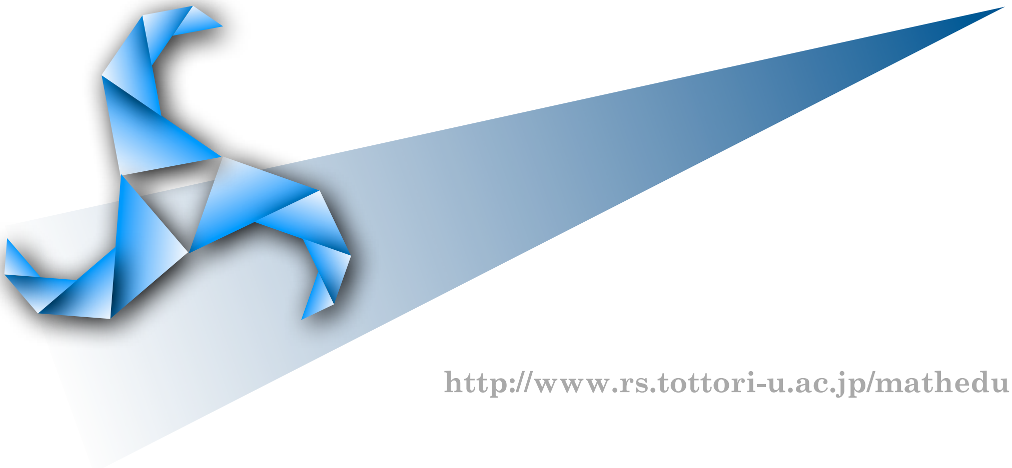
ISSN 1881–6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education



http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

『根拠を用いた説明』ができる生徒の育成をめざして

田中明日香　*Asuka Tanaka*

vol.19, no.4

Apr. 2016

鳥取大学 数学教育学研究室

〈はじめに〉

中学校数学の大きな内容の１つに「証明」がある。生徒たちは初めて出くわすこの内容に抵抗を覚えることがしばしある。それは、それまで学習してきたような解法への手順が明確で、１つの解を求めるものではなく、既に答えが分かっているものに対し、根拠を用いた説明を要求されるからであろう。

実際、証明以外の授業で正解にたどり着いた生徒に説明を求めても、自分の計算の仕方や手順を読み上げるに留まり、どうしてその解法にいきついたのか、根拠は何かについて説明することができない。また、そのような生徒のノートには計算の途中に根拠となるような事柄はほぼ記されていない。中にはメモ書き程度の計算しかない生徒もいる。既習事項の内容をなんとなくは理解しているだろうがそれをどの場面で使うのか、今それを根拠として問題を解決しているのだという意識はできていないようである。そのような状況では、せっかくの自分の考えを相手に伝えることができず、互いの考えを共有し、高めあうことができないと考える。さらに、そのような理解では確実に内容が定着したとはいえないであろう。

現行の学習指導要領にも「表現する力」が新しく盛り込まれ、互いに考えを共有することで質的に高めあうことも期待されている。他者の考えを聞くことで自分の解法を振り返り、新たな発見、より簡潔な解法を見つけることにもつながるのでないかと考える。

そこで、生徒の証明への抵抗を少しでも軽減するために日頃の授業から「根拠を用いた説明」を授業の中に取り入れたいと考えた。そして、その課題に答えるためにも、研修のテーマを「『根拠を用いた説明』のできる生徒の育成をめざして」とし、根拠となる定義や定理を必要とする教材の検索、開発、授業設計について研究を深めることとした。

目　次

第1章　　研究の目的・方法

第１節　研究の目的

　『根拠を用いた説明』ができることの重要性について、ここまで述べてきた。そして、「『根拠を用いた説明』のできる生徒の育成をめざして」というテーマで研究を深めるにあたって、次のような考えをもとに研究を進めていくこととした。

　①「根拠を用いた説明」についての理解を深める
　②「根拠を用いた説明」を必要とする授業の設計を示す
　③「根拠を用いた説明」を必要とする授業実践を行う
　④なぜ、根拠を用いて説明できないのか？その原因は何かについて考察する
　⑤支援の方法について考える

　以上の研究課題に対する答を明示することを目的とする。

第２節　研究の方法

　研究の方法は、先ず①に関して、杉山吉茂氏の著書『公理的方法に基づく算数・数学の学習指導』をもとに、公理的方法に基づいた数学の考え方について学ぶ。次に②に関しては、杉山氏のいう公理的方法に基づいた指導案の作成を行う。③に関しては、②で作成した指導案をもとに勤務校である鳥取市立北中学校にて実践を行う。④・⑤に関しては、北中での実践をもとに先行研究などを用いて考察を行っていくものとする。

第2章　研究の内容

本研究では、まず第 1 節に杉山氏の著書『公理的方法に基づく算数･数学の学習指導』をもとに「根拠を用いた説明」の重要性について理解を深めていきたい。第 2 節において、杉山氏の考える理想の学習状態について述べ、第 3 節で杉山氏が教師に期待することを記したい。最後に、第 4 節において第 2 章のまとめとして筆者の考える公理的方法の考え方について述べていきたいと考える。

第1節　杉山氏の公理的方法

杉山氏は、著書『公理的方法に基づく算数・数学の学習指導』の中で公理的方法の考えについて次のように記している。

「(前省略)本論文の主たるねらいは、公理的方法の考えをもってすれば、数学を創造し、発展させていくように数学を学習させていくことができるのではないか、しかも、発見学習に伴いがちな非能率な学習に陥らない学習指導ができるのではないかということである。(中省略)本論文の主たるねらいを上に述べたことにおくとき、公理的方法の考えとは何かが問題となるが、本論文では、公理的方法の考えを、『根拠を探り、これを明らかにする』ことと、『仮設をおいて考える』こととした。(p.16)」

「公理的方法とは、要するに、原理を求め、原理から論理的に理解しようとする精神に支えられ、仮定を置いて、実在にアプローチしようとする方法、言い換えれば、研究を進める方法であり、態度であるということができる。(p.49)」

「我々は無意識に何かを仮定してものごとを主張したり、行動したりしている。ときには、感覚的に真であると思っていることもある。それらの根拠を追求することが公理的方法の考えである。(p.77)」

「確かな知識を得、確かな仕事をするために、その根拠を探る必要が生じ、あるいは、原理から理解するために、その原理を明らかにすることが要求される。その根拠や原理に基づいてものごとを理解し、その根拠に基づき確かな知識を得ていく。これを公理的方法の考えの一つとする。(p.77)」

「公理的方法に含まれるいろいろな考えを含んでいるということを前提としたうえで、根拠(原理)を探ることと、仮設をおいて考えるということを、公理的方法の考えとしておくことにする。(p.81)」

「いろいろな視点から見ることによって教育的な示唆をいくつか得て来たが、最終的には、公理の設定の

仕方に着目して、『根拠(公理)を探る』ことと『仮設(公理)をおいて考える』ことの二つに集約して考えることにした。(p.103)」

「第2章では、それらのいろいろな考えが、『原理(根拠)を探る(明らかにする)』こと、および、『仮設(原理、根拠)をおいて考える』ことの二つに集約されることを考察し、本論文では、これを公理的方法の考えとした。(p.327－328)」

杉山氏のいう公理的方法の考えとは、「根拠(原理)を探る」「仮設(公理)をおいて考える」すなわち、根拠や原理に基づいてものごとを理解し、その根拠に基づき確かな知識を得ていくことであると筆者は解釈した。

第2節　杉山氏の理想

また杉山氏は、この考えに基づき、教えなくても子どもが自分で知識を習得し、学習を進めることができる状態を理想としている。教えないでも子ども自らが獲得できれば教えないですませる指導が可能となり、能率的かつ充実した学習の場を与えることができるものと期待しているからである。そのために、「教えなくても学べるような力をつけておきたい」と考えている。それは、数学を発展させる考え、数学を作りだしていく考えなどに基づいた学び方である。このことにより、自ら数学を学ぶ力をつけるとこにもなるし、数学を発展的なものと考え、問題を解決する力を養い、創造的に学習させる基礎を与えてくれると考えている。

このことは、『公理的方法に基づく算数・数学の学習指導』の中でも以下のように記されている。

「公理的方法は、生徒自ら学べることは自ら学ぶことを期待し、自らの考えを自ら評価できる人間を育てることを期待している。(p.46)」

「筆者が、公理的方法に期待しているのは、一つは、数学的な知識・技能以上のものを数学の学習がもたらしてくれると考えるからであり、もう一つは、発展的、創造的に数学を学習させるときに有効な基本的な考え方を示してくれると考えるからである。(p.84)」

「学習指導の立場から考えて最も効率的な状態は、教えなくても、子どもが自分で知識を習得し、学習を進

めることができる状態である。教えなくても学ぶことができるようになっていれば、教師の労力は零となる。しかし、だからといって、教えないでほっておくだけでは、その目的が達せられるはずはない。それなりの手当てをしておかなければならない。教えなくても学べるような力をつけておかなければならない。

そのために、学び方を教えようという提案がある。学び方を教えるという学習目標を立てて、その実践もなされている。しかし、多くの場合、学び方というものが、教科書を読んでわからないところには線を引き、計算練習はかくかくのようにする………というような、いわゆる、勉強の仕方、予習、復習の仕方、自学自習の仕方であり、これを教えることが考えられているようである。

それはそれで一つの学び方へのアプローチではあるが、数学を教えるという立場からいえば、もっと数学に即して、数学を発展させる考え、数学を作りだしていく考えなどに基づいたものにしたい。その方が、自ら数学を学ぶ力をつけることにもなるし、数学を発展的なものと考え、問題を解決する力を養い、創造的に学習させる基礎を与えてくれると思われるからである。(p.89)」

「筆者が公理的方法を考えるときの基本的な立場は、既にこれまでの章の中にも示してきたように、単に論証ができればよいとか、ある種の数学的構造が理解できればよいとかということにあるわけではない。根拠を求め、基づいている原理・法則を明らかにし、確かな知識を得ることをめざすとともに、それらをもとに発展的、創造的に学習を進めることを大切にしたいと考えている。(p.217)」

「筆者は、必要に応じて数学を作り出していくという考え方に立つことをより重視したい。

必要に応じて数学を作りあげていくことを大切にするということは、必要に応じて新しい概念を作り、それを洗練していくということだけをさすわけではない。新しい場面に直面したとき、既習の知識を活用してその問題を解決し、その解決の方法を修正して形式を整えていくという考え方も含んでいる。まったく新しいものを作るのではなく、古いものに修正を加えて新しい場面に対処するという考えも含んでいる。もちろん、どうしても困る場合には、まったく新しい概念を作ることも考えなければならない。(p.224－225)」

「新しい事態に直面した時に、原理・法則を仮定しながらその事態にアプローチし、問題を解決し、新しい知識を作り出すことも多い。これに似たことを学習指導で用いれば、仮説を立て、観察実験を続けて事態を解明する考えを養うことができ、自学の態度もつけることができるものと期待できる。その力がなくてもそういう考えで学習を進めれば、自分で数学を作っているという気持ちももてるであろう。(p.256－257)」

「公理的方法の考えが学習指導を考えるときに有効だと考えるのは、それが、原理を探り、その原理を基礎にしたときの論理的帰結を追究する働きをもっているからである。その働きに着目して、公理的方法に発展的な学習を可能にする可能性を見、その具体的な事例を考察してきた。(p.294)」

第3節　杉山氏の教師に期待すること

杉山氏の理想とする学習状態を可能とするために教師は、発展的な学習を期待する内容について、その根拠を明らかにしていく考えによって何を強調して指導しておくべきか、そして、それを子ども自らが使える力となるようにするためにはどのような場で指導することが可能であるかについて考える必要がある。さらに、学習したことをもとにするとどこまでのことが発展的に理解できるものか、また、発展的に考えられないことは何かをも吟味しなければならない。そうすることで、何が教えなければならないことであり、何が教えなくてもすませることができるものかが明らかにできると考えている。また、子ども自らが、創造的・発展的に考え得ることまで解説して発見する喜びを奪ったり、子どもの力では発展的に考え出すことができないことまで考えさせ、無駄に時間を費やすようなことへの防止にもつながるのではないかとも考えている。

これら教師に期待することも以下のように記されている。

「実際には、小・中学校で、全く独力で子どもたちに数学を学ばせることは期待できない。しかし、どこに問題を見つけ、どのようにして問題に当たったらよいか、解決のためには何を考えなければならず、解決できた後どのように考え、どのように発展させることができるものかを知らせ、これを体験させるようにしたい。そのような態度でものごとに対処させていくことができれば、数学を意味あるものとして学習させることができるのではないだろうか。(p.89－90)」

「ただ考えさせればよいのではなく、どのように考えさせるかが大切である。しかし、教師の方もどのように考えるのがよいかをはっきり自覚していない。無意識なものとしては認められるのであるが、それはすべて教師が自ら培ってきた数学的能力、態度として自然に現れるものとなっている。教師が数学の力をもち、数学的な能力、態度を十分身につけているべきであることはいうまでもないが、教師としては、それを自覚してほしいものである。自覚していて初めて、数学的考え方の指導も評価も有効にできると考えられるからである。

そのためには、よく言われるように、いわゆる『数学する』ことの中身を分析し、それを具体化できるように教材を提示し、子どもに経験させることが大切だと考える。(p.91)」

