

ISSN 1881-6134

# 鳥取大学数学教育研究

*Tottori Journal for Research in Mathematics Education*



<http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu>

小学校における数感覚を育む研究

山根三佳 *Mika Yamane*

vol.16, no.2

Feb. 2014



## 目次

第 1 章：本研究の目的と方法	3
1.1 本研究の動機	4
1.2 本研究の目的	5
1.3 本研究の方法	5
第 2 章：「数感覚」に関する先行研究の分析	8
2.1 「数感覚」について	9
2.2 数感覚を考えるための枠組みの検討	10
2.2.1 Reys 等が枠組みを考案した背景	10
2.2.2 Reys 等の枠組みについて	11
第 3 章：スタンダード 2000 の分析	17
3.1 NCTM とは	18
3.2 スタンダード 2000 について	18
3.3 Reys 等の枠組みを基にした スタンダード 2000 分析	20
第 4 章：学習指導要領の分析	42
4.1 小学校学習指導要領 算数編	43
4.2 学習指導要領分析	43
4.3 分析結果への考察	50
第 5 章：数感覚育成のための指導プログラム案	55
5.1 数感覚指導の現状	56
5.2 ベンチマークについて	56
5.3 指導プログラムの提案 ～ベンチマークの使用に着目して～	61
第 6 章：本研究の結論と残された課題	66

6.1	本研究の結論	67
6.2	残された課題	67
	引用及び参考文献	68

## 第 1 章 本研究の目的と方法

- 1.1 本研究の動機
- 1.2 本研究の目的
- 1.3 本研究の方法

本章では、本研究の目的・方法について述べる。

1.1 では、本研究のテーマ設定に至った背景を述べる。1.2 では、本研究の目的を述べる。1.3 では、本研究の目的を実現するための方法を述べる。

## 第1章 本研究の目的と方法

### 1.1 本研究の動機

筆者は大学時代、学生ボランティアとして地域の子ども達に勉強を教えるボランティア活動を行っていた。ボランティア活動を行っていくうちに、(1)(2)のような気になる子どもが居た。

(1)小学5年生の女の子

わり算をする際、商をどんな数にすればよいのかが分からない。

例：① $72 \div 31$  ② $125 \div 43$

etc... (除数が1ケタの時にはできることが多い)

(2)小学5年生の女の子

かけ算をする際、解の値が明らかに違っていても気づかない。

例：① $32 \times 45 = 144$  ② $400 \times 12 = 480$

筆者はボランティア活動中に、(1)、(2)のような子どもが何人も居ることに気づいた。そのような子ども達を見て、商を決められない子や、解の合理性が判断できない子ども達は、数感覚が十分に養われていないのではないか、と考えた。

学生ボランティアの活動では、上記のような子どもに練習問題を多く解かせることで、問題を解くことができるようにさせようと奮闘する場面が多いように感じた。しかし、このような指導で本当に子ども達の数感覚が育まれるのか、と疑問に感じた。

また筆者は、練習問題を一生懸命解く子ども達を観察し、子どもの負担をできるだけ少なくしたいと強く感じた。そのため、ただやみくもに練習問題を解かせるのではなく、計画的に無駄なく数感覚を育むためにはどのようにしたらよいのだろうか、と考えるようになった。そこで、どのように数感覚を育めばよいか、ということを検討していきたいと考えた。

## 1.2 本研究の目的

現在日本の算数教育では、数感覚を育む明示的なカリキュラムはない。そのため、教育現場では問題が解けない子どもに対して手探りで指導をしていかなければならず、計画性がない指導となってしまう。そのような指導では、数感覚を育む保障をすることができない、と筆者は考える。指導方法・内容によっては子どもの負担を増やすだけになってしまう場合もあり、場合によっては逆効果となることも考えられる。そのようなことにならないようにするためにも計画性のある指導を可能にする必要がある。

そこで本研究においては、数感覚を育むためのプログラムを提案することを目的とする。

## 1.3 本研究の方法

本研究を進めていく内に、Alistair McIntosh(1992)、Barbara J. Reys (1992)、Robert E. Reys (1992)が数感覚を考えるための枠組みを考案したことが分かった。(以下、Reys等が考案した枠組みとし、第2章に詳しく述べる。)

米国のNCTMはスタンダード2000の中で、数感覚を育もうとしている。しかし、ただ読んだだけでは、各学年帯でどのように数感覚が養われているか読み取ることができない。

そこで、Reys等の枠組みを用いて、NCTMが出版した『Principles and Standards for School Mathematics』(以下、スタンダード2000とする)に記載されている数感覚の内容を分析することによって、NCTMがどのように数感覚を育もうとしているか、について分析する。Reys等が枠組みを考案した約8年後にNCTMはスタンダード2000を提唱した。分析していくとNCTMは、どの構成要素をどの学年帯で指導するか、ということを考えながらスタンダードを作成したことが考えられた。NCTMがどのように数感覚を育成しようとしているか、ということをも明らかにし、プログ

ラム作りの参考にする。

その後、スタンダード 2000 分析と同様の分析方法によって、日本の学習指導要領を分析する。このような方法により、日本でどのように数感覚を育んでいこうとしているか、またその良い点・問題点を明らかにする。これは、次のような理由による。日本の学習指導要領のみを分析していても、日本の指導についての良い点や問題点は見えてこない。そのため、このようにすることによって、日本の数感覚指導の現状を明らかにし、問題点を挙げ改善するためのプログラムを提案していく。

<本論文の章構成>

**第1章：本研究の目的と方法**  
本研究の目的と方法を述べる。



**第2章：「数感覚」に関する先行研究の分析**  
研究テーマである「数感覚」に関する  
先行研究について述べる。

**第3章：スタンダード  
2000の分析**  
スタンダード2000を  
分析することによっ  
て、米国でどのように  
数感覚を育もうとし  
ているか明らかにす  
る。

**第4章：学習指導要領  
の分析**  
第4章で提案した新枠  
組みを用いて、日本の  
学習指導要領の分析  
を行い、日本でどのよ  
うに数感覚を育んで  
いるか明らかにする。

**第5章：数感覚育成のための指導プログラムの提案**  
数感覚を育むプログラムを提案する。



**第6章：本研究の結論と残された課題**  
本研究の結論と残された課題を述べる。

## 第 2 章 「数感覚」に関する先行研究の分析

- 2.1 「数感覚」について
- 2.2 数感覚を考えるための枠組みの検討

本章では、研究テーマである「数感覚」に関する先行研究の分析について述べる。

2.1 では、「数感覚」について述べる。2.1 により数感覚とはどのようなものなのか、ということ述べた上で、2.2 では、『A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense』(Alistair McIntosh, Barbara J. Reys, Robert E. Reys, 1992)を基に、Reys 等が考案した数感覚を考えるための枠組みについて検討していく。

## 第2章 「数感覚」に関する先行研究の分析

### 2.1 「数感覚」について

「数感覚」について Reys 等によると、

「Like common sense, number sense is an elusive term which has stimulated discussions among mathematics educators, including classroom teachers, curriculum writers and researchers (一般的な感覚のように、数感覚は担任教師やカリキュラムの作成者や研究者を含めた数学教育者の議論を活気づけている分かりにくい用語である。)」

(McIntosh 等,1992,p3)

Reys 等が言う通り、数感覚について多くの数学教育者が長年議論している。議論に終止符が打たれないほど、数感覚とはどのようなものであるか、と決めることは難しいと筆者は考える。しかし、数感覚の重要性はずっと前から言われており、Reys 等も「数感覚は、学習者が暗算や筆算、見積もり、電卓の使用などの様々な計算方法を選択したり、発達させたりする際の基礎となる重要な事柄である」(伊藤, 1995, p27)としている。

数感覚を育む必要性はあるが、数感覚がどのようなものか明確には分かっていない現状があり、目の前に居る子どもたちに数感覚をどのように育めばよいか分からず、現在の数感覚指導は、その場しのぎの計画性のないものとなっていることが多いように感じる。銀島氏は、「数感覚に関する抽象的な議論を展開するよりも、数感覚の育成を促すような条件や指導法を議論することの方が、はるかに有益である」(銀島,1994,p198)としている。

このことに筆者も同意であり、数感覚とはどのようなものか、ということ議論するよりも、どのように数感覚を育成するか考え、また数感覚を育成するためのプログラム作りを行うべきである、と筆者は考えた。プログラム作りをするにあたって、まずは、数感覚指導の現状を明らかにすることが必要である。筆者は、Reys 等の先行研究『A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense』、特に“数感覚を考えるための枠組み”を本研究のベースとし、現在日

本の算数教育においてどのように数感覚が育成されようとしているのか、について明らかにしようと考えた。そこで、本研究は、Reys 等の先行研究をベースに進めていく。

## 2.2 数感覚を考えるための枠組みについて

### 2.2.1 Reys 等が枠組みを考案した背景

本研究では、Reys 等が考案した枠組みを使用するため、ここから Reys 等の枠組みとはどのようなものであるか、ということについて示す。ここでは、まず Reys 等が枠組みを考案した背景について述べ、2.2.2 で Reys 等の枠組みについて示す。

“number sense (数感覚)”について、1989年に NCTM<sup>1</sup> (National Council of Teachers of Mathematics : 全米数学教師協議会) はスタンダードに示した。1989年スタンダードによると、「Number sense is an intuition about numbers that is drawn from all the varied meanings of number. (数感覚とは、数に関する様々な意味すべてから引き出される、数についての直観である)」とされた。また数感覚は、以下の5つの構成要素から成るとされた。

