一般化の結果に向かう場合にも，それぞれの生徒によって異なる種類の一般化が図られることで解決がなされているということが伺える。

また，Ciosek（2012）は，このような一般化の種類の違いの現れは，学習者がその問題場面に応じて行う選択（ここでは表を用いるか，図を用いるか）が本質的に影響を与えるかもしれないと述べている。この Ciosek（2012）の指摘は，先程の Pytlak（2012）の推論のタイプを踏まえると，数的な推論（表を用いる）を行うか，幾何的な推論（図を用いるか）を行うかによって，一般化の種類に影響を及ぼす，もしくは変化を来すかもしれないと捉えることができる。

第 2 章の要約

本章では，先行研究における一般化の異なる種類への分類，及び一般化へ向かうアプローチの仕方の分類について整理を行った。

こうした整理により, これまで一般化をプロセスという視点からみた際の分類や学習者の知識, 取り組んでいる問題などの違いによる分類がなされていることが伺えた。また，一般化へ向かう際の学習者の推論の仕方や解決の仕方の違いによって，一般化の達成のし易さや行われる一般化の種類が異なってくることがみられる。

ただし, これらの一般化の違いがどのような要因によって生じてくるのか，また，先行研究で述べられている多様な一般化に対して, どういう捉え方をしていけばよいのかについては必ずしも明らかになっていないといえる。

第 3 章　多様な一般化を捉える為の作業的枠組みの提案

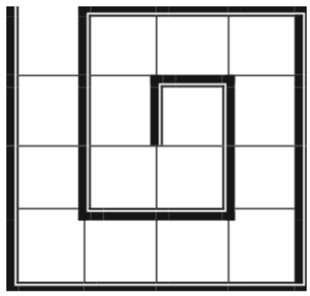
本章では,いくつかの種類やアプローチの仕方があるとされる一般化を捉える為の作業的枠組みの提案を行う。3.1 では,近年の先行研究における一般化の種類の違いを捉える試みについて述べる。3.2 では，3.1 の中で用いられた一般化の違いを捉える為の方法の検証について述べる。3.3 では，先行研究を踏まえ，作業的枠組みを作成し，3.4 ではその枠組みを用いて分析を行った結果について考察を行う。

3.1. 先行研究の中での議論

近年の先行研究において Kolar and Cadez（2012）は，2.2 で述べた Ciosek（2012）同様に，Krygowska（1979）の一般化の種類を前提とし, どうやらそのような一般化の種類というのは, 問題のタイプに依存して分けられるのではないかと考えた。

ここでは螺旋の問題（手続き的問題）と池の問題（概念的問題）が用いられた。螺旋の問題（手続き的問題）とは，動的，関連する特定のルール，アルゴリズム，手続きを利用し，自動的で無意識なステップとされ, 帰納による一般化に対応しそうであるとされた。それに対して，池の問題（概念的問題）は，意識的思考が必要とされるとし, 推論を一般化することによる一般化に対応しそうであることが提案されている。

問題：図のような 4×4 の正方形の螺旋の形が示されている。$n \times n$ の正方形における螺旋の長さを求めなさい。



1×1 の正方形のとき、螺旋の長さは
3＝4−1

2×2 の正方形のとき、螺旋の長さは
8＝9−1

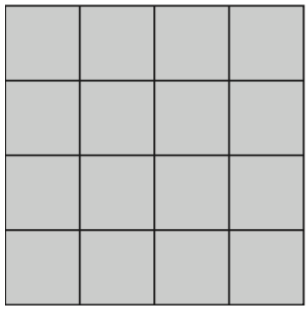
3×3 の正方形のとき、螺旋の長さは
15＝16−1

………………

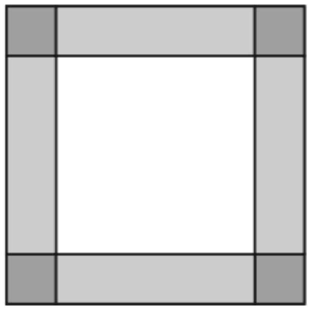
$n \times n$ の正方形のとき、螺旋の長さは
$(n+1)^2-1$ で表される。

螺旋の問題

問題：右の 4×4 の大きさの池の周りに道を作る為には、タイル(1×1)はどれほど必要か。また$n×n$の大きさの池の周りに道を作る為には、どれほど必要か。



ここでは次のような構造の捉え方がされることで、池の周りのタイルの数は、中の正方形の 4 つの辺の長さの合計と 4 つの隅のタイルの数を合わせたものに等しいと考えることができる。このような捉え方をすることにより、与えられる池の大きさは問題にしなくてよいという推論が行われ、これを一般化することで$4n+4$という式で表すことができる。



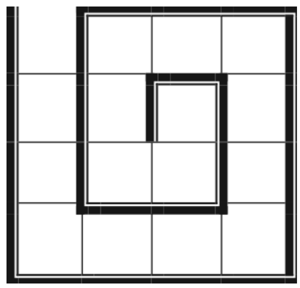
池の問題

3.2. 先行研究の検証

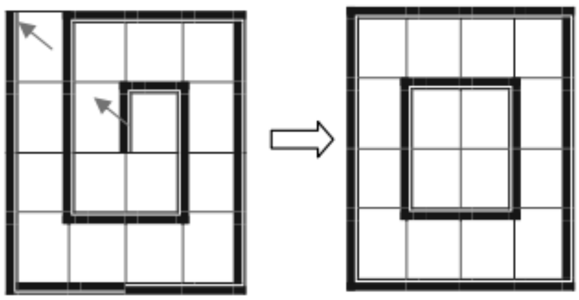
確かに螺旋の問題（手続き的問題）は帰納による一般化が行われやすい問題かもしれないが，その問題の螺旋の図を以下に示すように変形して捉えてみれば，推論を一般化することによる一般化もできそうである。

一方で，池の問題（概念的問題）も推論を一般化することによる一般化と考えられているが，以下に示すような解決の仕方を行うことによって，帰納による一般化も十分に行うことができる。

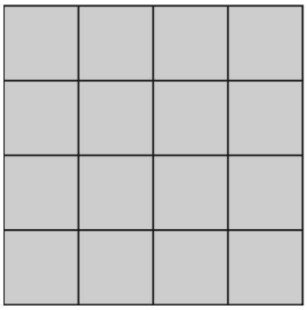
問題：図のような 4×4 の正方形の螺旋の形が示されている。$n \times n$ の正方形における螺旋の長さを求めなさい。



与えられている正方形の大きさが偶数の場合であれば、下の図に示されるように、その螺旋は正方形に変形することができる。



問題：右の 4×4 の大きさの池の周りに道を作る為には、タイル(1×1)はどれほど必要か。また $n \times n$ の大きさの池の周りに道を作る為には、どれほど必要か。



ここでは、1×1 の大きさの池の周りのタイルの数、2×2 の大きさの池の周りのタイルの数、…10×10 の大きさの池の周りのタイルの数を求めることで右のような表を作成する。そして、この表を分析することで、4 ずつ増えていることに気づき、10×10 のときは 8＋4・(10 － 1) で求めることができる。最終的に 8＋4・(n−1)で示される。

1 × 1	8	
2 × 2	12	＋4
3 × 3	16	＋4
4 × 4	20	＋4
5 × 5	24	＋4
…	…	
10 × 10	44 = 8+4 · (10−1)	

したがって，Kolar and Cadez（2012）が述べている一般化の種類の問題による分類には疑念が挟まれる。しかしながら，何らかの条件が引き金となって，学習者が行う一般化の種類が変わってくるというのは伺えそうである。

3.3.作業的枠組みの作成

Kolar and Cadez（2012）が行った問題のタイプによって一般化の種類を捉えようとする方法論は，それ自体としては十分でなかったかもしれないが，一般化の種類を何かしら（ここでは問題のタイプ）によって特徴付けを行い，そこに手掛かりを求めようとしたことには共感が持てる。

本研究では，それらは問題のタイプではなく，推論のタイプによって対応させることができないだろうかと考えた。2.2 での Ciosek（2012）の事例より，同じ一般化の結果に向かっていても，表を用いるか，図を用いるかによって，一般化の種類に違いがみられるかもしれないと述べられていた。これより，一般化の種類と Pytlak（2012）が述べる推論のタイプには関連性がありそうだということが考えられる。そこでここでは，Pytlak（2012）の述べる推論のタイプと Krygowska（1979）の示した 4 つの一般化の種類で作業的枠組みを作成した。

	数的な推論	幾何的な推論	数的幾何的な推論
帰納による一般化			
推論を一般化することによる一般化			
特定の場合を一様にすることによる一般化			
繰り返しの知覚による一般化			

作業的枠組み（吾郷，2015a）

縦軸は，先程から述べている Pytlak（2012）が述べる 3 つの推論のタイプであり, 以下ではここで用いられた事例に基づいて，それぞれの推論のタイプの説明がされている。

数的な推論

絵や図は無視し､その表から見られる数学のデータに注意を払う。与えられた表の数の間の数的なつながりをみつけたり，発見する。生徒の取り組みはその4つの線で満たされた表からの数の欄の分析に依るものである。

幾何的な推論

主に絵や図に注意を払い､幾何的なつながりに着目する。強い視覚に依る側面がある。生徒の取り組みは，図形や図，絵や図, 描いた5つの図形や図, 次の図との分析に依るものである。そしてその次の図形や図の絵や図を描くことでつなげる。