「指導内容の中にどのような原理があり、それによってどのような発展が可能かの吟味をしておくことが欠かせない。(p.217)」

「具体的な事例を用いて説明する方法は、わかり易いように思われるが、問題も含んでいる。筆者の考えを述べるに先立って、まずその指導を吟味しておく。何を根拠として一般化できるのか、その根拠をどこで

どう与えているのか、どんな問題があり、その問題を解決するために何を補っておかなければならないのかが考察の視点となる。それは、確かな学習をさせるため、確かな知識を得させるために欠かせないことだからである。(p.231)」

「子どもが予想を立てながら、自分で公理にもどり、それに基づいて自分の行動や予想の確かなことを確かめるという展開こそ公理的方法である。これができるように教材を準備し、展開を構想しておきたい。(p.248)」

「初めから根拠となることを提示するのではなく、根拠に目を向けること、根拠を求めることを大切にしたい。(p.249)」

「原理に基づいての発展的な学習を期待するならば、どんな法則や原理を根拠にするのか、そして、それをもとにすればどのあたりまで発展的な考察が可能なのかを明らかにしておかなければならない。それらが明らかになれば、何に重点をおいて指導すればよく、何を教えなくても子ども自らの力で発展させることができるかも明らかになり、無駄な労力を省くことができるからである。その吟味があって初めて、少なく教えて、多くを学ばせることが可能になるはずである。教材の精選、基礎・基本的内容の選択は、そのような観点からなされなければならないと考える。(p.294)」

「既習の原理をもとに発展的に学習させると考えるとすれば、子どもに課題を課す時点で、子どもが知っていることは何か、できることは何か、そして、それらをもとにその課題に取り組ませるとしたら、どう考えられるものかといったことを、それぞれの場面で順に考えて学習計画を立てることが必要であると考える。(p.295)」

「ここで主張していることは、創造的、発展的な学習をさせることができるためには、何かを単に知っているレベルに止めず、自由に使えるものにしておきたいということである。そのためには、その力を身につける機会がどこにあるかを明らかにし、その機会を的確にとらえて、身につけさせる努力をすることが欠かせない。(p.297)」

「前項では、発展的な学習を期待する内容について、その根拠を明らかにしていく考えによって、何を強調して指導しておくべきか、そして、それを子ども自らが使える力となるようにするためには、どのような場で指導することが可能であるかについて考察した。

本項では、学習したことをもとにすると、どこまでのことが発展的に理解できるものか、また、発展的に考えられないことは何かを吟味する立場で考察することにする。このことにより、何が教えられなければならないことであり、何が教えなくてもすませることができるものかが明らかにできる。また、子ども自らが創造的・発展的に考え得ることまで解説して発見する喜びを奪ったり、子ども自らの力では発展的に考え出すことができないことまで考えさせて、無駄な時間を費やさせる愚を犯させないことにも貢献し得ると考える。

(p.299－300)」

「要するに、原理を明らかにし、原理をもとに演繹するという公理的方法の考えは、学習指導法の一つの立場を提供するだけでなく、指導内容の検討の一つの立場、考え方も提供しており、その内容の検討が加わることにより、教えることを的確にとらえて教え、教えないでも子どもが獲得できるものは子どもに獲得させる、言い換えれば、少なく教えて、多くを学ばせるという学習指導をさせることができるための方法を示唆していると考える。(p.332)」

第4節　第2章のまとめ

これまでみてきた中で杉山氏のいう公理的方法の考え方の中に筆者の考える生徒が『根拠を用いた説明』ができるようになるための手がかりがあると感じとった。それは、「根拠や原理に基づいてものごとを理解する」という点である。

さらに公理的方法の考え方に基づいた学習を体験することで、子どもたちが問題解決の場面で「今、何をしているのか」「何のために行っているのか」を意識(理解)しながら、問題解決に取り組めるのではないかと考える。そして、それによって、自ら解いた問題に対し、「自分の言葉で説明する力」をつけることを期待したい。また、子どもは、数学の授業で発見する喜びを知り、意欲的に学習に取り組むことで自ら学ぶ力をつけることができるはずである。さらに、根拠に目を向けながら学習を進めることで解法への手続きを身につけ、その解法を忘れても思い出すことができるに違いないと考える。

第3章　杉山氏の公理的方法に基づいた教材開発

公理的方法の考え方に基づいた教材の開発をするにあたり、公理的方法に基づく指導のポイントを以下のように考えた。

① 根拠(原理)を探る

② 仮設(公理)をおいて考える

③ 発展的、創造的に学習を進める

また、杉山氏の考える理論的に授業化する問題のポイントは以下のように考えた。

① 既習事項を使い、駆使すれば解決可能な問題であり、苦労せず解決できたり、難しすぎる問題でないこと

② 多様な解法が考えられ、発展可能な問題であること

③ 出た解答から新しいことがらがよみとれるような問題であること

以上の事をふまえ2つの指導案を作成した。

第1節　杉山氏の教材を用いた指導案の作成について

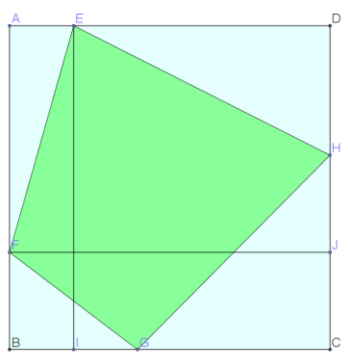
(1)教材の出典

杉山氏の著書『確かな算数・数学教育をもとめて』(p.315)の中の教材を指導案に作成した。

(2)教材分析

【問題】

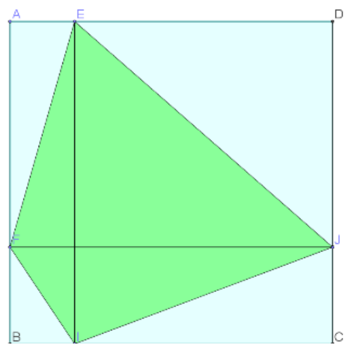
一辺が10 cmの正方形ABCDがある。
辺AD上の点Eを通って辺ABに平行な線をEIとする。
辺AB上の点Fを通って辺BCに平行な線をFJとする。
IGが2 cm、JHが3 cmとなる点をG,Hとしたとき、
四角形EFGHの面積を求めよ。



上記の問題では、必要な辺の長さを文字を使って表し、計算すると文字はすべて消えてしまう。このことは、四角形 EFGH の面積は、辺 AE と辺 FB の長さに関係なく一つに決まることを意味する。これは問題の解である四角形 EFGH の面積が出た後もさらに発展してよみとることができる問題であると言える。また、このことを考えることが杉山氏のいう「根拠(原理)を探る」ことにもつながるのではないかと考える。

次に、本誌にもあげられているが、似た問題から条件を変えて問題を解く方法である。この解法では、ある程度見通しを立てて操作することが必要である。この見通しを立てるという過程が、杉山氏のいう「仮設(公理)をおいて考える」ことにつながるのではな

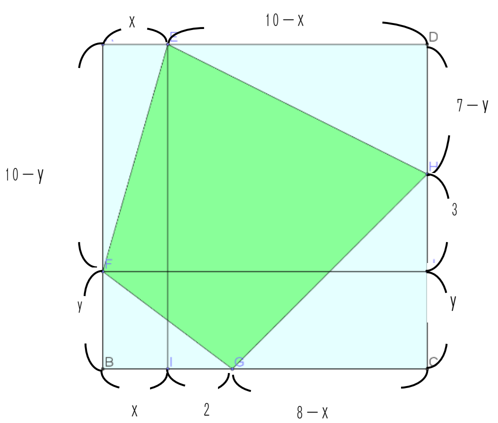
基本の図では、合同な三角形が 4 組できることから四角形 EFIJ の面積は正方形の半分であることが分かる。さらに問題の図で同様に考えられないかという仮設を立てなければならない。自ら補助線を引き合同な三角形を作り出し、中央の長方形をも見出さなければならない問題である。



さらに、もう一つ解法が考えられる。基本の図から頂点を動かすことで等積変形を行ったり、共通な底辺のもと高さの異なる三角形の面積を利用する問題へと発展して考えることができる。

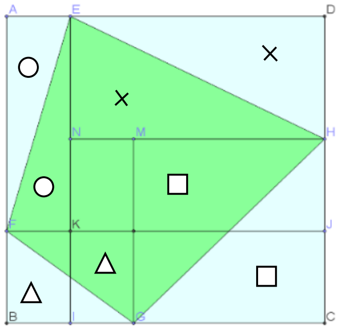
以上のように、一つの問題で、多様な解法が考えられ、発展性に富む問題であることが必要だと考えた。

(3)指導案化するために

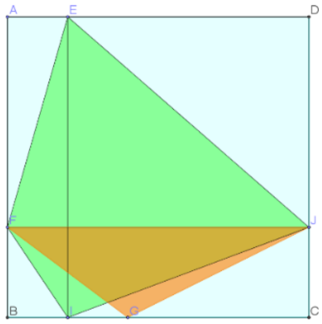


この問題を指導案にするにあたって、辺の長さを文字を使って表すことは問題ないと考えたが、似た図を思い起こすことは難しいのではないかと考えた。そこで、基本の図を生徒に与え、そこから考えを引き出していくよう指導案を作成した。

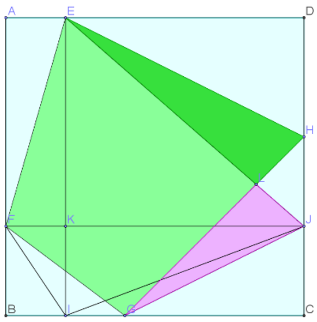
自力解決 A では、まず正方形 ABCD の面積から周囲の三角形の面積を引くことを根拠として解くことを考えた。その際、どこの長さを文字を使って表すのかを考えさせたい。そして、最終的に文字が消えてしまうことにより、何が言えるのかについても考えさせたい。



自力解決Bでは、基本の図で四角形EFIJは、合同な三角形4組からできており、その面積は正方形の半分であることを見出し、問題の図へ移行していきたい。問題の図では、補助線を引くことで合同な三角形4組と2×3の長方形1つでできていることに気づかせる。基本の図の考え方を根拠に問題を解かせたい。



自力解決B'では、基本の図の頂点を移動することで問題の図に近づけていくわけだが、2段階に分けて考える。△IFJにおいて頂点IをGに移動させると共通な底辺 FJ のもと等積変形を根拠に△IFJ＝△GFJであることに気づかせたい。



また、同様に頂点JをHに移動させると共通な底辺JHのもと△EJHと△GJHは、高さが2㎝の違いであり、面積にすると3㎝^{2}の違いであることに気づかせたい。以上二つの事柄を根拠に問題の解へと向かわせたい。

また、多様な解法をもつ問題なので、一つ解法を見つけたとしても他の解法を見つけるように支援したい。さらに練り上げでは、必ず根拠を用いて説明することを留意点とした。

(4)指導案

資料①参照

第2節　　授業実践の指導案の作成

以下の指導案は、勤務校である鳥取市立北中学校にて実践することを目的として作成した指導案である。

(1)教材の出典

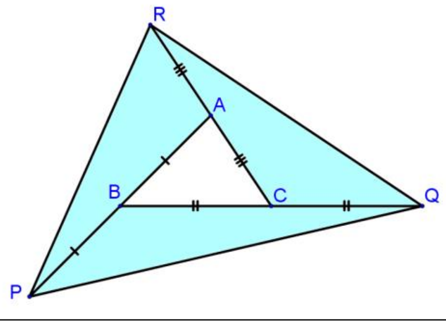
fivetriangles.blogspot.jp/2015/09/259-exextended-quadrilaterals.hyml?utm-source=feedburner&utm-medium=feed&utm_campaing=Frrd%3A+Fivetriangles+%28Five+Triangles%29 より入手した問題から指導案を作成した。

(2)教材分析

【問題】

右の図のように三角形 ABC の各辺の延長線上に辺 AB＝BP、BC＝CQ、CA＝AR となる点 P,Q,R をとります。

このとき、色のついた部分の面積は、
もとの三角形 ABC の何倍になるでしょうか。



上記学習では、新しい内容ではなく、既習事項を試行錯誤して解決する問題を取り扱った。そのことにより、問題の答えにはそれほど苦労なくたどり着くだろうと予想した。しかし、公理的方法に基づいた考えにより、そこを到達点とせず、根拠(原理)を探り、発展的・創造的に学習を進めていってほしいと考えた。また、式などを通して他人に伝えることで、さらに考えが深まり理解も深まるのではないかと考えた。

期待する活動Ａでは、図を用いて何倍になるかを予想し、「なぜそうなるか？」その根拠となることがらを探し出すことで、期待する活動Ｂにつなげていってくれることを期待した。

期待する活動Ｂでは、Ａで見つけた根拠を用いて説明できるよう式で表すことを期待した。その際、必ず根拠を明確にするよう気を付けさせたい。また、この活動がのちの証明への一歩へとつながっていくものと考える。

期待する活動Ｃでは、問題を拡張しｎ倍した際の一般式まで考えを深めることを期待した。一般式は１年次に学習しているが、根拠を考えることでより手際のよい求め方ができるのではないかと考えさせたい。