- 【1】 Developing number meanings  
一数の意味を育てる
- 【2】 Exploring number relationships with manipulatives  
一具体物を用いて数の関係を探求すること
- 【3】 Understanding the relative magnitudes of numbers  
一数の相対的な大きさを認識すること
- 【4】 Developing intuitions about the relative effect of operating on numbers  
一数に関する演算の相対的な効果についての直観を育てる
- 【5】 Developing referents for measures of common objects

---

<sup>1</sup> NCTM については、第3章で詳しく述べる。

and situations in their environment

—子どもの身の回りにある日常的な対象や場面での  
測定値に関する指示対象を育てる

Reys 等によると、1989 年に NCTM によって示された  
“number sense” は、シンプルで魅力的なものであり、素  
晴らしかったが、これ、という解釈ができなかったため、異  
なった解釈ができた。そのため、Reys 等はさまざまな人々  
によって基本的な数感覚の構成要素として合意されたもの  
を明確化し、そして体系化することによって、相互に関係付  
けを行った。さらに、『A Proposed Framework for  
Examining Basic Number Sense』（McIntosh 等,1992,p3）  
の中で数感覚について記述し、数感覚について考えるための  
枠組みを発表した。

### 2.2.2 Reys 等の枠組みについて

上述したように Reys 等の枠組みは、『A Proposed  
Framework for Examining Basic Number Sense』において  
1992 年に発表された。考案された枠組みは、次のページに  
示す。

数感覚は、情報の伝達、処理、解釈の手段としての数や量的方法を用いる傾向及び能力であり、数が有用で、数学が確実な規則性を有する(従って有益である)という予想に帰する。

- |  |                                     |                                    |                                     |
|--|-------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. 数に関する知識と、数をうまく扱うこと                      | 1.1 数の規則性に対するセンス                    | 1.1.1 位取り                          |                                     |
|  |                                     | 1.1.2 数の種類間の関係                     |                                     |
|  |                                     | 1.1.3 同じ種類の中で、また異なる種類の中で、数を順序づけること |                                     |
|  | 1.2 数の多様な表象                         | 1.2.1 図的表記/記号表記                    |                                     |
|  |                                     | 1.2.2 等しい値(分解/合成を含む)               |                                     |
|  |                                     | 1.2.3 ベンチマークとの比較                   |                                     |
|  | 1.3 数の相対的な大きさと絶対的な大きさに対するセンス        | 1.3.1 物理的な参照物と比較すること               |                                     |
|  |                                     | 1.3.2 数学的な参照物と比較すること               |                                     |
|  | 1.4 ベンチマークシステム                      | 1.4.1 数学的なシステム                     |                                     |
|  |                                     | 1.4.2 個人的なシステム                     |                                     |
|  | 2. 演算に関する知識と、演算をうまく扱うこと             | 2.1 演算の効果についての理解                   | 2.1.1 整数の演算                         |
|  |                                     |                                    | 2.1.2 分数の演算/小数の演算                   |
|  |                                     | 2.2 数学的な性質についての理解                  | 2.2.1 可換性                           |
|  |                                     |                                    | 2.2.2 結合性                           |
|  |                                     |                                    | 2.2.3 分配性                           |
| 2.2.4 単位元                                  |                                     |                                    |                                     |
| 2.2.5 逆元                                   |                                     |                                    |                                     |
| 2.3 演算間の関係についての理解                          |                                     | 2.3.1 加法/乗法                        |                                     |
|  |                                     | 2.3.2 減法/除法                        |                                     |
|  |                                     | 2.3.3 加法/減法                        |                                     |
|  |                                     | 2.3.4 乗法/除法                        |                                     |
| 3. 計算を伴う状況に数や演算に関する知識と、数や演算をうまく扱うことを適用すること |                                     | 3.1 問題の文脈と必要な計算との関係を理解すること         | 3.1.1 正確な値のデータかまたは近似値のデータかということが分かる |
|  | 3.1.2 解が正確な値になるかまたは近似値になるかということが分かる |                                    |                                     |
|  | 3.2 多様なストラテジーが存在することとの認識            | 3.2.1 ストラテジーを考え出し、工夫する能力           |                                     |
|  |                                     | 3.2.2 異なるストラテジーを適用する能力             |                                     |
|  |                                     | 3.2.3 効率のよい数を選択する能力                |                                     |
|  | 3.3 効率のよい表象や方法を利用する傾向               | 3.3.1 様々な方法(暗算、電卓、筆算)をうまく扱うこと      |                                     |
|  |                                     | 3.3.2 効率のよい数を選んでうまく扱うこと            |                                     |
|  | 3.4 感覚的にデータや結果の吟味する機会               | 3.4.1 データの合理性が分かる                  |                                     |
|  |                                     | 3.4.2 計算の合理性が分かる                   |                                     |

Reys 等の枠組みについて、Reys 等は『小学校算数実践指導全集 第2巻 豊かな数感覚を育てる数の指導』と『A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense』の中で説明している。これらを基に Reys 等の枠組みについて示す。Reys 等の枠組みについて銀島氏が『子どもの数感覚を記述するための観点』で記述しているため、銀島氏の記述にも触れながら Reys 等の枠組みについて述べる。

Reys 等の枠組みは、いくつかの構成要素が含まれており、それぞれの構成要素は相互に連結しており、構成要素は

- ・ 数概念 (number concepts)
- ・ 数を伴った演算 (operations with number)
- ・ 数と演算の適用 (applications of number and operation)

という3つの分野に分けられている。よい数感覚をもっている人は、数や演算、生じた結果について考え、反省する。この反省的思考は、あるときそしてまた別のときに主要な構成要素をいくつかまたはすべて含んでいる。枠組みの中のいくつかの構成要素は、高次の数感覚を持っている児童の中に最も明らかに現れるものとしてここに記述されている。

ベンチマーク…数の大小を判断するために、社会一般的なかつ個人的な参照システムを使用すること。

演算の効果…2つかそれ以上の数に対する演算（たし算、ひき算、かけ算、わり算）の意味と効果について理解すること。

相対的な大きさ…他の数に関連した場合の数の大小に関するセンス。ベンチマークも含まれる。

合理性…得られた解決が場面の状況に矛盾していないかどうかを判断するための注意力と能力。

多様な表現…数や式の様々な同値の形式を見きわめ、かつまたは使用する理解と能力。

Reys 等の枠組みについて銀島氏は、『子どもの数感覚を記述するための観点』（銀島,1994）において述べている。銀島によると、「1 および 2 で扱われている数と演算は、数感覚の対象となる事柄であり、3 はそれらの対象を活用する場面、あるいは問題場面であると言える。さらに、1 で述べられている「数をうまく扱うこと」や 2 で述べられている「演算をうまく扱うこと」という事柄は、単に数や演算をうまく扱うというよりむしろ、それらを活用する場面、あるいは問題場面において何が目的なのか、といった事柄と深く関連しながら、その状況や目的に適切な方法で、「うまく扱うこと」が重要である。」としている。

つまり、1（数に関する知識と、数をうまく扱うこと）及び 2（演算に関する知識と、演算をうまく扱うこと）に関する事項について十分に理解し、適用することができるようになることを基盤として、3（計算を伴う状況に、数や演算に関する知識と、数や演算をうまく扱うことを適用すること）が成り立っている、と言える。

Reys 等は枠組みについての説明の中で、

「It would be futile to delineate all possible components of number sense as number sense should grow and expand throughout secondary school and beyond（中学校やそれ以降に育てたり広げたりする数感覚として可能性のある全ての数感覚の構成要素を記述することは無駄である。）」

（McIntosh 等,1992,p5）としている。このことより筆者は、Reys らの枠組みは中学校より前の学年を対象として作られたものであると考えた。

Reys 等は、各分野を細分化して示している。銀島氏（1994）の言葉を借りるなら、各分野から下位カテゴリーが導かれている。筆者は、細分化されていることで、つまずきを感じている児童が居た際に、どこにつまずきがあるか判断しやすくなり、支援を考える際の一助となるだろう、と考えた。例えば、第 1 章で述べた、わり算をする際、商をどんな数にすればよいのかが分からない児童に対しては、1 の領域（数に関する知識と、数をうまく扱うこと）の 1.3（数の相対的な大きさと絶対的な大きさに対するセンス）でつまずきがあると

考えられ、さらに 1.3.1（物理的な参照物と比較すること）か 1.3.2（数学的な参照物と比較すること）どちらにつまずきがあるか把握することによって、つまずきを無くす支援を教師が考えることができる。

また、この構成要素を用いてスタンダードや学習指導要領を検討することによって、NCTM や日本がどのように数感を育もうとしているか、分析できると考える。次章では、スタンダード 2000 の分析について述べる。

## 第 2 章の要約

本研究では、日本の数感覚指導の現状を明らかにし、問題点を挙げ改善するためのプログラムを提案していくことが目的である。そこで、第 2 章では、まず本研究テーマである数感覚について Reys 等の考えを基に記述した。そして、研究のベースとなる数感覚について考えるための枠組みについて銀島氏の考えも踏まえつつ述べた。

本章では、数感覚はどういうものであるか、ということ議論するよりも、どのように数感覚を育成するか考え、また数感覚を育成するためのプログラム作りを行うべきである、という筆者の考えを述べた。

どのように数感覚を育成するか考えるには、現在の日本の数感覚指導を知ることが不可欠である。そこで、Reys 等の枠組みを用いて日本の数感覚指導の現状について明らかにしていくため、Reys 等の枠組みを研究のベースとすることとした。Reys 等の枠組み内の構成要素は、