数的幾何的な推論

表と絵や図の両方が同じ程度で説明に用いられる｡幾何的なつながりを見つけ､それらを数的なつながりで結びつける。幾何的なつながりを数的なつながりで置き換える｡生徒の取り組みは存在している図形や図の絵やそのとき満たしている表の分析に依る。

横軸は，ここでは Krygowska（1979）の 4 つの一般化の種類を用いた。そして，それぞれの種類の特徴については，次のように説明される。

帰納による一般化

n の公式 $f(n)$ はみつけられる。最初は $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，そして一般の規則に適応しているとき, n の公式 $f(n)$ が得られることに気づく。その規則は推測のみである。単純だがそれはよく解決に向かう重要なステップである。

推論を一般化することによる一般化

1つの場合において実行されたその推論は，さらに一般的な結果を得ることに必要とされる異なる状況や小さな修正の中

で正しいであろうことに気づく。これはよく定数の変化の結果や証明の分析の結果の場面でよく起こる。

特定の場合を一様にすることによる一般化

　ある状況の場合にそれぞれ言及している束は, その特定の場合の一般的なことを言及することによって置き換えることができる。その例として，三平方の定理から余弦定理への一般化が挙げられる。

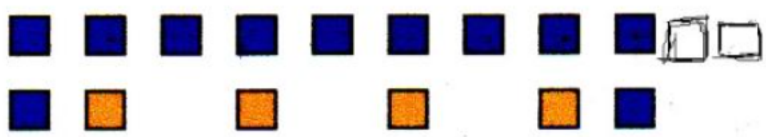
繰り返しの知覚による一般化

　帰納による一般化の場合のように，n による公式 $f(n)$ は見つけられる。しかし、$f(2)$ のケースは $f(1)$ を使うことで得られる。$f(3)$ は $f(2)$ を使うことで, そしてその次の n を述べる為の規則的な方法は気づかれる。繰り返しのルールである。1つ前のものを適応することで求める公式は得られる。

　この Krygowska（1979）の一般化の種類を横軸に用いることに関しては, 一般化の種類はこれ以外にもあるのではないかと考える人も当然いるかもしれない。しかし現段階においては, あくまで実験的なものであり, これを用いることで一般化の種類と学習者の推論の仕方との間にどのような関係がみられるのかを調べる為のものである。従って，ここではこの 4 つの種類を横軸として考えていくこととする。

3.4.一般化の結果を志向することを要請する事例での分析

ここでは 2.2 の中であげた Pytlak(2012)と Ciosek(2012)が扱った事例を 3.3 で作成した作業的枠組みを用いて分析を行う。まず，Pytlak（2012）の中では，幾何的な推論による一般化の試みがみられた。この推論の仕方自体はここでは上手く規則をみつけることはできなかったが，これは Krygowska（1979）の一般化の種類でいう帰納による一般化が行われていると考えられる。



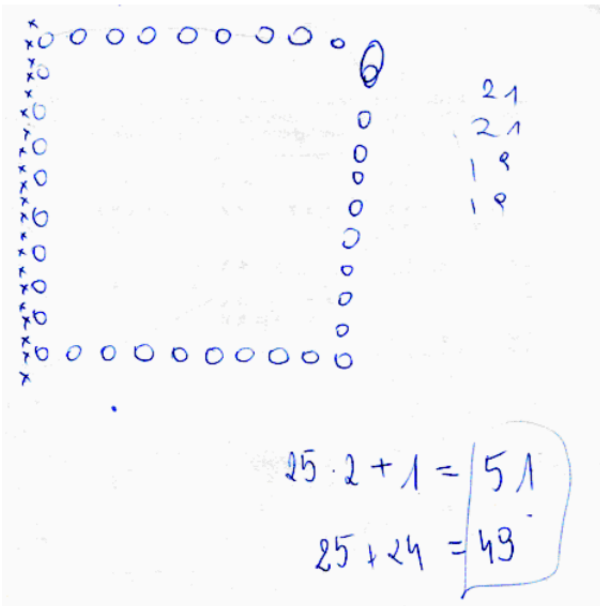
したがって，幾何的な推論，帰納による一般化のセルに当てはまる。これに対して，その後，推論の仕方の方向転換があり，数的な推論によるアプローチが行われた。ここでは，表全体の分析を行うことで，3，5，7，…，と奇数ずつ増えていることに気づいている。

黄色のブロックの数
1
4
9
16
25

よって，ここでも帰納による一般化が行われていると捉えることができ，数的な推論，帰納による一般化のセルに当てはま

ると考えられる。

また，Ciosek（2012）では，同じく数的な推論，帰納による一般化（表の着目の仕方は Pytlak（2012）の生徒と異なる）もみられたが，以下に示す幾何的な推論での推論を一般化することによる一般化もみられている。



以上の取り組みを，この作業的枠組みに当てはめてみると，次のようになる。

	数的な推論	幾何的な推論	数的幾何的な推論
帰納による一般化	○	△	
推論を一般化することによる一般化		○	
特定の場合を一様にすることによる一般化			
繰り返しの知覚による一般化			

上手く一般化が行えたものを◯で表し，上手く行えなかったものを△で表している。これより確認できることとして，これらの先行研究におけるケーススタディに基づいて考えてみると，数的な推論や幾何的な推論によって，一般化を分類できそうであるということが伺える。

第 3 章要約

本章では，近年の先行研究を踏まえ，多様な一般化の違いをどのように捉えることができるのかについて検証を行った。その結果，以下に示す作業的枠組みを提案した。

	数的な推論	幾何的な推論	数的幾何的な推論
帰納による一般化			
推論を一般化することによる一般化			
特定の場合を一様にすることによる一般化			
繰り返しの知覚による一般化			

この作業的枠組みにより，これまで述べられてきた一般化の違いというものに対して，学習者の推論の仕方によって捉えることができそうであることがわかった。

第 4 章　本研究における数的な推論，幾何的な推論の解釈

本章では, 学習者の推論の仕方とは具体的にどのようなものであるのかについて明らかにしていく。4.1 では，Rivera and Becker(2004，2006a，2008)と Chua and Hoyles（2010a，2010b，2011）らが述べる数的なもの，図的なものについて取り上げ，4.2 では，本研究では数的な推論，幾何的な推論をどのように捉えていくのかについて考察を行う。

4.1. 先行研究における数的，図的の解釈

作業的枠組みの 1 つの軸として用いた 3 つの推論のタイプは, Pytlak (2007) が述べたものを用いた。しかし Pytlak (2007) は，これら 3 つの推論のタイプの説明を自身が扱った事例に合わせて行っている。したがって，他の事例について考えていく際に，Pytlak（2007）のものをそのまま適応することは難しいといえる。したがって，ここでは Pytlak（2007）の 3 つの推論のタイプの再解釈を行う。

そこで，Pytlak（2007）同様に一般化へ向かうアプローチの仕方として数的なもの，図的なものがあるとし，それらをさらに系統立てて分類を行っている Rivera and Becker(2004，2006a，2008)，Chua and Hoyles(2010a，2010b，2011)らに着目した。

4.1.1. Rivera and Becker(2004，2006a，2008)の解釈

Becker and Rivera(2004)は，1999 年から 2003 年の間に，第 8 学年と第 9 学年を対象として実施されたパターンを一般化する問題において，そこでの学習者は視覚によって，そして表を使って特殊の場合を上手く扱っていることに気づいた。しかし，特殊な場合を扱う能力は高い一方で，一般化する能力は極端に低いことを指摘した。

	1999	2000	2001		2002		2003	
	9 学年	8 学年	8 学年	9 学年	8 学年	9 学年	8 学年	9 学年
特定の場合を扱う能力	80%	87%	72%	80%	74%	71%	56%	54%
一般化する能力	15%	21%	22%	12%	21%	17%	5%	9%

そして，なぜ彼らが一般化することに困難性を持つのか，彼らが一般化へと発展するには，どういうやり方がよいのかを調べる為に，第 9 学年に絞り，さらに詳しい調査に取り組んだ。

そこではあるパターンを一般化する問題が与えられ，取り組んだ学習者によって，以下に示す22の異なるやり方が用いられた。そして，これらを大きく3つのタイプへと分類を行った。

Strategies	No.	Strategy Description	Strategies	No.	Strategy Description
Numerical	2	Numerical use of finite differences in table	Visual	1	Visual grouping by counting each arm; multiplicative relationship
	6	Random trial and error		4	Visual growth of each arm; additive method of counting
	6’	Systematic trial and error		5	Visual symmetry
	7	Numerical finite differences to generalize to closed formula		9	Figural proportioning into pillars; add 4 for external and 4 for internal squares
	8	Implicit recursion		13	Concentric visual counting
	10	Confusing dependent and independent variables		14	Counting Ell shapes and adding 4 center squares
	11	Extending the table		18	Chunking
	12	Missing independent variable		20	Counting by one
	15	Adding two formulas for black and white		21	Visual finite differences after random count
	16	Incorrect use of proportionality		22	Visual finite differences after systematic count by 3s
	17	Get a formula and substitute to get 10^{th} term	DG*	3	Unable to generalize
	19	T in terms of B and W	*Disjunctive Generalization		

数的

　その規則を生み出すために連続の数としての表，または表に表されたいくつかのパターンからつくられた契機のみの使用。

図的

　図を用いてパターンを表したり，規則を生み出すために図の構造から直接的に視覚を契機につくる。

活動的

数的，図的なやり方の両方の結合。

　これより Becker and Rivera(2006a)は，学習者が具体的な対象から一般化を行う場合，その対象は頻繁に数的と図的により表現されるとした。そして一般性を表現するにあたり，学習者は少なくとも 2 つのモードである数的と図的を示す傾向が