練り上げでは、生徒が説明する活動を通して、他人により分かりやすく説明するためにも根拠の必要性を感じさせたいと考えた。

期待する活動Ｎでは、生徒自身からの「三角形が四角形だったらどうなるだろうか」という自発的疑問が生まれることを期待したい。

(3)学習のねらい

三角形の性質を使い説明する活動を通して、根拠を考えることや式で表すことの大切さに気付くことができる。

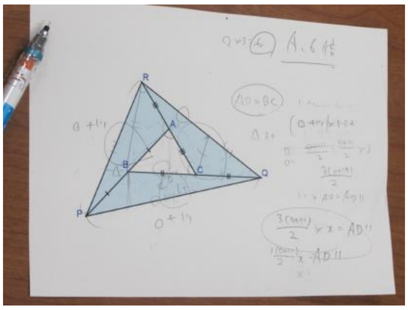
(4)指導案

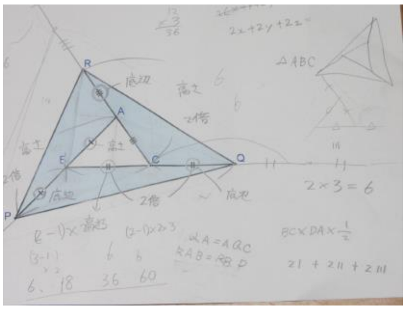
資料②参照

(5)実践

平成27年12月11日　鳥取市立北中学校　2年4,5組　３限実施

(6)生徒の活動





第4章　　授業実践

本章では、第１節で鳥取市立北中学校での授業実践を終え、新たに見えてきた問題点について考察していこうと考える。そして、第２節で理解とは何かについて考え、授業の考察と絡めて考えていきたい。そして、第３節でPirie,S. & Kieren,T.の「超越的再起モデル」をもとに理解の過程について検証し、第４章で授業実践後に行ったアンケート結果も含め筆者なりの考えを述べてみたいと考える。

第1節　　授業実践の考察

授業実践を終え、生徒は根拠をコトバで表すことはできるようであった。しかし、それを根拠として記号で表すことは難しかったようである。また、図を根拠に用いていない事にも気付いた。

理由を考えるに、生徒は図１は図１として意味を理解してはいるものの、図１とコトバとが必ずしも結びついて理解できていないのではないか。したがって、図１を根拠に用いないのではないかと考えた。その証拠に問題の図の中に補助線を引くことで図１を発見し、問題を解決することはできたが、根拠を問うとコトバで答えるだけで発見した図１を根拠として用いることはしなかった。

また、教師は「底辺の長さと高さが等しいので面積は等しい」と言葉で発しながらも、頭の中には図１をイメージしている。しかし、生徒の中には図１とコトバが別ものととらえられているため図1を頭の中にイメージしたり、ノートに表現しないのではないか。その結果、記号化をさらに難しくしているのではないかと考える。図による表記さえあれば記号化も視覚的にとらえられスムーズにいくはずである。仮に図１とコトバが結びついている生徒でも「三角形の面積が等しい ＝（イコール） 底辺の長さと高さが等しい」というコトバの表現が優先してしまい図による表現を必要としていないのではないかと考えた。

さらにもう一つ考えられることに、教師自身が図１を根拠として説明の際扱っていないのではないかと考えた。証明の学習で表記する際、コトバの方が根拠として明確に表記し易く図は表記し辛いからではないかと考える。

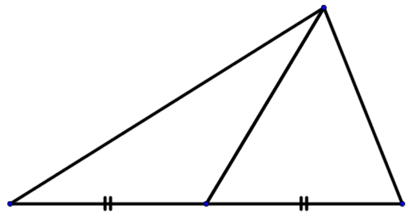


図 1

第2節　　理解のモデル

そこで、コトバと図の観点から理解のモデルについて考えた。

私たちが問題を解く際、問題文から問題場面をイメージし、そのイメージを図やグラフに表してみることがよくある。そして、その図やグラフから問題の意図を理解し、式を立てるなどして問題を解決しようと試みる(問題文→図→式→解)。これは、問題が難しければ難しいほどそういう傾向にあると考える。小学校段階でいうテープ図や線分図などもこれに当たると考える。

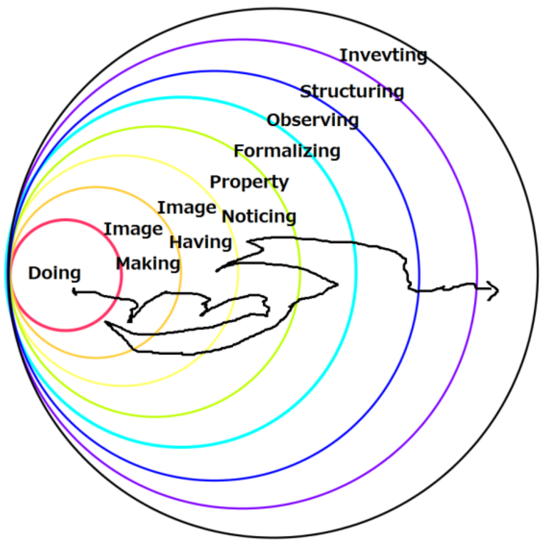
一方、やり方のみを知っていて問題が解ける場合もある(問題文→式→解)。しかし、なぜそのやり方でいいのかはわからない。この場合、真に問題を理解したとは言えず、「できる」が「わかる」ではないことを意味している。このことは、溝口氏(2012)が著書『算数・数学教育概論』の中にSkemp,R.の用具的理解(Insurumental Understanding)を用いて示している。

では、真に問題を理解するとはどういうことであろうか。本質を理解しようとすれば、問題が解けるだけでなく「なぜそうなるのか」すなわち、「この問題はどういう仕組みでできているのか」「どういう原理で答えがでるのか」などを最低限理解することだと考える。その際、一つ前の段階に戻って理解しようとするのが自然ではなかろうか。それが学習者にとっては図やグラフと言ったアイテムではないだろうか。さらに、問題文に返ったりと試行錯誤することが大切なのではないか(問題文⇄図⇆式⇄解)。このことは、溝口氏も講義の中でPirie,S. & Kieren,T.の考えをもとに「数学的理解は行ったり来たりを繰り返す」と述べられた。

今回の授業実践で、生徒は問題解決の根拠をコトバでは説明することができた(問題文→コトバ→解)。しかし、どの生徒のノートにも図１のような根拠となる図は示されていなかった。このことは、図が生徒の中で根拠となり得ておらず、図とコトバが別々のものとして理解されているからではないかと考える。生徒は「こういう問題のときの根拠はこう(コトバ)」と、暗黙の了解をしているのではないだろうか。このようなことに気づかず授業で繰り返し学習しているため、少し問題が変わったとたん生徒は根拠を式や記号で表すことに苦手意識を持ってしまうのではないかと考える。

第3節　理解の過程

次に根拠がコトバと図である際の違いを理解を獲得していく過程全体を通して見ていくためにPirie,S. & Kieren,T.の「超越的再起モデル」をもとに考えてみる。



中原(1995)によると、Pirie,S. & Kieren,T.の「超越的再起モデル」では、

① **Doing**：なすこと、後にPrimitive Knowing:初源的認識

具体物、図、記号などを用いて、理解の出発点となる活動をする。

〈例〉ある２次関数を取り上げ、変数の表を作り、それらを座標平面上にプロットする。

② Image-Making：イメージをつくること

①の活動に基づきながら、2 次関数のイメージをつくる。

〈例〉個々の 2 次関数のグラフから、それらについてのイメージをつくる。

③ Image-Having：イメージをもつこと

抽象の最初のレベルであり、②のイメージを抽象し、一般化する。

〈例〉個々の 2 次関数のイメージを一般化し、U 字形をしているなどのイメージを所有する。

④ Property Noticing：性質に気づくこと

所有したイメージ間の共通性、相違性などに気づき、性質を抽象する。

〈例〉2 次関数について、軸をもつこと、上または下に開いていることなどの性質に気づく。

⑤ Formalizing：形式化すること

気づいた性質を意識的に考察し、共通な性質を抽象し、定式化する。

数学的な定義がなされ、対象の集合が意識化される。

〈例〉2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ として定式化し、類として捉える。

⑥ Observing：観察すること

自分自身の思考構造を観察し、それらを矛盾なく組織化しようとする。

〈例〉2 次関数全体を数学的対象として観察し、それについて何が言えるかを考える。最大値、最小値に関する理論的考察をする。

⑦ Structuring：構造化すること

観察された結果を論理的に位置づける。自分の思考をある公理的構造の中におく。

〈例〉観察された結果を公理的演繹的に証明する。

⑧ Inventing：創案すること、後に Inventing:発明

自由な行為者として活動する。

〈例〉2 次関数について、まったく新しい方法で考える。例えば、複素変数のそれを考える。

の 8 つの水準に分けて考えられている。

根拠が図となる場合とは、Pirie,S. & Kieren,T.のいう ④Property Noticing を出発点した理解の過程をたどる現象に当てはまるのではないだろうか。そうであるならば、理解がある程度進んでも彼らのいう「折り返し」がスムー

ズに行われるに違いないと考える。さらにその水準は、より具体的な内側の水準へと立ち帰ることも可能だと考える。

一方、根拠をコトバとした場合は、Pirie,S. & Kieren,T.のいう⑤Formalizing からの出発に値するのではないかと筆者は考えた。その際、既に抽象化が進んでいるため具体(円の内側)に戻すことが困難だと考える。そうなると、抽象化したいくつかのイメージ間の関係（性質など）に気づいたりといった理解に大切な要素が抜け落ちてしまうのではないだろうか。

以上の事より、理解するには数学的理解の出発点である①Doing からの過程が重要だと考えた。しかし、中学の学習の中では、①Doing のような操作をする場面は少ない。よって、④Property Noticing に値する図が大切だと考える。

またこれらの事は、生徒が現実の世界の問題を数学的モデルに置き換え数学的に処理し、現実の世界の問題に解釈し直す作業が苦手であるという現状にも大きく影響していると考える。コトバでは説明できるが図で表すことのできないというのも、数学的モデルには慣れ親しんでいて処理することができるが、いざ現実の世界の問題を突きつけられると数学的モデルに形式化できなかったり、処理できても現実世界のものとして解釈できないという状況も、こういう学習状況が影響しているのではないだろうかと考える。

小山氏(2010)も著書『算数教育における数学的理解の過程モデルの研究』の中で、彼らの観察記録から

「児童・生徒が形式化の水準で活動していても、教師が与える形式的な規則がその児童・生徒の理解と結びつかなければ、外側の水準への拡張には役立たないということが読み取れる。また、教師が形式的な規則を与えるよりも、より内側の水準への「折り返し」を促して、児童・生徒自身が再構成するのを援助することが大切であるということが示唆される。」(p.215)

と記している。

このように、教師が与えるのではなく生徒自身が自ら内側へ「折り返し」しながら理解していくことが大切であり、教師はそうなるように支援していかなければならないと考える。

第４節　第４章のまとめ

授業実践の考察よりみえてきたことは、根拠を用いて説明するには問題の意図を理解すること、そのためには図をかくことが大切ではないかということである。そこで、授業実践で行った学習指導案を図を用いて根拠を説明するためにはどう支援していったらよいかという視点で作り直してみた。（資料③参照）

また、授業実践では生徒は問題の意図を理解して解にたどり着いたのではなく、「こういうときはこう」という形式的な解法により問題が解けていただけで数学的な理解はできていなかったのではないかと考える。

現行のカリキュラムでは単元を区切って学習する。生徒たちはその単元の中で問題をパターン化し、根拠を考えることなしに一足飛びに問題から立式して解を出してしまうすべを身につけてしまってはいないだろうか。筆者は数学的に理解するには、Pirie,S. & Kieren,T.のいうように具体と抽象を行ったり来たりして、既知の経験と数学的モデルが結びついたとき、理解が深まっていくものだと考える。

また、実践後生徒に対してアンケート（資料③参照）を行った。内容は、「1.根拠を大切にすること」「2.式で表すこと」「3.自分の考えを説明すること」の３項目である。結果、９５％以上の生徒が、「根拠が分かった方が分かりやすく納得できる」と答え、式で表すことについても５０％の生徒が「式で表すことは誰が見ても分かりやすいので式で表したい」と答えている。その一方で、「答えは出ても式に表すことは難しい」と式化することの難しさについて感じている生徒も多く、約４８％を占めた。自分の考えを説明することについては、「説明することで自分でもより納得できるからよいと思う」と答えた生徒が約４８％に対し、「相手にわかるように説明する自信がない」と答えた生徒も約４８％あった。

フリースペースには、「答えを出すところまではできたけど途中の式を作ることができませんでした。」「根拠を考えるのは難しかった。」などの記述があり、ここからも答えが出てもなぜその答えになったのかがわからなかったり、根拠を考えることに慣れていないことがうかがえる。

以上の事から根拠、式、説明することそれぞれのよさは分かってはいるものの根拠を考えることに慣れていないからこそ式に表すことの難しさだったり、説明することの難しさを感じている生徒が多くいるという現状があると感じた。

第5章　　生徒が図をかくための条件

本章では、鳥取市立北中学校での授業実践の考察より見えてきた図をかくことの重要性について先人の研究をもとのに考察していきたい。そこで第 1 節では、図のもつ役割について考察し、第 2 節、第 3 節でなぜ生徒は「図をかかないか？」「図がかけないのか？」について考察してみる。さらに第 4 節では、図がかけない生徒への支援についても考察し、第 5 節で筆者なりの考えをまとめてみたい。