- ・ 数概念 (number concepts)
- ・ 数を伴った演算 (operations with number)
- ・ 数と演算の適用 (applications of number and operation)

という 3 つの分野に分けられている。それぞれの分野ごとに下位カテゴリーが導かれており、細分化されている。また、Reys 等の枠組みは、中学校までの学年を対象として作られたことも分かった。このことを踏まえ、次章ではスタンダード 2000 の分析を Reys 等の枠組みを用いながら行っていく。

## 第 3 章 スタンダード 2000 の分析

- 3.1 NCTM とは
- 3.2 スタンダード 2000 について
- 3.3 Reys 等の枠組みを基にした  
スタンダード 2000 分析

NCTM は Reys 等の枠組みを基に数感覚を育むためのスタンダード 2000 を提唱したと考えられる。

本章では、NCTM が 2000 年に提唱したスタンダードについて分析することによって、Reys 等の枠組みの分析をしていく。

3.1 ではスタンダードを提唱した NCTM について述べる。3.2 では、スタンダード 2000 について述べる。3.3 では、Reys 等の枠組みを基にしたスタンダード 2000 分析について述べる。

### 第3章 スタンダード 2000 の分析

本研究の目的は、日本の数感覚指導の現状を明らかにし、問題点を挙げ改善するためのプログラムを提案していくことである。日本の数感覚指導の現状を明らかにする際、学習指導要領だけではなく、スタンダード 2000 も分析し比較・検討することによって日本の数感覚指導の良い点・問題点を明らかとしていく。そこでまずはこの章では、スタンダード 2000 について分析していく。

#### 3.1 NCTM とは

スタンダード 2000 について述べる前に、スタンダードを出版した NCTM について述べたい。NCTM とは、National Council of Teachers of Mathematics（全米数学教師協議会）のことであり、ナショナル・カリキュラムがない米国において<sup>2</sup>、1989 年に『Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics』を出版した。その後、1991 年に『Professional Standard for School Mathematics』、1995 年に『Assessment Standard for School Mathematics』、2000 年に『Principles and Standards for School Mathematics』（スタンダード 2000）を出版した。本研究では、スタンダード 2000 を基に、各検討を行っていく。次の節にスタンダード 2000 についての詳しい説明を述べる。

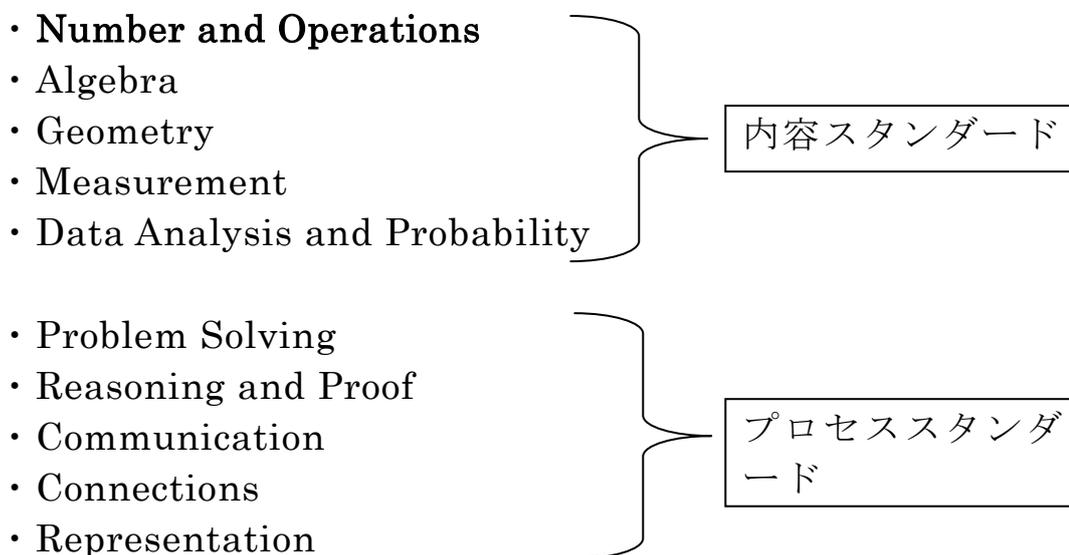
#### 3.2 スタンダード 2000 について

スタンダード 2000 は、5 つの内容スタンダード（The Content Standards）と 5 つのプロセススタンダード（The Process Standards）に分かれている。筆者はまず、スタンダード 2000 においてどのスタンダードに数感覚について述

---

<sup>2</sup> 米国は、州ごとに独自の教育を進めているため、ナショナル・カリキュラムがない。そのため、州ごとの学力差の開きや、学習の時期が大幅に異なり転校生が居た場合対応できなくなる、というようなことが起こる。そこで、NCTM は、スタンダードを出版し、学年帯ごとにすべきことを定めた。

べられているか検討した。すると、幼稚園就園前から12年生（高校3年生）の基準が示されているチャプター内にある“Number and Operation”の項目の中に、「Central to this Standard is the development of number sense（このスタンダードの中心は、数感覚を育てることである）」という記述がされていた。このことから、“Number and Operation”のスタンダードを分析することによって、NCTMがどのように数感覚を育もうとしているか、ということの認識の一助となると考えた。そこで今回は、“Number and Operations”についてみていく。



スタンダード 2000 についての形式について説明する。まず、各スタンダードについて、幼稚園就園前から12学年（高校3年生）を見通した学校の算数・数学の基準が示されている。その後、幼稚園就園前から2年生、3年生から5年生、6年生から8年生（中学2年生）、9年生（中学3年生）から12年生（高校3年生）の学年帯ごとのスタンダードが記されている。<sup>3</sup>

<sup>3</sup> 米国の学制は、elementary school と junior high school と high school の3つに分けられている。elementary school が6年間であり、日本の幼稚園から小学5年生までに該当する。junior high school が3年間であり、日本の小学6年生から中学2年生までが該当する。high school が4年間であり、日本の中学3年生から高校3年生が該当する。

幼稚園就園前から 12 年生を見通した学校の算数・数学の各スタンダード内に幼稚園就園前から 12 年生まで見通した目標設定がされている。例えば、“Number and Operations”のスタンダードでは、以下のようにになっている。

(NCTM,2000,p32)

Instructional programs from prekindergarten through grade 12 should enable all students to —

- understand numbers, ways of representing numbers, relationships among numbers, and number systems;
- understand meanings of operations and how they relate to one another;
- compute fluently and make reasonable estimates.

そして、学年帯ごとに目標に即した期待されること (expectations) が明示されている。

つまり、幼稚園就園前から 12 年生まで見通した基準の中に、目標設定がされており、その目標に即して学年帯ごとに期待されること (expectations) が記されている。

### 3.3 Reys 等の枠組みを基にしたスタンダード 2000 分析

前の節で、“Number and Operation”のスタンダードを分析する必要性について述べた。“Number and Operation”のスタンダードでは、全ての生徒に以下に示す 3 つのことを可能にさせるべきである、としている。本研究では、後々の分析で扱うため、①から③と番号をつけたが、これらの番号は水準を示すものではない。

### 期待されること (expectations)

- ① Understand numbers, ways of representing numbers, relationships among numbers, and number systems  
— 数と数の表し方や数の関係、記数法を理解すること
- ② Understand meanings of operations and how they relate to one another  
— 演算の意味や演算同士がどのように関係しているか理解すること
- ③ Compute fluently and make reasonable estimates  
— 流暢に計算し、妥当な見積もりをすること

前節でも述べたが、それぞれの設定された目標において、学年帯ごとに期待されることが述べられている。

本節では、第1章で述べたように、Reys等が考案した枠組みを用いて、スタンダード2000についての分析を行う。そうすることによって、Reys等の枠組み内にある構成要素が実際にスタンダード2000ではどのように育まれようとしているのか、ということ进行明らかにする。ただし、第2章で述べたようにReysらの枠組みは中学校より前の学年を対象として作られたものと考えられるため、対応表は6-8年生までとした。分析をしたものは、以下の次ページから示す。資料の□(四角)はReys等の構成要素にあてはまらなかったものである。

学年帯	全ての子どもがすべきこと	訳	Reys らの数感覚を考える上での構成要素
幼稚園就園前から2年生	<p>①</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・count with understanding and recognize "how many" in sets of objects</li> <li>・use multiple models to develop initial understandings of place value and the base-ten number system</li> <li>・develop understanding of the relative position and magnitude of whole numbers and of ordinal and cardinal numbers and their connections</li> <li>・develop a sense of whole numbers and represent and use them in flexible ways, including relating,</li> </ul>	<p>①</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・具体物の集合 (sets of objects) で、「いくつか」を理解し、認識しながら数える。</li> <li>・基礎的な位取りの理解や10進位取り記数法の理解を育てるために、複数のモデルを使う。</li> <li>・全数と順序数と集合数の相対的な位置と大きさやそれらのつながりの理解を育てる。</li> <li>・全数のセンスを発達させ、数の関係や合成・分解を含む柔軟性のある方法で表し使う。</li> </ul>	<p>1.3.1</p> <p>1.1.1 1.3.1</p> <p>1.1.2</p> <p>1.2.2</p>