あることを主張している。

また Rivera and Becker(2008)は，これまでの学習者による一般化の図的な解決の分析から, 図的なやり方はさらに構成的一般化と構成的でない一般化との 2 つのカテゴリーに分けられるとした。

構成的一般化

与えられた図が, 共通の部分を持たないいくつかの要素を含む図としてみられたとき, そしてその規則がいくつかの構成要素の合計として直接表現されたとき起こる。

構成的でない一般化

その図が共通の部分を持つ構成要素をつくるものとして, そしてその規則は, その図のそれぞれの構成要素を個々に数えることによって表現されたり, 共通の部分が引かれるときに起こる。

4.1.2. Chua and Hoyles（2010a，2010b，2011）の解釈

一方で，Chua and Hoyles(2010a)は，今日の社会においては, すべての生徒が多様な方法で一般化する能力を持っていなければならないとし, その為にはそもそもこの能力の発展を助け適切な導きを与えるべき教師は, 一般化問題に対して多様な方法で行うことができるのか, またどういうやり方を用いるのかについて調査を行った。

その際の分析枠組みとして，Chua and Hoyles(2010a)は，先程述べた Becker and Rivera（2004）の数的，図的，活動的の 3 つを適用した。結果として，教師は同じパターンの中に多様な方法をみることができるだけではなく,とても上手く行うことができた。

また Chua and Hoyles（2010a）は，もともと Rivera and Becker(2008)が示した構成的一般化に対して，加法的でない

構成的一般化と呼ぶ新たなカテゴリーを導入する為に, 構成的一般化を加法的な構成的一般化と加法的でない構成的一般化とに分けて捉えた。

加法的な構成的一般化

与えられた図が共通の部分を持たない, いくつかの要素を含む図としてみられたとき, そしてその規則がいくつかの構成要素の合計として直接表現されるときに起こる。また，この加法的な構成的一般化は学習者によって頻繁に用いられるものであるとされている。その理由として，小学校で全体の数を数えるときに導入される根本的な数学の概念である部分−全体の関係により，学習者は問題解決の際にこの部分−全体の推論を自然と引き起こす傾向があると述べている。

加法的でない構成的一般化

その与えられた図は, 大きな各種要素を含む図の部分として理解することにより, そのときにこの各種要素を含む図から構成要素を取り除くことによって，その規則はつくられる。この加法的でない構成的一般化は, より大きな要素を含む図において欠けている構成要素をイメージすることであり, 学習者にとっては挑戦であるとされている。

また Chua and Hoyles(2010a)は, Rivera and Becker（2008）が述べた構成的でない一般化に対して以下のように解釈を加えている。「構成的でない一般化はあまり役に立たない。なぜならば，生徒がそれを理解することに複雑さや困惑を感じる。加えて, 何人かの生徒は重なっているカードを引くことを見落としたり，それらの数え間違いをしたり，一定の構造を同一とみなすために多くの時間を費やしてしまうことが心配される。」

さらに Chua and Hoyles（2010a）は，何人かの教師は新たな図を作り出す為に, もともと与えられている図のある構成要素を整え, 結果的に新たに構成が変更された図に基づいて一般的な規則を構成していることを確認した。Rivera and Becker(2008)によって発展されたカテゴリー分けでは，このやり方は含まれていない為，Chua and Hoyles（2010a）はこれを新たなカテゴリーとして加え，再構成的一般化と呼んでいる。

再構成的一般化

１つまたはより多くの要素のもともとの図が何かもっとよく知られているものに再度整えられるときに起こる。これは，新たに図の構成を変える。そのとき，パターンの構造があらわになり規則を作る。また，この再構成的一般化は空間的視覚化のより高い洗練が必要であり，加法的な構成的一般化よりも視覚化することがさらに複雑であるときに現れていると述べている。

また Chua and Hoyles (2011) は，Rivera and Becker(2008)が述べた数的なやり方の中にも，異なるタイプのやり方が存在するとし，Bezuszka and Kenney(2008)の主張を踏まえ，以下のようにみなしている。

比較

与えられた数の連続における項は,すでに知られている規則である他の連続の項と比較される。

繰り返される置換

数の連続におけるそれ以降の項は,それに先立つ項で表現される。Chua and Hoyles(2014)は，この繰り返される置換は多くの生徒の中で頻繁に用いられるものであり，その中でも特に発達段階の低い生徒に用いられる傾向があると述べている。しかしながら，この方法は次の項は素早くみつけることができるがより大きな値，もしくはそのパターンが連続でなく表されるとき効果的でないという大きな欠点があるとしている。

差の方法

数学において定まった形の差として知られるものは，明らかな公式を見つけるためのアルゴリズムである。

結果的に Rivera and Becker(2004, 2006a, 2008), Chua and

Hoyles（2010a，2010b，2011）より，以下の図に示すように当初，数的，図的，活動的という 3 つに分類されていたものがさらに 7 つに分けて捉え直されている。

（Becker and Rivera，2004）

・数的　・活動的　・図的

（Rivera and Becker，2008）

・構成的一般化

・構成的でない一般化

（Chua and Hoyles, 2010a）

・加法的な構成的一般化

・加法的でない構成的一般化

・再構成的一般化

・構成的でない一般化

（Chua and Hoyles, 2011）

・比較

・繰り返される置換

・差の方法

4.2. 本研究における数的な推論，幾何的な推論の解釈

本研究では，上記のように Becker and Rivera(2004)が示している数的，図的，活動的を順に数的な推論，幾何的な推論，数的幾何的な推論として考えていく。さらにそれらは Chua and Hoyles(2010a，2010b，2011)が述べる 7 つを含んでいるものとして学習者の推論の仕方を捉えていくこととする（吾郷，2015b）。その際に，一般化へ向かう学習者の推論の仕方は 7 つでよいのかという意見も当然出るかもしれない。これについては，7 つが全てというわけではなく，Chua and Hoyles(2010a)もまた，7 つが全てであるとは主張していない。

例えば，Chua and Hoyles(2010a)は，ケーススタディの結果として，そこでは 13 の異なる方法が観察されたと述べている。その際に「いくつかは他のものに比べてさらによく起こり得る」とし，ここでは頻度の高い上位 4 つのものが示されている。したがって，Chua and Hoyles(2010a)もまた，7 つ以外にも他の方法が存在するということは認めているということが伺える。しかしその一方で，その中でも特に用いられる頻度の高いものを選び，7 つに分類を行ったと捉えることができる。

本来であれば，一般化へ向かうあらゆる方法を対象とし考察すべきであるが，その為には実証的な検証を積み重ねる必要があるといえる。しかし，そのような検証を行うには時間にも環境にも制限があり，それを達成することは難しい。その為，本研究では Chua and Hoyles(2010a)が，いくつかの実践から導き出している学習者が比較的よく用いるとされる 7 つのものを一般化へ向かう学習者の推論の仕方として考えていくことにしたい。

ただその際に，1 つ確認しておくべきことがある。それは本研究における数的な推論の数的とは何を対象とするのかである。Becker and Rivera（2004）を始め，Chua and

Hoyles(2010a)もまたその辺りについてはあまり詳しくは述べていないといえる。

既に述べたように，Becker and Rivera(2004)，Chua and Hoyles(2010a)の解釈，扱っている事例から伺えることとして，両者の述べる数的というのはそれが表で表されている, いないに関わらず, 主に数の連続を対象としているということがいえる。ただし，本研究の中で述べる数的については，両者が述べている数の連続も当然含んではいるが, その数で表される式そのものも対象として扱っていくこととしたい。なぜならば，Polya（1959）の中でもみられるように，複数の式を考察し，その共通性からさらに一般化した式を導くという場面も多くみられるからである。したがって, 例えば$2+1^2+2$，$3+2^2+3$，$4+3^2+4$からnの場合である$(n+1)+n^2+(n+1)$を導くという場面を考える際も，ここでは学習者によって比較，または繰り返しの置換が行われることが想定されるが, こうした式そのものを対象とした場合においても数的と捉えることにしたい。

第 4 章要約

本章では，Rivera and Becker(2004，2006a，2008)，Chua and Hoyles(2010a，2010b，2011)らを取り上げ，一般化へ向かう学習者の推論の仕方にはどのようなものがあるのかについて考察を行った。

Becker and Rivera(2006a)は，一般性を表現するにあたり，学習者は少なくとも 2 つのモードである数的と図的を示す傾向があることを主張し，これを数的，図的，活動的の 3 つであるとして捉えた。その後, Chua and Hoyles(2010a, 2010b, 2011)は，数的，図的の中にもさらに分類されるものがあるとし，これを以下の 7 つに分けている。

・加法的な構成的一般化
・加法的でない構成的一般化
・再構成的一般化
・ 構成的でない一般化
・ 比較
・ 繰り返される置換
・ 差の方法

本研究では, 数的の対象には式そのものも含まれることを述べた上で，一般化へ向かう学習者の推論の仕方としては，Rivera and Becker(2004，2006a，2008)，Chua and Hoyles,(2010a，2010b，2011)らの主張に依拠することとする。