第1節　　図のもつ役割

ポリア(1954)は著書『いかにして問題をとくか』の中で問題を解く過程を以下の 4 つに分けている。

1. 問題を理解すること
2. 計画をたてること
3. 計画を実行すること
4. ふり返ってみること

中でも「問題を理解すること」において、「図をかけ。適当な記号を導入せよ」と提案している。

廣井(2001a)は、Van Essen(1990)の研究より図の効果を、

① 作業記憶の軽減

② 問題の具体化

③ 問題情報の再編成

④ 問題の特徴の明確化

と記している。

松田(2003)も図の有用性と役割を

「図をかくことによって、問題の構造や状況を把握したり、新たな情報を得たり、総合したり、再編成したりすること

ができる。問題の細部を同時に見ることができ、情報をひとまとめにできるので、問題解決に必要とされる要素の検索や、作業記憶を容易にできる。」(p.36)

と記している。

一方で、問題解決過程において児童が見出すことが可能な役割として

「問題把握の役割」:図をどのような問題場面であるかを把握するために使う役割
「説明の役割」:図をどのように問題解決を行ったかを説明するために使う役割
「確かめの役割」:図を導き出された解答が正しいのかどうかを確かめるために使う役割
「立式の役割」:図を立式するための手助けとして使う役割
「問題解決の役割」:図をかくことそのものが問題解決となる役割 (p.37-39)

と記している。

第2節　図をかかない・図がかけない理由①

さらに松田(2003)は、図をかかなければ問題解決が困難な場面を授業場面で設定し、特に図のかけない児童を観察・分析することで

「児童が図の有用性を感じるためには、自力解決の際に、図をかくことが問題解決になるのではないかということを経験することも重要であるということが考えられる。」(p.43)

としている。　そして、児童が図がかけない原因として

「図が問題解決をする上で役立つということを見出していない、経験していないということが考えられる。よって、児童が問題解決過程で図を積極的に使おうとするようになるには、図の有用性を経験によって感じることが重要であると言える。」(p.43)

と結論付けている。

布川(2000)もまた、

「図が役立つためには、図が解決者にとって意味を成すものである必要がある。このことの延長上に、解決者自

らが図をかく、とういう考えが出てくる。Gutstein & Romberg(1995)は、加法減法の指導での図に関する研究をまとめる中で、上記のような点に触れ、また、図の指導に効果が見られた先行研究では、子どもが自分の図を作り出したことを指摘している(p.290)」(p.9)

と記している。

実際、小学２年生女子児童の学習の様子を見てみると式を書いて答えを出してからテープ図をかくといった順序で問題を解いている姿を見かけた。図を必要としていないどころかどちらかと言えばかくよう指示してあるから仕方なしにかいているような状況である。そこで、少し難易度の高い問題なら図をかくのではないかと考え提示してみたが、図をかこうとはしなかった。図をかくよう勧めてみたが、「そんなにたくさんの数字が出てくる図は習ってない。」と数字だけで操作をはじめ、何とか解答にたどり着いた。しかし、根拠が見いだせないため自信なさそうに正解しているかと確認してきた。

このことは、突然図の有用性を感じる問題に出会ったところで経験なしには図はかけないのではないか。日頃から図の有用性を感じて図をかいていなければ子どもは、図をかかない・図がかけないのではないかと考えさせられた。

【問題】

何こかミカンがあります。14 こたべましたが、また 32 こもらって来たので、ぜんぶでミカンは 46 こあります。さいしょミカンは何こあったでしょうか。

小学 2 年生女子児童の解答

46－32＝14

14＋14＝28

28 こ

第3節　図をかかない・図がかけない理由②

もう一つ子どもの図がかけない理由として、そこに陥ったのには教師の指導にも問題があると考える。教科書に記載されている図は、松田(2003)のいう「問題把握の役割」をもつ図ではなく、「説明の役割」、「立式の役割」のための図ではなかろうか。すなわち、数学的内容をすでに知っている教師側の視点で作られた図ではないだろうか。

田中氏(2003)は、著書『使える算数的表現法が育つ授業』の中で、

「市販の問題集などでは、関係のよみとりにくい時には、線分図やテープ図がついていることがある。でもこれは一番考えなければならないところを奪ってしまっている。」(p.60)

とし、問題文から図への移行の困難さについて記している。

我々教師はどちらかといえば、わからないことを解決するために図を利用する指導を行っている。図は立式するための手助けと考え、問題文中の数量関係を分かりやすいように図を使い説明する。教科書もまたそういった図を掲載しているように感じる。

教科書(２年上)を見てみても「図をつかって」という項目でブロック図からテープ図へ、いきなり移行している。そして、図のかき方へと進み、図をかく練習が始まっていくのである。この図とは、教師自身が「説明するための図」ではなかろうか。少なくとも子どもたちが自ら考え作り出した図ではない。

本来図とは、まずは問題解決のための手がかりとして、つまり「問題把握の役割」が生徒にとって一番大切ではないだろうか。しかし、教科書や授業では既に数学的に問題把握のできている教師が子どもが問題把握のために必要な図を先んじて提示してしまい、子どもが考え、図を生み出すチャンスを奪ってしまってはいないだろうかと考えさせられた。

第4節　図がかけない子どもへの支援

筆者はまず、自由な図をかく必要があると考える。松田(2003)のいう「問題把握の役割」にあたる図である。これを②Image-Making に位置づけたいと考える。

田中氏(2003)も、子どもたちが具体的なイメージをもたない段階で図や式をかかせようとした結果、適当に立式したり、目的もないまま表をつくってしまうような場面をつくり出してきたとして「イメージをもつ」ことは大切なこととしている。

また中原氏(1995)は、著書『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』の中の第 2 節図的表現の特性と役割(p.232)の中で図的表現を次のように分類している。テープ図、線分図のような図的表現は、ここでは構造図に入る。

情景図・・・・・・現実的情景、状況を表す図

場面図・・・・・・算数・数学的場面を表す図

手続き図・・・・・操作や計算などの手続きを表す図

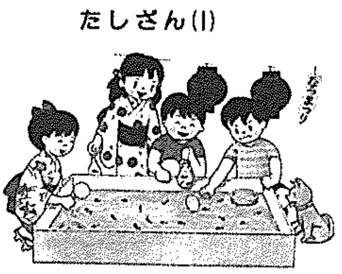
構造図・・・・・・場面や問題などの構造を表す図

概念図・・・・・・算数・数学の概念を表す図

法則・関係図・・・算数・数学の法則、関係を表す図

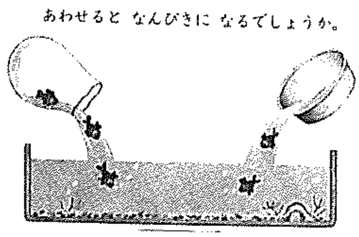
グラフ図・・・・・各種のグラフを表す図

図形図・・・・・・各種の図形を表す図



(情景図)

図 4-2-1 [(2)]

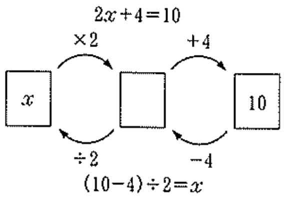


(場面図)

図 4-2-2 [(3)]

(手続き図)

図 4-2-3



(手続き図)

図 4-2-4

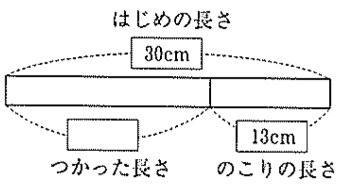
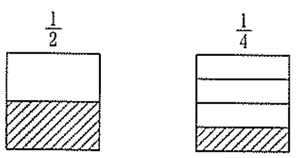
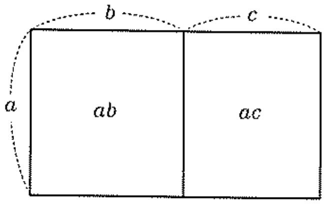


図 4-2-5



(概念図)

図 4-2-6



(法則・関係図)

図 4-2-7

(p.233)

筆者は、思考の過程で教科書に載っている構造図からではなしに情景図、場面図のような図から入ってもよいのではないか。むしろその方が自然だと考える。しかし、教科書や教室での授業ではテープ図や線分図が与えられ、それをかくよう指示される。子どもにとってそれは既に抽象化の進んだ④Property Noticingなため、子どもの解決のための道具として成り立っていないのではないかと考える。

ポリア(1964)も

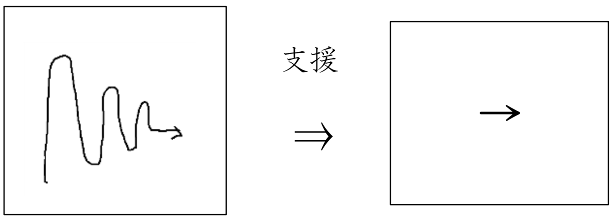
「一つ一つの試行は、その前の試行の犯した誤りを修正しようとするものであり、全体からいって、そうやって行くうちに誤りはだんだん小さくなり、つぎつぎの試行は次第に求める最後の結果に近づいて行くのである」(p.29)

と記し、「逐次近似」という表現で表している。

そして、

「教師は生徒が『試行錯誤』を用いるのに水をさしてはいけない――むしろ反対に、逐次近似という根本的な方法をうまく使うように助長すべきである。しかし、教師は、鶏と兎の問題のような簡単な問題に対しては、またもっと多くの(かつ、もっと大切な)状位においては、まっすぐにいく代数の方が逐次近似よりも有効なことを、生徒に十分納得の行くように説明すべきである。」(p.29-30)

とも記している。



また布川(2000)は

「その時点で問題場面について理解していたことを一つの図のなかに表していくことで、要素の組み合わせを通して、新たな要素が現れてくる。」(p.16)

と記している。このことは、とりあえず今わかっていることを図に表していき、そこで新しく分かったことがあればかき足したり、かき直せばよい。図は変化していくもので

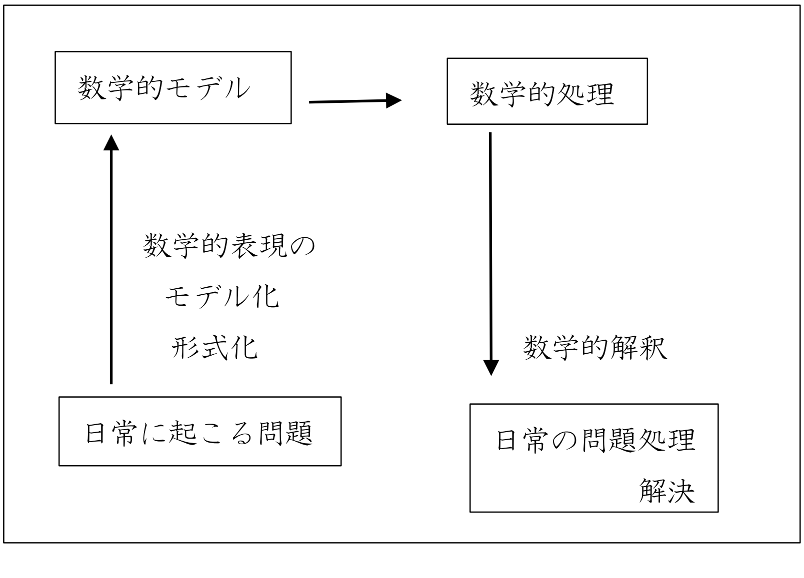
あると筆者はとらえた。初めから完成した図でなくてよいということである。

第5節　第5章のまとめ

これまでのところで、第 2 節では、「図の有用性を感じられる問題に出会う機会が必要である」、第3節では、「図は与えられるものではなく自ら生み出すことが大切である」、第4節では「子どもが図をかくようになるには、まずはイメージを図にするところからでもよいのではないか」というようなことがみえてきた。

以上の事より、図的表現では、当初筆者の考えていた数学的な図④Property Notcing よりも先ずは②Image-Making を大切にすることが必要ではないか。それもできなければ①Doing に戻ってもよいのではないかと考えた。またそのためには、図の有用性を感じられるような問題、授業設計が必要だとも考えた。「こういう問題にはこういう図」というような先入観を子どもに伝えるのではなく、自ら作り出す図の中でよりよい図を見出していくことが重要ではないかと考える。

これらの学習を進めるには数学という教科の特性でもある系統性が必要だと考える。第2節で記した小学2年生女子児童の様に突然図の有用性を感じられる問題に出くわしても誰もが図をかけるものではない。数学を学ぶことによって、日常の困難な場面に出くわしたとき、その場面にイメージをもち、図的表現をしていく中で数学的解釈をし数学的処理ができ、そしてそれをまた日常の問題へと解釈できるような生徒を育てていく必要があると考える。

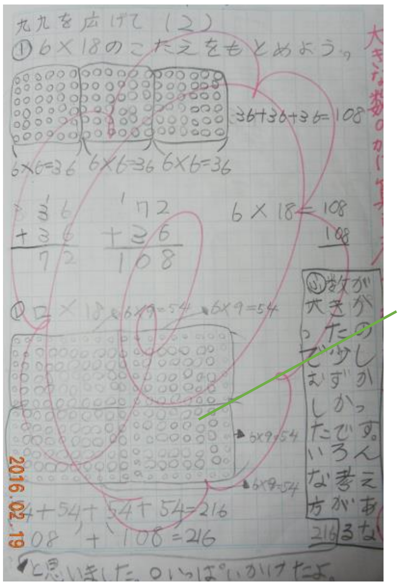


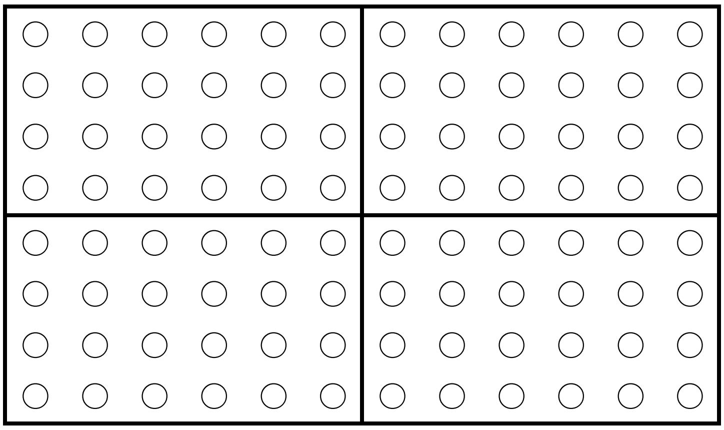
第6章　図がかける生徒を育てるための学習指導の提案

第５章で、生徒が問題文を読み、場面をイメージして図をかくことの大切さについて述べてきた。また、経験なしに突然図をかくことの難しさにも触れた。そこで、本章では、図をかくことの指導を系統立てて指導できないかと考え、一例ではあるが提案してみたいと考える。