<p>composing, and decomposing numbers</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>· connect number words and numerals to the quantities they represent, using various physical models and representations</li> <li>· understand and represent commonly used fractions, such as <math>1/4</math>, <math>1/3</math>, and <math>1/2</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ ナンバーワードと基数を表された量や使ったさまざまなモデルと表されたものにつなぐ。</li> <li>・ <math>1/4</math> や <math>1/3</math> や <math>1/2</math> のような一般的に使われている分数を理解し、表す。</li> </ul>	<p>1.2.1 1.3.1</p> <div style="border: 1px solid black; width: 50px; height: 20px; margin: 10px auto;"></div>
<p>②</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>· understand various meanings of addition and subtraction of whole numbers and the relationship between the two operations</li> <li>· understand the effects of adding and subtracting whole numbers</li> <li>· understand situations that entail</li> </ul>	<p>②</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 全数のたし算とひき算のさまざまな意味や2つの演算の関係を理解する。</li> <li>・ 全数をたすこと、ひくことの効果を理解する。</li> <li>・ 物の等しいグループ化や、等しくわけたり</li> </ul>	<p>2.1.1 2.1.2 2.3.3</p> <p>2.1.1 2.1.2</p> <p>2.3.4</p>

	<p>multiplication and division, such as equal groupings of objects and sharing equally</p>	<p>するようなかけ算とわり算を伴う場面を理解する。</p>	
	<p>③</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・develop and use strategies for whole-number computations, with a focus on addition and subtraction</li> <li>・develop fluency with basic number combinations for addition and subtraction</li> <li>・use a variety of methods and tools to compute, including objects, mental computation, estimation, paper and pencil, and calculators</li> </ul>	<p>③</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・たし算とひき算に焦点をあてた全数のたし算とひき算のストラテジーを育てたり使ったりする。</li> <li>・たし算とひき算における初歩的な数の組み合わせを用いる流暢さを育てる。</li> <li>・具体物や暗算、見積もり、筆記、電卓を含む、さまざまな方法やツールを使う。</li> </ul>	<p>3.2.1 3.2.2</p> <p>3.2.1 3.3.2</p> <p>3.2.2 3.3.1</p>
3年生から5	<p>①</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・understand the place-value structure of the base-ten</li> </ul>	<p>①</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・10進位取りの構造を理解し、全数と小数を</li> </ul>	<p>1.1.1 1.1.2</p>

年生	number system and be able to represent and compare whole numbers and decimals	表し比較することができる。	
	・recognize equivalent representations for the same number and generate them by decomposing and composing numbers	・同じ数に関するの同等の表現に気づき、分解・合成によってそれらをつくる。	1.2.2
	・develop understanding of fractions as parts of unit wholes, as parts of a collection, as locations on number lines, and as divisions of whole numbers	・ユニット全体の一部としてや、集合の一部としてまたは数直線上の位置や全数の分割としてとしての分数の理解を育てる。	<input type="text"/>
	・use models, benchmarks, and equivalent forms to judge the size of fractions	・分数の大きさを判断するために、モデルやベンチマーク，同等の形式を使う。	1.2.3 1.3.1 1.3.2
	・recognize and generate equivalent forms of commonly	・一般的に使われている分数、小数、百分率の同等の構造に気づ	1.2.2

<p>used fractions, decimals, and percents</p> <p>・explore numbers less than 0 by extending the number line and through familiar applications</p> <p>・describe classes of numbers according to characteristics such as the nature of their factors.</p>	<p>き、作り出す。</p> <p>・数直線を伸ばし、よく知っているアプリケーションを通じて0以下の数を探求する。</p> <p>・数の要因の性質のような特性によるナンバークラスについて記述する。</p>	<p>1.2.3 1.3.2 1.4.1</p> <p><input type="text"/></p>
<p>②</p> <p>・understand various meanings of multiplication and division</p> <p>・understand the effects of multiplying and dividing whole numbers</p> <p>・identify and use relationships between operations, such as division as the inverse of</p>	<p>②</p> <p>・かけ算とわり算の様々な意味を理解させる。</p> <p>・全数をかけたりわったりする効果を理解する。</p> <p>・問題を解くために、わり算はかけ算と性質が逆であるというような演算間の関係を確認し、使う。</p>	<p>2.3.4</p> <p>2.1.1 2.1.2</p> <p>2.3.4</p>

<p>multiplication, to solve problems</p> <p>・understand and use properties of operations, such as the distributivity of multiplication over addition.</p>	<p>・たし算によるかけ算の分配性のような演算の特性を理解し使う。</p>	<p>2.2.3 2.3.1</p>
<p>③</p> <p>・develop fluency with basic number combinations for multiplication and division and use these combinations to mentally compute related problems, such as <math>30 \times 50</math></p> <p>・develop fluency in adding, subtracting, multiplying, and dividing whole numbers</p> <p>・develop and use strategies to estimate the results of whole-number</p>	<p>③</p> <p>・かけ算やわり算についての基礎的な数の組み合わせを用いた流暢さを育て、<math>30 \times 50</math>のような問題に関する暗算をするためにそれらの組み合わせを使う。</p> <p>・全数のたすこと、ひくこと、かけること、わることにおける流暢さを育てる。</p> <p>・全数の計算結果の見積もりや、そのような結果の合理性の判断をするために、ストラテ</p>	<p>3.2.1 3.3.2</p> <p style="text-align: center;">□</p> <p>3.2.1 3.4.1 3.4.2</p>

<p>computations and to judge the reasonableness of such results</p>	<p>ジーを育て、使う。</p>	
<p>・develop and use strategies to estimate computations involving fractions and decimals in situations relevant to students' experience</p>	<p>・子どもたちの経験に関連した場面内の分数や小数を含む計算を見積もるために、ストラテジーを育て使う。</p>	<p>3.2.1</p>
<p>・use visual models, benchmarks, and equivalent forms to add and subtract commonly used fractions and decimals</p>	<p>・分数小数に共通してたしたりひいたりするために、視覚的モデルやベンチマーク、同等の形式を使う。</p>	<p>1.2.1 1.2.2 1.3.1 1.4.1 1.4.2</p>
<p>・select appropriate methods and tools for computing with whole numbers from among mental computation, estimation, calculators, and paper and pencil according to the context and nature of</p>	<p>・全数の計算において計算の文脈や特質に応じて暗算、見積もり、電卓、筆記の中から適切な方法やツールを選び、選んだ方法やツールを使う。</p>	<p>3.1.1 3.1.2 3.3.1</p>

	the computation and use the selected method or tools.		
6年生から8年生	<p>①</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・work flexibly with fractions, decimals, and percents to solve problems</li> <li>・compare and order fractions, decimals, and percents efficiently and find their approximate locations on a number line</li> <li>・develop meaning for percents greater than 100 and less than 1</li> <li>・understand and use ratios and proportions to represent quantitative relationships</li> <li>・develop an understanding of</li> </ul>	<p>①</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・問題を解くために、分数や小数や百分率を柔軟に活用する。</li> <li>・分数や小数や百分率を効率的に比較し、順序づけ、数直線上のおおよその位置を見つける。</li> <li>・100を超え、1未満の割合の意味を育てる。</li> <li>・量的な関係を表現するために比率や割合を理解し、使う。</li> <li>・大きい数の理解を育て、指数の厳正な計算</li> </ul>	<p>1.2.2 3.3.2</p> <p>1.1.2 1.1.3 1.2.3</p> <p><input type="text"/></p> <p><input type="text"/></p> <p><input type="text"/></p>

<p>large numbers and recognize and appropriately use exponential, scientific, and calculator notation</p> <p>・use factors, multiples, prime factorization, and relatively prime numbers to solve problems</p> <p>・develop meaning for integers and represent and compare quantities with them.</p>	<p>表記を適切に使う。</p> <p>・問題解決のために、係数や倍数、素因数分解、互いに素な数を使う。</p> <p>・整数の意味を発達させ、それらを用いて量を表し比較する。</p>	<p><input type="text"/></p> <p><input type="text"/></p>
<p>②</p> <p>・understand the meaning and effects of arithmetic operations with fractions, decimals, and integers</p> <p>・use the associative and commutative properties of addition and multiplication</p>	<p>②</p> <p>・分数や小数や整数を用いた算術演算の意味や効果を理解する。</p> <p>・整数や分数、小数を用いた簡単な計算になるように、たし算とかけ算の結合性と可換性</p>	<p>2.1.1 2.1.2</p> <p>2.2.1 2.2.2 2.2.3 2.3.1</p>

<p>and the distributive property of multiplication over addition to simplify computations with integers, fractions, and decimals</p>	<p>の性質やたし算によるかけ算の分配則を使う。</p>	<p>3.2.1 3.2.3</p>
<p>・understand and use the inverse relationships of addition and subtraction, multiplication and division, and squaring and finding square roots to simplify computations and solve problems.</p>	<p>・簡単な計算にし、問題を解決するために、たし算とひき算やかけ算とわり算、二乗と平方根を見つけるような逆の関係を理解し、使う。</p>	<p>2.3.3 2.3.4</p>
<p>③ ・select appropriate methods and tools for computing with fractions and decimals from among mental computation, estimation, calculators or computers, and paper and pencil, depending</p>	<p>③ ・分数や小数の計算において、場面に応じて暗算、見積もり、電卓かパソコン、筆記の中から適当な方法やツールを選び、選んだ方法やツールを適用する。</p>	<p>3.1.1</p>

