ISSN 1881−6134

鳥取大学数学教育研究
Tottori Journal for Research in Mathematics Education

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

一般化の結果と推論の仕方との結びつきについて

吾郷将樹　*Masaki Ago*

vol.18, no.4
Sep. 2015

鳥取大学 数学教育学研究室

一般化の結果と推論の仕方との結びつきについて

吾郷将樹
鳥取大学大学院　院生

1. 研究の目的

数学学習において，新しい概念の構成や理論の発見，数学の問題を解決するにあたっては，これまでに得た概念のいくつかや確立された性質，法則の適用範囲をできるだけ広げていこうとする試みが行われる。それは通常，一般化と呼ばれるものであり，「人間の思考過程は，一般化する傾向がある」（Kolar and Cadez，2012）ともいわれている。

例えば，ひし形の面積を求める公式に着目してみると，この求め方は対角線が直行していればよいので，たこ形やさらにはくさび形にも面積公式を適用することができるというような一般化がなされる。また，具体的な数値の式である 24＋35＝35＋24 から，A＋B＝B＋A という一般の関係（交換法則）に移ることも１つである。さらには，三平方の定理を直角三角形から鋭角三角形や鈍角三角形への適用を考える事で余弦定理へと発展させることもできる。

したがって，一般化は数学の様々な場面で行われるものであり，「一般化は数学の心臓である」（Mason，1996）ともいわれている。

これまでの先行研究においては，そのような一般化に関する研究が数多く行われているが（中島，1981，倉井，2000），Krygowska（1979）は，そうした数学のあらゆる場面で行われる一般化については，一般化を一元的に捉えるのではなく，帰納による一般化，推論を一般化することによる一般化，繰り返しの知覚による一般化，特定の場合を一様にすることによる一般化という４つのタイプに区別している。また，Dorfler（1991）は，一般化はどのような認識過程や活動であるのかということをモデルによって示している。したがって，一般化の意味やその過程については明らかにされてきているといえる。

しかし，一方で次のような場面を考えてみたい。先ほども例として挙げた三平方の定理の一般化についてである。ここでは，「この三平方の定理を何かしら一般化しなさい」と提示したとする。すると，例えば，１つの一般化の方向性として，「ここ（∠C とする）が 90°でなかったらどうなるのだろう」と考え，∠C が鋭角の場合，鈍角の場合について考えようとする。そして，三角関数を用いることで１つの式にできることから，余弦定理を導くことができる。これは直角三角形から一般の三角形への適用を考えることで，余弦定理へと発展させている。[1)]

また，別のやり方として，各辺の上にできる正方形の面積の関係に着目し，「各辺を直径とする半円にするとどうなるか，正方形でなくても相似比が一緒になるのではないか」ということから，正方形でなくても，相似な図形であればよい，と

いうような一般化に向かうことも可能である（Polya，1959）。[2)]

あるいは，「今は平面の三平方の定理だけど，3次元ではどうなるか」と平面の三平方の定理から空間の三平方の定理へと一般化することも可能である。[3)]

これらの場面から，実際の数学学習において一般化を行う際には，まず学習者である子どもは，一般化する方向性に何らかの予想や推測を持っていると考えられる。そして，それが本当に初めに与えられた問題と推測したことが上手く繋がるかどうかをみようとする。つまり，一般化に向かう際には，推論が提示された問題と一般化の結果とを繋ぐ働きをしているのではないかと考えられる。

そして，この三平方の定理の例からもみられるように，推論の仕方によって，一般化の結果が変わってくるといえるのではないか。例えば，余弦定理へと一般化するときの推論の方法，それから正方形ではない相似図形に向かって一般化するときの推論の方法，これらは非常に結びつきが強く，相似図形に向かうときの推論の方法は，余弦定理には向かない，また余弦定理に向かうときの推論の方法は相似図形には向かない。

