ISSN 1881–6134

鳥取大学数学教育研究
Tottori Journal for Research in Mathematics Education

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

フィボナッチ数列の体系化に関する研究

松岡　涼　*Ryo Matsuoka*

vol.16, no.4
Mar. 2014

鳥取大学 数学教育学研究室

目次

第 1 章
本研究の目的と方法

1.1　本研究の動機
1.2　本研究の目的
1.3　本研究の方法

本章では、研究の動機、目的・方法について述べる。
1.1 では研究の動機を述べる。
1.2 では、動機に沿った目的を述べる。
1.3 では、目的を実現させるための方法と、論文の構成を述べる。

第１章　本研究の目的と方法

1.1　本研究の動機

筆者は中・高の数学の教員免許状の取得をするため、工学部の講義をいくつか履修していた。その中の「常微分方程式」という講義で、隣接 3 項間の漸化式を常微分方程式で解く方法を取り扱った際に、“フィボナッチ数列”を用いて具体的に考える、イメージするということを行った。筆者は、その講義を受講しながら、高校の時に“フィボナッチ数列”という数列を聞いたことを思い出したが、高校の授業で習った記憶がなかったことを不審に思い、自宅に帰ってから筆者が使用していた「数学 B」(2007. 数研出版)を探し、教科書を開いてみた。しかし、高校の教科書には数列を学習する最後のページに「コラム」という形で、フィボナッチという人物、フィボナッチ数列の元となった「ウサギの問題」、性質について簡単に記載されていた。一番説明が長かったのが「ウサギの問題」であり、フィボナッチ数列のことを説明する文章の約 8 割を占めるぐらいとても丁寧に記載されていたのだが、性質については次のように記述されているのみであった。

“この数列は非常に面白い性質をもっている。例えば、この数列は 4 項目ごとに 3 の倍数になるが、これは 3 で割った余りが

1，1，2，0，2，2，1，0，1，1，2，
0，2，2，……

と規則的に並ぶことからわかる。”〈p.109〉

これを読み、“面白い性質”とは、上記の例以外にほかにどのようなものがあるのだろうか、それはどうやって考え出されたのだろうか、同じような性質を持ったものは存在しないのだろうかといった疑問が生まれた。

そこで、“フィボナッチ数列”というもの自体を詳しく知るために、「不思議な数列フィボナッチの秘密」(アルフレッド・S・ボザマンティィエ, イングマル・レーマン(松浦俊輔 訳). 日経 BP 社)を読んだ。その本を読んでいるうちに、フィボナ

ッチ数列には式からよみ取れる性質のものから数列の関係式に至るまで実に多くの性質(定理)が存在していることがわかった。また、その性質は全て出尽くしてはおらず、様々な角度から見ることによって今も増加しているということが分かった。

本を読み進んでいくと、“フィボナッチ数列”というのは、数学の他の分野や日常生活に多く潜んでいるということもわかった。数学の分野では、例えば「黄金比」がある。「黄金比」の求め方が、隣り合うフィボナッチ数列の比を用いて求めているからである。日常生活の面では、例えば「松ぼっくり」がある。「松ぼっくり」の「螺旋」の数が、実はフィボナッチ数列になっているのである。また「葉序」[1]もフィボナッチ数列になっている。このように、フィボナッチ数列はその分野だけにとどまらず、数学内、日常生活の様々な面と多くの関係を持っていることが調べていくうちに分かった。

しかし、“フィボナッチ数列”は様々な分野の研究で『方法論』として使われていることが多く、“フィボナッチ数列”自体について書かれているものについても、定義は同じで、記述されている『定理』や記述されている定理の数が異なっていた。その中には、必ず同じ特徴があるものもあれば、どれか 1 つにしか記述されていないような特徴もあった。また、フィボナッチ数列と関係している日常の事柄への展開も、記述されているものによって異なっており、はじめは同じようなものを挙げていたとしても、徐々にそこにしか記述されていないようなものになっていくことが多いと感じた。そのどれもが間違っていないと思うが、それがどういう観点から選ばれたものなのか、定義や他の特徴・日常的な事柄とどのような関係になっているのかということが見えてこなかったため、整理する必要があるのではないかと感じた。

フィボナッチ数列を整理し、組織化する―つまり体系化をはかることによって、様々な特徴や日常的な事柄の関係性が明らかにされると感じ、歴史や定義についても吟味を行い、

[1] 葉のつき方のこと

フィボナッチ数列の体系化を検討していきたい。

1.2　本研究の目的

本研究の目的は、『体系化するとどのようなメリットがあるのか』ということを踏まえて、『フィボナッチ数列はどのように体系化され得るのか』、『フィボナッチ数列を体系化することにどのような意味・価値があるのか』ということである。

『体系化することはよいことだ』と一般的に言われているが、なぜよいことなのか、ということを明らかにする。数学であることがらを『体系化』できるようになることによって、メリットとなることは何なのか、『体系化』できなければ何か不都合があるのかということを述べることにより、『体系化』することの価値を明らかにする。

このことを踏まえ、『フィボナッチ数列を体系化することにどのような意味・価値があるのか』、『フィボナッチ数列はどのように体系化され得るのか』ということを、フィボナッチ数列の歴史はもちろん、体系化の理論や定義の吟味などを用いて、実際にフィボナッチ数列を体系化していくことによって求める。

1.3　本研究の方法

本研究の目的を達成させるために、まず第 2 章で、“体系化”についての検討を行う。体系化をすることにどんな意義があるのか、また体系化を行う方法にはどのような方法があるのかということを、H.Freudenthal (1973)の「数学化」や杉山吉茂(1986)の「公理的方法」といった先行研究をもとに明らかにする。また第 3 章で“フィボナッチ数列”について歴史的な検討を行う。なぜなら本研究はフィボナッチ数列についての研究であり、フィボナッチ数列自体のことを知っておく必要があると考えたためである。

この 2 章や 3 章を踏まえて第 4 章で“フィボナッチ数列の体系”についての考察を行う。第 3 章で明らかにされた歴史

も含めつつ、第 2 章で検討した“体系化”の方法が、本研究の場合はどれを採用するのか、またなぜその方法でやろうと思ったのかということを考えた上で、その方法を用いてフィボナッチ数列の性質を証明し、体系を導き出す。

第 4 章で作成したフィボナッチ数列の体系をもとに、第 5 章ではフィボナッチ数列の体系の“定義”について導き出し、その“定義”が本当にそれでよいのかという吟味を、清水美憲(2007)の“よい定義”の先行研究をもとに行う。

それによって本研究の目的である『フィボナッチ数列はどのように体系化され得るのか』、『フィボナッチ数列を体系化することにどのような意味・価値があるのか』という“フィボナッチ数列の数学的価値づけ”と 、『体系化するとどのようなメリットがあるのか』という“体系化の価値”につなげる。

〈本論文の章構成〉

第 1 章　本研究の目的と方法

本研究の目的と方法を述べる。

第 2 章　“体系化”に関する検討

体系化の意義、また H.Freudenthal の“数学化”、杉山吉茂の“公理的方法”について検討する。

第 3 章　フィボナッチ数列に関する検討

フィボナッチ数列の歴史について考察する。

第 4 章　フィボナッチ数列の体系に関する検討

第 2 章、第 3 章で検討したことを踏まえ、本研究での体系化の方法を述べ、フィボナッチ数列の体系を考える。

第 5 章　作られた体系の“定義”に関する検討

第 4 章で考えたフィボナッチ数列の体系について、先行研究をもとに“定義”を吟味し、“フィボナッチ数列の体系化”をはかる。

第 6 章　本研究の結果と課題

本研究の結果と今後の課題を述べる。

第 2 章
“体系化”に関する検討

本章では、フィボナッチ数列の体系化を行うために、体系化に関する事柄について検討を行う。これを検討することにより、体系化を行うことによるメリットや、体系化とはどういうものなのか、どのようにして行うのかということを明らかにする。ここで検討したことを、第 4 章で行う“フィボナッチ数列の体系化”の意義や方法についての手がかりとする。

2.1 では、“体系化”を行う意義について述べる。

2.2 では、体系化に関する先行研究の検討を行う。

第２章　“体系化”に関する検討

2.1　“体系化”することの意義

体系化についての話に入る前に、『体系化するとどのようなメリットがあるのか』ということについて考察する。すなわち“体系化”を行うことの意義について考えていく。

体系化の意義について、杉山吉茂(1986)は「公理的方法に基づく算数・数学の学習指導」の中で次のように述べている。

> “それらを適切に配列することによって、いちいち公理にもどらなくてもすむようになり、思考の経済がはかれるからである。化学にたとえるなら、公理を原子、定理を分子と考えてもよい。定理を用いるということは、原子までの分析をいちいちしなくても、分子と分子の結合を考えればすむことと同じである。このように考えることによって、公理、定義、定理の意義がよく理解されると考える。”〈p.128〉

ここで言う公理とは証明しなくても“真”であると常に認められているもの、定義とは明確な用語であり、その概念の一番基礎となる部分にあるもの、定理とは既に正しいと認められたもの、または公理や定義から証明をして得られたものであると考えられる。また、宮崎樹夫(1995)も「学校数学における証明に関する研究 - 証明に至る段階に説明の水準を設定することを通して - 」の中で同様のことを述べている。