第 5 章　学習者の推論の仕方が一般化に及ぼす影響について

5.1.　学習者の推論の仕方と一般化の結果との結びつきについて
5.2.　学習者の推論の仕方による一般化の達成のし易さの違いについて

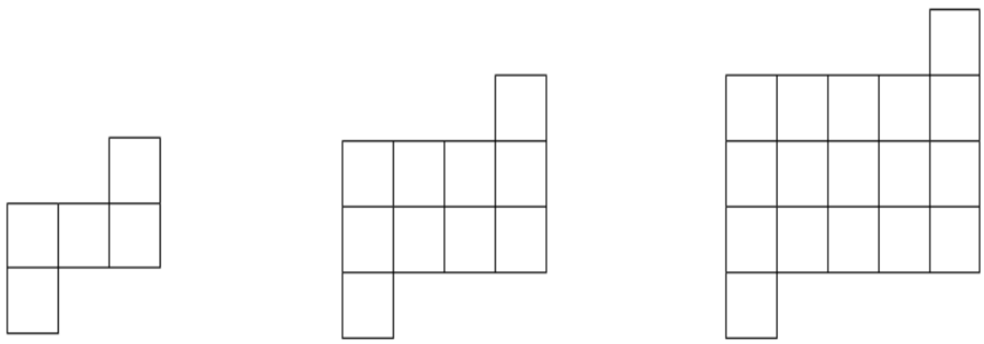
本章では, 学習者の推論の仕方が一般化に及ぼす影響について考察する。5.1，5.2 では，4.2 において規定した学習者の推論の仕方を問題に適用することにより, 学習者の推論の仕方と一般化との関係について考察していく。

5.1. 学習者の推論の仕方と一般化の結果との結びつきについて

既に述べたように，Rivera and Becker（2008）や Chua and Hoyles（2011）らによって，数的，図的がさらに細かく分類されていることがわかった。ここではこれらを学習者の推論の仕方として捉え，問題への適用を考えることで，一般化と学習者の推論の仕方との関係について分析したい。

ここでは Chua and Hoyles（2011）により実際のケーススタディの中で扱われた問題とそこで行われた生徒の取り組みから一般化と学習者の推論の仕方との関係について考察を行う。用いられた問題は以下のものである。

アリスは，異なるサイズのクリスマスパーティーの飾りを作る為に同一の正方形のカードを使用した。以下の図は彼女が作った 3 つのパーティー飾りである。

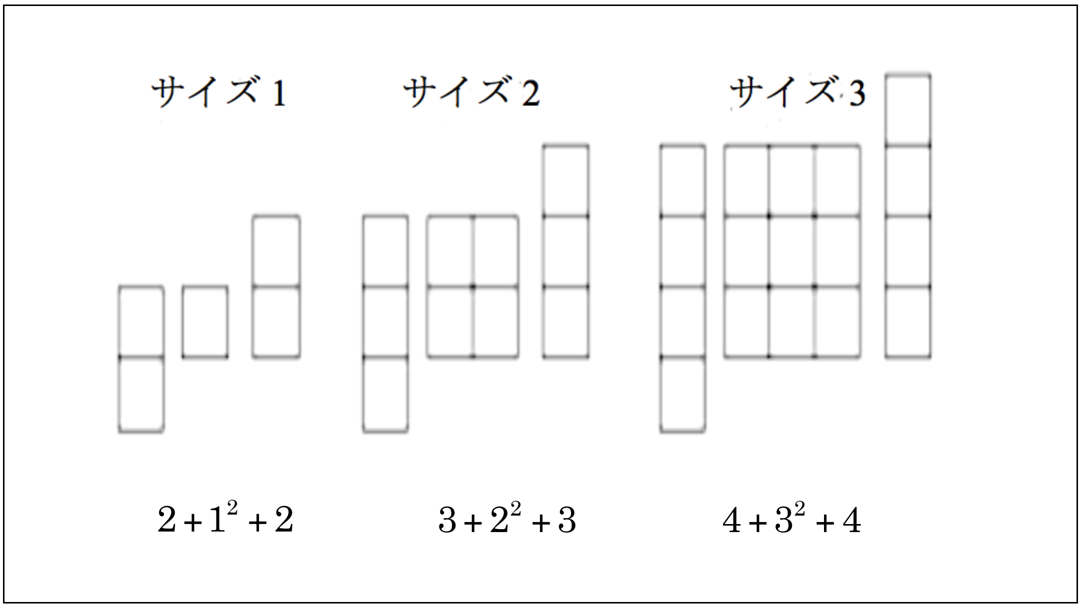


サイズ 1　　サイズ 2　　サイズ 3

サイズの数が大きくなれば，正方形のカードもさらに多くなる。アリスは，いくつかのサイズを作る為に彼女が用いなければならない正方形のカードの数をみつけたい。彼女はその数をみつけるためにルールを用いた。

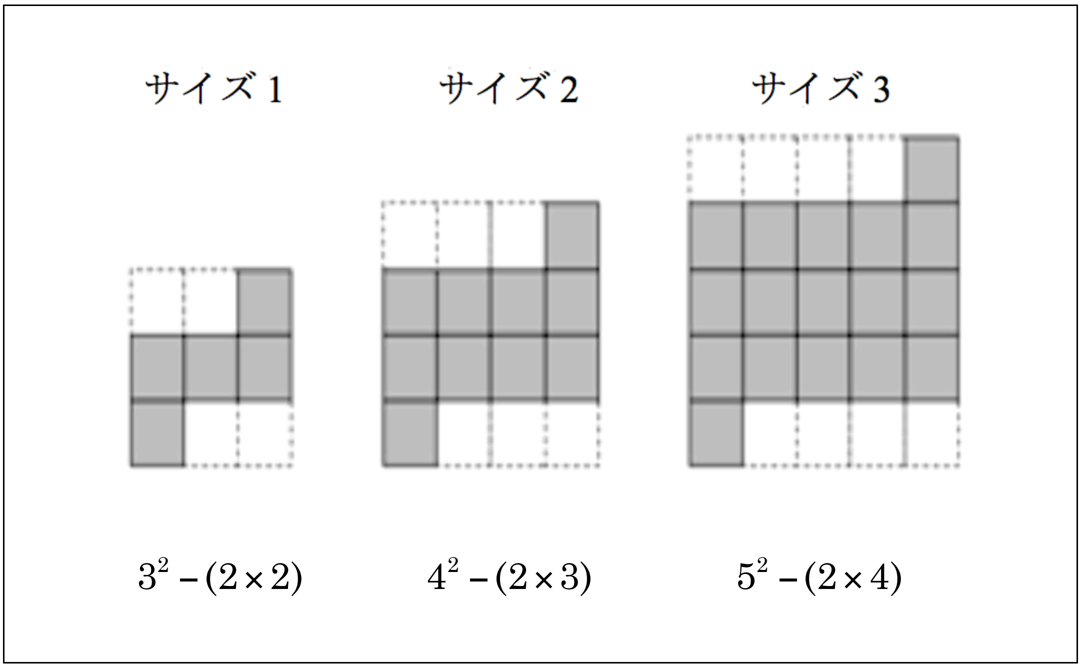
ここでは，以下の 4 つのやり方がみられた。

加法的な構成的一般化



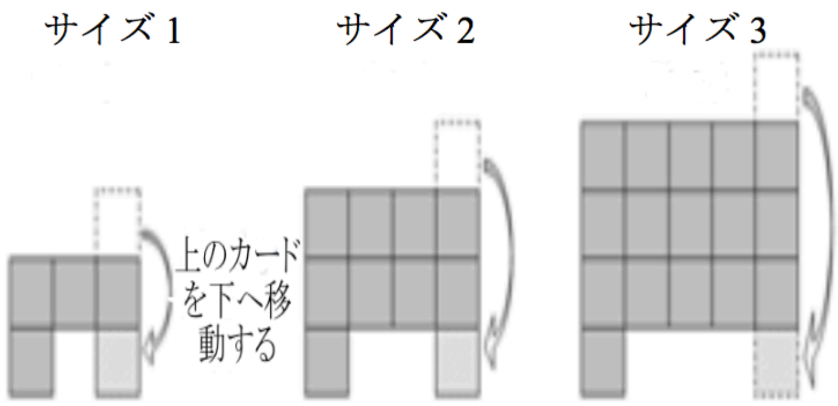
与えられている図を 3 つの部分に分けることにより規則を得る。

加法的でない構成的一般化



与えられた図を大きな正方形の一部としてイメージし，2 つの列の取り除かれるカードを引くことによりその規則を得る。

再構成的一般化



2つのカードの上に 3×1 の長方形	2つのカードの上に 4×2 の長方形	2つのカードの上に 5×3 の長方形
$(3\times1)+2$	$(4\times2)+2$	$(5\times3)+2$

繰り返される置換

サイズの数	使用された正方形のカードの数	
1	5	5
2	10	10=5+5
3	17	17=5+5+7
4	26	26=5+5+7+9
:	:	:

上記に示された学習者の取り組みをみると，学習者の推論の仕方によって導かれる一般化の結果が異なっていることがわ

かる。それぞれの推論の仕方により一般化は達成されているといえるが，これより，学習者の推論の仕方と導かれる一般化の結果との間には結びつきがあることが伺える。

またこのような場面は, 先行研究の中でもよく用いられている三平方の定理の一般化の場面でもみることができる。例えば, 始めに「この三平方の定理を何かしら一般化しなさい」と提示したとする。すると，1 つの一般化の方向性として,「ここ（∠C とする）が 90°でなかったらどうなるのだろう」と学習者は考え，∠C が鋭角の場合，鈍角の場合について考えようとする。そして，三角関数を用いることで 1 つの式に統合できることから，余弦定理を導くことができる。これは直角三角形から一般の三角形への適用を考えることで, 余弦定理へと発展させている。

また, 別のやり方として各辺の上にできる正方形の面積の関係に着目し，「各辺を直径とする半円にするとどうなるか，正方形でなくても相似比が一緒になるのではないか」ということから，正方形でなくても，相似な図形であればよい，というような一般化へ向かうことも可能である。