第1節　アレイ図の利用

一例としてアレイ図の利用を考えた。教科書では、小学２年生の「九九を広げて」という小単元で九九表を少し延長し４×１２などの学習が扱われている。それを少し応用し、１２×１８どうだろうかとこれも小学２年生女子児童で試してみた。



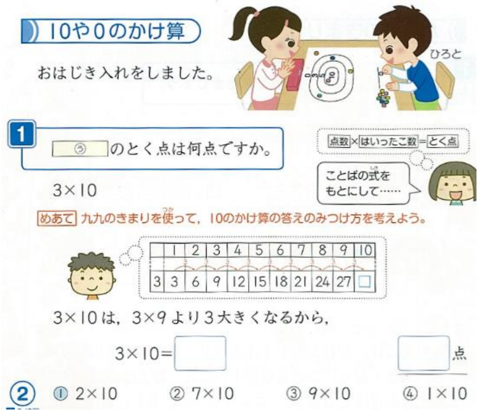


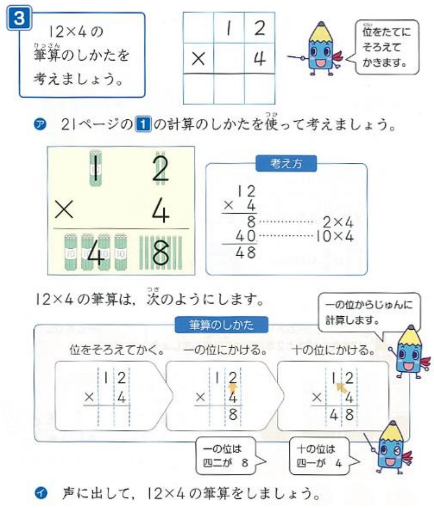
６×９＝５４

５４＋５４＋５４＋５４＝２１６

これは、横への図の延長を縦にも同じように考えればよいだけなので十分に理解できたようである。

現行の教科書３年上では、３×１０は表のルールを使って、３年下では(２けた)×(１けた)の計算を１０の束とばらの鉛筆を使って表記しており、図的表現はされていない。さらに、ひっ算の計算に進むわけだが、子どもはひっ算の計算方法(形式)を学ぶことで、その良さを知り、根拠となることがらは忘れてしまうのではないかと考える。

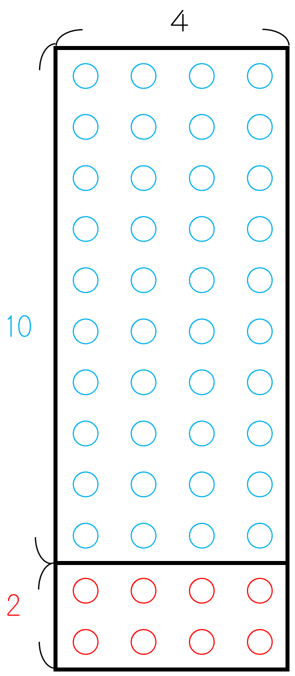




このアレイ図の拡張したものを利用することの良さは、面積で考えることにより量的感覚も身につくことだと考える。さらに、アレイ図の〇一つが単位面積となり４年下で学習する面積とも直結する図的表現であると考える。また、(２けた)×(１けた)の図は(□+〇)×△=□×△+〇×△の根拠にもなり得ると考えた。

小３

１２×４

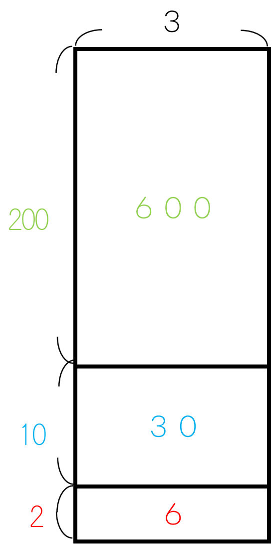


１０×４=４０

２×４=８

４０+８=４８

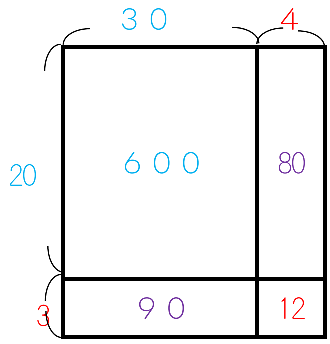
２１２×３



６００+３０+６

=６３６

２３×３４



６００+８０+９０+１２

=７８２

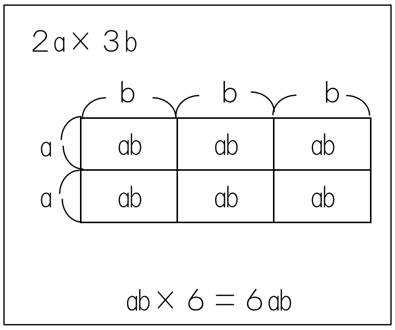
$$
\begin{array}{r}
23 \\
\times\ 34 \\
\hline
12 \\
80 \\
90 \\
600 \\
\hline
782
\end{array}
$$

さらには中学校での展開や因数分解へと発展していくのではないかとも考えた。それぞれの学習の際、アレイ図を思い出し意味づけをしていくことですべては繋がり、根拠を具体的イメージでもって理解が進むのではないだろうか。

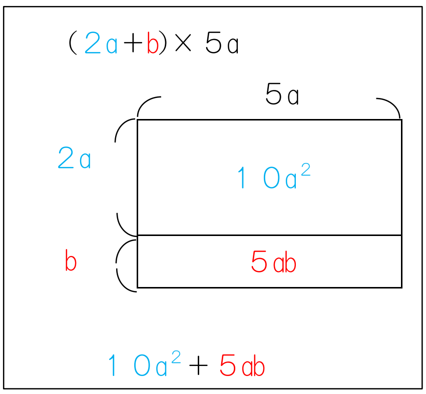
第2節　中学校での展開

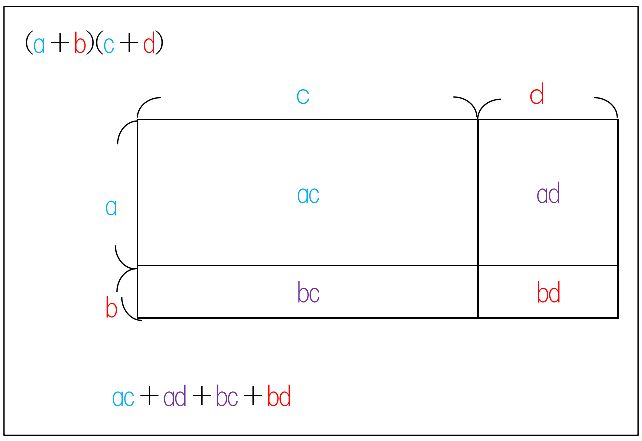
ここでは、第１節で提案したアレイ図の利用を中学校で利用する際、どういう場面が考えられるかを提案してみたい。まず、中学２年生での展開場面、続いて中学３年生での因数分解の場面で考えてみたい。

２年



３年



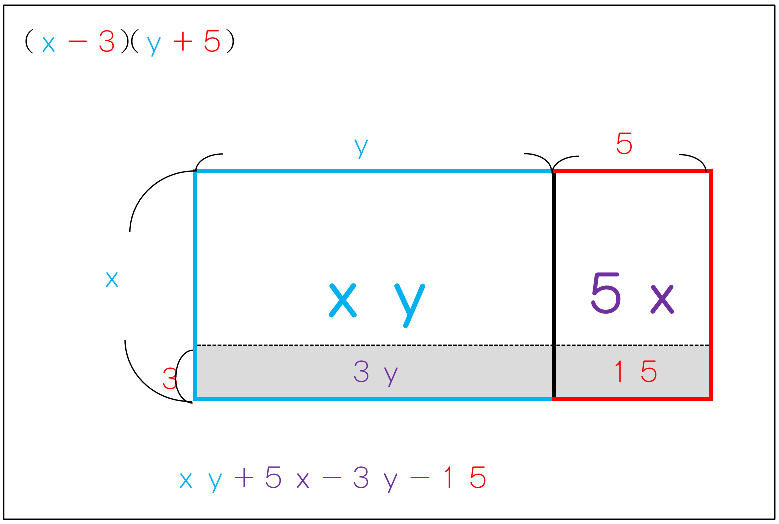


現行の教科書に既に上記のような図的表現は記載されている。しかし、この様な図は新しい公式を学習する際、公式の根拠を確認するために最初に用いて説明するだけで、

すぐに公式を利用した練習問題に入ってしまう。生徒から生み出された面積図ではなく、公式の根拠を確認するための面積図になってしまっている。

しかし、小学校段階でのかけ算の際、面積図を考える積み重ねがあれば教科書に載っているような図を生徒自身で生み出すことも可能かもしれない。もしできなかったとしても、説明を聞いた際、既存の知識との合致がスムーズに行われ、理解もしやすいと考える。

さらに教科書には記載されてはないが(ｘ－３)(ｙ＋５)のような、差の入った計算の際も図をかき理解できるのではないかと考えた。



また、中学３年生で学習する因数分解こそこの図的表記が役立つのではなかろうか。生徒が展開よりも因数分解で困難さを感じる背景には、因数分解は展開の逆向きと操作のみの指導になってしまっている点にあると考える。教科書の因数分解のページでは、図的表現は記載されていない。図的表記があれば文字式の操作のみの説明より、よりイメージをもって取り組めるはずである。

目で見て確かめられる図的表記は、抽象的でわかり辛い内容にこそ、一番役立つと考える。

第7章　生徒が図から立式するための条件

第６章までのところで、問題文から図をかくためにはどうすればよいか、そして生徒が図をかくための学習指導の提案を行ってきた。しかし、実際には図をかくことで終わりではない。図によって問題場面をイメージして情報を整理し、数量関係を把握した上で立式し、解を導き出さなければならない。

本章では、どうすれば図から立式できるかについて述べていきたい。まず、第１節で図的表現の役割について、第２節で抽象性のレベルについて、第３節で図から立式するにはとして筆者なりの考えを述べたい。

第１節　図的表現の基本的役割

第５章、第４節で中原(1995)の図的表現の分類を示したが、図には立式し易い図としにくい図があると考える。例えば、テープ図を代表とする構造図は、まさに立式するためにかかれる図なので、立式し易い。それに対し、筆者が生徒に図をかかせるために提案する自由な図・情景図などでは、数量関係が整理されにくく立式しにくい図といえよう。

中原(1995)は、図的表現の基本的役割を

Ａ．現実的状況と学習内容との関連を図る。・・・情景図、場面図
Ｂ．問題解決の手がかり、方法を示す。・・・・・手続き図、構造図
Ｃ．学習内容を効果的に示す。・・・・・・・・・概念図、法則・関係図

とし、中でも最も重要な役割はＣの役割だと記している。(p.247)

Ｃは図的表現がその特性(形相性、視覚性など)を最も生かせ、その特性を生かすことで直観性、イメージ性、全体性、構造性などの機能を発揮することができるとし、図的表現の活用はＣの役割を中心とすべきであるとしている。

筆者も問題場面をイメージするにはＡだが、図から立式するにはＢ、Ｃの方がよりふさわしいと考える。なぜなら、図から立式するには、その図から数量関係などの情報をよみとる必要があるからである。そのためには、より数量関係が整理されているＢ、Ｃの

方が立式し易いと考える。

与えられた条件を図に表現し、そこから新たに発見されることをも図に記す。ここまでが図をかくということであり、ここから先はその図をよむ力が必要となってくるのである。

第２節　抽象性のレベル

また中原(1995)では、図的表現を表現方法の抽象性のレベルにも着目して検討している。

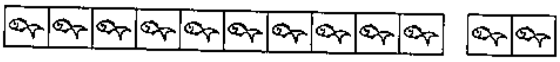


図 4-2-16　具象的レベル

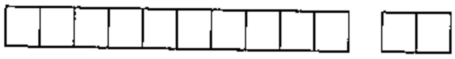


図 4-2-17　抽象的レベル

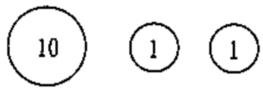


図 4-2-18
記号的レベル

(p.239)

上記図からもわかるように図から立式するためには、具象的レベルより抽象的レベルの方が、さらに記号的レベルまで進展させることができればより簡単に立式し易いことが分かる。