> “子どもが体系化という機能を使えるようになったとしよう。そうなると、ある命題を証明するとき、子どもは、はじめに置いた前提にいちいち戻らなくても、どの命題まで既に証明してあるのかを確かめて、結論を導くまでの推論を可能な限り少なくすることができるであろう。”〈p.30〉

すなわちこの杉山と宮崎が述べていることは、根底にある公理から順に定義、定理となっていることから、何かしらの

命題を証明するとき、わざわざ公理までおりなくても、それまでにある定義やその命題の前に存在している定理があるならば、それを使って証明を行い、結論を導くことができるということである。この関係を図で表すと、右の図のようになると考えられる。(図 2.1−1 参照)

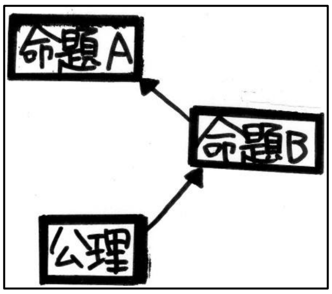


図 2.1−1
命題 A の関係図

具体的に考えてみる。例えば、命題 A として、次のことを証明しなければならないとする。

> **命題 A**
> 交わる 2 つの円 O,O’の交点をそれぞれ P,Q、点 P を通る直線が円 O,O’と交わる点をそれぞれ A,B、点 Q を通る直線が円 O,O’と交わる点をそれぞれ C,D とするとき、AC // BD である

このとき、命題 B が既に証明されていたとする。

> **命題 B**
> 四角形が円に内接するとき
> ・四角形の対角の和は 180°
> ・四角形の外角は、それと隣り合う内角の対角に等しい

また、命題 B は命題 C (円周角の定理)を使って証明されているとする。

> **命題 C (円周角の定理)**
> 1 つの弧に対する円周角は一定であり、その弧に対する中心角の半分である

この場合、命題 A を証明するなら、わざわざ円周角の定理から証明を行わなくても、既に命題 B は証明されているので、

命題Bを用いて命題Aを証明するほうが効率よく、また証明するまでの推論を少なくすることができる。(図 2.1－2 参照)

このようなことが、杉山が述べる「思考の経済化」にあたると考えられる。どこまで証明ができているのか、証明しようとしている命題の前にすでに証明されている定理は何なのか、ということを理解しているということは、その概念の“体系”がわかっているからこそできることである。このことから、数学において、ある分野の“体系”を考えるということは、論理的に証明を行うことができる、すなわち“論理的思考”(思考の経済化)を身につけるには有効であるということができる。よって、“体系化”を考えるとは、ある分野の性質や特徴の関連性を自分で作り上げ、さらに身につけることができるという点において、十分有効であると言うことができる。

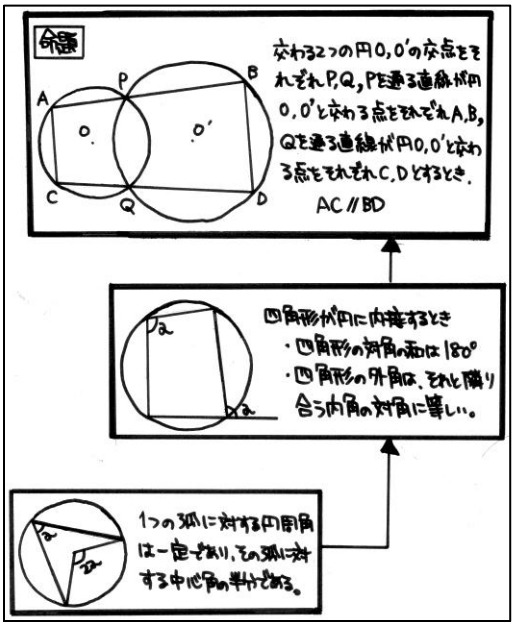


図 2.1－2　円の性質の例

これまでで、“体系化”することの意義は、数学の中―特に証明―を行う際に重要であることがわかった。しかし、数学内でしか“体系化”を行う意義がないかと聞かれれば、それは「違う」と断言することができる。宮崎は次のように述べ、「思考の経済化」は私たちの生活の中にも応用することができると述べている。

“自分に妥当な情報を手に入れられることは情報化社会の光の部分である。この光の部分を最大限に享受するためには、情報を可能な限り効率よく入手することが必要である。例えば、情報 A から他の情報 B を引き出すことができるのであれば、二つの情報とも入手する必要はない。また、情報 A から情報 C を直接引き出すことができるのであれば、情報 B を介在させて、

情報 A から情報 B を引き出し、さらに情報 B から情報 C を引き出す必要もない。このように、自分に妥当な情報を可能な限り効率よく入手するには、子どもが思考の経済化をはかれるようになる必要がある。”〈p.30〉

すなわち、もし「思考の経済化」を身につけていれば、情報 A があった場合に、それと関連がある情報 B や情報 C は情報 A から導くことができるため、わざわざ全ての情報を集めなくても、情報 A さえ入手すればすべての情報が手に入れることができるということである。この関係を図で表すと、右の図のようになると考えられる。(図 2.1－3 参照)

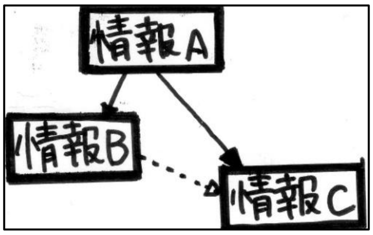


図 2.1－3
情報 A との関係図

具体的に考えてみる。例えば、情報として以下の 3 つを手に入れたいとする。

情報 A :「村に不審者が現れた」
情報 B :「警察・先生が見回りをする」
情報 C :「子どもの安全を確保する」

全ての情報を手に入れたいからといって全て手に入れるのではなく、情報 B と情報 C は情報 A から導くことができるので、情報 A だけ手に入れることによって、効率よく 3 つの情報を手に入れることができる。(図 2.1－4 参照)

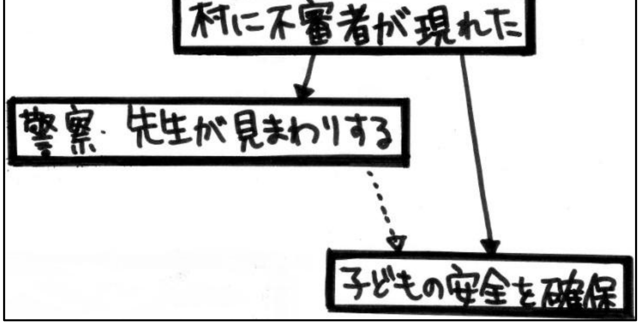


図 2.1－4　日常生活での例

このようなことが「思考の経済化」を身につけていれば可能となる。手に入れたい情報が多くあると

きでも、その中で1つ情報を手に入れたらすべてが手に入る情報があったとすれば、それだけ労力がいらなくてすむということになる。このことから、数学で“体系化”を行うことによって身につけた「思考の経済化」は、日常生活に有効に働くということができる。

以上から、数学の中で「体系化」ができる、すなわち「思考の経済化」を身につけることができていれば、数学の授業で役に立つだけではなく、日常生活で自分の手に入れたい情報を効率よく入手できるようになる、ということができる。宮崎も述べているように、“学校数学でこのような経験をより広い場合に汎化することができれば、子どもは様々な場面で思考の経済化をはかれるようになる” と言うことができる。つまり、「体系化」を行う意義は、日常生活で効率よく情報を入手できるようになる、すなわち効率よく生活を送ることができるよう「思考の経済化」を身につけるための「手段」なのである。

このことから、「体系化」を考えるということは、数学の、特に「証明」において、さらに日常生活を効率的に送ることにおいて、とても有効なものであると言うことができる。そのため、本研究で「体系化」を考えることは、「思考の経済化」について捉えることもでき、意義があるということができる。

2.2　体系化に関する先行研究の検討

2.1で体系化を行う意義について考えた。しかし、“体系化”とはどういうものを指すのか、どのようにして行われるのか、ということに関しては明確になっていない。そこで2.2では、2つの先行研究で“体系化”について検討し、第4章で体系化を行う方法につなげていく。

2.2.1　数学化についての検討

体系化の方法の一つとして、H.Freudenthal (1973)が述べている「数学化」がある。「Mathematics as an educational Task(教育的課題としての数学)」(Hans

Freudenthal,1973)によると、数学化とは、“数学的手段によって現実を整理-組織すること”〈p.37〉であると述べている。すなわち、現実――我々が生活しているこの世界――に存在している現象、物事を数学に変換し、それを整理して、どれとどれが関係しているのかを考えながら組織――体系――を作っていく、というものである。しかし、“数学化”について Freudenthal は次の 3 つを述べている。

> “学生は数学化することを学ぶべきである。――私が意味するのは、始めるのに、現実の場面を数学化することである。数学的な場面を数学化することは終点であって、出発点ではない。”〈p.55〉

> “生徒が数学化を、確かに数学の応用可能性を保証するために、それが非数学的なものに適用する最も低いレベル上で学ぶべきこと、しかし、数学的なものが少なくとも局所的に組織される次のレベル上では一層少なく学ぶべきことである。”〈p.101〉

> “数学者が、整理-組織するのにいっそう意識的に、また、いっそう高いレベルで関わることである。何故なら、数学では整理-組織すること自身が数学化する活動であるからである。”〈p.38〉

この 2 つを踏まえ、塩見拓博(2007)は、「ハンス・フロイデンタールの数学化」の中で、数学化する対象にはレベルの違いがあり、それは次のようになると考えている。〈p.17〉(図 2.2.1－1 参照)