Chua and Hoyles(2011)は，一般化へ向かう際に教師がその問題において用いて欲しい推論の仕方と学習者が実際に行う推論の仕方との間には不一致がみられることも指摘している。従って, 例えばある場面で教師の意図した一般化を学習者に行わせたい場合には，数的な推論か，あるいは幾何的な推論かなど, どのような推論を促せばよいのかについて教師は留意する必要があるといえる。

5.2. 学習者の推論の仕方による一般化の達成のし易さの違いについて

一方で, 先程の 5.1 の事例を数的な推論によって解決したあとのある 1 人の生徒は次のように述べている。「私は図のサイズの数と図におけるタイルの数との間の関係を視覚化できなかった。私は実感した。もし私が 3 つの異なる部分にその図を分けて考えていれば, その問題はもっと簡単になった」。この生徒の感想からも伺えるように, 場面によって用いることが相応しくない推論の仕方があることも考えられる。

ここでは先程の 5.1 の事例に対して, 数的な推論の 1 つである差の方法による場面を考えてみたい。このアプローチでの解決は以下のようになる。

サイズ（n）: 1　2　3　4

u_n : 5　10　17　26

＋5　＋7　＋9

1^{th} の差　:　5　7　9

2^{th} の差　:　2　2

$u_n = an^2 + bn + c$ とおく。

n : 1　2　3　4

u_n : $a+b+c$　$4a+2b+c$　$9a+3b+c$　$16a+4b+c$

1^{th} の差 :　$3a+b$　$5a+b$　$7a+b$

2^{th} の差 :　$2a$　$2a$

$\rightarrow 2a = 2$ より，　$a = 1$

$\rightarrow 3a + b = 5$

　$3 \times 1 + b = 5$ より，　$b = 2$

$\rightarrow a + b + c = 5$

　$1 + 2 + c = 5$ より，　$c = 2$

よって，サイズnに必要とされるタイルの数は
$u_n = n^2 + 2n + 2$

ここでは，それぞれの図のタイルの数を数え、そのときの差に着目している。通常，差の方法を含む数的な推論は「図を描くことなしにいくつかのケースの中の変化を捉え，簡潔に表すことができる」（Chua and Hoyles，2012）とされ，多くの場面で機能するといわれている。

しかし先程の幾何的な推論と比較してみると，この差の方法ではまず規則をみつけることが容易ではないといえる。加えて，この場面における表の使用も幾何的な推論の解決に比べると手際のよい方法とはいえない。なぜならば，図のサイズの数とタイルの数との間の結びつきを確立することは容易ではないからである。一方でここでの幾何的な推論では，使われる図のサイズの数とタイルの数との間の関係をより明確に捉えることができ，そのパターンの構造を数的な推論の場合よりも容易に認めることができるといえる。

したがって，同じように一般化が達成できているとしても，そこに至るまでの過程が全く異なっている。つまり，学習者の推論の仕方に応じて，行われる一般化の達成のし易さに違いが生じてくることが考えられる。

第 5 章要約

本章では，4.2 において規定した学習者の推論の仕方を問題に適用することにより, 学習者の推論の仕方と一般化との関係について考察を行った。

先ず, 学習者の推論の仕方に応じて導かれる一般化の結果が異なってくることがわかった。また，学習者の推論の仕方によって一般化の達成のし易さに違いが出てくることも明らかになった。

これより, 教師の意図した一般化を学習者に行わせたい場合には, どのような推論を促せばよいのかについて教師は留意すべきであるといえる。加えて，学習者が一般化を達成し易くなるような推論の仕方を促す必要があるといえる。

第 6 章　数的な推論と幾何的な推論の関連付けを意識した事例による一般化を志向した学習指導の提案

6.1.　先行研究における数的な推論と幾何的な推論の関係について

6.2.　数と図を関連付けることのよさについて

6.3.　「ひごで階段をつくる問題」の事例

本章では, 数的な推論と幾何的な推論の関連付けを意識した事例を基に，一般化を志向した学習指導の提案を行う。

6.1 では，先行研究における数的な推論と幾何的な推論との関係について述べ，6.2 では数と図を関連付けることのよさについて先行研究を基に記述する。そして 6.3 では 6.1，6.2 で指摘したことより事例を基に検証を行い, 本研究における数的幾何的な推論について考察を行う。

6.1. 先行研究における数的な推論と幾何的な推論の関係について

第 5 章において，学習者の推論の仕方に応じて導かれる一般化の結果が異なってくるということが伺えた。つまり意図した一般化を学習者に行わせたい場合には, どのような推論をさせる必要があるのかについて教師は留意する必要があるといえる。また，そこで行われる推論の仕方によっては一般化の達成のし易さに違いが出てくることもわかった。

これらに基づけば, 一般化が達成されることは大事なことであるが，単に一般化ができることは余り重要ではなく，そこで学習者がどういう推論の仕方を選択して一般化を行ったのかということが大切になってくるといえる。では，どのような推論の仕方が望ましいのだろうか。

既に述べた通り，先行研究の中でも数的な推論と幾何的な推論の両方が用いられる場合があることが指摘されている。例えばこれまで述べてきた Rivera and Becker（2005）は, 数的, 図的の両方を含んでいるものとして活動的をあげている。ただし, この活動的は図的な一般化から行われる傾向があるとしている。またその Rivera and Becker（2005）に基づいている Chua and Hoyles(2010a)もまた活動的について，次の事例を通して図的から数的への切り替えによって行われる傾向があるとし，一方でその逆の場合では至らないと指摘している。

ケンはタイルで次の連続した図をつくった。

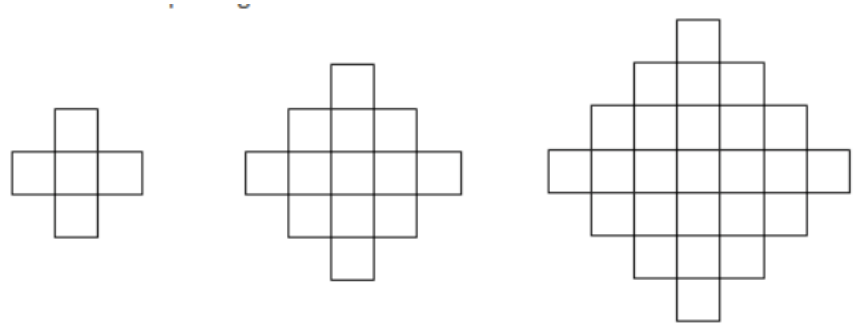
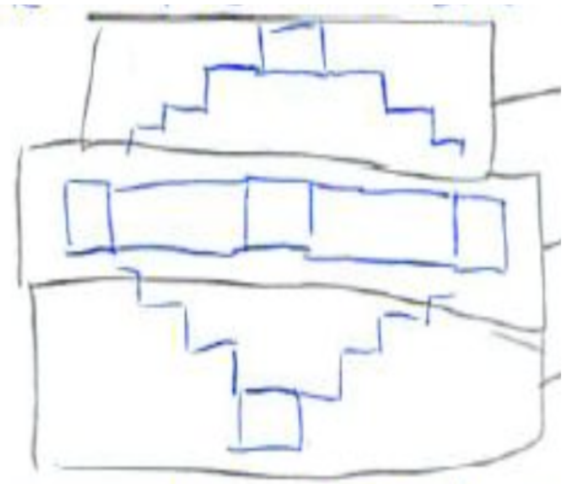


図 1　　図 2　　図 3

図 1 をつくるために，彼は 1 つのタイルから始め，その上に 3 列のタイルを加える。そのときその上にさらに 1 つのタイルをのせる。
図 2 のために，彼はまた 1 つのタイルから始め，そのときその上に 3 列のタイル，そしてさらに 5 列のタイル，結果的にその後は最初の 2 つの段（1 段目と 2 段目）を加えることを繰り返した。ただしその順序は逆である。
同様のやり方で図 3 もつくられる。図 n をつくる為に必要とされるタイルの数を決めるルールを見つけなさい。

上の問題に対して以下に示す解決がみられた。
　ここでは図的アプローチから始まった。しかし，のちに数的アプローチへ移行する。それぞれの十字は 3 つの部分で構



成されているものとしてみられ，真ん中の列とその両側の 2 つの同一のピラミッドとして捉えられる。図より真ん中の列は，図の数が増えるに従い，2 つのタイルが加えられることから，一般のルールとして $2n+1$ が導かれる。2 つの同一のピラミッドでは，タイルの数を数えることを通して，連続の 1，4，9 のようなピラミッドのパターンが得られる。さらに視覚的契機に頼ることなしに，教師は図の数とタイルの数との間の結びつきをみることで 1 は 1^2，4 は 2^2，9 は 3^2 へと変える。そのときこれらから，n^2 の表現を得る。そして 3 つの部分を加える事により，そのルールは $2n^2+2n+1$ と与えられる。
同様の主張は，数的な推論，幾何的な推論について述べている Pytlak（2012）においてもみられる。

これら先行研究より,本研究における数的幾何的な推論というものは幾何的な推論から数的な推論への切り替えによって起こり得るものとして捉えられていることがわかる。ただし,この幾何的な推論から数的な推論への切り替えでしか起こり得ないという根拠については明らかにされておらず,それぞれの先行研究でのケーススタディ,つまり学習の中でみられた子どもたちの姿から判断されたものであることが伺える。