図的表現が最後に狙うべき姿は、記号的表現ではなかろうか。具象から抽象、そして記号の順に抽象化が進むのであれば、一番記号的レベルが式化し易い形であると考える。

第３節　図から立式する

第１，２節より、図から立式するためには、より抽象的な図が適切であり、さらには記号化まで図を進展させることが立式し易いということがみえてきた。しかしこのことは、筆者のいう自由な図・情景図からは一番遠い図である。しかし、筆者は問題文をイメージする情景図で終わりではなく、さらに図は進化し、変わっていくものととらえている。図をかくことで新たな情報がみえてくればかきたし、かき直せば良い。そうすることで、

自分なりのより理解しやすい図が生み出されるはずである。

さらに中原(1995)は、「図的表現は形相性、視覚性ゆえに直観性に富み、一般にわかりやすい表現ではあるけれども、なんらの準備的な指導なしにすぐにその情報が理解されるという性格のものではない」(p.248)ことを指摘し、図的表現から情報をよみとる力の必要性をも示している。

第8章　　研究のまとめと今後の課題

本研究では、テーマを「『根拠を用いた説明』ができる生徒の育成をめざして」とし、生徒はなぜ根拠が説明できないかという素朴な疑問から始まり、「根拠を用いた説明」についての理解を深め、「根拠を用いた説明」を必要とする授業設計、実践、そこから見えてきた新たな問題点について先人の研究をもとに考察し、新たに図を用いた授業の展開を提案してきた。

本章では、第１節において研究のまとめを述べ、第２節において今後の課題について述べたい。

第１節　研究のまとめ

中学校数学において、「根拠を用いた説明」ができる生徒を育成するために鳥取大学で学んでいく中で見えてきたこと・考えたことをまとめた。

① 「根拠を用いた説明」を行うには、真の理解が必要である。

真に理解するためには、「根拠(原理)を探る」ことをしなければならない。
それはまさしく、「できる」ではなく「わかる」ことである。答えが出るだけではなく「なぜそうなるのか」という問題から答えの出る仕組みについても考える必要がある。
また、そうした習慣をつけていくことが大切であると考える。

② 公理的方法、「根拠(原理)を探る」「仮設(公理)をおいて考える」ことは、自ら学ぶ生徒を育成するという点において重要なことである。

公理的方法を用いた授業を設計するために教師は、教材を十分に吟味し、何を教えるべきで何を教えなくてよいか、そしてどのタイミングで指導可能かまで考える必要がある。また、問題の質、提示方法、生徒の反応によって支援の仕方、タイミングまでも考慮する必要があるということが分かった。

③ 数学的理解は具体と抽象の間を行ったり来たりしながら深まり、具体から抽象へと進んでいくものである。

「こういう場合はこう」という形式的な暗記は理解ではない。過去の経験や知識と新たな情報が結びついて理解(知識)は深まっていくものである。またそれには、具体的な図が重要で、それも与えられた抽象的な図(構造図)よりも自ら生み出す具体的な図が大切である。現行の教科書は既に抽象化された説明のための図が掲載されており、それを使って式を立て解く指導となっている。本来、図も自分で生み出すべきである。またその活動こそが、「根拠(原理)を探る」活動ではなかろうかと考える。

④ 生徒が図をかくためには、図の有用性を経験していることが必要である。

「図を使うことで問題が解けた」という経験を授業の中で経験すべきである。その図も自分で生み出した図であり、それが次の段階でまた利用できれば系統性をもって学習を進められることと考える。

⑤ 数学を学ぶことによって、日常の問題を数学的表現でモデル化し、数学的に処理した後、日常の問題の解釈へとつなげられることが理想である。

現行の教科書の様に単元で区切って考えると「こういう場合はこう」という単元の中だけの学習となってしまい、単元間をつないだ思考が育ちにくいのではないか。系統だった理解にも図の活用の重要性を感じた。

第２節　今後の課題

この一年の研修を通し、積み残した課題、新たに出現した課題として、今後取り組んでいきたい課題を述べる。

「根拠を用いた説明」ができる生徒の育成のために「根拠を必要とする授業の設計」「生徒は図をどうすればかくようになるか」を中心に一年間鳥取大学で研修を深めてき

た。今後、さらに研修を深めていくために課題を明らかにしておきたい。

① 問題文から図を作成するためには、「情景図のような自由な図をかくことから始めればよいのではないか」という自分なりの結論に至った。が、次のステップとして「図から式はどのように作られるのか。そのための支援とはどんなことが考えられるか」という課題が残った。この点についても今後考えていきたいと考えている。

② 図を用いた授業設計として小学校から中学校への内容を系統立てて設計することを試みた。しかし、これは一例にしか過ぎない。また、中学校から高校へのつながりについては、いまだ考察できていないので、この点についても引き続き取り組んでいきたい。

③ 数学を学ぶことによってつけたい力とは、日常の生活の中で使える力だと考える。そのためには、単元を超えたつながりも必要だと考える。その授業設計についても今後考えてみたい課題となった。

〈引用・参考文献〉

G,ポリア(1954).柿内賢信訳『いかにして問題をとくか』. 丸善.

G.ポリア(1964).金山靖男、柴垣和三雄訳『数学の問題の発見的解き方(1)』.みすず書房.

廣井弘敏(2001a).『算数の問題解決における図による問題把握の研究－子どもが図をかく過程への着目－』. 上越数学教育研究.第 16 号.pp.167-176.

J・S・ブルーナー(1977).田浦武雄・水越敏行(訳).『改訳版　教授理論の建設』.黎明書房.

小山正孝(2010).『算数教育における数学的理解の過程モデルの研究』. 聖文新社.

松田由香里(2003).『児童の問題解決における図の役割に関する研究－小学校 3 年生に対する授業分析を通して－』. 鳥取大学数学教育研究.第 5 号.pp.35-44.

文部科学省(平成 20 年 3 月告示、平成 22 年 11 月一部改正).『中学校学習指導要領』.

文部科学省(平成 20 年 9 月).『中学校学習指導要領解説　数学編』.

溝口達也(2012).『算数・数学教育概論』. 鳥取大学数学教育研究室.

中原忠男(1995).『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』. 聖文社.

布川和彦(2000).『数学問題解決における図と情報の生成』.上越数学教育研究.第 15 号.pp.9-18.

岡本和夫ほか(2016).『未来へひろがる数学』. 啓林館

清水静海ほか(2015).『わくわく算数』. 啓林館

杉山吉茂(1986).『公理的方法に基づく算数・数学の学習指導』. 東洋館出版社.

杉山吉茂(2006).『豊かな算数教育をもとめて』. 東洋館出版社.

杉山吉茂(2012).『確かな算数・数学教育をもとめて』. 東洋館出版社.

田中博史(2003).『使える算数的表現法が育つ授業』. 東洋館出版社.

〈資料〉

資料①　公理的方法に基づいて検討し、作成した指導案

本時の展開（支１一般的な支援、支２特殊な支援、・期待する活動、※留意点）

【問題の提示】

※問題文を板書する

問題

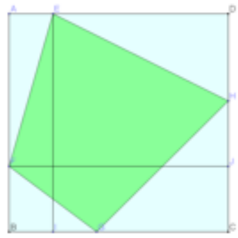
一辺が 10 ㎝の正方形 ABCD がある。

辺 AD 上の点 E を通って辺 AB に平行な線を EI とする。

辺 AB 上の点 F を通って辺 BC に平行な線を FJ とする。

IG が 2 ㎝、JH が 3 ㎝となる点を G,H としたとき、

四角形 EFGH の面積を求めよ。



※板書をノートに書き写すことによって問題把握をさせたい。

支１どこの長さが分かれば解決できるか。

【自力解決 A】・文字を使って立式し問題解決する。

AE＝x ㎝、FB＝y ㎝とすると、

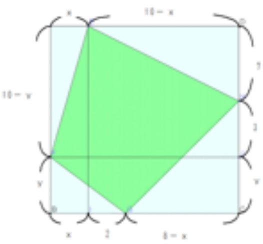
$$面積\ S=10^2-\frac{1}{2}x(10-y)-\frac{1}{2}y(x+2)-\frac{1}{2}(8-x)(y+3)-\frac{1}{2}(10-x)(7-y)$$

$$2S=200-10x+xy-xy-2y-8y-24+xy+3x-70+10y+7x-xy$$

$$=106$$

$$S=53$$

53 ㎝²



＊どこを文字で置いたか。

＊式の表していること。

＊解いてみてわかること→x、y が消える→関係ない

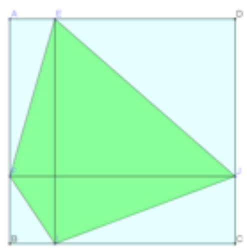
発展的、創造的に学習を進めるために文字の消える問題を位置づけた。

支１別のやり方で解いてみよう。

支１どんな図形だったら考えやすいか。

支２似た図で考えてみよう。

【基本の図】



＊もし、四角形の頂点 G→I、H→J だったら面積は求められるだろうか？

＊この図は利用できないだろうか？

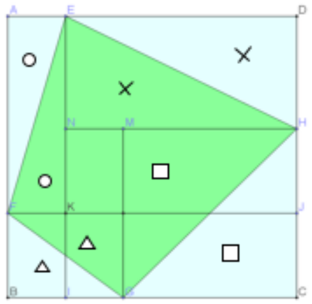
＊四角形 EFIJ の面積はどうやって求めるだろ？

根拠(原理)を探ることを大事にしようとして類似図を位置づけた。

支1 基本の図で合同な図形はどこか。
支2 頂点 G,H から正方形の辺に対し平行な線分を引いてみよう。

支1 基本の図とどこが違うか。
支2 頂点を I→G、J→H に移動してみよう。

【自力解決 B】・図を区切って合同な三角形を使って解く。



○＋△＋□＋×＝$(10^2－6)÷2$
＝94÷2
＝47
四角形 EFGH＝47＋6
＝53
53 ㎠

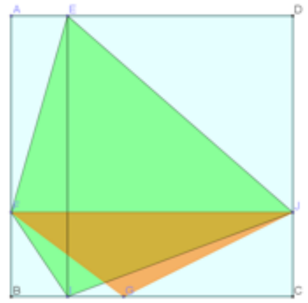
＊図のように平行線で区切ると合同な三角形 4 組と 2×3 の長方形 1 つに分けることができる。

仮設(公理)をおいて考えるために長方形の対角線は面積を半分にする解法を位置づけた。

支2 平行線を使って頂点を移動してみよう。
支1 別の見方はできないか。

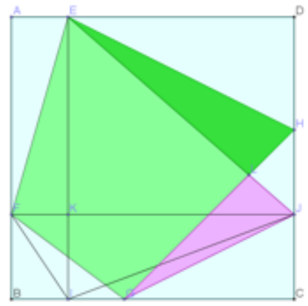
仮設(公理)をおいて考えることを大切にしようとして発展的問題を位置づけた。

【自力解決 B'】・頂点を移動し、三角形の性質を使って解く。
頂点 I→G



＊底辺を FJ とすると△IFJ と△GFJ の面積は高さが同じなので変わらない。

四角形 EFIJ＝四角形 EFGJ
頂点 J→H



＊共通の底辺を JH とすると△EJH は△GJH より高さが、2 ㎝高い。

面積は　3×2÷2＝3　　3 ㎠増加
50＋3＝53　　53 ㎠

【練り上げ】
※活動 A、活動 B を自力解決中に指名し、板書させておく。
※問題の解答を活動 A、活動 B を通し、生徒に根拠をふまえた説明をさせる。
※活動 B'においては、できた生徒がいれば板書＋説明をさせる。
【説明のポイント】
活動 A：どこを文字で置いたか。その理由。その際、各辺の長さを文字を使って表されているか。
この解法から AE と FB の長さに関係なく面積は一つに決まることを見出せたか。
活動 B：基本の図とのつながり。合同な図形 4 組と 2×3 の長方形に分けて考える。
活動 B'：第一段階、等積変形。第 2 段階、底辺は同じで高さの違う三角形の面積についての説明。

資料②　鳥取市立北中学校で授業実践した指導案

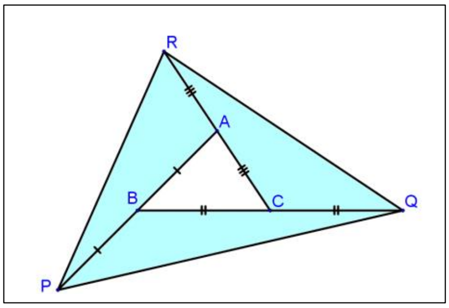
本時の展開（支１一般的な支援、支２特殊な支援、・期待する活動、※留意点）

【問題の提示】

※問題を提示する。

問題

右の図のように三角形ABCの各辺の延長線上に
辺AB＝BP、BC＝CQ、CA＝ARとなる
点P,Q,Rをとります。
このとき、色のついた部分の面積は、
もとの三角形ABCの何倍になるでしょうか。