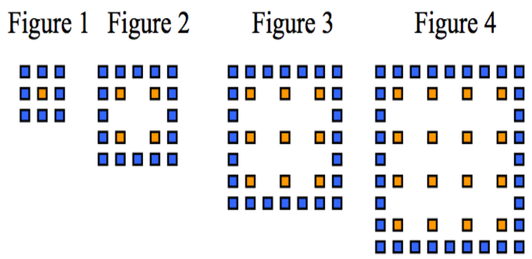
したがって，ある一般化に向かうときに，一般化の結果と推論の仕方とには強い結びつきがあると予想される。本稿では，一般化の結果と推論の仕方を，あとで後述する先行研究を基に作成した仮説的枠組みからみていくことで，両者の関連性を捉えることを試みる。

2．先行研究の分析

近年の先行研究においては，いくつかのケーススタディの中で，生徒による推論の仕方の違いや，それによる一般化の達成のしやすさの違いについて（Pytlak，2012），生徒の解決の仕方（表を使うか，図を使うか）によって，行われる一般化のタイプに違いがみられること（Ciosek, 2012），そのような一般化のタイプの違いは，問題のタイプに依存しているのではないかについての考察（Kolar and Cadez，2012）が報告されている。

2.1．Pytlak(2012)のケーススタディ

まず Pytlak（2012）では，次の問題が提示された。



1. 表を完成しましょう。

Number of figure	Number of yellow blocks	Number of blue blocks
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

2. 図 7 の場合はどうなるか。
3. 黄色のブロックと青のブロックの数が同じ数になることは起こり得るのか。
4. とても大きな図を作りたい。黄色のブロックと青のブロックのどちらが多く必要か。

この問題は，与えられている図 1，図 2，図 3，図 4 から規則性を見出し，それ以降の図 5，図 7，…，とさらに大きい図のそれぞれの数を求めるものである。

そして，Pytlak（2012）はこの事例において，子どもが規則性に気づくプロセスには異なる方法がみられたとし，それらを数的（arithmetic）

な推論，幾何的（geometric）な推論，数的幾何的（arithmetic-geometric）な推論と呼んでいる。ここでは，２人１組で問題解決が行われ，ある１組は次のような解決を行った。

2 人の生徒（A と B とする）は，まず図 1 から図 4 までの表を，与えられている図を数えることで比較的早く埋めることができた。そして，次の図 5 を考えるときに，A はまず最初に，与えられている図 1，図 2，図 3，図 4 から規則性をみつけようとした。これは Pytlak(2012)が呼ぶ幾何的な推論である。しかし，このアプローチの仕方では上手く規則性をみつけることができなかった。そこで，今度は B が表に着目することで，表より規則性をみつけることができた。これは Pytlak（2012）がいう数的な推論に当たる。

ここでは，図 5 の解決に向かうアプローチの仕方において，幾何的な推論では上手くいかなかった為，数的な推論の仕方に切り替えたら上手くいったということがみられた。これより，少なくともこの問題においては，同じ一般化の結果に向かうにあたり，推論の仕方によって，一般化の達成のしやすさに違いがみられたということがわかる。

2.2. Ciosek（2012）のケーススタディ

また，Ciosek（2012）においても，先程提示した Pytlak（2012）と同様の問題が用いられている。4）

Ciosek（2012）自身，実際のケーススタディでは，14–15 歳，16–19 歳，数学を勉強している学生，数学者といったそれぞれが持っている知識や経験が異なるものを調査対象とした。その中の 1 つの例として，このケースにおいても，学習段階が異なる 2 人の生徒（A と B とする）が行った解決の仕方が示されている。

まず A の生徒は，ｎの場合を考える際に，Krygowska（1979）が述べる帰納による一般化を行ったことがみられた。それに対して B は，同じｎの場合に向かう際に，Krygowska（1979）がいう推論を一般化することによる一般化を行ったことが確認された。ここから，同じ一般化の結果に向かう場合にも，それぞれの生徒によって異なるタイプの一般化が図られることで達成されているということが伺える。

また，Ciosek（2012）は，このような一般化のタイプの違いの現れは，解決者がその問題場面に応じて行う選択（ここでは表を用いるか，図を用いるか）が本質的に影響を与えるかもしれないと述べている。この Ciosek（2012）の指摘は，先ほどの Pytlak（2012）の推論のタイプを踏まえると，一般化のタイプというものに対して，数的な推論（表を用いる）を行うか，幾何的な推論（図を用いるか）を行うかによって，何らかの影響を及ぼす，もしくは変化を来すかもしれないと捉えることもできる。