もしそうだとすれば,その逆である数的な推論から幾何的な推論への切り替えは本当に起こらないのかどうかについて検討する必要があるといえる。

6.2. 数と図を関連付けることのよさについて

一方で我が国の先行研究の中では,数と図を関連付けることのよさについて以下のように述べられている。

松浦（2001）は，一般化の概念を形成する上で大切にしたい点について，第 4 学年において行われる数量関係の一般化を行う指導を例として次のように述べている。

「□や△を用いて数量関係の一般化を行う指導は，次の二つの指導過程を踏んで行うことが多い。一つは，数量の関係を表に表し,その表を横に見ることによって変化のきまりを見つけたり，縦に見ることによって対応のきまりを見つけたりして，それらの関係を式表示させる方法である。…（略）…。もう一つは，対応する関係について，対応する組ごとに具体的な数値で式に表現し，その複数の式を考察し，その共通性からさらに一般化した式を導く方法である。…（略）…。ここで留意しなければならないことは，いずれも，数や式の上で子どもがきまりを発見して立式できたことで一般化させることができたと安心してしまう虞があるということである。真に一般化の概念をもたせるためには，次図に示したように，その式の意味を図形的な構造の把握を通して，具体的にイメージ（表現）させる必要があると考える」。

これより松浦（2001）は，一般化により導かれた式の意味を図形的な構造の把握により具体的にイメージさせる必要性について主張していることがわかる。また，そのような図形的な構造の把握を軸に一般化の概念形成を図る為の方途として，図形的なとらえかたと数的なとらえかたの関連を意識した教材の開発とその教材を用いての学習指導の在り方の提案を行っている。

数や記号で表現したものと絵や図で表現したものを関連付けることについては，伊藤（2014）もまた「新しい算数研究，数学的に考える力とは，4．式（数）と図形（図）を関連付け

る」の中で，次のように述べている。

「数や記号を用いた計算に比べると，図による操作は煩雑であり, 負の数の処理など困難な場面に出会う。しかし, 一方で, 図に表現されたものは視覚的表象であるために, 場面全体の様子をひと目で見渡すことができる。そしてその結果として，直観的な思考がはたらきやすいなどの優れた利点をもっている」とし, 数や記号で表現したものと絵や図で表現したものを関連付けることで，双方の長所を取り込むことにより，数学は著しい進歩を遂げたと述べている。

伊藤（2014）は，その典型であると同時に最も優れた関連付けとして数と数直線の例をあげている。数直線と関連付けることにより，計算上の式変形が何を意味しているのか，そして確かにその操作が妥当なのか, ということを図との対応関係をみることを通して理解できる。図は，数や式などの記号が表すものをイメージ化するはたらきを担うことで, 思考の助けとして不可欠であるとしている。

伊藤（2014）の主張は一般化の場面を対象としているわけではないが，松浦（2001），伊藤（2014）の主張から共通していることとして，図的に捉えるということは，導かれた式の意味やそこに至るまでの過程が意味していることに対して, 図を通して解釈することを可能としていることがわかる。

これまで述べてきた Rivera and Becker（2004），Chua and Hoyles(2010a)らにおいては，数的な推論や幾何的な推論それぞれがどういう役割を担っているのか, そしてその両方が用いられるとされている数的幾何的な推論とはどのようなものなのかについてはほとんど述べられていないといえる。したがって, 一般化を図る学習においてそれぞれの推論が担う役割についても明らかにすべきであるといえる。

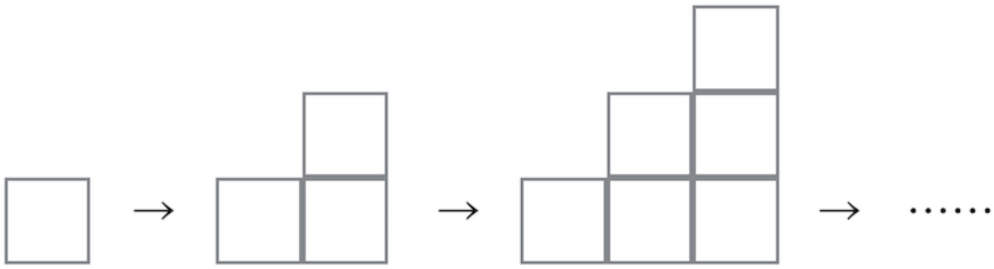
これより以下では，1 つの事例を通して一般化を志向した学習指導の立場から数的な推論から幾何的な推論への切り替え

は起こり得るのか, またそれぞれの推論が担う役割について考察していく。

6.3.「ひごで階段をつくる問題」の事例

ここでは以下に示す事例を通して考察を行う。

同じ長さのひごを使って，下のような階段をつくっていく。



1 段　　2 段　　3 段

この事例ではまず始めの導入として，1 段つくるにはひごは何本必要か，2 段つくるにはひごは何本必要か，3 段つくるには…というように階段をつくる際に必要なひごの数を少ない方から順に調べていくことで, 問われてることを確認させることが行われるだろう。そして，例えば 6 段ではひごの数は何本になるだろうかというように, 問題提示の際に示されてはいない 4 段以上の段を考えさせることにより, 段数が増えれば, 数えたり図を描いていくのは手間がかかってしまうことを実感させる。これより，もっと手際のよい求め方をみつけさせることへと促される。

通常この事例においては, 一般的に必要なひごの数を順に数え，表にまとめていく解決がなされることが考えられる。

［表を横にみる］

段の数	1	2	3	4	5	6
ひごの数	4	10	18	28	40	54

＋6　＋8　＋10　＋12　＋14

［表を縦にみる］

段の数	1 ↓×4	2 ↓×5	3 ↓×6	4 ↓×7	5 ↓×8	6 ↓×9
ひごの数	4	10	18	28	40	54

表を横にみていくと，段の数が 1 つ増えると，ひごの数は＋6，＋8，＋10，…と増えている。また表を縦にみていくと，段の数が 1 のときひごの数は 4 倍の 4，2 のとき 5 倍，3 のとき 6 倍，…というように増えていることがわかる。小学校段階ではここまで行わないが，このことから $n(n+3)$ を導くこともできる。

上記のように表よりあるパターンをみつけてそこから一般化へ向かうというやり方も解決の 1 つであり，実際の教科書においても, このように表を基にパターンをみつけさせることが意図されている。またここで行われている一般化は，Rivera and Becker(2008)，Chua and Hoyles(2010a)らの述べる数的な取り組みによる一般化と一致しているといえる。

しかし，既に述べたように松浦（2001）は「数や式の上で子どもがきまりを発見して立式できたことで一般化させることができたと安心してしまう虞がある」ことを指摘している。この松浦（2001）の主張を言い換えれば，数的に一般化を行うことができたからといって（教師は）一般化させることができたと安心してはならないというふうに捉えることもできる。この点について松浦（2001）は，一般化により導かれた式の意味を図形的な構造の把握を通して, 具体的にイメージ（表現）させる必要があることを述べているが, ここでは松浦（2001）が自身の主張の中で用いているきまりということばに着目し

てもう少し詳しく議論してみたい。

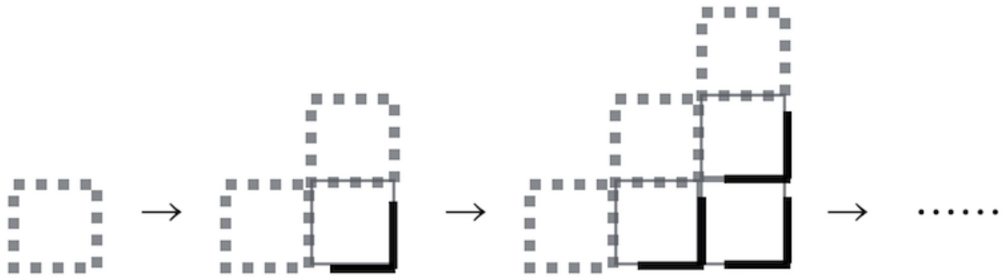
そもそもきまりとはどうしてみつけなければいけないのか。これについての回答として，溝口（2012）は「本来，きまりを見つけたり作ったりするのは,それによって後の仕事を能率よく進めたり,できる仕事の範囲を決定したりすることにある」と述べている。この事例のように，例えば「6段ではひごの数は何本になるだろうか」について答える為には，6段のときのひごの数を示す上での根拠が必要となる。だから，きまりを求める必要があるのである。つまりきまりとは，3段までの構成でみえたことを基に，4段以上のひごの数でも同じようにいえるのかどうか保証するものでなければならないといえる。

しかし,もう一度上記で示した表に基づいた一般化の場面に戻ってみると，表を横にみたとき，縦にみたとき関わらず，これらの解決の中で本当にきまりが発見されているといえるのだろうか。確かに，始めに与えられた 3 段までの場面からそれぞれの増え方のパターンをみつけ,4段のとき,5段のとき,6段のときのひごの数を求めている。よって，1つの一般化が達成されているといえるが,一方でそこでみつけられたパターンが7段のときや10段のときにも同様に成り立つといえるのかどうかについては何ら明らかにされてはいないといえる。あくまでパターンとしてみえただけであって,与えられている図がどうしてそのように解釈できるのか,どのように構成されているかなどのきまりを発見したとはいえない。従って，上記のようにみえたことが,本当にきまりとしていえるのかどうか保証する必要があるといえる[1]。

表に基づいた一般化が行われる限り,その方法が適用された個々の場合において,その結果がパターンに一致することを示しているにすぎない。では，どのようにきまりとして保証することができるだろうか。ここでは図に基づいた解釈，具体的にはひごをまとまりとして捉えていく見方は,そのきまりを保証