<p>on the situation, and apply the selected methods</p>		
<p>·develop and analyze algorithms for computing with fractions, decimals, and integers and develop fluency in their use</p>	<p>・分数、小数、整数を用いた計算のアルゴリズムを開発・分析をし、それらの使用の流暢さを育てる。</p>	<p>3.1.2 3.3.1</p>
<p>·develop and use strategies to estimate the results of rational-number computations and judge the reasonableness of the results</p>	<p>・有理数の計算結果を見積もるためにストラテジーを育て、使い、結果の合理性を判断する。</p>	<p>3.4.2</p>
<p>·develop, analyze, and explain methods for solving problems involving proportions, such as scaling and finding equivalent ratios.</p>	<p>・同等の比をスケールリングし発見するような割合を含む問題を解くための方法を育て分析し説明する。</p>	<div style="border: 1px solid black; width: 50px; height: 20px; margin: 0 auto;"></div>

表を検討してみると、6年生から8年生においてReys等の枠組みに挙げられている構成要素にあてはまらないことを示す□（四角）が多かった。このことから、Reysらの枠組みは中学校より前の学年を対象として作られたものと考えられる。

今回の分析結果について、期待されることと学年帯別にReys等のどの構成要素が育てられているか、について以下にまとめた。下線が引いてある構成要素については、NCTMの①～③とReys等の構成要素の1～3が対応していないものである。また、今回はReys等の枠組み内にある構成要素がどのように指導されようとしているのか、ということについて分析していくため、Reys等の枠組み内にある構成要素にあてはまらないもの（□で示したもの）については、扱わないものとする。

学年帯 (期待されること)	幼稚園就園 前から2年生	3年生から5 年生	6年生から8 年生
① 数と数の表し 方や数の関係、 記数法を理解 すること	1.1.1 1.1.2 1.2.1 1.2.2 1.3.1	1.1.1 1.1.2 1.2.2 1.2.3 1.3.1 1.3.2 1.4.1	1.1.2 1.1.3 1.2.2 1.2.3 <u>3.3.2</u>
② 演算の意味や 演算同士がど のように関係 しているか理 解すること	2.1.1 2.1.2 2.3.3 2.3.4	2.1.1 2.1.2 2.2.3 2.3.1 2.3.4	2.1.1 2.1.2 2.2.1 2.2.2 2.2.3 2.3.1 2.3.3 2.3.4 <u>3.2.1</u> <u>3.2.3</u>
③ 流暢に計算し、 妥当な見積も りをすること	3.2.1 3.2.2 3.3.1 3.3.2	<u>1.2.1</u> <u>1.2.2</u> <u>1.3.1</u> <u>1.4.1</u> <u>1.4.2</u> 3.1.1 3.1.2 3.2.1 3.3.1 3.3.2 3.4.1 3.4.2	3.1.1 3.1.2 3.3.1 3.4.2

この対応表を検討してみると、全ての学年帯に共通して Reys 等の 1 の分野（数に関する知識と、数をうまく扱うこと）の下位カテゴリーが NCTM の①（数と数の表し方や数の関係、記数法を理解すること）に集中しており、2（演算に関する知識と、演算をうまく扱うこと）・3（計算を伴う状況に数や演算に関する知識と、数や演算をうまく扱うことを適用すること）の下位カテゴリーもそれぞれ②（演算の意味や演算同士がどのように関係しているか理解すること）・③（流暢に計算し、妥当な見積もりをすること）に集中している。

また、NCTM が “Number and Operation” のスタンダードの中で挙げている①数と数の表し方や数の関係、記数法を理解すること、②演算の意味や演算同士がどのように関係しているか理解すること、③流暢に計算し、妥当な見積もりをすることはそれぞれ数概念、数を伴った演算、数と演算の適用という Reys 等の 3 つの分野に対応している。このことから、NCTM は Reys 等の枠組みを参考にしながらスタンダードを作った、と考えられる。

筆者は、対応表を検討していく内に、構成要素によって指導する期間が違うのではないかと考えた。しかし、この表では、どの構成要素がどの学年帯で指導されようとしているか、ということが分かりにくい。

そこで、次のページに構成要素がどの学年帯で期待されることとして挙げられていたか、ということグラフ化した。グラフはあくまでどの学年帯で扱われているか、ということについての結果を表すために作成したため、前の表で下線部とした領域が異なっているものに関しても、当該学年帯で挙げられているもの、とした。

グラフの説明をする。横軸が Reys 等の枠組み内の構成要素を示しており、縦軸は学年帯を示している。学年帯ごとに色を分けており、

幼稚園から2年生：黄色  
3年生から5年生まで：緑色  
6年生から8年生まで：紺色  
当該学年帯に各構成要素が含まれていない：灰色

と示す。



このグラフを分析してみると、ある構成要素は全ての学年帯で扱っており、またある構成要素は1つの学年帯しか扱っていなかった。さらに、2.2.4（単位元）、2.2.5（逆元）、2.3.2（減法/除法）についてはどの学年帯にも期待されることとして挙げられてはいなかった。

上のグラフは、構成要素を示す数字しかあげられていないため、どの学年帯で何を指導するか分かりにくい。そこで、どの学年帯で何を示すか次ページの表にまとめた。

表の説明をする。学年帯ごとに色を変えどの学年帯内に構成要素があるか分かりやすくした。また、黄色で示したものは、学年帯をまたいで指導されているものを示している。

6年生から8年生	<p>1.1.3 同じ種類の中で、また異なる種類の中で、数を順序づけること</p> <p>2.2.1 可換性</p> <p>2.2.2 結合性</p> <p>3.2.3 効率のよいストラテジーを選択する能力</p>	<p>2.2.3 分配性</p> <p>2.3.1 加法／乗法</p> <p>3.1.1 正確な値のデータかまたは近似値のデータかということが分かる</p> <p>3.1.2 解が正確な値になるかまたは近似値になるかということが分かる</p> <p>3.4.2 計算の合理性が分かる</p>	<p>1.1.2 数の種類間の関係</p> <p>1.2.2 等しい値 (分解／合成を含む)</p> <p>2.1.1 整数の演算</p> <p>2.1.2 分数の演算／小数の演算</p> <p>2.3.4 乗法／除法</p>
3年生から5年生	<p>1.3.2 数学的な参照物と比較すること</p> <p>1.4.1 数学的なシステム</p> <p>1.4.2 個人的なシステム</p> <p>3.4.1 データの合理性が分かる</p>	<p>3.2.1 ストラテジーを考え出し、工夫する能力</p> <p>3.3.1 さまざまな方法 (暗算、電卓、筆算) をうまく扱うこと</p>	
幼稚園就園から2年生	<p>3.2.2 異なるストラテジーを適用する能力</p>	<p>1.1.1 位取り</p> <p>1.2.1 図的表記／記号表記</p> <p>1.3.1 物理的な参照物と比較すること</p> <p>3.3.2 効率のよい数を選択する能力</p>	

この表から、NCTM は、各構成要素を同じように育てようとはしていないことが分かる。また筆者は、全ての構成要素をどの学年帯で指導しよう、という風に考えたのではなく、各構成要素をどれくらいの期間で指導するかということと、どの学年帯で指導するかということ考えたのではないかと考える。

以上のことを踏まえると、NCTM は **Reys** 等の枠組みを参考にし、指導する期間も考慮しながら、修正・補足しながらスタンダード 2000 を作成したと考えられる。

上述したことを、指導プログラムを作成する際に参考にしたい。

### 第 3 章の要約

第 3 章では、NCTM について述べた後スタンダード 2000 についての分析について述べた。スタンダード 2000 には、5つの内容スタンダードと 5つのプロセススタンダードがある。その中でも、“Number and Operation”のスタンダードの中に「このスタンダードの中心は、数感覚を育てることである」という記述がされていた。このことから、“Number and Operation”のスタンダードを分析することによって、NCTM がどのように数感覚を育もうとしているか、ということの認識の一助となると考えた。そこで今回は、“Number and Operations”についてみていく。“Number and Operation”のスタンダードの分析をすると、NCTM は、各構成要素を同じように育てようとはしていないことが分かる。また、全ての構成要素をどの学年帯で指導しよう、という風に考えたのではなく、各構成要素をどれくらいの期間で指導するかということと、どの学年帯で指導するかということ考えたのではないかと考える。

本章の分析を踏まえると、NCTM は Reys 等の枠組みを参考にし、指導する期間も考慮しながら、修正・補足しながらスタンダード 2000 を作成したと考えられる。

## 第 4 章 学習指導要領の分析

- 4.1 小学校学習指導要領 算数編
- 4.2 学習指導要領分析
- 4.3 分析結果への考察

本章では、スタンダード 2000 と学習指導要領の比較・分析を通して、日本での数感覚指導の現状について述べたい。

4.1 では、学習指導要領について述べる。4.2 では、学習指導要領の分析について述べる。4.3 では、分析結果への考察を述べる。

## 第4章 学習指導要領の分析

### 4.1 小学校学習指導要領 算数編

現在、平成20年度版の『学習指導要領 算数編』では、まず、以下のような算数科の目標が示してある。

算数的活動を通して、数量や図形についての基礎的・基本的な知識及び技能を身に付け、日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考え、表現する能力を育てるとともに、算数的活動の楽しさや数理的な処理のよさに気づき、進んで生活や学習に活用しようとする態度を育てる。

また、各学年ごとには算数科の目標を達成するための目標と内容がそれぞれ示してある。内容は、4つの領域「A 数と計算」、「量と測定」、「C 図形」及び「D 数量関係」に分けられて記載されている。各学年ごとに示されている目標は、これら4つの領域に対応した学年目標が示されている。

「A 数と計算」の領域のねらいに、「この領域では、整数、小数及び分数の意味や表し方について理解できるようにし、数についての感覚を豊かにする」とある。また、低学年の「A 数と計算」の目標において「数についての感覚を豊かにする」ことが明記してある。このことから、学習指導要領では「A 数と計算」の領域で数感覚を育もうとしていることを読み取ることができる。そのため、本研究では領域「A 数と計算」の分析を行う。