※辺の長さが入っていないことに注目させる。

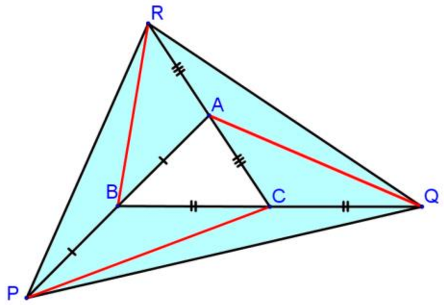
※プリント配布。

根拠(原理)を探ることを意識した問題を位置づけた。

支１　△ABCと面積が等しい三角形を使って、何倍になっているか考えよう。

支２　BRに補助線を引いて考えてみよう。

【期待する活動Ａ】補助線を引き、図を使って元の三角形の何倍になっているか気づく。
底辺と高さが等しいことを根拠に面積が等しい三角形に気づく。



※底辺だけでなく高さも等しいことに気づかせる。

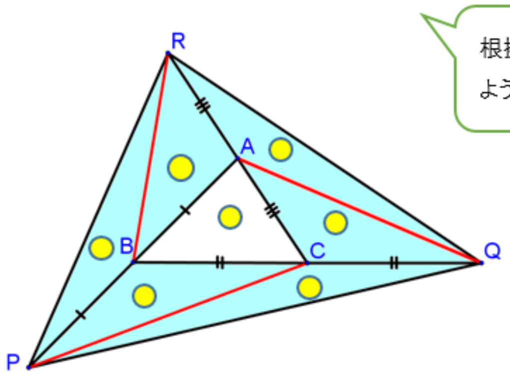
図より　　６倍

支１　図に示せたことを根拠もふまえて式に表わしてみよう。
（図を使って説明してみよう。）

支２　△PQBは、△ABCの何倍だろうか。
理由も考えてみよう。

仮設(公理)をおいて考えるために三角形の面積は底辺の長さと高さに比例することを気づかせたい。

【期待する活動Ｂ】面積の等しい三角形を使って根拠を説明する。



根拠(原理)を探ることを大切にしようとして、説明を位置づけた。

PC, QA, RB に補助線を引くと、

AB＝BP より、
　△ABC＝△BPC
BC＝CQ より、
　△BPC＝△CPQ
よって、
　△BPQ＝2△ABC

底辺も高さも等しいので

BC＝CQ より、
　△ABC＝△ACQ

CA＝AR より、
　△RCQ＝2△ABC

底辺も高さも等しいので

底辺が２倍になるので

CA＝AR より、
　△ABC＝△RBA
AB＝BP より、
　△RBA＝△RPB
よって、
　△RPA＝2△ABC

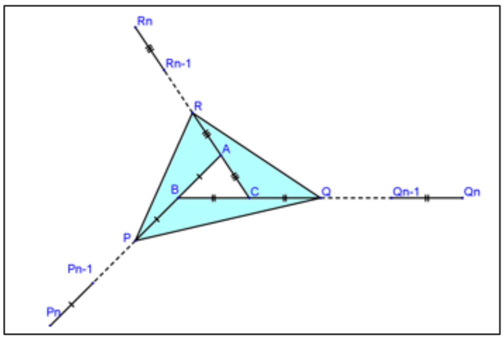
底辺も高さも等しいので

以上より色のついた部分の面積は、
　　△BPQ＋△RCQ＋△RPA＝(2＋2＋2)△ABC＝6△ABC　　　6 倍

支 1　　辺の長さをｎ倍したら面積は何倍になるだろうか。
支 2　　一つの辺に注目して考えてみよう。

【期待する活動Ｃ】辺の長さをｎ倍した際の一般式を求める。

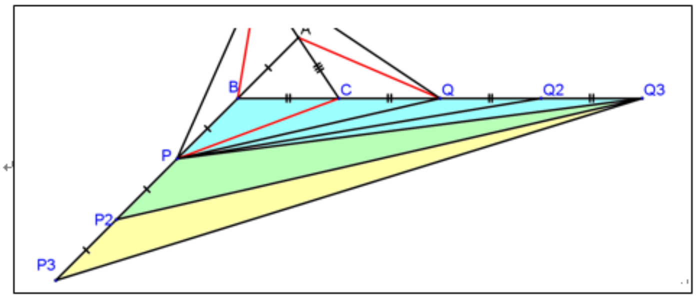
※辺の長さをｎ倍にしたとき
　図の色のついた部分の面積は
　何倍になっているだろうか。



※　式から求める。
三角形の一辺に注目して考える。
同じものが３組あると考える。

△BPC の面積を１として考えると、
BP ×BQ
辺の長さ２倍の時
①　×②×３＝６
辺の長さ３倍の時
②　×③×３＝18
辺の長さ４倍の時
③　×④×３＝36
・・・
(ｎ－1)×ｎ×３＝3ｎ²－3ｎ

よって、3ｎ(ｎ－1)倍



確認　(ｎ－1)×ｎ×３

ｎ＝1	0×1×3＝0	0倍
ｎ＝2	1×2×3＝6	6倍
ｎ＝3	2×3×3＝18	18倍
ｎ＝4	3×4×3＝36	36倍

根拠(公理)を探ることで、手際のよい求め方を試行してほしい。

【練り上げ】
※自力解決中に指名し、板書させておく。
※問題の解答を生徒に根拠をふまえて説明させる。
期待する活動Ｂ
Ｓ「△ABC と△BPC の面積は同じで、△BPC と△CPQ の面積は同じだから、△BPQ は△ABC の二倍。」
Ｔ「△ABC＝△BPC となる根拠は？」
Ｓ「AB,BP を三角形の底辺と考えると AB＝BP だから、底辺の長さが同じで高さも等しいからです」
Ｔ「そうだね。そうすると、他の辺でも同じことが言えるね。と言うことは？」
Ｓ「2倍と2倍と2倍で6倍です。」
Ｔ「式で表すことができるかな。」

期待する活動Ｃ
Ｓ「△BPC の面積を１と考えて、1倍の時：　0 × 1 ×3 ＝0
2倍の時：　1 × 2 ×3 ＝6
3倍の時：　2 × 3 ×3 ＝18
・・・・
(n-1)×n ×3 ＝3n²－3n　　と表せる。」

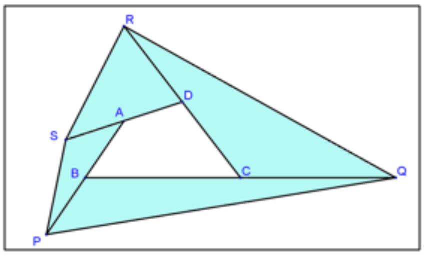
【発展問題】
三角形が四角形になったら、何倍になるだろうか。

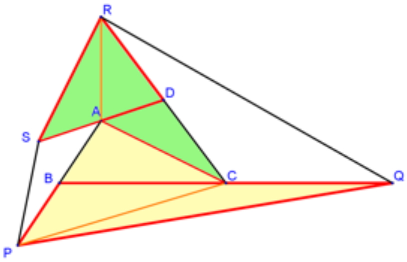
支 1　△ABC が四角形 ABCD になったら、どうなるだろうか。
支 2　四角形 ABCD も補助線を引いて三角形にして考えてみよう。

【期待する活動Ｎ】

右の図のように四角形 ABCD の各辺の延長線上に辺 AB＝PB、BC＝CQ、CD＝DR、DA＝AS となる点 P,Q,R,S をとります。

このとき、色のついた部分の面積は、もとの四角形 ABCD の何倍になるでしょうか。





PC に補助線を引くと、

AB＝BP より、△ABC＝△PBC

BC＝CQ より、△PBC＝△PQC

底辺も高さも等しいので

よって、

△PQB＝2△ABC

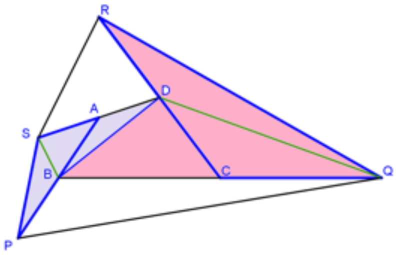
同様に RA に補助線を引くと、

△SRD＝2△ACD

以上より、

△PQB＋△SRD＝2(△ABC＋△ACD)

＝2 四角形 ABCD



SB に補助線を引くと、

DA＝AS より、△ABD＝△ABS

AB＝BP より、△ABS＝△PBS

底辺も高さも等しいので

よって、

△PSA＝2△ABD

同様に QD 補助線を引くと、

△QRC＝2△BCD

以上より、

△PSA＋△QRC＝2(△ABD＋△BCD)

＝2 四角形 ABCD

よって、△PQB＋△SRD＋△PSA＋△QRC＝(2＋2)四角形 ABCD＝4 四角形 ABCD　　<u>4 倍</u>

感 想 用 紙

授業ご苦労様でした。当てはまる項目にチェックを入れてください。
今後の授業の参考にさせてもらいます。

1. 今日の授業では答えの出る根拠を大切にしました。根拠を大切にすることについて、あなたの考えに最も近いものはどれですか。
   - □ 根拠が分かった方が分かりやすく、納得できる。
   - □ 答えが出ているのだから根拠は必要ないと思う。
   - □ その他（　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

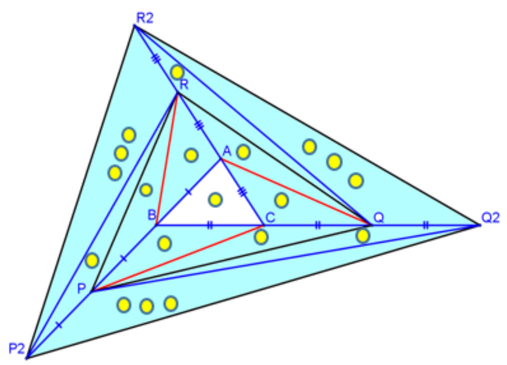
2. 式で表すことについて、あなたの考えに最も近いものはどれですか。
   - □ 式で表すと誰が見ても分かりやすいので式で表したい。
   - □ 答えは出ても式で表すことは難しい。
   - □ 式で表す必要はない。（理由：　　　　　　　　　　　　　　　）
   - □ その他（　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

3. 数学の授業で自分の考えを説明することについて、あなたの考えに最も近いものはどれですか？
   - □ 説明することで自分でもより納得できるのでよいと思う。
   - □ 相手に分かるように説明する自信がない。
   - □ 無理（理由：　　　　　　　　　　　　　　　）
   - □ その他（　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

4. 自由に今日の感想を書いてください。

ご協力ありがとうございました。

辺の長さを３倍、４倍…にして考える。



自力解決Ｂより、

　$\triangle ABC = \triangle ABR$

$AB = BP = PP_2$ より、

　$\triangle ABR = \triangle BPR = \triangle PP_2R$

よって、

　$\triangle AP_2R = 3\triangle ABC$

$AR = RR_2$ より、

　$\triangle AP_2R = \triangle RP_2R_2$

よって、

　$\triangle AP_2R_2 = 2\triangle AP_2R = 2\times 3\triangle ABC = 6\triangle ABC$

同様に、

　$\triangle BP_2Q_2 = 6\triangle ABC$

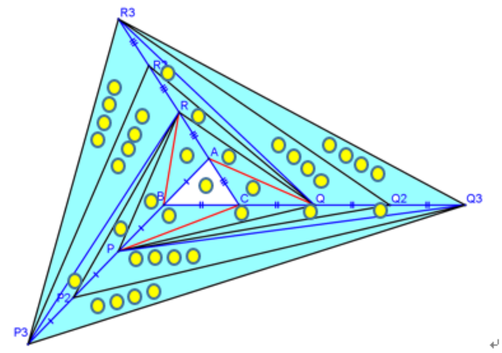
　$\triangle CQ_2R_2 = 6\triangle ABC$

以上より、

$\triangle AP_2R_2 + \triangle BP_2Q_2 + \triangle CQ_2R_2 = (6+6+6)\triangle ABC$

$= 18\triangle ABC$

18 倍



自力解決Ｂより、

　$\triangle ABC = \triangle ARP$

$AB = BP = PP_2 = P_2P_3$ より、

　$\triangle ABR = \triangle BPR = \triangle PP_2R = \triangle P_2P_3R$

よって、

　$\triangle AP_3R = 4\triangle ABC$

$AR = RR_2 = R_2R_3$ より、

　$\triangle AP_3R = \triangle RP_3R_2 = \triangle R_2P_3R_3$

よって、

$\triangle AP_3R_3 = 3\triangle AP_3R = 3\times 4\triangle ABC = 12\triangle ABC$

同様に、

$\triangle BP_3Q_3 = 12\triangle ABC$

$\triangle CQ_3R_3 = 12\triangle ABC$

以上より、

$\triangle AP_3R_3 + \triangle BP_3Q_3 + \triangle CQ_3R_3$

$= (12+12+12)\triangle ABC$

$= 36\triangle ABC$

36 倍

同様に調べていくと、

辺の長さｎ倍	１	２	３	４	・・・	ｎ
面積の倍率	０	６	１８	３６	・・・	$3n^2-3n$

以上より、辺の長さをｎ倍すると、色のついた部分の面積は、$3n^2-3n$ と表せる。

資料③　図を根拠にするための支援を視点においた修正指導案

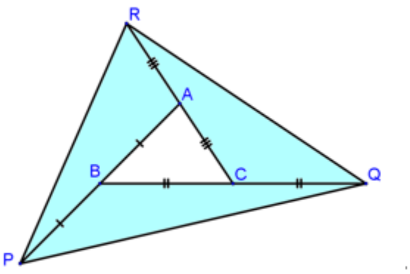
本時の展開(支１一般的な支援、支２特殊な支援、・期待する活動、※留意点)

【問題の提示】

※問題を提示する。

問題

右の図のように三角形 ABC の各辺の延長線上に
辺 AB＝BP、BC＝CQ、CA＝AR となる
点 P,Q,R をとります。
このとき、色のついた部分の面積は、
もとの三角形 ABC の何倍になるでしょうか。