最初のレベル	：非数学的な場面を数学化する
次のレベル	：数学的な場面を局所的に数学化する
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	
最後のレベル	：数学的な場面を数学化する

図 2.2.1－1　数学化のレベル

　このことから“数学化”とは、最初は現実の現象を数学的に捉えて数学に変換し、整理する。それを次は数学内の狭い範囲など——例えば、ある領域内——で、前に整理して数学化したものは、どのような関係になっているのか、どういう役割を持っているのかということを考え、整理する。それを繰り返していき、最終的には“数学”の中で、その前に数学化したものはどのように関連づけられているのか、ということを考え、整理するものだと言うことができる。このように考えていくと、数学化は、“最初のレベル”から徐々に“最後のレベル”というふうに、高いレベルになることが望ましいと考えられる。
　また、塩見はこのレベルについて次のように述べている。

> “数学化には大きく分けて「現実を数学化すること」と「数学を数学化すること」がある。そして現実を数学化することに始まり、数学を数学化することへと続く”〈p.18〉

　このことから、先ほどのレベルは次のように書き直すことができると考える。(図 2.2.1－2 参照)

最初のレベル：非数学的な場面を数学化する

現実を数学化すること

次のレベル　：数学的な場面を局所的に数学化する

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

最後のレベル：数学的な場面を数学化する

数学を数学化すること

図 2.2.1－2　数学化のレベルのグルーピング

　“現実を数学化すること”に始まり、“数学を数学化すること”へとレベルと上げていく。そして“数学を数学化すること”の中で、さらに上のレベルを目指して、数学化を

行っていく、ということが図 2.2.1－2 から分かる。

以下からは、“現実を数学化すること”と“数学を数学化すること”をそれぞれ見ていくこととする。

1. 現実を数学化すること

このことについて、Freudenthal は次のように述べている。

> “今日、多くの人は、生徒が非数学的なものを数学化することを学ぶべきこと、つまり、それを数学的な洗練にアクセス可能な構造に整理-組織するのを学ぶべきことに同意するだろう”〈pp.100-101〉

これを受けて、塩見は次のように述べている。

> “現実を数学化することとは、生活の世界から記号の世界へ導くことであり、数学的な方法にアクセスでき、数学的に洗練できる構造に整理-組織することである。つまり問題の構造を把握することから始まる。”〈p.19〉

例えば、「T 街に 7 つの橋がかかっているとする。その 7 つの橋を全て 1 回だけわたって、A～D の陸に全て行くことができるか」という問題で考えてみる。(図 2.2.1－3 参照)

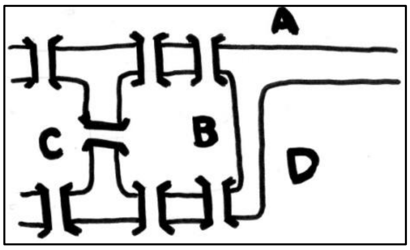


図 2.2.1—3
T 街の 7 つの橋

この橋を全て 1 回だけ渡る、ということは、1 回陸に入るときに使うのであれば出るときには使えないし、逆に陸を出るときに使うのであれば入るときには使えない、ということになる。このことを踏まえて問題に取り組むと、絵の部分を取り払い、図形にすることができることに気づく。このことを踏まえて図形にすると、図 2.2.1－4 の

ようになる。(図 2.2.1－4 参照)これが一筆書きできれば、この問題が解けるか解けないかがわかる。ちなみにこの問題は「ケーニヒスベルクの橋」と呼ばれている問題である。

このように、現実を数学的方法にアクセスできる形に数学化することによって、問題の構造を把握することが容易になるということができる。

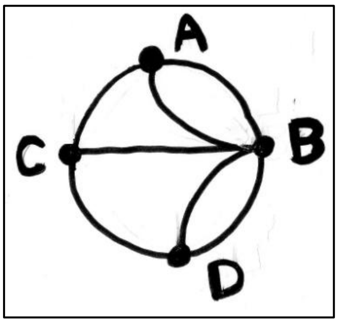


図 2.2.1－4
T 街の 7 つの橋(図形)

2．数学を数学化すること

このことについて、Freudenthal は幾何の事例を用いて次のように述べている。

> “空間的な対象 gestalt を図形として把握することは、空間の数学化である。平行四辺形の諸性質を、平行四辺形の定義に到達するために、他のものをそれの上に基礎付けるためある特段の性質が現れるように並べること、それは、平行四辺形の概念場を数学化することである。幾何の諸定理を、少数からそれら全てを得るように並べること、それは、幾何を数学化すること(または、公理化すること)である。”〈p.101〉

このことから、幾何での数学化の高いレベルへの移行として、

①空間の数学化
②概念場の数学化
③幾何の数学化(公理化)

というふうにレベルが上がっていくと考えられる。

①空間の数学化とは、先程見た“現実を数学化すること”の一部であると考えられる。

②概念場の数学化とは、すなわち、ある性質を定義に

到達させるため、ほかの性質の上に基礎付けるため、ある特徴を持った性質が現れるように並べることである。例えば、二等辺三角形で考えてみる。二等辺三角形の定義は「2 つの辺の長さが等しい」、二等辺三角形の定理は「2 つの底角は等しい」と「二等辺三角形の頂角の二等分線は、底辺を垂直に 2 等分する」であり、この他にもまだまだ存在する。この 2 つの定理は、共に定義から導かれていると考えられるので、定義の上にくる。「2 つの底角は等しい」方は、証明を行うと証明が終われば自然と導き出されるが、「二等辺三角形の頂角の二等分線は、底辺を垂直に 2 等分する」の方はもう少し突っ込んだ証明を行わないと導くことができないので、前者のほうが後者よりも下にくる、と考えることができる。

③幾何の数学化(公理化)とは、幾何の諸定理を少数から全てを得るように並べることである。これまでで様々な数学化を行っているため、数学的な経験を用いて、それに関する諸命題を論理的な関係を行うことによって、組織とする活動が行われる。それを踏まえて、その命題を“公理”のように前提とし、公理化を行っていくと考えられる。先ほどの二等辺三角形の例で考えると、図 2.2.1－5 のような関係図が考えられる。(図 2.2.1－5 参照)

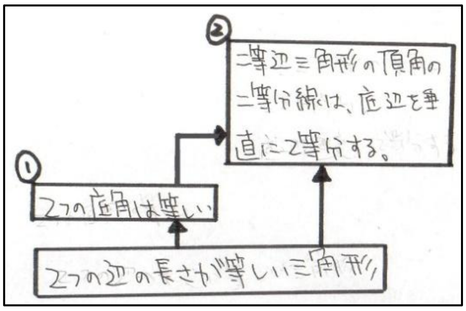


図 2.2.1－5
二等辺三角形の関係図

このように、徐々に論理的関係に整理-組織することが“数学化”となるわけであるが、これは“局所的な数学化”と言うことができる。その理由として、Freudenthal は次のように述べている。

“このシステムを言語の手段によって整理-組織することは、再びある科目を数学化することで、今は、定式化と呼ばれる。その物語は自身を繰り返

す―平行四辺形についてのそれぞれの一般的陳述は数学的な陳述であるが、これらの陳述の全体は、それ自身でごたまぜにされた混乱状態である。それは、もし論理的な関係によって構造化されるなら、数学になり、それが数学化である。幾何的な定理(複数)は一つの混乱であり、それらが局所的に関係付けられていてさえ、それはなお幾何的な章(複数)の混乱である。公理的な数学化によってこの塊は数学化される。言語的には、これは再び、日常語で表現される全てのように、混乱状態である。ここで、言語的な組織化は一つの形式的なシステムに導く。”〈p.101〉

これを受けて、塩見は次のように述べている。

“「数学的な場面を数学化する」とは、局所的な状況や幾何的な章内に限定された状況の垣根をこえ、大域的に組織することである。

　このように「局所的」を量的に捉えることの他に、質的に捉えることが考えられる。(中略)「数学的な場面を局所的に数学化する」とは、子ども自身による厳密さにより組織することであり、「数学的な場面を数学化する」とは、万人が認める厳密さにより組織することであるととらえることができる。”〈p.26〉

すなわち、ある領域内で論理的に定義や性質を整理-組織することは“局所的数学化”にあたり、領域の枠を超えて他の領域も含めて、論理的に定義や性質を整理-組織することは“大域的数学化”にあたるということである。

このとこから、塩見は“数学を数学化すること”について、次のように述べている。

“「数学を数学化すること」とは、現実の数学化に続く数学的手段により、一般化、拡張、形式化、

公理化、演繹的な体系化という洗練に向け、整理-組織する活動である。”〈p.53〉

以上のことを踏まえて“数学化”を整理すると、さらに次のように書き直すことができると考える。(図 2.2.1－6 参照)

最初のレベル：非数学的な場面を数学化する

現実を数学化すること

次のレベル　：数学的な場面を局所的に数学化する

・・・・・・・・・・・・・・・・・

局所的数学化

最後のレベル：数学的な場面を数学化する

大域的数学化

数学を数学化すること

図 2.2.1－6　“数学化”の種類

これから分かるように、“数学化”は対象のレベルに応じて、“現実を数学化すること”と“数学を数学化すること”の 2 つに分けることができ、さらに“数学を数学化すること”はどのくらいの領域で数学化が行われているのかに応じて、“局所的数学化”と“大域的数学化”の 2 つに分けることができる。