### 4.2 学習指導要領分析

前節でも述べたが、本研究は、数感覚について分析するため「A 数と計算」の内容領域について分析する。分析するのは第3章で分析した NCTM 同様、各学年の目標の部分である。筆者は、NCTM の分析と同様にすることによって、良い点・問題点を見つけることができると考える。比較する際、目標を文ごとに区切った。このようにすることによって、比

較的長い目標を一文一文どの構成要素にあてはまるか検討することができる。そのため、どの文がどの構成要素に対応しているかが分かりやすくなる。また、目標だけでは、どの構成要素か判断することが難しかったため、参考として内容の概観も挙げた。以下の表が分析結果である。  
 ここでは、各学年の分析結果のみを載せる。また、Reys等の構成要素にあてはまらないものを□（四角）とした。

学年	目標	内容の概観（上が数、下が計算）	Reys等の数感を考える上での構成要素
1年生	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ 具体物を用いた活動などを通して、数についての感覚を豊かにする。</li> <li>・ 数の意味や表し方について理解できるようにするとともに、加法及び減法の意味について理解し、それらの計算の仕方を考え、用いることができるようにする。</li> </ul>	2位数 簡単な3位数 1位数の加法及びその逆の減法 簡単な2位数などの加法及び減法	<div style="border: 1px solid black; width: 50px; height: 20px; margin-bottom: 10px;"></div> <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 1.2.1</li> <li>1.2.2</li> <li>2.1.1</li> <li>2.3.3</li> <li>3.2.1</li> </ul>
2年生	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ 具体物を用いた活動などを通して、数についての感覚を豊かにする。</li> </ul>	4位数 （1万までの数） 十進位取り記数法	<div style="border: 1px solid black; width: 50px; height: 20px;"></div>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>数の意味や表し方についての理解を深めるとともに、加法及び減法についての理解を深め、用いることができるようにする。</li> <li>また、乗法の意味について理解し、その計算の仕方を考え、用いることができるようにする。</li> </ul>	<p>-----</p> <p>簡単な分数</p> <p>2 位数の加法及びその逆の減法</p> <p>簡単な 3 位数の加法及び減法</p> <p>乗法九九</p> <p>簡単な 2 位数と 1 位数の乗法</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>1.1.1</li> <li>1.2.1</li> <li>1.2.2</li> <li>2.1.1</li> <li>2.3.3</li> <li>2.1.1</li> <li>3.2.1</li> </ul>
3 年 生	<ul style="list-style-type: none"> <li>加法及び減法を適切に用いることができるとともに、乗法についての理解を深め、適切に用いることができるようにする。</li> <li>また、除法の意味について理解し、その計算の仕方を考え、用いることができるようにする。</li> <li>さらに、小数及び分数の意味や表し方について理解できるようにする。</li> </ul>	<p>万の単位 (1 億までの数)</p> <p>小数 (<math>\frac{1}{10}</math>の位)</p> <p>-----</p> <p>分数</p> <p>整数の加法及び減法 (3 位数や 4 位数)</p> <p>整数の乗法 (2 位数や 3 位数など)</p> <p>整数の除法 (除数と商が 1 位数)</p> <p>簡単な整数の除法</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>2.1.1</li> <li>2.1.1</li> <li>3.2.1</li> <li>1.2.1</li> <li>1.2.2</li> <li>2.1.2</li> </ul>

		<p>(除数が 1 位数で商が 2 位数)</p> <p>(簡単な暗算)</p> <p>そろばんによる計算</p> <p>簡単な小数、分数の加法及び減法</p>	
4 年生	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 除法についての理解を深め、適切に用いることができるようにする。</li> <li>• また、小数及び分数の意味や表し方についての理解を深め、小数及び分数についての加法及び減法の意味を理解し、それらの計算の仕方を考え、用いることができるようにする。</li> <li>• さらに、概数について理解し、目的に応じて用いることができるようにする。</li> </ul>	<p>億、兆の単位</p> <p>概数</p> <p>小数</p> <p>分数 (真分数、仮分数、帯分数)</p> <p>-----</p> <p>整数の除法 (除数が 1 位数や 2 位数で被除数が 2 位数や 3 位数)</p> <p>計算の結果の見積もり (簡単な暗算)</p> <p>整数の計算の能力の定着</p> <p>そろばんによる計算</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 2.1.1</li> <li>• 1.2.1</li> <li>1.2.2</li> <li>2.1.2</li> <li>2.3.3</li> <li>3.2.1</li> <li>• 3.1.1</li> <li>3.1.2</li> <li>3.2.3</li> <li>3.4.2</li> </ul>

		<p>小数の加法及び減法</p> <p>乗数や除数が整数の場合の小数の乗法及び除法</p> <p>同分母の分数の加法及び減法</p>	
5年生	<ul style="list-style-type: none"> <li>整数の性質についての理解を深める。</li> <li>また、小数の乗法及び除法や分数の加法及び減法の意味についての理解を深め、それらの計算の仕方を考え、用いることができるようにする。</li> </ul>	<p>偶数、奇数</p> <p>約数、倍数 (最大公約数、最小公倍数)</p> <p>(素数)</p> <hr/> <p>乗数や除数が小数の場合の乗法及び除法</p> <p>異分母の分数の加法及び減法</p> <p>乗数や除数が整数の場合の分数の乗法及び除法</p>	<div style="border: 1px solid black; width: 60px; height: 20px; margin-bottom: 10px;"></div> <ul style="list-style-type: none"> <li>2.1.2</li> <li>3.2.1</li> </ul>
6年生	<ul style="list-style-type: none"> <li>分数の乗法及び除法の意味についての理解を深め、それらの計算の仕方を考え、用いることができるようにする。</li> </ul>	<p>(逆数)</p> <hr/> <p>乗数や除法が分数の場合の乗法及び除法</p> <p>小数や分数の計算の能力の定着</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>2.1.2</li> <li>3.2.1</li> </ul>

今回の分析結果について、学年別に Reys 等のどの構成要素が育てられているか、について以下にまとめた。また、今回は Reys 等の枠組み内にある構成要素がどのように指導されようとしているのか、ということについて分析していくため、Reys 等の枠組み内にある構成要素にあてはまらないもの（□で示したもの）については、扱わないものとする。

1 年生	2 年生	3 年生	4 年生	5 年生	6 年生
1.2.1	1.1.1	1.2.1	1.2.1	2.1.2	2.1.2
1.2.2	1.2.1	1.2.2	1.2.2	3.2.1	3.2.1
2.1.1	1.2.2	2.1.1	2.1.1		
2.3.3	2.1.1	2.1.2	2.1.2		
3.2.1	2.3.3	3.2.1	2.3.3		
	3.2.1		3.1.1		
			3.1.2		
			3.2.1		
			3.2.3		
			3.4.2		

上の表を基にスタンダード分析同様、学年ごとにどの構成要素を指導しているか、を示すグラフにまとめた。グラフの説明をする。

横軸が Reys 等の枠組み内の構成要素を示しており、縦軸は学年を示している。学年ごとに色を分けており、

1 年生：赤色
2 年生：黄色
3 年生：緑色
4 年生：紺色
5 年生：水色
6 年生：紫色
当該学年に各構成要素が含まれていない：灰色

と示す。



### 4.3 分析結果への考察

まず、分析から分かることとして挙げられることは、スタンダード 2000 に比べて、Reys 等の構成要素が少ないことである。挙げられていない構成要素は、以下 30 項目中 19 項目であった。

- 1.1.2 数の種類間の関係
- 1.1.3 同じ種類の中で、また異なる種類の中で、  
数を順序づけること
- 1.2.3 ベンチマークとの比較
- 1.3.1 物理的な参照物と比較すること
- 1.3.2 数学的な参照物と比較すること
- 1.4.1 数学的なシステム
- 1.4.2 個人的なシステム
- 2.2.1 可換性
- 2.2.2 結合性
- 2.2.3 分配性
- 2.2.4 単位元
- 2.2.5 逆元
- 2.3.1 加法／減法
- 2.3.2 減法／除法
- 2.3.4 乗法／除法
- 3.2.2 異なるストラテジーを適用する能力
- 3.3.1 様々な方法
- 3.3.2 効率のよい数を選択する能力
- 3.4.1 データの合理性が分かる

取り上げられていないものの中で、筆者が注目したことは、1.3（数の相対的な大きさと絶対的な大きさに対するセンス）、1.4（ベンチマークシステム）、2.2（数学的な性質についての理解）3.3（効率のよい表象や方法を利用する傾向）の全ての下位カテゴリーが学習指導要領では、目標の中に含まれていないことである。

また、今回もグラフは、構成要素を示す数字しかあげられていないため、どの学年帯で何を指導するか分かりにくい。そこで、どの学年帯で何を示すか次ページの表にまとめた。

表の説明をする。学年帯ごとに色を変えどの学年帯内に構成要素があるか分かりやすくした。また、黄色で示したものは、学年帯をまたいで指導されているものを示している。

6年生			2.1.2 分数の演算 ／小数の演算	3.2.1 ストラ テジー を考え 出し、工 夫する 能力
5年生				
4年生	<p>3.1.1 正確な値のデータか、または近似値のデータかということが分かる</p> <p>3.1.2 解が正確な値になるかまたは近似値になるかということが分かる</p> <p>3.2.3 効率の良い数を選択する能力</p> <p>3.4.2 計算の合理性が分かる</p>	2.3.3 加法／減法	1.2.1 図的表記／ 記号表記	
3年生			1.2.2 等しい値 (分解／合 成を含む)	2.1.1 整数の演算
2年生	1.1.1 位取り	2.3.3 加法／減法		
1年生		2.3.3 加法／減法		