2.3. Kolar and Cadez（2012）のケーススタディ

一方で，Kolar and Cadez（2012）は，Ciosek（2012）同様に，Krygowska（1979）の一般化のタイプを前提とし，どうやらそのような一般化のタイプというのは，問題のタイプに依存して分けられるのではないかと考えた。

ここでは螺旋の問題（手続き的問題）と池の問題（概念的問題）が用いられた。螺旋の問題（手続き的問題）とは，動的，関連する特定のルール，アルゴリズム，手続きを利用し，自動的で無意識なステップとされ，帰納による一般化に対応しそ

うだとされた。それに対して，池の問題（概念的問題）は，意識的思考が必要とされるとし，推論を一般化することによる一般化に対応しそうだと提案されている。

しかし一方で，確かに螺旋の問題（手続き的問題）は帰納による一般化が行われやすい問題かもしれないが，その問題の螺旋の図を変形して捉えてみれば，推論を一般化することによる一般化もできそうである。一方で，池の問題（概念的問題）も推論を一般化することによる一般化と考えられているけれども，受け止め直せば，帰納による一般化も十分に行うこともできる。

したがって，Kolar and Cadez（2012）が述べている一般化のタイプの問題によるタイプ分けには疑念が挟まれる。しかしながら，何かしらの条件が引き金になって，子どもが行う一般化のタイプが変わってくるというのは伺えそうである。

3．仮説的枠組みの作成

Kolar and Cadez（2012）が行った問題のタイプによって一般化のタイプを捉えようとする方法論は，それ自体としては十分でなかったかもしれないが，一般化のタイプを別のもの（ここでは問題のタイプ）で特徴付けを行い，そこに手掛かりを求めようとしたことには共感が持てる。とするならば，それらは問題のタイプではなく，推論のタイプによって対応させることはできないだろうか。

Ciosek（2012）の事例より，同じ一般化の結果に向かっていても，表を用いるか，図を用いるかによって，一般化のタイプに違いがみられるかもしれないとあった。これより，一般化のタイプとPytlak（2012）が述べる推論のタイプには関連性がありそうだということが考えられる。

したがって，ここでは，Pytlak（2012）のいう推論のタイプと Krygowska（1979）の示した 4 つの一般化のタイプで仮説的に枠組みを作成した。この枠組みを用いて分析していくことで，一般化の結果と推論の仕方とに結びつきというものはみられるのかどうかついて考えていきたい。

	数的な推論	幾何的な推論	数的幾何的な推論
帰納による一般化			
推論を一般化することによる一般化			
特定の場合を一様にすることによる一般化			
繰り返しの知覚による一般化			

縦軸は，先程から述べている Pytlak（2012）が呼ぶ 3 つの推論のタイプであり，以下ではここで用いられた事例に基いて，それぞれのタイプの説明がされている。

● 数的な推論は，絵や図は無視し、その表から見られる数学のデータに注意を払う。与えられた表の数の間の数的なつながりを見つけたり，発見する。生徒の取り組みはその4つのラインで満たされた表からの数の欄の分析に依るものである。

● 幾何的な推論は，主に絵や図に注意を払い、幾何的なつながりに着目する。強い視覚に依る側面がある。生徒の取り組みは，図形や図，絵や図，描いた5つの図形や図，次の図との分析に依るものである。そしてその次の図形や図の絵や図を描くことでつなげる。

● 数的幾何的な推論は，表と絵や図の両方が同じ程度で説明に用いられる。幾何的なつながりを

見つけ、それらを数的なつながりで結びつける。幾何的なつながりを数的なつながりで置き換える。生徒の取り組みは存在している図形や図の絵やそのとき満たしている表の分析に依る。

横軸は，ここでは Krygowska（1979）の 4 つの一般化のタイプを用いた。そして，それぞれのタイプの特徴については，次のように説明される。

● 帰納による一般化は，nの公式f(n)はみつけられる。最初はf(1)，f(2)，f(3)，そして一般の規則に適応しているとき，nの公式f(n)が得られることに気づく。その規則は推測のみである。単純だがそれはよく解決に向かう重要なステップである。