する手段として有効に働くことが考えられる。例えば，以下に示すような場面を考えてみる。

［□（4 本）の数＋L（2 本）の数］



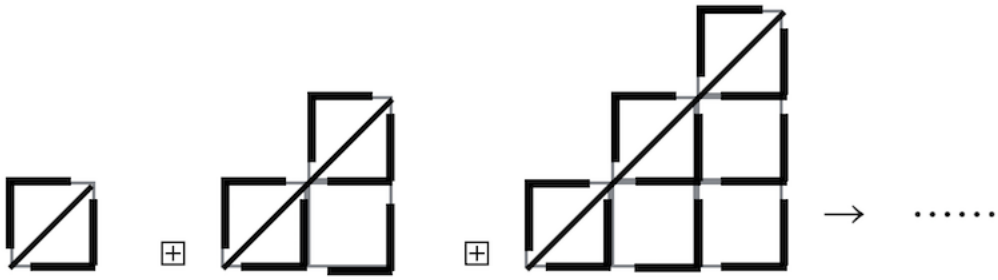
1 段　　2 段　　3 段

ここでは，□（4 本）と L（2 本）の形を組み合わせてひごの数の増え方を考えている。図をみるとわかるように，段の数が 1 つ増えるに従って，ひごの数は 1 つ前の段の一番右の縦列のひごの数＋L1 つ分増えている。つまり，段の数が 1 つ増えるに伴ってひごの数の増え方は 2 ずつ（L 1 つ分）大きくなってくるということがいえる。このことはどのようなことを意味しているのか。既に述べた表を横にみることによる解決に戻ってみると，表を横にみていくことで段の数が 1 つ増えると，ひごの数は＋6，＋8，＋10，…と増えており，こちらもひごの増え方は 2 ずつ大きくなっている。

これを□（4 本）と L（2 本）の形を組み合わせて考えることにより，表を横でみた際にみられたパターンと同じであるひごの増え方が 2 ずつ大きくなっているということを視覚的に捉えることができる。また，この図を通した解釈は段の数がいくつになっても右下の L の部分が常に 1 つ増えるものとして考えることができる為，きまりとして成り立つことを保証しているといえる。

また以下に示すような場面についても考えてみたい。

［L（2 本）の数］



1 段　　　　2 段　　　　3 段

（1＋1）　　（2＋1＋2）　　（3＋1＋2＋3）

ここでは，L（2 本）の形を組み合わせていき，ひご 2 本を 1 つのまとまりとしてひごの増え方を考えている。上記に示すように与えられた図に 1 本の線を引くことから，あるきまりをみつけることができる。そのきまりとは，引いた線より上の L の数は常に段の数と一致しているということ，そして線より下の L の数は 1＋2＋…＋段の数の合計の値になっているということである。このきまりから，例えば 4 段のときのひごの数は，L の数＝（4＋ 1 ＋ 2 ＋3＋4）で求められることからその(合計の値)×2 を計算することによって求めることができ，この考え方はどんな段の数のときでも成り立つことができるといえる。また，n の場合は $2(n+\frac{1}{2}n(n+1)) = n(n+3)$ と表すことができる。

また先程行った L（2 本）の数での図の解釈を以下のように変換して考えてみると，次に示すような対応関係をみることもできる。

［表を縦にみる見方］	［L（2 本）でみる見方］

（1 段）	1×4	＝	2×2	
				＋3＝（1＋2）
（2 段）	2×5	＝	2×5	
				＋4＝（1＋3）
（3 段）	3×6	＝	2×9	
………………………………………………				
（n 段）	$n(n+3)$	＝	2×□	

先ず先程のＬ（2 本）の数での図に着目すると，ひごの数は 2×（Ｌの数）より，1 段のとき 2×2，2 段のとき 2×5，…というようにして求めることもできる。そしてこれは，先程の表を縦にみることによって導き出された考え方とつながっていることが伺える。これより，Ｌ（2 本）の形を組み合わせることによる解釈と表を縦にみることによる解釈は対応していることが考えられる。

ただし，表を縦にみることによる解釈に関しては 1 段のひごの数は 1×4，2 段のひごの数は 2×5，…というパターンをみつけることはできるが,そのパターンがどんな段の数でも成り立つという保証は得られない。一方のＬ（2 本）の形を組み合わせることによる解釈では，上記のように図から段の数が 1 つ増えるに従ってＬの数の増え方は＋3，＋4，…とＬ（2 本）1 つ分多くなっていることがわかる。またここでの＋3 を 1＋2 に，＋4 は 1＋3 に置き換えてみると，図を通して 2 段のときは 1＋2，3 段のときは 1＋3 増えるということがみえ，次の 4 段のときは 1＋4 増えるということがわかる。つまりどの段の数においても 1＋（その段）だけ増えるだろうと捉えることができる。

これより, 例えば今回のように表を縦にみることによる解釈から始まり，Ｌ（2 本）の形を組み合わせることによる解釈へと移行するような流れも十分に考えられる。よって数的な推論

から幾何的な推論への切り替えも起こり得るものとして捉えることができる。本研究においては，数的幾何的な推論の解釈として, 幾何的な推論から数的な推論への切り替えばかりではなく, 数的な推論から幾何的な推論の切り替えによっても十分起こり得るものとして考える。

その際に，この事例からもみられるように，数的な推論によって一般化をするものは，頻繁にパターンをみることができ，そこから一般化を行うことができる。しかし一般化により導かれた式がどんなときでもきまりとしていえるかどうか保証することができないといえる。一方で幾何的な推論によって一般化をするものは, 彼らが構成する数的な推論のさらなる理解を持たせることを可能とする。さらに，不変の特性，関係などを視覚的にみることができ, 根拠を明らかにして説明することができるといえる。

従って, 教師は学習者に数的な推論による一般化ばかりを強調しないで, 幾何的な推論を促すような活動や問題場面を与えることが必要であるといえる。先行研究や実際の教科書では，幾何的な推論から数的な推論への見方がみられること, または数的な推論を促して終わりということがみられたが, 本研究ではそればかりではなく, 数的な推論から幾何的な推論への見方の重要性について事例を用いて考察を行った。そして学習者がより柔軟に数的な推論と幾何的な推論の 2 つの間を行ったり来たりすることが可能となることが望まれる。

第 6 章要約

本章では, 数的な推論と幾何的な推論の関連付けを意識した事例を基に，一般化を志向した学習指導の提案を行った。

まず先行研究より, 数的幾何的な推論は図的から数的への切り替えにより行われる傾向があるとし, 一方でその逆の場合では至らないという指摘がなされていた。その為，事例を用いて数的な推論から幾何的な推論への切り替えは本当に起こらないのかどうかについて検証した。

その結果, 数的な推論から幾何的な推論への切り替えも十分に起こり得ることが明らかになった。従って，本研究において数的幾何的な推論の解釈として, 数的な推論と幾何的な推論の両方を用いたものとして捉えると同時に, 幾何的な推論から数的な推論への切り替えばかりではなく, 数的な推論から幾何的な推論への切り替えによっても起こり得るものとして捉えた。

また数的な推論による一般化は, 頻繁にパターンをみることができ，そこから一般化を行うことができるものの，一般化により導かれた式がどんなときでもきまりとしていえるかどうか保証することができない。一方で幾何的な推論による一般化は, 彼らが構成する数的な推論のさらなる理解を持たせることを可能とし, 不変の特性, 関係などを視覚的にみることができ, 根拠を明らかにして説明することができるといえる。このように, それぞれの推論の仕方が担う役割についても明らかとなった。

[1] ただし，ここでの保証とは，宮崎（1991）で示されている生成的な例としての見方のことを指しているものとする。

第 7 章　終章

本章では，7.1 で本研究の結論について述べる。7.2 では，今後に残された課題について述べる。

7.1.　本研究の結論

本研究では，一般化，もしくは一般化へのアプローチの仕方の分類が行われている一方で, 実際に授業の中でどういう働きかけをすれば, 教師が意図した一般化を学習者に促すことができるのだろうかという問いの基, 先行研究におけるケーススタディ，事例の検討より，以下の 4 つの研究課題が抽出された。

・研究課題 1
　一般化の違いは，どのような要因によって起こり得るのか
・研究課題 2
　数的な推論，幾何的な推論とはそもそも何ものであるのか, いかに解釈し捉えるか
・研究課題 3
　一般化と学習者の推論の仕方とには, どのような関係が認められるか
・研究課題 4
　数的な推論から幾何的な推論への切り替えは起こり得るのか。起こり得るならば，この切り替えが一般化の学習場面で果たす役割はどのようなものか

研究課題 1 に対しては，Ciosek（2012），Pytlak（2012）の主張を踏まえ，作業的枠組みの作成を行った。そして，その作業的枠組みによる分析より, 一般化の違いというものは学習者の推論の仕方，つまり数的な推論を行うのか，幾何的な推論を行うのかによって生じてくるものであることが明らかになった。

研究課題 2 に対しては，一般化へ向かうアプローチの仕方として数的なもの，図的なものがあるとし，それらをさらに系統立てて分類を行っている Rivera and Becker(2004, 2006a, 2008)，Chua and Hoyles(2010a，2010b，2011)らの主張に依

拠した。結果として，本研究では一般化へ向かう学習者の推論の仕方を，数的な推論，幾何的な推論，数的幾何的な推論として考え，さらにそれらは Chua and Hoyles(2010a，2010b，2011)が述べる 7 つを含んでいるものとして捉えた。