どの構成要素がどの学年で指導されているか、という図を見ると、日本はやはり演算の指導に重きが置かれていることがうかがえる。また、スタンダード 2000 の表と比較すると、学年をまたいでの指導があまりされていない。例えば、構成要素 1.1.1 の位取りに焦点を当ててみると、日本では二年生でしか指導されていないが、スタンダード 2000 では幼稚園から 2 年生と 3 年生から 5 年生という学年帯をまたいで指導していた。

次章では、こういった点に着目しながら、指導プログラムの提案を行う。

## 第4章の要約

第4章では、学習指導要領について述べた後学習指導要領についての分析について述べた。

算数科の内容は、4つの領域「A 数と計算」、「量と測定」、「C 図形」及び「D 数量関係」に分けられて記載されている。その中でも、「A 数と計算」の領域のねらいの中に、「この領域では、整数、小数及び分数の意味や表し方について理解できるようにし、数についての感覚を豊かにする」とある。また、低学年の「A 数と計算」の目標において「数についての感覚を豊かにする」ことが明記してある。このことから、「A 数と計算」の領域を分析することによって学習指導要領ではどのように数感覚を育もうとしているか、ということの認識の一助となると考えた。そこで今回は、領域「A 数と計算」の分析を行う。

領域「A 数と計算」を分析していくと、スタンダード 2000 に比べて、Reys 等の構成要素が明らかに少なかった。筆者は、1.3 (数の相対的な大きさと絶対的な大きさに対するセンス)、1.4 (ベンチマークシステム)、2.2 (数学的な性質についての理解)、3.3 (効率のよい表象や方法を利用する傾向)の全ての下位カテゴリーが学習指導要領では、目標の中に含まれていないことに注目した。また、挙げられている構成要素においても、学年をまたいでの指導があまりされていなかった。

## 第 5 章 数感覚育成のための指導プログラム案

- 5.1 数感覚指導の現状
- 5.2 ベンチマークについて
- 5.3 指導プログラム案の提案  
～ベンチマークの使用に着目して～

本節では、数感覚育成のための指導プログラム案を提案する。

5.1 では、4 章の分析結果から見えてくる数感覚指導の現状についてふれる。5.2 では、ベンチマークについて述べる。5.3 では、ベンチマークを用いた指導プログラム案を提案する。

## 第5章 数感覚育成のための指導プログラム案

### 5.1 数感覚指導の現状

前節の分析から読み取ることのできる日本の数感覚を育む指導の現状を明らかにする。現在の日本では、Reys等の枠組み内にある構成要素のうち、1.3（数の相対的な大きさと絶対的な大きさに対するセンス）、1.4（ベンチマークシステム）、2.2（数学的な性質についての理解）3.3（効率のよい表象や方法を利用する傾向）の全ての下位カテゴリーが学習指導要領の目標の中に含まれていない。今回筆者は1.4のベンチマークシステムに注目した。

### 5.2 ベンチマークについて

ベンチマークについて Reys 等は『小学校算数実践指導全集 第2巻 豊かな数感覚を育てる数の指導』の中で、ベンチマークについて、以下のように記述している。

ベンチマーク…数の大小を判断するために、社会一般的かつ個人的な参照システムを使用すること。

また、『A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense』の中でより詳しくベンチマークについて記載しているため、まとめる。

コンパスがナビゲーションのための貴重なツールを提供しているように、数的なベンチマークは数について考えるために不可欠な内面的参照対象を提供している。数的なベンチマークは、一般的に20の累乗、10の累乗の倍数、または1/2または50%などの中間点のようなものである。

ベンチマークは、しばしば答えの大きさを判断するか、数を概数であらわすために使用されるため、それは内面の過程がより容易になる。例としては、二つの2桁の数の合計は200よりも小さくなる、0.98は1に近い、や $4/9$ は $1/2$ よりわずかに小さいことに気づくことである。ベンチマーク

はおそらく個人の特性や出会いからもまた発達していく。例えば、50kgの人は別の人の重量を推定する際にこの情報を使用することができる。同様に、出席が50000人である野球の試合に出席した子は、後で他の人ごみの大きさを判定するための指示対象としてこれを使用することができる。

筆者は上記からベンチマークは、数の大小を判断する際に使われる重要なものであると考えた。ベンチマークは見積もりをする際や出てきた答えの合理性を判断する際に役立つものであると考えられることから、ベンチマーク指導は重要なものである、と考えられる。

しかし、現在の日本の数感覚指導において、ベンチマーク指導はあまりされてない。筆者は数感覚を考える際に、日本でもっともっとベンチマーク指導をしてもいいのではないかと考える。

ベンチマークについての研究は日本ではあまりされておらず、ベンチマークの具体例はあまり示されていない。そこで、次ページにベンチマークとその使用例を以下に挙げる。

	ベンチマーク	使用例
数の 大き さの 指 標 と な る も の	1	分数や小数の大きさを考える際に、1より大きいか、小さいか判断する時の指標となる。
	半分を表すもの (50%,1/2等)	50%は、割合を含む問題を解く際に使う。例えば、「1000円のセーターの2割引の値段」を求める問題を解く際に使用することで、50%の500円よりは高くなる、と見積もりをすることができる。 1/2は、分数の計算をする際に使う。例えば、 $\frac{3}{8} + \frac{2}{5}$ の計算をする際に、どちらも1/2よりも小さいため、答えが1より小さくなる、と見積もりをすることができる。
	$100+100=200$	二桁の数のたし算の答えは200以下になる。
	10の累乗 ( $10 \times 10 = 100$ , $10 \times 10 \times 10 = 1000 \dots$ )	計算の見積もりをする際に使う。 $10 \times 100 = 1000$ であるから、 $10 \times 99$ の答えは1000よりも小さくなる。
	10の倍数 (10,20,30...)	数の大きさを判断する指標となる。(42は40よりも少し大きい。)
	四則演算で10の累乗になるもの	計算問題を解く際に使う。例えば、 $4+4$ の計算をする

		際、 $5+5=10$ なので、答えは 10 より大きくなる、と見積もりをすることができる。
	単位分数 ( $1/2, 1/3, 1/4 \dots$ )	分数の大きさを考える際に使用する。
角度	60 度 (正三角形の 1 つの角度)	角度を求める問題を解く際、図形を見ながらだいたいの角度を予測する。
	90 度 (直角)	
かさ	200mL (cc) (計量カップ 1 杯分)	量を考える際の指標となる。例えば、400mL という量が問題文に出てきた際に使用することによって、500mL ペットボトルよりも少し少ないということが分かる。
	500mL (500mL ペットボトル)	
	1000mL (牛乳パック)	
長さ (距離)	10cm (はがきの横の長さ)	長さを認識する際に使用する。ある児童の身長が 150cm あった時、自分より高い人を見て、160cm 位であると認識することができる。
	15cm (はがきの縦の長さ)	
	個人の身長 (cm)	
	1m (両手を伸ばした長さ)	
	10m (ジャンプ台の高さ)	
	25m (プールの長さ)	
	50m (50m 走)	

	100m (100m 走)	
	400m (陸上競技場のトラック 1 周分)	
	40km (フルマラソンの距離)	
重 さ	1g (1 円玉の重さ)	重さの認識をする際に使 う。
	30kg (米袋)	
	個人の体重 (kg)	
	10t (大型の 10t トラック 1 台 分)	
個 数 ( 本 数 )	5 本 (片手の指の本数)	数を認識する際に使う。
	10 本 (両手の指の本数)	
	10 個 (卵 1 パック)	
	12 本 (1 ダース)	
時 間	3 分 (カップラーメンが出来 る時間)	時間を認識する際に使う。
	10 秒 (50m を走る時間)	
面 積	100m×100m (野球ドームの面積)	1ha の大きさがどれくらい か考える際に使う。

人数	40人 (1クラスの人数)	人数を認識する際に使う。 集団を見て、クラスの人数よりも多いので、40人以上である、と見積もることができる。
----	------------------	---

使用例からもベンチマークを用いることで、児童は見積もりを行ったり、数の大小を比較したりすることができることが考えられる。今回はベンチマークを具体的に挙げたが、次にベンチマークを用いた指導プログラム案を提案する。

### 5.3 指導プログラムの提案

#### ～ベンチマークの使用に着目して～

第1章「本研究の動機」でも触れたが、筆者は以下のような児童を見る中で、数感覚を育成するプログラム作りを行いたい、と考えた。

#### (1) 小学5年生の女の子

わり算をする際、商をどんな数にすればよいのかが分からない。

例：①  $72 \div 31$     ②  $125 \div 43$

etc... (除数が1ケタの時にはできることが多い)

#### (2) 小学5年生の女の子

かけ算をする際、解の値が明らかに違っていても気づかない。

例：①  $32 \times 45 = 144$     ②  $400 \times 12 = 480$

児童は4年生の「概数」の内容で“見積もる”ということや“おおよその数”を学習する。しかし、上記のような児童は、見積もることを概数の単元の中だけでしか使うことがで

きていないように感じられる。やはり数感覚は、ある單元だけで指導するだけでは、児童が定着し活用するようになるには難しいと筆者は考える。数感覚は日々の学習を通じて培うものであるということ、また NCTM が学年帯を越えて多くの構成要素を指導していたように、数感覚は学年を越えて指導する必要があることをここで強調したい。