● 推論を一般化することによる一般化は，1つの場合において実行されたその推論は，さらに一般的な結果を得ることに必要とされる異なる状況や小さな修正の中で正しいであろうことに気づく。これはよく定数の変化の結果や証明の分析の結果の場面でよく起こる。

● 特定の場合を一様にすることによる一般化は，ある状況の場合にそれぞれ言及している束は，その特定の場合の一般的なことを言及することによって置き換えることができる。その例として，三平方の定理から余弦定理への一般化が挙げられる。

●繰り返しの知覚による一般化は，帰納による一般化の場合のように，nによる公式f(n)は見つけられる。しかし、f(2)のケースはf(1)を使うことで得られる。f(3)はf(2)を使うことで，そしてその次のnを述べる為の規則的な方法は気づかれる。繰り返しのルールである。後ろのものを適応することで求める公式は得られる。

この Krygowska（1979）の一般化のタイプを横軸に用いることに関しては，一般化のタイプはこれ以外にもあるのではないかと考える人も当然いるかもしれない。しかし，現段階では，あくまで実験的なものであり，これを用いることで，一般化の結果と推論の仕方との間に対応関係がみられるのかどうかを調べる為のものである。よって，ここではこの 4 つのタイプで考えていくこととする。

4．一般化の結果を思考することを要請する事例の分析

ここでは先程も挙げた Pytlak（2012）と Ciosek（2012）が扱った事例を用いて考えてみる。まず，Pytlak（2012）の中では，幾何的な推論による一般化の試みがみられた。この推論の仕方自体はここでは上手く規則をみつけることはできなかったが，これは Krygowska（1979）の一般化のタイプでいう帰納による一般化が行われていると考えられる。

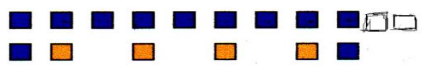


Figure 4

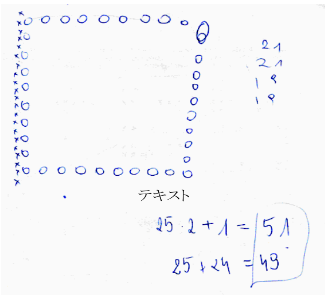
したがって，幾何的な推論，帰納による一般化のセルに当てはまる。

これに対して，その後，推論の仕方の方向転換があり，数的な推論によるアプローチが行われた。ここでは，表全体の分析を行うことで，奇数ずつ増えていることに気付いている。

Liczba klocków żółtych
1
4
9
16
25

よって，ここでも帰納による一般化が行われていると捉えることができ，数的な推論，帰納による一般化のセルに当てはまると考えられる。

また，Ciosek (2012) では，同じく数的な推論，帰納による一般化（表の着目の仕方は Pytlak (2012) の生徒と異なるが）もみられたが，幾何的な推論での推論を一般化することによる一般化もみられた。



以上の取り組みを，この仮説的枠組みに当てはめてみると，次のようになる。上手く一般化が行えたものを○で表し，上手く行えなかったものを△で表している。

	数的な推論	幾何的な推論	数的幾何的な推論
帰納による一般化	○	△	
推論を一般化することによる一般化		○	
特定の場合を一様にすることによる一般化			
繰り返しの知覚による一般化			

これより確認できることとして，n の場合へと向かっていくときに，ここでは帰納による一般化で行う場合と推論を一般化することによる一般化で行う場合の 2 つのタイプがあるということである。そして，前者の一般化を行う際には，数的な推論の仕方によって，後者の一般化を行う際には，幾何的な推論の仕方によって，というような対応関係が伺える。よって，n の場合を考えるような一般化の結果が同じ問題においても，行われる一般化のタイプにより対応する推論の仕方も異なってくることがみられる。ここでは帰納による一般化を行うときには，数的な推論が向いている，推論を一般化することによる一般化を行うときには，幾何的な推論が向いているとみることができる。

5. 考察

本稿では，先行研究を基に作成した一般化のタイプと推論のタイプによる仮説的枠組みを用いて，１つの事例の分析を行った。そして，そこには，ある一般化のタイプを行うには，ある推論のタイプが対応してきそうだという両者の関連性が伺えた。