2.2.2　公理的方法についての検討

体系化のもう一つの方法として、杉山(1986)が述べている「公理的方法」がある。「公理的方法に基づく算数・数学教育の学習指導」(杉山,1986)によると、公理的方法とは“ある学問領域について、公理を基礎に演繹的な体系を作る方法”〈p.9〉つまり“基礎に公理を設定し、その公理に基づいて純粋に論理的に理論を構築する方法”〈p.21〉であ

ると述べている。すなわち、ある領域において、その領域のすべての基礎となるものを公理として設定し、その公理からその領域内の他の定理や命題が論理的に導かれて理論を構築する方法であるということができる。(図 3.2.2－1 参照)

つまり公理的方法の基本は、"「原理から知ろう」とし、「原理から考えよう」とすれば、まず「原理を探る」事から始めなければならない"〈p.40〉というところにある。

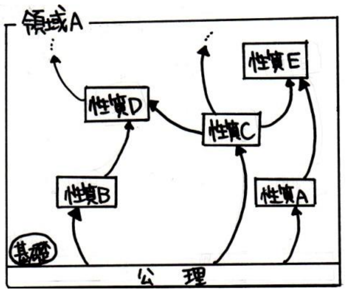


図 2.2.2－1 公理的方法

杉山によると、公理的方法は、公理、無定義術語の意味、公理的方法の目的、公理的方法の役割などに着目すると幾つかの型にわけることができるとされ、ファン・デル・ヴァルデン（B.L.van der Waerden）、ワイルダー（R.L.Wilder）、バック（R,C,Buck）、フロイデンタール（H.Freudenthal）らによって分類されている。杉山はそれぞれの学者の主張を考察した後で、ファン・デル・ヴァルデンの公理的方法の分け方で公理的方法の特徴について述べている。

杉山(ファン・デル・ヴァルデン)が考える公理的方法の分け方は次のとおりである。

1．古典的な公理的方法
2．現代的な公理的方法

残りの 3 人は公理的方法を 3 つの型に分けているが、杉山が他の人物の分け方を採用しなかった理由として、3 つのうち 2 つを「現代的な公理的方法」とくくってしまっても問題ないと考えたからである。

以下からは、古典的な公理的方法と現代的な公理的方法をそれぞれ見ていくこととする。

1．古典的な公理的方法

これはユークリッドの『原論』に見られるものである。数学だけではなく学問を含めて、体系を作り上げる方法

として認められている。
　この方法での無定義術語のレベルは、公理を説明するための用語は日常生活のレベルで共通概念として捉えることができるところである。例えば、ある人に「犬を飼っていますか？」という質問は、「犬」という単語は我々が経験的に知っている共通概念で使う用語であるため、わざわざ「犬」という単語について定義づけする必要はない。しかし、「シェパードを飼っていますか？」という質問は、「シェパード」という単語は知っている人と知っていない人がいるため、共通概念である「犬」という単語を使って定義づけをする必要がある。このように誰もが経験して知っているものは、あえて定義づけをしなくてもいいと考えられているのである。
この方法について、杉山は次のように述べている。

“唯一の実在を対象にしているものではあるが、実在を論理的に確かに理解するための方法である。それができるためには、対象を論理的に解明できる対象としなければならない。対象として存在させるものが公理であり、定義である。その公理や定義を述べることができるためには、対象としている現象の根底を探らなければならない。原理を求め、基本性質を明らかにしなければならない。”〈p.49〉

　このことからこの方法で公理を考えていくと、既に存在している知識の中に、存在している公理を求めていくことによって、その体系の公理を明らかにしていくことが分かる。

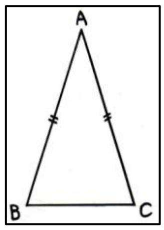


図 2.2.2－2
二等辺三角形

　例えば、二等辺三角形の定義である『2 つの辺の長さが等しい三角形』の公理を、古典的な公理的方法で考えてみることとする。(図 2.2.2－2 参照)この原理となるものは何かと考えたときに、『2 つの辺が等しい』というのは、『ある頂

点からほかの 2 つの頂点への距離が等しい』というところからきていると考えられる。ここで、“頂点”という用語が“無定義用語でない”と考えた場合、“頂点”という用語を使うことができないので、“頂点”という用語を使わずに言うと、『3 つある頂点のうち、ある点から他のそれぞれの 2 つの点との距離が等しい』ということになる。さらに、『ある点から他のそれぞれの 2 つの点との距離が等しい』というのは、『円の中心とその円周上にある 2 つの点』というふうに言うことができる。また、これは『平面上』でしか成り立たないので、そのあたりも加えておく必要がある。ここで、無定義用語は日常生活のレベルだと考えることから、いくつかの用語は別で定義しておく必要があるため、次のように定義しておく。

円	：ある<u>点</u>からの距離が等しい<u>点</u>の<u>集合</u>で作られた<u>曲線</u>で囲まれたもの。
円の中心	：<u>円</u>を作るときにできる<u>点</u>のこと。
曲線	：曲がっている<u>直線</u>のこと。
直線	：点と点をまっすぐつないだ線のこと。
点	：位置だけをもち、部分を持たないもの。
集合	：ある対象の集まり。
平面	：直線が存在している<u>面</u>のこと。
面	：直線で囲まれてできるもの。
図形	：面を組み合わせてできるもの。

これらを使うと、“二等辺三角形”の定義は次の原理から成り立っていると考えられる。

(ただし、使う用語は日常レベル。そのほかの用語は上に定義したとおり)

平面上で、円の中心 O と円周上に 2 点 A,B をとり、それぞれの点を直線で結んでできた図形のこと。(図 2.2.2－3 参照)

このことから、古典的な公理的方法で二等辺三角形を考えると、公理系は図 2.2.2－4 のようになると考えられ

る。(図 2.2.2－4 参照)

例や杉山が述べているように、この方法での公理の求め方は“経験的な知識の考察”によるところが大きい。それはつまり、ある対象で既に知られている、もしくは感覚的に認められている存在を、あえて論理的に構造の中に位置づけるためにある仮定をおき、その仮定から感覚的に認められている存在を論理的に導くことによってその存在を証明し、感覚的な存在を論理的な存在にすることができる、ということである。これは自分の中に、ある種の経験を持っていないと導き出すことはできない。この「ある仮定」が公理にあたり、この操作を繰り返し行うことによって、その対象の中での「公理」が見えてくるのである。先ほどの例で言うと、『辺の長さ』という部分を論理的に導くために、どんどん仮定をおき、最終的には『円の中心とその円周上にある 2 つの点』というように導かれた。これは、円の性質を“経験”していないと導くことはできない。

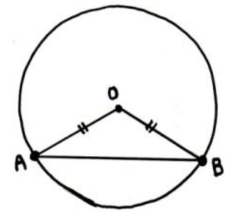


図 2.2.2－3
二等辺三角形の古典的な公理的方法

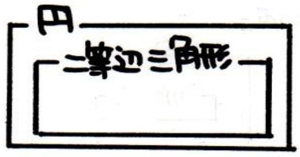


図 2.2.2－4
古典的な公理的方法での関係図

このことから古典的な公理的方法では、根拠を探ることにより公理を発見することができると言うことができる。

2. 現代的な公理的方法

これはヒルベルトの『幾何学の基礎』に見られるものである。『幾何学の基礎』の中では、①幾何学の完全な公理系を求める、②公理の意義とその公理から導かれる結論の限界、の 2 つを明確にしようとしているのだと、杉山は述べている。

ここでのヒルベルトの考えは“原始要素が無定義”という捉え方をしており、これに関して杉山は次のように

述べている。

> “・・・定義しなくてもそれがわかるというだけの意味ではない。そこに述べられている公理を満足する限りにおいて何でもよいという考えがそこにある。”〈p.59〉

つまり、我々が常に考えている、使っているような意味(ユークリッドの意味)で考えてもよいが、それに限る必要はなく、もっと自由に考えてもよいということを述べているのである。例えば、『直線』で考えてみると、我々が常に頭の中にイメージしているものは、『紙の上に定規などでまっすぐ引かれた線』であるが、ヒルベルトに言わせると、それは必ずしもそれに限らず、何も支障がなければノートの右端から左端までのことを『直線』と言ってもよいことになる。このことから、“「原始要素」が variable である”と言うことができる。
この方法について、杉山は次の 2 つを述べている。

> “どんな公理をもとにすれば、どんな公理が導かれるのか(ママ)、この公理がなかったら何ができなくなるのか、あるいは、どこまで大丈夫なのかということについての吟味が見られる。それによって公理の意義が明らかにされている。”〈p.53〉

> “公理の独立性を吟味する方法になっているのであるが、(中略)。公理の限界を追求するという考えは、言い換えれば、あることを一度根拠にしたら、可能な限りそれで済ませていこうとする考えでもある。それは、根拠として覚えるべきことをできるだけ少なくしたいという経済性の原則にもつながることであり、これにより、公理の数を少なくすることができる。”〈p.55〉

このことからこの方法で公理を考えていくと、初めに

公理を仮設的に決めて、新しい(数学の)世界の理論、すなわち体系を作るということになる。つまり、「○○にしたらどうなるだろうか」、「もし××なら、どのようなことが導かれるだろうか」、「△△がなければどうなるか」といった探究心によって公理が設定され、そこから演繹的に導かれたものを吟味していくということになる。