※辺の長さが入っていないことに注目させる。

※プリント配布。

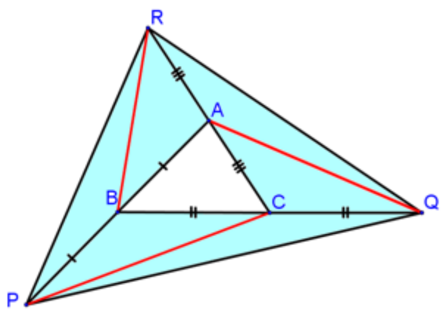
根拠(原理)を探ることを意識した問題を位置づけた。

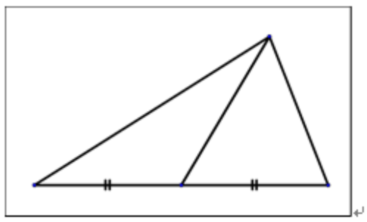
支１　△ABC と面積が等しい三角形を使って、何倍になっているか考えよう。

支２　~~BR に補助線を引いて考えてみよう。~~

△ABC と面積の等しい三角形はどこにつくれるだろうか。

【期待する活動Ａ】補助線を引き、図を使って元の三角形の何倍になっているか気づく。
底辺と高さが等しいことを根拠に面積が等しい三角形に気づく。





問題の図の中に底辺と高さの等しい三角形の図を見つける。

※底辺だけでなく高さも等しいことに気づかせる。

図より　　6倍

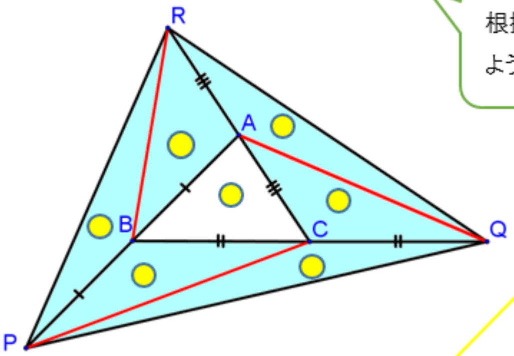
支１　~~図に示せたことを根拠もふまえて式に表わしてみよう。~~
~~(図を使って説明してみよう。)~~

図を使って式や記号で説明できるようノートに書いてみよう。

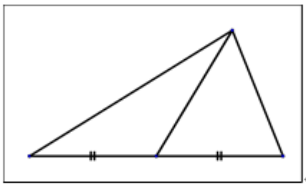
支２　~~△PQB は、△ABC の何倍だろうか。理由も考えてみよう。~~

△ABC と面積が等しくなる理由を図を使って考え、ノートに書いてみよう。

【期待する活動Ｂ】面積の等しい三角形の図を用いて式や記号で根拠を説明する。



根拠(原理)を探ることを大切にしようとして、説明を位置づけた。



この図を使って説明す

PC, QA, RB に補助線を引くと、

AB＝BP より、
　△ABC＝△BPC
BC＝CQ より、
　△BPC＝△CPQ
よって、
　△BPQ＝2△ABC

底辺も高さも等しいので

BC＝CQ より、
　△ABC＝△ACQ

CA＝AR より、
　△RCQ＝2△ABC

底辺も高さも等しいので

底辺が２倍になるので

CA＝AR より、
　△ABC＝△RBA
AB＝BP より、
　△RBA＝△RPB
よって、
　△RPA＝2△ABC

底辺も高さも等しいので

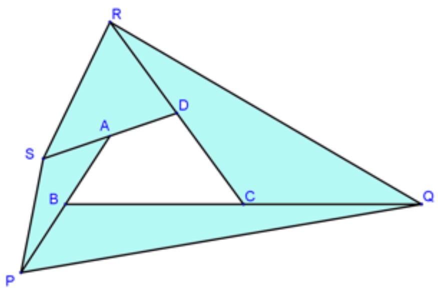
以上より色のついた部分の面積は、

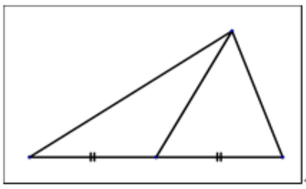
△BPQ＋△RCQ＋△RPA＝(2＋2＋2)△ABC＝6△ABC　　6 倍

支１　~~辺の長さをｎ倍したら面積は何倍になるだろうか。~~
四角形 ABCD だったら、何倍になるだろうか。

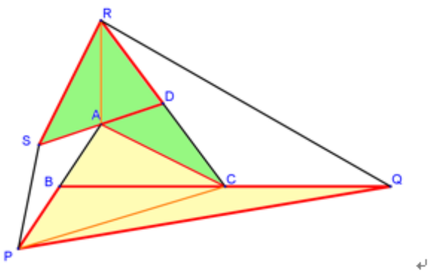
支２　~~一つの辺に注目して考えてみよう。~~
四角形 ABCD のどこに等しい面積の三角形がつくれるだろうか。

【期待する活動Ｃ】もとの図を四角形に変更しても同じ根拠で何倍になるか説明できる。





問題の図の中にこの図を見つける。



PC に補助線を引くと、

AB＝BP より、△ABC＝△PBC

BC＝CQ より、△PBC＝△PQC

よって、

△PQB＝2△ABC

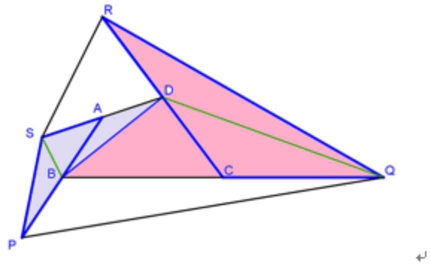
同様に RA に補助線を引くと、

△SRD＝2△ACD

以上より、

△PQB＋△SRD＝2(△ABC＋△ACD)

＝2 四角形 ABCD



SB に補助線を引くと、

DA＝AS より、△ABD＝△ABS

AB＝BP より、△ABS＝△PBS

よって、

△PSA＝2△ABD

同様に QD 補助線を引くと、

△QRC＝2△BCD

以上より、

△PSA＋△QRC＝2(△ABD＋△BCD)

＝2 四角形 ABCD

よって、△PQB＋△SRD＋△PSA＋△QRC＝(2＋2)四角形 ABCD＝4 四角形 ABCD　　4 倍

【練り上げ】

※自力解決中に指名し、板書させておく。

※問題の解答を生徒に根拠をふまえて説明させる。

期待する活動Ｂ

Ｓ「△ABC と△BPC の面積は同じで、△BPC と△CPQ の面積は同じだから、△BPQ は△ABC の二倍。」

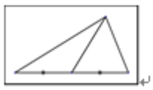
Ｔ「△ABC＝△BPC となる根拠は？」

Ｓ「AB,BP を三角形の底辺と考えると AB＝BP だから、底辺の長さが同じで高さも等しいからです」

Ｔ「そうだね。そうすると、他の辺でも同じことが言えるね。と言うことは？」

Ｓ「2 倍と 2 倍と 2 倍で 6 倍です。」

Ｔ「式で表すことができるかな。」



この図がつくれて

期待する活動Ｃ

Ｓ「AC に補助線を引いて２つの三角形に分けて考えると、さっきと同じ図がつくれます。これを使って△PQB＝2△ABC, △SRD＝2△ABC とわかり、この 2 つを合わせると、もとの四角形 ABCD の 2 倍になります。それと、BD に補助線を引いても同じで、左右の三角形の面積も四角形 ABCD の 2 倍なので、合わせて 4 倍だと分かりました。」

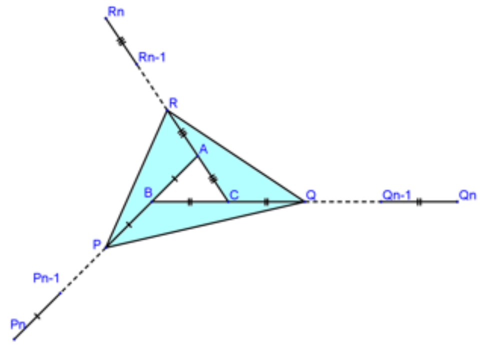
Ｔ「そうですね。三角形の時と同じ図が四角形のときも作れ、それを根拠にすれば、面積が何倍か表せますね。」

3

支１　△ABC の辺の長さをｎ倍すると面積は何倍になるだろうか。

【期待する活動Ｎ】辺の長さをｎ倍した際の一般式を求める。

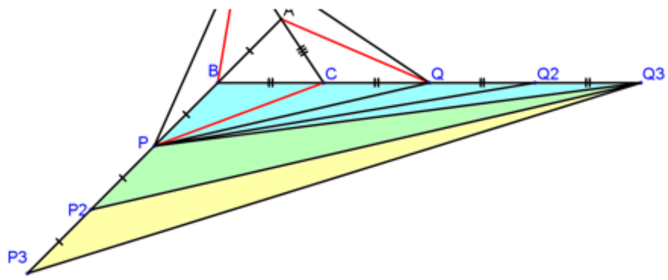
※辺の長さをｎ倍にしたとき
　図の色のついた部分の面積は
　何倍になっているだろうか。



※　式から求める。
三角形の一辺に注目して考える。
同じものが３組あると考える。

△BPC の面積を１として考えると、
BP　×BQ
辺の長さ２倍の時
①　×②×３＝６
辺の長さ３倍の時
②　×③×３＝18
辺の長さ４倍の時
③　×④×３＝36
　・・・
$(n-1)\times n\times 3=3n^2-3n$

よって、$3n(n-1)$倍



確認　$(n-1)\times n\times 3$

ｎ＝１	$0\times1\times3=0$	０倍
ｎ＝２	$1\times2\times3=6$	６倍
ｎ＝３	$2\times3\times3=18$	18倍
ｎ＝４	$3\times4\times3=36$	36倍

根拠（公理）を探ることで、手際のよい求め方を試行してほしい。

仮設（公理）をおいて考えるために三角形の面積は底辺の長さと高さに比例することを気づかせたい。

〈おわりに〉

研究テーマ「『根拠を用いた説明』できる生徒の育成をめざして」というテーマで研修を進めました。はじめにでも触れましたが、「答えは出せるのに根拠を説明できない実態に本当に理解できているのだろうか」という素朴な疑問を持ったところからの漠然とした出発でした。自分で考えた解法をクラスみんなで共有し、高め合うことができたらという思いでこの研究に取り組むことにしました。

この一年間を振り返り、日頃授業をする中で疑問に思っても時間に追われモヤモヤとしていたことをじっくりと考える貴重な時間となりました。たくさんの書物や文献を読んだり、大学の講義やゼミを受講して先生方に質問できたことは貴重な経験でした。また、たくさんの講義を受講させていただく中で、学生時代には気にも留めなかったことだろうことが、現場に出て経験しているからこそ納得できたり、より理解が深まることもあったように感じます。特に『数学学習指導論』では、現場では問題解決学習が取り入れられてはいるもののその真髄は分からずに用いていたことを反省しつつ、ようやく理解できたことに目の前が開けたようなすっきりとした気持ちになれました。そして、一時間の授業を展開するためにはどれだけ教材研究や生徒の反応の予想、それに対する支援の方法などたくさんの準備が必要なことも改めて分かりました。よい問題の選び方、提示の仕方一つとってもとても繊細で神経を要するものだとも感じました。まさに、「できる」ではなく「わかる」授業をしていかなければならないと再認識させられました。

貴重な経験として付属小学校、中学校への授業参観の講義がありました。なかなか異校種、異教科の授業参観をする機会が少ない中、貴重な経験となったように思います。その講義では、授業の参観の仕方(見方)を学ばせていただきました。参観後の討議では、学生さんならではの視点、さらには大学の先生の各専門分野からの貴重な意見を聞くことができ、とても興味深く受講することができました。

ふり返ってみると、自分が学生だったころと比べ、より実践的な講義が増えているように感じました。教育実習だけでなく、その前に半期を通して授業参観ができそれについて討議ができたり、指導案の意味合いについて学習しつつ、実際に指導案をかいてみる講義があったりとうらやましく思います。

鳥取市立北中学校で行った授業実践では、お忙しい中貴重な授業時間を割いて授業させていただいた松本先生、南後先生、校長先生はじめ、数学科の先生方には感謝してい

ます。

この一年間いろいろな場所で研修することができましたが、一緒に研修に来られていた岩本先生、中村先生には、研修の分野は違えど同じ教育に携わる者として多くの相談にのっていただいたり、アドバイスを受けることができました。校種が違うことでより異なった視点からのアドバイスを受けることができ、感謝しています。現場に戻って授業を行っていく上でもつながりという視点でよい話ができました。

ゼミの中で一緒に学ばせていただいた溝口研究室の学生のみなさんや学部生のみなさんにはたくさんの刺激をもらいました。そして、たくさん助けていただきました。ありがとうございました。

研修機関担当の教官として指導いただきました溝口先生、ゼミの中で色々な示唆をいただきました矢部先生には心から感謝いたしております。また、先生方からの示唆を今後の活動へ生かしていけるよう現場で取り組んでいきたいと思います。

この研修の成果を現場での実践に生かし、研修を重ねて今後も色々な課題に取り組んでいきたいと思います。

最後になりましたが、鳥取大学で一緒に研修をした各先生、鳥取大学、参観させていただいた各学校、授業実践をさせていただいた中学生の皆様には心よりお礼申し上げます。この一年間研修の機会を与えていただいた教育委員会、鳥取市立北中学校には、心から感謝しております。

鳥取大学数学教育研究　　ISSN 1881–6134

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。
  - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
  - 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
  - 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
  - その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX 0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/