本研究の意図するのは．ある一般化の結果へと導く際に，どのような推論の仕方が向いているのか，これらの関係性を捉えることを目的とする。その意味では，本稿でみられた分析結果というのは，本研究の目的達成を考える上で大きな示唆を与えたといえる。しかし，ここでみられた結果というのは，あくまで仮説的枠組みによって捉えられた 1 事例に留まっている。

また，本研究のもともとの関心とは異なるが，今回の仮説的枠組みによる分析より，ある一般化のタイプとある推論のタイプとの結びつきがみられたが，結びつきがみられた 2 つの一般化を比較してみると，これらの一般化に向かう推論のタイプには，選択のし易いものとし難いものとが確認できる。

少なくともこの事例の中で，Pytlak (2007) は，ほとんどの生徒は，数的な推論に依存していたと述べている。このことからも数的な推論の方が生徒にとって選択しやすく，それによって帰納によ

る一般化が多くの生徒に行われたとみることができる。一方，幾何的な推論に取り組んだ生徒は，数人しかおらず，その理由として，この幾何的な推論には考慮しなければならない多くの要因（図のどこに注意を払うか）があり，成功に終わらないことがあるとしている。

これより，この事例においては，推論のタイプ間において，選択され易いものとそうでないものとがみられた。そして，それによって，これら推論のタイプと結びつきが予想される一般化のタイプの達成にも影響を与えていると考えられる。

だが，一方で Ciosek（2012）は，ここで行われた帰納による一般化と推論を一般化することによる一般化の２つでは，もし前者が不変の活動を見つけたといえるのであれば，後者は紛れも無くそのような不変を発見し，一般的な構造を見つけたと述べている。これより，Ciosek（2012）は，後者の一般化は，前者の一般化よりも一般化し難いことが考えられるが，後者の一般化の方が価値があるものとしている。

もし，そうであるならば，ここでいう前者よりも価値があるとされる推論を一般化することによる一般化を達成する為には，この一般化のタイプと結びつきのある幾何的な推論を促す必要がある。一般化のタイプと推論のタイプには強い結びつきがあり，ある一般化のタイプを行うには，ある推論のタイプのアプローチをする必要があるということは何度も述べてきた。しかし，捉え方を変えてみると，いくらその一般化を行うことに価値があっても，その一般化のタイプに対応する推論の仕方が起こりにくければ，一般化を行うことはできないといえる。

したがって，一般化の結果と推論の仕方との間の関係性を捉えることができた場合，そもそもある一般化の結果に導く推論の仕方には，どうやって向かわせることができるのかを議論する必要がある。現段階では，そのような推論の仕方というのは，何らかの影響（問題場面や学習段階，教師の問かけ）によって選択される，されないが変わってくると考えられるが，今後，数学学習における一般化を考えていく上では，避けては通れない課題であるといえる。

これらの考察より，本稿を通して，今後考えていくべきリサーチプログラムとして，以下のものが提示されることになると考える。

・ 一般化の結果と推論の仕方の 2 つをどのように特徴づけることができるのか。
・ もし，2 つの関係性を特徴づけて捉えることができたとき，そもそもある一般化の結果に導くある推論の仕方に向かわせるにはどうすればよいか。
・ 上記 2 つの課題を明らかにし，一般化の結果と推論の仕方との関係性やある推論の仕方に向かわせる手段を同定することができれば，数学学習にどのように寄与するのか。

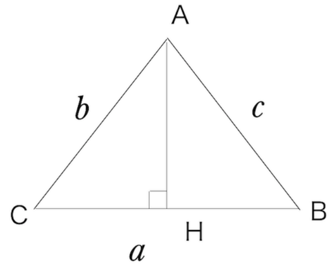
一方で，本稿の吟味から，このようなリサーチプログラムをしていく上では，以下のような課題がみえてきている。

6. 今後の課題

本稿では，仮説的枠組みとして，一般化のタイプと Pytlak の推論のタイプを用いたが，その妥当性については述べれていない。また，Pytlak（2012）は数的なもの，幾何的なものとに区別して一般化をみているが，そもそもなぜそうした区別を考えていなかいといけないのか，領域における一般化の固有性について議論する必要があると考える。