今回は、前章でも触れた数感覚の中でもベンチマーク指導をもっと日本の算数教育で行ってもいいのではないか、という筆者の考えから、ベンチマーク指導を取り入れた数感覚指導プログラムを提案したい。上記したように数感覚指導は、日々の学習で行いたい。

しかしベンチマーク指導は、1年生から取り入れることは難しいと考える。NCTM のスタンダード 2000 も3年生から5年生の学年帯にベンチマーク指導を行っている。このことから、今回は4年生の「概数」の学習が終わった後に日々の学習にベンチマークを使用し見積もりを行うように児童が思えるような指導を考え、概数の学習と日々の学習とをつなぐ「架け橋」としたい。

見積もりは本来、見積もりをする目的を明確なものにしなければならぬため、見積もりの学習は文章題がほとんどのように感じる。検討した啓林館の教科書も、文章題の中で見積もりを扱う問題ばかりであった。しかし今回は、日常の計算の中でベンチマークを用いた見積もりを児童に行わせたい、と考えているため、計算問題を解く際にベンチマークを用いて見積もる、という場面を設定した。

次のページに筆者が考えた指導プログラムを示す。問題を提示した後、ベンチマークの使用例を挙げる。

**見積もりを使ってみよう！（１）**

答えはどれになるかな？

①  $781+595=$

㊦ 976

㊧ 1376

㊨ 11176

②  $13 \times 42=$

㊦ 546

㊧ 5460

㊨ 54600

（１）では、整数の計算についての見積もり指導である。

①は、3桁+3桁の計算は、2000よりも小さい、というベンチマークを使い、また  $500+500=1000$  というベンチマークを使うことによって、答えが1000よりも大きく2000よりも小さいということが分かる。よって、答えは㊧である。

②は、 $10 \times 40=400$ 、というベンチマークを使用し、問題はこれよりも少し大きくなると分かる。よって、答えは㊦である。

**見積もりを使ってみよう！（２）**

答えはどれになるかな？一番近いものを選ぼう！

①  $12/15+5/6$

㊦ 2

㊧ 5

㊨ 18

㊩ 20

②  $0.35+0.49$

㊦ 1

㊧ 2

㊨ 10

㊩ 11

（２）では、分数と小数のたし算についての見積もりの指導である。

①は、 $12/15$  と  $5/6$  は  $1/2$  よりも大きく1よりも小さいため、 $1/2+1/2=1$  というベンチマークを使って一番近い答えは㊦である。

②は、0.35 と 0.49 はどちらも0.5よりも小さい。 $0.5+0.5=1$  というベンチマークを用いて考えると一番近い答えは㊦である。

この指導プログラムの最後に、教師が「日々の計算でも、答えがどれくらいになるかまず考えて計算しよう！そうすると自信をもって答えを出すことができるよ。」という風に伝える。そして日常的にベンチマークを使用し見積もりをすることによって、児童はすぐにとまではいかないがベンチマークを用いた見積もりを行うようになるのではないかと考える。

## 第 5 章の要約

数感覚指導の現状として、ベンチマーク指導を日本がほとんど行っていないことが分かった。筆者は数感覚の中でもベンチマーク指導をもっと日本の算数教育で行ってもいいのではないかと筆者は考える。そこで、第 5 章ではベンチマークについてまずどのようなものか Reys 等の考えを基に述べた。

ベンチマーク…数の大小を判断するために、社会一般的かつ個人的な参照システムを使用すること。

その後、ベンチマーク例を使用例とともに挙げ、これらを用いた見積もりを促す指導プログラムについて述べた。

### 見積もりを使ってみよう！（1）

答えはどれになるかな？

①  $781 + 595 =$

㊦ 976

㊧ 1376

㊨ 11176

②  $13 \times 42 =$

㊦ 546

㊧ 5460

㊨ 54600

### 見積もりを使ってみよう！（2）

答えはどれになるかな？一番近いものを選ぼう！

①  $12/15 + 5/6$

㊦ 2

㊧ 5

㊨ 18

㊩ 20

②  $0.35 + 0.49$

㊦ 1

㊧ 2

㊨ 10

㊩ 11

今回挙げた指導プログラムを用いることによって、「概数」の内容の中で学習した“見積もり”について児童が日々の学習の中でベンチマークを活用し答えの見積もりを行うようになる、と筆者は考える。

## 第 6 章 本研究の結論と残された課題

- 6.1 本研究の結論
- 6.2 残された課題

本章では、本研究の結論と課題を述べる。

6.1 では、研究によって得られた成果とその意義について述べる。また、6.2 では本研究において残された課題を述べる。

## 第 6 章 本研究の結論と残された課題

### 6.1 本研究の結論

先行研究を基に、数感覚とはどのようなものであるか、ということ議論するよりも、どのように数感覚を育成するか考え、また数感覚を育成するためのプログラム作りを行うべきである、と筆者は考えた。

そこで、プログラム作りを行うためスタンダード 2000 と学習指導要領を Reys 等の枠組みを用いて比較した。その結果、NCTM と比べて日本の数感覚指導は、Reys 等の構成要素が少なかった。

本研究では、Reys 等の構成要素の中で日本では行われていないものの中からベンチマーク指導に着目した。ベンチマークを用いることによって見積もりを行うように促すプログラム作りを行った。

### 6.2 残された課題

今回、ベンチマークを指導する際のプログラム案について述べた。しかし、この指導プログラム案が有効であるか、ということはまだ検討していない。そこで今後の課題として、この指導プログラム案の有効性を検討することが挙げられる。また、今後は、どのようなベンチマークを児童に学習させるか、ということについても検討していかなければならない。さらに、Reys 等の構成要素の中で日本において指導されようとしていないものをどうするか、ということも考えなくてはならない。以上のことを今後の課題とする。

## 引用及び参考文献

- ・ 銀島文(1994). 『子どもの数感覚を記述するための観点』.  
数学教育論文発表会論文集 27. pp.197-202
- ・ NCTM(1989). 『Curriculum and Evaluation Standards  
for School Mathematics』
- ・ 能田伸彦ほか(1997). 『21世紀への学校数学の創造 米国  
NCTMによる「学校数学におけるカリキュラムと評価の  
スタンダード」』
- ・ Alistair McIntosh ほか(1992). 『A Proposed Framework  
for Examining Basic Number Sense』
- ・ 伊藤説朗編(1998). 『小学校算数実践指導全集 第2巻 豊  
かな数感覚を育てる数の指導』. 日本教育図書センター
- ・ NCTM(2000). 『Principles and Standards for School  
Mathematics』
- ・ 文部科学省(2008). 『小学校学習指導要領解説 算数編』.  
東洋館出版
- ・ 啓林館(2012). 『わくわく 算数4下 指導書 第2部 詳  
説』

## 謝辞

本研究を進めるにあたり、これまで多くの方々にご指導いただいたこと深く感謝いたします。

特に指導教官である溝口達也先生には、大変丁寧なご指導をしていただきました。研究の方向性が分からなくなり進まなくなった際にも、親身になって共に考えてくださいました。知識も経験もない私に具体例をいくつも用いながら分かりやすく指導・助言して下さったため、本研究を進めることができました。そしてなにより、数感覚という私にとって大変興味深い研究ができたこと、大変感謝しています。

研究室の先輩である、玉木義一さん、吾郷将樹さん、岡友章さん、岸川友飛さん、また溝口研究室 OB である早田透さんには、研究を進めていく際、多忙の中でも相談に快く乗って下さり、一緒になって考えて下さいました。また、事務的なことに関して的確にアドバイスをして下さったり、真剣に考えて下さったりしたことに深く感謝しています。

同級生である、下采瑞季さん、松岡涼さん、宮崎諒平さん、横田真照さんには、研究仲間として日ごろから研究に関する悩みを共有し、励ましあいながら研究を進めることができたことに感謝申し上げます。また後輩である、坂元里佳子さん、白枝果歩さん、若林直広さんには夏合宿の準備を含め、さまざまな面で支えていただいたことに感謝しています。

このような多くの方の協力や支えがあってこそ、多くのことが学べ、本研究が完成することとなりました。学ばせていただいたことを今後に生かしていきたいと考えています。心から感謝申し上げます。

平成 26 年 1 月  
山根三佳

鳥取大学数学教育研究 ISSN 1881-6134

Site URL : <http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu>

#### 編集委員

矢部敏昭 鳥取大学数学教育学研究室 [tsyabe@rstu.jp](mailto:tsyabe@rstu.jp)

溝口達也 鳥取大学数学教育学研究室 [mizoguci@rstu.jp](mailto:mizoguci@rstu.jp)

(投稿原稿の内容に応じて、外部編集委員を招聘することがあります)

#### 投稿規定

- ❖ 本誌は、次の稿を対象とします。
  - ・ 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文、またはその抜粋・要約・抄録
  - ・ 算数・数学教育に係わる、理論的、実践的研究論文／報告
  - ・ 鳥取大学、および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
  - ・ その他、算数・数学教育に係わる各種の情報提供
- ❖ 投稿は、どなたでもできます。投稿された原稿は、編集委員による審査を経て、採択が決定された後、随時オンライン上に公開されます。
- ❖ 投稿は、編集委員まで、e-mailの添付書類として下さい。その際、ファイル形式は、PDFとします。
- ❖ 投稿書式は、バックナンバー（vol.9以降）を参照して下さい。

#### 鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551 鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX 0857-31-5101 (溝口)

<http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/>