例えば、古典的な公理的方法と同じく、二等辺三角形の定義である『2 つの辺の長さが等しい三角形』の公理を、今度は現代的な公理的方法で考えてみることとする。(図 2.2.2－5 参照)この定義に仮設を立てるとすると、①『もう 1 つの辺の長さも等しい』すなわち『3 つの辺の長さが等しい』ならば、『△ABC は正三角形となる』と言える。また、②『∠A の大きさが等しい』すなわち『3 つの角の大きさが等しい』ならば、『△ABC は正三角形となる』と言える。逆に、③『∠A＝90°』ならば、『△ABC は直角二等辺三角形となる』と言える。ここで少し視点を変えてそれぞれの頂点を動かしてみる。④『頂点 B と頂点 C が限りなく小さくなる』ならば、『頂点 A は大きくなり、辺 BC に近づいていく。最終的には頂点 A は辺 BC 上に存在し、点 A は辺 BC の中点となる』と言える。逆に、⑤『頂点 A が限りなく小さくなる』ならば、『頂点 B と頂点 C は大きくなり、互いに近づいていく。最終的には、頂点 B と頂点 C は重なり、線分となる。』と言える。これらを総合すると、⑥『頂点 A、頂点 B、頂点 C が二等辺三角形の形を保ったまま限りなく小さくなる』ならば、『頂点 A、頂点 B、頂点 C はそれぞれ近づいていく。最終的には、頂点 A、頂点 B、頂点 C は重なり合い、1 つの点となる』と言える。これらがどのように関連しているのかは図 2.2.2－6 のようになると考えられる。(図 2.2.2－6 参照)

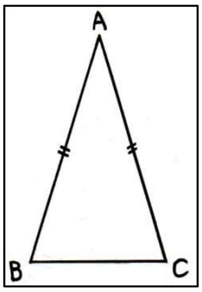


図 2.2.2－5
二等辺三角形

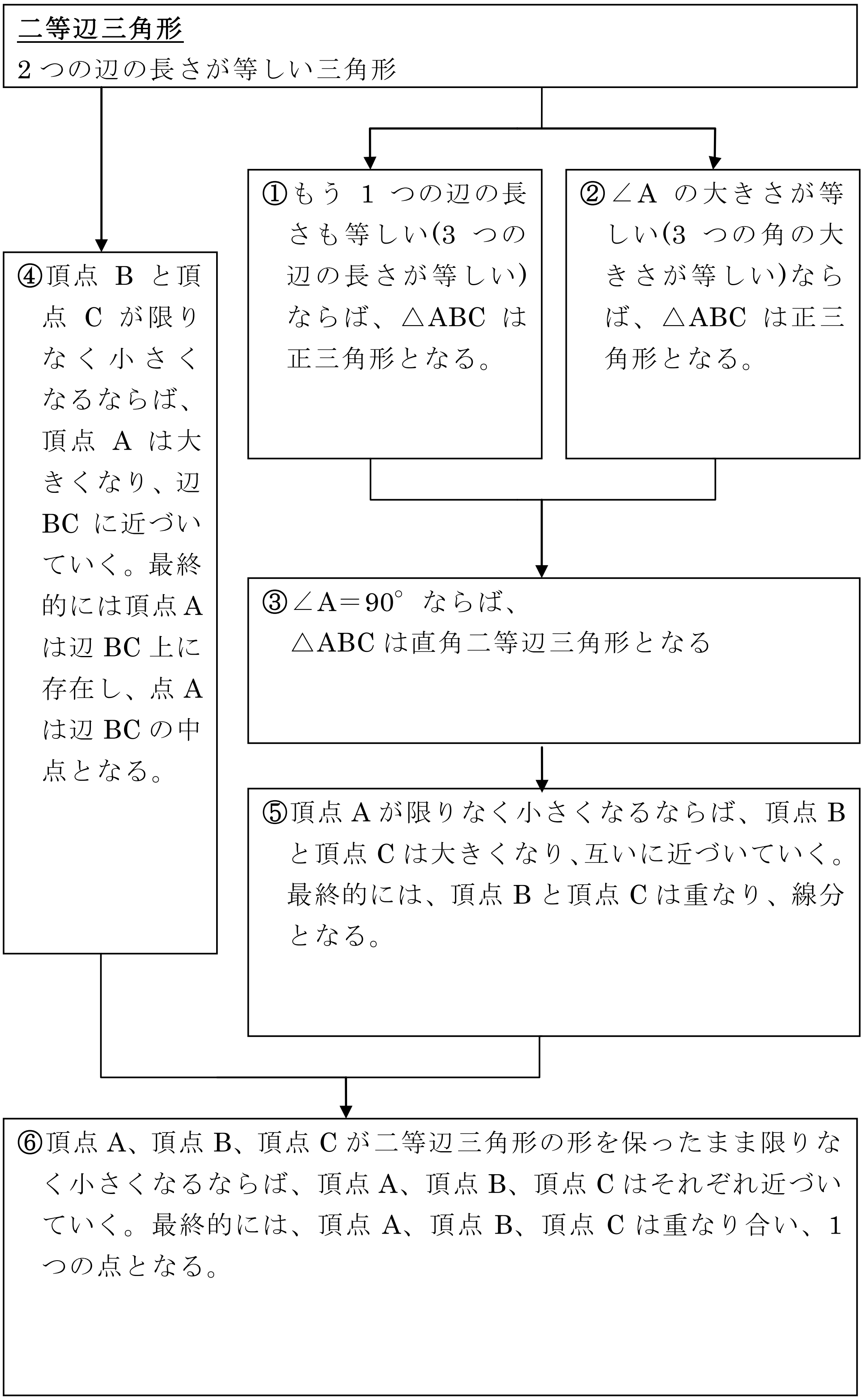


図 2.2.2－6　二等辺三角形の現代的な公理的方法

これから考えると、3 つの公理が仮設として立てることができると考えられる。

- ・すべての点が、ある 1 つの点から始まり、3 つの点を横と縦に一定に広げて出来た図形。(ただし、広げる割合は「横＜縦」)
- ・縦線分の場合、片方の線分の端を一定ずつ同じように水平に離していき、出来た図形。(底辺となる。)
- ・横線分の場合、線分の中点にある点を一定ずつ垂直に離していき、それぞれの点を結んで出来た図形。

このことから、現代的な公理的方法で二等辺三角形を考えると、公理系は右図のようになると考えられる。(図 2.2.2－7 参照)

図 2.2.2－7
現代的な公理的方法の関係図

例や杉山が述べているように、この方法での公理の求め方は“先験的に公理を設定していく”と言うことができる。それはつまり、仮の公理を設定(仮設)し、ある対象の中で論理を位置づけていく中で、仮設した公理の一部を修正したり、加除したりを繰り返し行って限界性や独立性を考えながら公理を変更し、そこから出来た公理系からどのようなことが論理として帰結するかを調べ、考えていくことになる。先ほどの例で言うと、「〇〇にしたらどうなるだろうか」ということ踏まえて、①～⑥まで仮の公理をどんどん設定し、その関係性を考え、最終的には『すべての点が、ある 1 つの点から始まり、3 つの点を横と縦に一定に広げて出来た図形。』、『縦線分の場合、片方の線分の端を一定ずつ同じように水平に離していき、出来た図形。』、『横線分の場合、線分の中点にある点を一定ずつ垂直に離していき、それぞれの点を結んで出来た図形。』の 3 つが導かれた。これは、仮設を立て、吟味を行い、その結果出来た公理系から論理的に帰結できるものを考えた結果、導かれたものである。

　このことから、現代的な公理的方法では、仮設を置いて考えることにより、その仮設とされている公理を基準とした公理系を作ることができる。

　ここで注意すべきなのは、“古典的な公理的方法”と“現代的な公理的方法”の 2 つは,どちらか片方の考えだけで行われる必要はないということである。これについて、杉山は次のように述べている。

“学習は知識の獲得のプロセスであり、しかも、知識は帰結的にも演繹的にも得られ、自己増殖的な働きをもっているということを考えれば、どちらか一方だけで終始する必要はない。公理的方法の二つの考え―「根拠を探る」、「仮設を置いて考える」―を、前者が、確かな知識を求めることにあり、後者が発展的・探究的な考察といった性格を持つと見るとすれば、知識の獲得において、この二つの考えが混在することのほうが自然でもある。”〈p.101〉

　つまり、“古典的な公理的方法”と“現代的な公理的方法”はともに独立して存在しているのではなく、それぞれが別の性質を持っているためにともに存在しているのである。むしろ、片方の考え方で公理を求めているときにもう片方の考え方が――古典的な公理的方法を使っているときに現代的な公理的方法が、また逆に現代的な公理的方法を使っている時に古典的な公理的方法が――入ってきていない、と断言することは困難である。先ほどの例で考えると、古典的な公理的方法で考えていた二等辺三角形でも、根拠を探ると同時にある仮定、つまり言い換えると仮設を立てているわけであり、現代的な公理的方法で考えていた二等辺三角形でも、仮設を立てると同時に根拠を探っていると言うことができる。
　このことから、“古典的な公理的方法”と“現代的な公理的方法”は、それぞれの性格が「確かな知識の探求」と「発展的・探究的な考察」であるために、この 2 つの考え方は自