研究課題 3 に対しては，学習者の推論の仕方に応じて導かれる一般化の結果が異なってくること, また一般化の達成のし易さに違いが出てくることも明らかになった。これらに基づけば，一般化が達成されることは大事なことであるが，単に一般化ができることは余り重要ではなく, そこで学習者がどういう推論の仕方を選択して一般化を行ったのかということが大切になってくるといえる。

研究課題 4 に対しては，事例を通して数的な推論から幾何的な推論への切り替えも十分に起こり得ることが明らかになった。また数的な推論による一般化は，頻繁にパターンをみることができ，そこから一般化を行うことができるものの，一般化により導かれた式がどんなときでもきまりとしていえるかどうか保証することができない。一方で幾何的な推論による一般化は, 彼らが構成する数的な推論のさらなる理解を持たせることを可能とし，不変の特性，関係などを視覚的にみることができ，根拠を明らかにして説明することができるといえる。従って，数的な推論から幾何的な推論への切り替えによって，数的な推論では保証できなかったきまりを図に基づいた解釈を通して保証することができるといえる。

これまでに一般化に関する研究は数多く行われ, 一般化とは何か, 一般化へ向かうアプローチにはどのようなやり方があるのかということが明らかにされてきた。しかしそのように一般化にはいくつかのアプローチの仕方があるといわれている一方で, そうしたアプローチの仕方の違いによって一般化にどのような影響があるのか, 一般化との関係などについてはそれ程明らかにされてきていないといえる。

従って本研究での取り組みは, 一般化へ向かう学習者の推論の仕方における理解を高める１つのきっかけを与えるものであり, それによって一般化を志向した教授学習場面の改善につながることを信じている。

7.2. 今後に残された課題

本研究はまだ完成されたものではなく、ここで提言したことはごく一部分である。一般化へ向かう学習者の推論の仕方は他にももちろん存在するかもしれない。従って、今後の実践を通して他にどのような推論の仕方がありそうかについて分析する必要があるといえる。

またここで扱った事例はほんの一部であり、他の事例（幾何の場面）でも同じように述べることができるのかどうかについて検証する必要がある。

さらに、これまで数的な推論や幾何的な推論はどのようなものであるかについて述べてきたが、それら推論の仕方を促すような活動や問題場面などについては明らかにできていない。従って, これらのことについて今後示していく必要があるといえる。

引用・参考文献

Dorfler.W.（1991）．”Forms and means of generalization in Mathematics”. In Bishop.A(ed.)Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching,pp.63-85,Kluwer Academic Publishers.

Becker,J., and Rivera,F.D.(2004).“An Investigation of Beginning Algebra Students Ability to Generalize Liner Patterns”.In Proceedings of the28 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,edited by M.J.Hoinesn and A.B.Fuglestad,pp.1-128. Bergen,Norway:PME,2004.

Rivera,F.D and Becker,J.（2005）．Figural and numerical modes of generalizing in algebra.Matematics Teaching in the Middle School 11(4),198-203.

Becker,J., and Rivera,F.D.（2006a）.Establishing and Justifying Algebraic Generalization at the Sixth Grade Level.In J.Novotna,H.Moraova,M.Kratka,&N.Stehlikova(Eds.),Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Math Education(Vol.4,pp.464-472).Prague:Charles University.

Zazkis,R.,&Liljedahi,P.,&Chernoff,E.(2007).The role of examples in forming and refuting generalizations.ZDM,

Rivera,F.D.,and Becker,J.（2008）．Middle school children‘s cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns.ZDM,40(1),65-82.

Bezuszka,S.J., and Kenney,M.J.(2008). The three R’s:Recursive thinking,recursion,and recursive formulas.In C.E. Greenes & R.Rubenstein(Eds.),Algebra and Algebraic ThInking in School Mathematics (Seventieth Yearbook)(pp.

81-97).Reston,VA:NCTM.

Chua,B.L.,and Hoyles,C.(2010a). Generalization and perceptual agility:How did teachers fare in a quadratic generalizing problem?Research in Mathematics Educatuion,12 (1),71-72.

Chua,B.L.,and Hoyles,C.(2010b).Teacher and student choices of generalizing strategies:A tale of two views?In Y. Shimizu,Y.Sekiguchi & K.Hino(Eds.),Proceedings of the 5 th East Asia Regional Conference on Mathematics Education(Vol.2,pp.24-31).Tokyo,Japan:EARCOM.

Chua,B.L.,and Hoyles,C.(2011). Secondary school students perception of best help generalizing strategis.National Institute of Education(pp.440-449).

Chua,B.L.,and Hoyles,C.(2012).Seeing through students' eyes: the best-help strategy for pattern generalization.12 th International Congress on Mathematical Education.

Pytlak,M.（2012）. Students working on regularities a case study from Poland.In M.B,Tatsis &T.K(Edus),Generalization in mathematics at all educational levels(pp.215-233).Poland and Rzeszow:Rzeszow University.

Ciosek（2012）. Generalization in the process of defining a concept and exploring it by students.In M.B,Tatsis & T.K (Edus),Generalization in mathematics at all educational levels(pp.38-56). Poland and Rzeszow:Rzeszow University.

Kolar and Cadez（2012）. Dependence of the problem solving strategies on the problem context.In M.Pavlekovic(Edus), mathematical teaching for the future(pp.162-171).

Chua,B.L.,and Hoyles,C. (2014).Generalisation of Linear Figural Ptterns in Secondary School Mathematics.The m-

athematics educator 2014,Vol.15,No.2,1-30.
Polya.G,（1954a）,数学における発見はいかになされるか 1 「帰納と類比」（柴垣和三訳），丸善株式会社
倉井（2000）．「数学的活動としての一般化」．筑波大学研究紀要 38，125-128.
松浦（2001）．「図形的な構造の把握を軸に一般化の概念形成を図る算数科の学習-第 4 学年「形から数へ，数から形への実践より-」．広島大学研究紀要平成 12 年度，53-57.
溝口（2012）．「算数・数学教育概論」．鳥取大学数学教育学研究室.
伊藤（2014）．「数学的に考える力とは」．新しい算数研究 8 月号．37-40.東洋館出版社.
吾郷（2015a）．「一般化の結果と推論の仕方との結びつきについて」．鳥取大学数学教育研究.Vol.18,No4,pp.1-9
吾郷（2015b）．「学習者の推論の仕方が一般化に及ぼす影響について−数的な推論と幾何的な推論の特性に着目して−」．第 48 回日本数学教育学会 秋季研究大会.

謝辞

本研究を進めるに当たり,非常に多くの方々から御指導を賜りましたことを深く感謝致します。

溝口達也先生には，研究室への配属が決まってから 5 年間もの間，手厚く御指導を頂きました。特に大学院に進んでからは，私の研究テーマに関わる論文を御紹介頂き，一から論文の読み方，英語論文の読み方などの御指導を頂きました。毎回のゼミでは，自分で作成したレジュメにも関わらず，問われたことに答えることができず,時間だけが過ぎていくことも多々ありました。なかなか研究課題が見つからず，研究が思うように進まない私ではありましたが,最後まで見捨てずに御指導を頂けたからこそ,このような修士論文としての形にすることができたと思います。

また，矢部敏昭先生には，特に授業の中で示される事例を通して，数学教育の魅力を教えて頂きました。矢部先生のお話を聞く度に，研究への意欲が掻き立てられました。

更に，この研究室の先輩方にも本当にお世話になりました。早田透さんには,研究に行き詰まっているときに相談に乗って頂きました。学会や夏合宿では，いつも貴重な御意見，御指導を頂き，いくつかの論文も紹介して頂きました。前田静香さんには，夏合宿の際に御指導を頂きました。また，学会でお会いする時にも，色々とご心配をおかけしていたかと思います。毎月の「Lapin の会」では，山脇雅也先生，山本靖先生の現場での実践報告など，多くのことを学ばせて頂きました。指導書の作成にも携わることができ,貴重な経験をすることもできました。田中克征先生には，研究への御指導を始め，研究室の過去のお話なども伺うことができました。数学教育に対する田中先生の姿勢を見る度に，自分の努力不足を感じると同時に，研究への意欲もより高まっていきました。玉木一義さんには，研究室の 1 つ上の先輩として，2 年間本当にお世話になりました。

研究で悩んでいると，夜遅くまで一緒になって考えて頂き，いつも色々な視点を与えていただきました。また，学会の手続き，夏合宿の準備，論文検索の仕方など，何から何まで丁寧に教えて頂きました。玉木さんが熱心に研究されている姿や研究以外でも後輩の面倒をみられている姿から，院生のあるべき姿を教えて頂きました。

そして，同期である岡友章さん，岸川友飛さんには大変感謝しております。苦しい時には共に悩んだり，共に考えたりしてくださり，自分一人だけでは思いつかないであろう視点を提供して頂きました。良き相談相手であり，良きライバルであり，苦しさや喜びを共に分かち合うことのできる存在でした。後輩である和田匠馬さんには，数学やコンピュータ関係に関して無知な私に対して，事ある毎に知識を提供して頂きました。学部生の荻原友裕さん，若林直広さん，内地留学の田中明日香先生には，夏合宿の準備，卒論修論発表会の準備などで助けて頂きました。

そして最後になりますが，大学院に行きたいという願いを聞き入れてくれた両親には本当に感謝しています。このように非常に多くの方々のご支援があったからこそ，こうして１つの論文として形にすることができました。本当にありがとうございました。

2016 年 1 月
院生室にて

鳥取大学数学教育研究　　**ISSN 1881–6134**

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。

- 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
- 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
- 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
- その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/