注

１）「∠C が 90°でなかったらどうなるのか」と考え，∠C が鋭角三角形の場合を考える。三平方の定理を用いることができるよう，△ABC の頂点 A から辺 BC に垂線 AH を下ろす。



△CAH は直角三角形より，

$$\sin C = \frac{AH}{b} \ \rightarrow\ AH = b\sin C$$

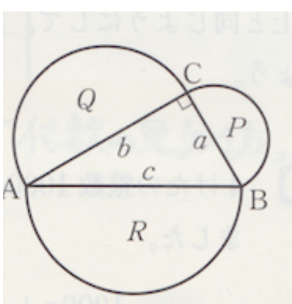
$$\cos C = \frac{CH}{b} \rightarrow CH = b\cos C \rightarrow BH = a - b\cos C$$

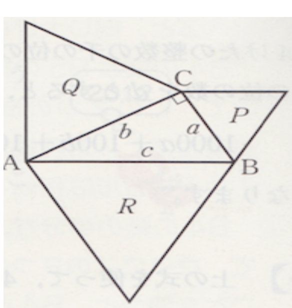
△BAH は直角三角形より，三平方の定理から

$$C^2 = (b\sin C)^2 + (a - b\cos)^2$$
$$= b^2\sin^2 C + a^2 - 2ab\cos C + b^2\cos C$$
$$= b^2 + a^2 - 2ab\cos C$$

∠C が鈍角の場合も同様に考えることができる。これは三平方の定理を直角三角形から一般の三角形への適用を考えることで，余弦定理を導き出している。

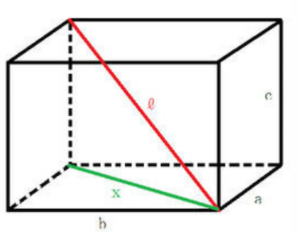
２）「直角三角形の外側に正方形以外の図形を描いても，P+Q＝R の関係が成り立つのではないか」と考え，各辺を直径とする半円の場合や正三角形の場合などを考える。





そして，これらも同様に P＋Q＝R となることから，正方形でなくても，相似な図形であればよいというような一般化に向かう。

３）「空間ではどうなるのか」と考え，次のような立方体への三平方の定理の適用を考える。



底辺の辺を a,b として，底面の対角線を x とおく。三平方の定理より，

$$x^2 = a^2 + b^2$$
$$x = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\ell^2 = c^2 + x^2$$
$$= c^2 + (\sqrt{a^2 + b^2})^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2$$

となる。

４）Ciosek（2012）の場合，黄色のブロック，青のブロックではなく，りんごの樹，針葉樹の樹と呼び方に違いがあったり，問が 1.表を埋めましょう，2. n の場合について考えましょうというような違いはみられる。

引用・参考文献

ポリヤ，G.（1959).「数学における発見はいかになされるか 1 帰納と類比」(柴三雄訳)．丸善株式会社

中島健三.（1981).「算数数学教育と数学的な考え方　その進展のための考察」．金子書房

倉井庸維.(2000).「数学的活動としての一般化」.「研究紀要 38」,125‒128

Pytlak,M.(2007).geometrical aspect of general‒ization.

Tatsis,B，M．&Tatsis,K.(2012)．Generaliza‒tion　In mathematics at all educational le

−vels.R-Zeszow,Poland:Rzeszow University
Ciosek,M.(2012).Generalizationin The proce −ss of defining a concept and exploringit by students. In M.B,Tatsis&T.K(Edus),Gener −alization in Mathematics at all educationl levels (pp.38-56).Poland,Rzeszow:Rzeszow University.
Pytlak,M.(2012).Students working on regula −rities:a case study fromPoland.In M.B,Tat −sis& T.K(Edus),Generalization in math −ematics at all educationl levels (pp.215 −233).Pol and Rzeszow:Rzeszow Universi −ty.
Kolar and Cadez.(2012).DependEnce of the problem solving strategies on the prob −lem context. In M.Pavlekovic(Edus),ｍat −hematical teathing for the future (pp.162 -171).

鳥取大学数学教育研究　　ISSN 1881–6134

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

投稿規定

- ❖ 本誌は，次の稿を対象とします。
  - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
  - 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
  - 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
  - その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供
- ❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。
- ❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。
- ❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/