然に混在している。
また、杉山は“数学化”について次のように述べている。

> “対象を定義し、公理を要請することによって、考察の対象としているものを論理的に存在させることができ、そうすることによって、また、そこに含まれるもろもろの事実を論理的に探求することができる。つまり、定義をし、公理を要請することによって、一つの数学的世界が作られていく。それこそ、「数学化」といってもよいであろう。公理系を設定するということは、その公理系を前提に、ある数学的実体を論理的・数学的に存在させているものと考えられるからである”〈p.38〉

このことから杉山は、“古典的な公理的方法”の中に、“数学化”の考えを見ていると言うことができる。
以上、“古典的な公理的方法”と“現代的な公理的方法”についてみてきたが、どちらも独立して存在せず、両立して存在しながら、それぞれの役割を果たしていると言える。このことから、本研究で体系を作る際に定理を導き出すという面で、体系を作る方法の一部として使うことができるのではないかと考える。

第 2 章の要約

第 2 章では、“体系化”に関する検討を行った。

“体系化”することの意義は、「思考の経済化」を身につけることができるところにある。

“体系化”を使えるようになることによって、数学の場面では、ある命題を証明する際に、結論に至るまでの推論を少なくすることができる。また、日常生活の場面においては、「思考の経済化」を身につけていると、手に入れたい情報が多くあるときでも、その中で 1 つだけ手に入れたらすべてが手に入る情報があるという判断をつけることができ、それだけ労力がいらない。

このことから、「体系化」を考えることは、日常生活を効率的に送ることにおいて、有効なものである。

体系化に関する先行研究として、H.Freudenthal の「数学化」と、杉山吉茂の「公理的方法」の 2 つがある。

H.Freudenthal の「数学化」

数学的手段によって現実を整理-組織すること。

数学化にはレベルがあり、下のように分けられている。

最初のレベル：非数学的な場面を数学化する

現実を数学化すること

次のレベル　：数学的な場面を局所的に数学化する

・・・・・・・・・・・・・・・・・

局所的数学化

最後のレベル：数学的な場面を数学化する

大域的数学化

数学を数学化すること

杉山吉茂の「公理的方法」

基礎の公理を設定し、その公理に基づいて純粋に論理的に理論を構築する方法。

2 つに分けられる。

1．古典的な公理的方法

体系を作り上げる方法。

ある対象で既に知られている、もしくは感覚的に認められている存在を、あえて論理的に構造の中に位置づけるためにある仮定をおき、その仮定から感覚的に認められている存在を論理的に導くことによってその存在を証明し、感覚的な存在を論理的な存在にする。

2．現代的な公理的方法

原子要素は無定義。

仮の公理を設定(仮設)し、ある対象の中で論理を位置づけていく中で、仮設した公理の一部を修正したり、加除したりを繰り返し行って限界性や独立性を考えながら公理を変更し、そこから出来た公理系からどのようなことが論理として帰結するかを調べ、考えていく。

この 2 つは独立して存在せず、両立して存在しながら、それぞれの役割を果たしている。

第 3 章
フィボナッチ数列に関する歴史的検討

3.1　フィボナッチ数列を作った人物 -レオナルド・フィボナッチ-
3.2　フィボナッチ数列の歴史

本章では、フィボナッチ数列を研究するにあたり、歴史的な面からフィボナッチ数列を検討する。フィボナッチ数列のことを研究するために、フィボナッチはなぜこの数列を作ったのか、またフィボナッチ数列を生み出そうと思った背景は何かという歴史的な意味を押さえる。

3.1 では、フィボナッチ数列を作った人物(レオナルド・フィボナッチ)について明らかにする。

3.2 では、フィボナッチ数列の歴史を明らかにする。

第 3 章　フィボナッチ数列に関する検討

まず簡単にフィボナッチ数列について述べる。フィボナッチ数列とは、第 1 項と第 2 項が 1（$F_1 = 1, F_2 = 1$）、第 3 項以降は前項と前々項の和（$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$）で作られる数列のことであり、これを数値化すると、以下のようになる。

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，・・・

現行の高校数学の教科書では第 1 章でも述べたように「コラム」という形で記載されている。高校で学習する他の数列とは違って、公比・公差が存在せず、また階差数列や群数列、漸化式などの形ではないため、「コラム」という形で紹介されている。

3.1　フィボナッチ数列を作った人物
-レオナルド・フィボナッチ-

フィボナッチ数列を作り出したのは、「Leonardo da Pisa (フィボナッチ)」という人物であるという。フィボナッチの人物像について、M・S・マホーニィ(1982)と佐々木(2010)の二人はそれぞれ次のように述べている。

> “レオナルドについて話すときにはつい最上級を用いてしまう。限られた紙面で彼の数学の深さと多様さを捉えようとすることは無益である。”〈マホーニィ,1982．p.119〉

> “西欧世界にとっての翻訳の世紀であった 12 世紀のあとの 13 世紀は、翻訳から創造への移行の世紀として数学史上、位置づけられる。その最初の数学者がピサのレオナルドなのである。”〈佐々木,2010．p.336〉

以上から考えると、フィボナッチは歴史的にみて大変重要な人物であることが分かる。どのようなことをしてきた人物であるかを見ていき、なぜフィボナッチ数列をつくろうと思ったのかという背景を見ていく。

そもそも、なぜ「Leonardo da Pisa」という名前なのに「フィボナッチ」と呼ばれているのか。それは「Leonardo da Pisa」というのは、「da」が英語での「from」にあたるイタリア語であり、「ピサ出身のレオナルド」という意味であるからである。フィボナッチの由来はイタリア語の方ではなく、ラテン語の方にある。ラテン語でフィボナッチは、「Leonardus filius Bonaccinghi（ボナッチ家のレオナルド)」と呼ばれており、「息子」を意味する「filius」が省略され、「fi」となり、「filius Bonaccinghi」が「Fibonacci」となり、そう呼ばれるようになったと言われている。

フィボナッチがどのような人生を送ったのかということに関連する資料はなく、「算板の書」の序文に自ら書いたものが残っているのみであると三浦伸夫(2013)は述べている。これについてはマホーニィが、次のように述べている。

> “彼らの作品を次の二世紀に伝える後継者が驚くほど欠けていたことが、中世数学の独特の方向を明らかにしている。”〈p.119〉

このことから、フィボナッチのことやフィボナッチが記述したものを残す後継人が、中世数学の流れもあって、いなかったと考えられる。マホーニィと佐々木が以下のように述べているのもそのためであると考えられる。

> “在世時も次の世紀もあるいはそれ以上も、後継するものは出なかった。(中略)『算板の書』や他の著作の問題の多くは無数の普及した問題教本の中に入り込んだ。しかしもっと精巧な技法と問題は十五世紀のイタリアの代数学者たちによって復活させられるまで用いられないままであった。”〈マホーニィ,1982．p.124〉

> “フィボナッチの著作の全容が明らかにされたのは、19 世紀後半の数学史家 B･ボンコンパーニによってであった。”〈佐々木,2010．p.337〉

マホーニィは、また次のように述べている。

“レオナルドはピサの裕福な商人の家庭に 1180 年頃(1170 年頃とする説もある)生まれ、アルジェリアからビザンティウムへの諸港で商易について学んだ。”〈p.119〉

また佐々木も次のように述べている。

“彼の父グイリエルモ(Guilielmo)はピサ共和国の書記の資格で、北アフリカの港湾都市プギア(現在のアルジェリアのプジャーヤ)在住の行政官であったため、レオナルドもその地に赴き、アラビア数学を学習した。”〈p.336〉

つまり、フィボナッチはピサで生まれ、父とともにプギアに移り、そこで数学を勉強して、さらに商易についても学んでいたという。三浦によると、Guilielmo (以下グイリエルモと記述)がフィボナッチをプギアに呼んだ理由は、商業実務を学ばせたかったためであるという。昔は、数学は商人が使うものだった、すなわち数学が商人になるためには必ず勉強しなければならなかったという理由もあり、数学を勉強したのだろう。ここでフィボナッチは計算学校(studio abbaci)に通ってアラビア数字を使ったいわゆる「インド式計算法」を学んでとても気に入り、その後、商人として地中海各国を旅しながら、仕事の合間をぬってそれぞれの土地で研究を続け、この間に得ることができたギリシア語、ラテン語の原典のほとんどから実用数学、理論数学を学んだとマホーニィはいう。このような経緯によって書かれた数学的著作が『Libber abbaci (算板の書)』(1202)、『Practica geometriae (幾何学の実際)』(1220)、『Flos (精華)』(1225)、『Liber quadratorum (平方の書)』(1225)である[2]。最初に書かれた『算板の書』に

[2] 日本語訳は、佐々木力の訳を使用(2010. 数学史. 岩波書店)

は、アラビア数学を世に広めるという役割があったこともあり、世間を驚かす作品となったが、佐々木はほかの作品について次のように述べている。

“『平方の書』はシチリア王にして神聖ローマ帝国フレデリクス二世に捧げられている。”〈p.337〉

さらにマホーニィによると、フィボナッチが真の力を発揮するのは最後の 2 作であるといい、佐々木も次の 2 つを述べている。

“『平方の書』は、整数論の不定解析(中略)かなり高度であり、この書は、フィボナッチが商人のアマチュアリズムを超え出ていた(中略)『幾何学の実際』は、(中略)12 世紀以降、幾何学のあり方が理論的な『原論』を超えて進みえることを示した点で重要である。”〈pp.340-341〉

“レオナルドはこれらの著作によって、「世の驚異」(stupor mundi)との名声を博していた開明的君主フレデリクス二世 1226 年にピサを訪問した際に会見している。功なり名を遂げたわけである。”〈p.337〉

このことからわかるように、どの作品もとても重要なものであり、フィボナッチの大きな功績であったということができよう。マホーニィによると、フィボナッチは 14 世紀以降イタリアの算板学校(scuole d’abaco)で、彼が教えられたインド・アラビア算術を教える教師となり、彼が書いた本の中に記述されている問題の多くを、この学校の教本の中に入れ込んだという。

フィボナッチは世の中、とりわけ西欧世界にアラビア・インド数学を広めた人物であるが、その人物について佐々木は簡潔に 2 つを述べている。

“フィボナッチが西欧数学にとって画期的なのは、イ

スラーム数学を西欧ラテン世界に移植させ、新たな基盤の上に据え直したからにほかならない。彼とともに、西欧数学は、古代ギリシャとは別の地平で、新しいパラダイムの風に乗り、新しい翼を得て離陸し始めた、ということができるのである。”〈p.338〉

“ピサのレオナルドは、たしかに地中海を中心としてはいたにしても、ユーラシア全域の数学に関心を広げ、12 世紀までイスラーム地域にあったその重心を西方キリスト教地域移行させた点で、きわめて枢要な役割を果たした。フィレンツェを中心とする商業革命の風に乗って、レオナルドは西欧数学の鋳型を明確に定めたのである。”〈p.341〉

フィボナッチは商人として様々な土地を旅し、そのあいだに学び得た数学の知識、とりわけイスラームにあった数学を西欧に取り入れ、西欧数学に広めることをした重要な人物であるということができよう。1240 年頃亡くなったとされているが、実際に何年に亡くなったという資料が存在しないので、これも後継者がいなかったためということができる。

フィボナッチについて見てきたが、なぜフィボナッチ数列を作ろうと思ったのか、という問いの答えが得られそうなものを見つけることは出来なかった。ただ言えることがあるとすれば、フィボナッチという人物は現在の数学に大きな影響を与える功績を多くあげたということである。

3.2　フィボナッチ数列の歴史

今では当たり前のように高校の教科書に掲載されている「フィボナッチ数列」だが、教科書にはフィボナッチ数列についての歴史は、フィボナッチが作り出したということしか掲載されておらず、詳しい記述が書かれていない。そこでフィボナッチ数列についてさらに詳しく知るために、フィボナッチ数列が生まれた背景を見ていく。

フィボナッチ数列の名前の由来は,「Leonardo da Pisa (レ

オナルド・ピサ、ピサのレオナルド、レオナルド・フィボナッチなど)」(以下フィボナッチと記述)の手によって誕生したところに由来して、「フィボナッチ数列」と呼ばれている。

誕生は、フィボナッチがある 1 冊の本を出版した中に現れている。佐々木によると、次のように述べられている。

> "商人として、エジプト、シリア、ギリシャ(ビュザンティオン)、シチリア、プロヴァンスなどを広く旅し、見聞を広げた。彼は、オーリヤックのジェルベールの伝統的な西欧算盤による計算法を身につけていたが、インド計算法がとくに気に入り、さらに「精妙にユークリッド的な幾何学技法」をも取り入れて、数学的著作をものすこと(ママ)となった。"〈p.336〉

その第 1 作として出版された本が「Liber abbaci」(1202 年発行, 1228 年改訂版発行. 全 15 章)である。「Liber」は「公文書」、「abbaci」のもとの語は「abacus」というラテン語で、「算板」という意味を持つ。ただし、「算板」は日本でのそろばんとは意味が異なり、砂をまいた板の上で計算したり、溝をほった板に玉をおいて計算の補助に使う板であることに注意が必要である。(この板は紙の代わりに使っているため、計算結果を消したり書いたりを繰り返さなければならず、大変不便だったと言われている。)フィボナッチが「abacus」という語彙を使った理由として、佐々木はこう述べている。

> "古代ローマ以来の計算法の伝統的パラダイムを象徴する語彙は'abacus'であった。それで、1202 年の新パラダイムの登場を告げる書にわざわざ『算板の書』というタイトルを選んだのである。"〈p.338〉

すなわち、新しい計算法を世の中に知ってもらうために、あえて昔からの計算法の考え方や概念を含む 'abacus'を使い、手に取りやすくしたと考えられる。「Liber abbaci」をここから先は、「算板の書」とすることとする。

「算板の書」は、マホーニィによると、計算技法をはるかに超えた実用的な様々な数学問題を載せており、それを代数を用いて解いているという。またそれだけのとどまらず、この本の後半の章は次のような内容であるとマホーニィは述べている。

“体系的な問題解決技法として代数に焦点をあて、(中略) エウクレイデスの理論的基礎とアルキメデスの想像力あふれる操作とを結合した。”〈p.120〉

つまり、計算方法だけでなく、日常にある様々な数学問題を代数的に解き、後半になるにつれエウクレイデスの理論を取り入れて複合的に書かれていると考えられる。佐々木によると、中身は「算板の書」の第1章にはアラビア数字ですべての数字が表せるインド数字についての記述がされ、そのあとそのインド数字を用いての四則演算、三数法といったものが紹介されていくという。その第12章に「paria conicurolum（ウサギのつがいの問題)」(以下「ウサギの問題」と記述) が記述され、その中で初めて「フィボナッチ数列」が現れる。

「ウサギの問題」とは、「1つのつがいのウサギがいて、1つのつがいからは毎月必ず1匹ウサギが生まれるとしたら、1年(12ヶ月)経つと何匹のウサギが生まれるか。ただし、どのつがいも生まれて2ヶ月目から1つのつがいのウサギを生むものとする。」という問題のことである。1つのつがいのウサギを生むことができるウサギを“親ウサギ”とし“P_n”、生まれたばかりの(まだを1つのつがいのウサギを生むことができない)ウサギを“子ウサギ”とし“C_n”、ウサギの総数を“S_n”とする。最初は$P_0 = 1$、$C_0 = 0$なので、$S_n = 1$となる。1ヶ月目は、親ウサギは子ウサギを生むので、$P_1 = 1$、$C_1 = 1$となり、$S_1 = 2$となる。2ヶ月目は、最初の親ウサギは子ウサギを生むが、1ヶ月目に子ウサギだったウサギはまだ子ウサギを生むことができないので、$P_2 = 2$、$C_2 = 1$となり、$S_2 = 3$となる。

これを繰り返すと下図のような関係となり、12ヶ月目には、377つがいのウサギが生まれる計算になる。(図 3.2－1 参照)

n ヶ月目	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
親ウサギ P_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
子ウサギ C_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
総　数 S_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

図 3.2－1　うさぎのつがいの問題(表)

この表から分かるように、前の月の親ウサギの数が、その月の子ウサギの数となるので、

$$C_n = P_{n-1} \tag{1}$$

また前の月のウサギの総数が、その月の親ウサギの数となるので、

$$P_n = S_{n-1} \tag{2}$$

ここで(1)と(2)より、子ウサギの数 C_n もウサギの総数 S_n で表すと、

$$C_n = P_{n-1} = S_{--2} \tag{3}$$

よって(2)、(3)から n ヶ月目のウサギの総数は、

$$C_n = C_{n-1} + C_{n-2} (n \geq 3) \tag{4}$$

と表すことができる。この(4)の式がフィボナッチ数列を求める式となることがわかる。これがフィボナッチ数列の始まりである。

その後、19 世紀に入り、エドゥアルド・ルーカス(エドゥ

アール・リュカ)によってフィボナッチ数列は「線型回帰数列」として捉えられるようになり、今日ではルーカスによって生み出された「ルーカス数列(リュカ数列)」の特殊例として扱われるようになっている。[3]

ルーカス数列とは、第 1 項が 1、第 2 項が 3($L_1 = 1, L_2 = 3$)、第 3 項以降は、前項と前々項の和($L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$)と定義される数列であり、数値化すると以下のようになる。

1，3，4，7，11，18，29，37，66，103，169，272,・・・・

今回はフィボナッチ数列について考えるので、ルーカス数列の内容にはこれ以上触れないこととする。

[3] 佐々木力．2010．「数学史」．岩波書店．p.339

第３章　要約

第３章では、フィボナッチ数列に関する歴史的検討を行った。

フィボナッチ数列を作った人物であるレオナルド・フィボナッチは、歴史的に重要な人物であった。

フィボナッチはピサで生まれ、父とともにプギアに移り、そこで数学を学んだ。そこで学んだ「インド式計算法」を気に入ったフィボナッチは、商人として地中海を旅しながら研究を続け、『算板の書』(1202 年)、『幾何学の実際』(1220 年)、『精華』(1225)、『平方の書』(1225)を発表。どの作品も大きな功績を残し、現在の数学に大きな影響を与えた。

フィボナッチ数列は、上記の書籍の中の『算板の書』に「ウサギの問題」として記述されていた。

「ウサギの問題」は、「1 つのつがいのウサギがいて、1 つのつがいからは毎月必ず 1 匹ウサギが生まれるとしたら、1 年(12 ヶ月)経つと何匹のウサギが生まれるか。ただし、どのつがいも生まれて２ヶ月目から１つのつがいのウサギを生むものとする。」という問題で、これを解くと、ウサギの総数が、

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144,・・・

となるのが、フィボナッチ数列の始まりである。

第 4 章
フィボナッチ数列の体系に関する検討

本章では、第 2 章で明らかにした"フィボナッチ数列"の歴史的事項を踏まえて、第 3 章で"体系化"に関する事項を使い、フィボナッチ数列の体系を導く。そのため、第 3 章で検討した体系化の方法を用いて、本研究での体系化の方法を述べ、フィボナッチ数列の体系をその方法を用いて証明を行いながら導き出し、その関係性をまとめる。

4.1 では、第 3 章で検討した体系化の方法を踏まえて、本研究における体系化の方法について述べる。

4.2 では、4.1 の方法を用いて、フィボナッチ数列の体系を証明によって導き出す。

第 4 章 フィボナッチ数列の体系に関する検討

4.1　本研究における体系を作る方法

第 2 章で “数学化”と“公理的方法”について見てきたように、体系化には様々な方法がある。本研究での体系化方法は、Freudenthal の“数学化”の考えを用いて体系化を行っていく。

本研究の目的は、フィボナッチ数列の特徴・性質を関連づけ、整理して構造を明らかにすることによって、“フィボナッチ数列を体系化することにどのような意味・価値があるのか”、“フィボナッチ数列の体系化とは何か”ということを明らかにすることである。このことから、本研究での体系化の方法としては Freudenthal の“数学化”を、中でも“局所的数学化”を用いて体系化を行っていくこととなる。

局所的数学化を行う上で重要となってくるのは、領域内——フィボナッチ数列の中——における“命題”が必要となってくる。どのような順番となっているか、構造となっているかを、命題を整理しながら作っていくというのは第 3 章から明らかである。しかし、命題は、あらかじめ分かっているものもあれば、分かっていないものもあるし、またまだ誰にも発見されていない命題も存在しているかもしれない。そう考えると、命題は“無数にある”と考えれるので、本研究ではフィボナッチ数列でよく取り上げられている命題や、フィボナッチ数列から導き出せる特徴の命題を 5 個に限定し、それがどのように関連付けることができるのかを考えていく。

また、命題から命題を証明する際に、飛躍があったり、もう少し別の命題を使わないと証明できない、論理的に導くことができないということがあった場合は、“公理的方法”の“原理を探る”、“仮設を立てる”といったことを行って、論理に矛盾がないように構造を作り、整理を行い、体系を作っていく。

4.2　本研究でのフィボナッチ数列の体系

まず、フィボナッチ数列の命題 5 個をあげてから、フィボ

ナッチ数列の体系化を行っていく。この命題は、フィボナッチ数列でよく取り上げられている――例えば、フィボナッチ数列のことが載っている本にこの命題が載っているなど――命題や、フィボナッチ数列から導き出せる特徴の命題を挙げている。その焦点を絞った 5 個の命題が、他の命題とどのようにつながっているか、どのような関係性になっているのかということをみていく。

フィボナッチ数列の命題に関しては、以下のとおりである。

フィボナッチ数列の特徴

(ただし、フィボナッチ数列 F_n とする。)

1.項の導き方：$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

2.一般項(ビネーの公式)：$F_n = \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

3. m が n で割り切れるなら、F_m は F_n で割り切れる。

4.連続するフィボナッチ数列は互いに素である。

5.連続する 10 個のフィボナッチ数列の和は 11 で割り切れる。

1. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ **について**

フィボナッチ数列は、

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,・・・

と続いていく。

第 2 章で見たように、うさぎの総数がフィボナッチ数列となっていたことから、うさぎの総数を求める式：$C_n = C_{n-1} + C_{n-2} (n \geq 3)$を用いて表すことができる。

つまり、$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ である。

以上から、この命題は証明された。

ただし、このままではフィボナッチ数列の数値を求めることができないので、第 1 項と第 2 項も定めることにより、フィボナッチ数列を表すことができると考える。また、この命題は、フィボナッチ数列から演繹的に導くことができる。

1-A.フィボナッチ数列の第 1 項、第 2 項は、ともに 1 である。（$F_1 = 1, F_2 = 1$）

2.一般項(ビネーの公式)を求める前に、まず“黄金比”を求める。

2-A.黄金比 $\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ を求める。

別名：フィボナッチ比について考えてみる。

フィボナッチ比というのは、隣り合うフィボナッチ数列の比であるから、2 種類考えてみる。

$\frac{F_{n+1}}{F_n}$	$\frac{F_n}{F_{n+1}}$
$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1$	$\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{1} = 1$
$\frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2$	$\frac{F_2}{F_3} = \frac{1}{2} = 0.5$
$\frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} = 1.5$	$\frac{F_3}{F_4} = \frac{2}{3} = 0.666667$
$\frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} = 1.666667$	$\frac{F_4}{F_5} = \frac{3}{5} = 0.6$
$\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1.6$	$\frac{F_5}{F_6} = \frac{5}{8} = 0.625$
$\frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1.625$	$\frac{F_6}{F_7} = \frac{8}{13} = 0.615385$
$\frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13} = 1.615385$	$\frac{F_7}{F_8} = \frac{13}{21} = 0.619048$
$\frac{F_9}{F_8} = \frac{34}{21} = 1.619048$	$\frac{F_8}{F_9} = \frac{21}{34} = 0.617647$
$\frac{F_{10}}{F_9} = \frac{55}{34} = 1.617647$	$\frac{F_9}{F_{10}} = \frac{34}{55} = 0.618182$
$\frac{F_{11}}{F_{10}} = \frac{89}{55} = 1.618182$	$\frac{F_{10}}{F_{11}} = \frac{55}{89} = 0.617978$
$\frac{F_{12}}{F_{11}} = \frac{144}{89} = 1.617978$	$\frac{F_{11}}{F_{12}} = \frac{89}{144} = 0.618056$

$\frac{F_{13}}{F_{12}}=\frac{233}{144}=1.618056$	$\frac{F_{12}}{F_{13}}=\frac{144}{233}=0.618026$

この表から分かることは、

$$\frac{F_n}{F_{n+1}}=1.618\ldots \qquad \frac{F_{n+1}}{F_n}=0.618\ldots$$

ということである。つまり、これを式で表すと、

$$\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{F_{n+1}}{F_n}+1\text{・・・①}$$

ということになる。ここで、$r=\frac{F_n}{F_{n+1}}$とおいて①に代入すると、

$$r=\frac{1}{r}+1$$

式を変形して、　$r^2=1+r$　$r^2-r-1=0$・・・②

②を解の方程式を使って解くと、$r=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

よって 2 つに分けると、$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\beta==\frac{1-\sqrt{5}}{2}$となる。

ここで、$\beta==\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{1}{\alpha}$となることに注意しておく必要がある。

このα,βは“黄金数”と呼ばれるものであり、特にαは“黄金比”という。

この黄金比を使って、一般項の式を求める。

2.一般項(ビネーの公式) ： $F_n=\dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

②の式にαを代入すると、　$\alpha^2-\alpha-1=0$・・・③

これをα^n倍すると、　$\alpha^{n+2}-\alpha^{n+1}-\alpha^n=0$・・・③’

同様に②の式にβを代入すると、　$\beta^2-\beta-1=0$・・・④

これをβ^n倍すると、　$\beta^{n+2}-\beta^{n+1}-\beta^n=0$・・・④’

③’も④’も変形したら、$\alpha^{n+2}=\alpha^{n+1}+\alpha^n$,$\beta^{n+2}=\beta^{n+1}+\beta^n$となり、これは(1)を満たすものであるので、$c,d$倍して足すと、

$$(c\alpha^{n+2}+d\beta^{n+2})-(c\alpha^{n+1}+d\beta^{n+1})=(c\alpha^n+d\beta^n)$$
$$(c\alpha^{n+2}+d\beta^{n+2})=(c\alpha^{n+1}+d\beta^{n+1})+(c\alpha^n+d\beta^n)$$

となることから、$F_n=c\alpha^n+d\beta^n$・・・⑤である。

ここで、$F_1=1,F_2=1$であるから、

$$\begin{cases} c\alpha+d\beta=1 \cdots ⑥ \\ c\alpha^2+d\beta^2=1 \cdots ⑦ \end{cases}$$

⑦－⑥より、　$c(\alpha^2-\alpha)+d(\beta^2-\beta)=0$

ここで③と④から、$c+d=0$・・・⑧

よって、⑦と⑧からcとdを表す。

⑦より　$c=-d$・・・⑧’

⑧’を⑥に代入して、$-d\alpha+d\beta=1$　$-d(\alpha-\beta)=1$

$$d=-\frac{1}{\alpha-\beta}=-\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}=-\frac{1}{\frac{2\sqrt{5}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

これを⑧’に代入すると、$c=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

これを⑤に入れると、$F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

つまり、$F_n=\dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

よって、命題 2 は命題 2-A と(1)を用いて、導かれる。

3. m が n で割り切れるなら、F_m は F_n で割り切れる。

数学的帰納法で証明。

$m=nk$（k は任意の定数）とし、F_{nk} は F_n で割り切れるかどうかを確かめる。

$k=1$ のとき

F_n と F_n なので、明らかに F_n は F_n で割り切れる。

$k=p$ のとき

F_{np} は F_n で割り切れると仮定する。

このとき、$k=p+1$ のときを考える。

$F_{n(p+1)}$ を展開すると、

$$F_{n(p+1)} = \boxed{F_{np+n} = F_{np+1}F_n + F_{np}F_{n+1}} \quad \text{(3-A)}$$

となることから、$F_{n(p+1)}$ を F_n で割ると、

$$\frac{F_{n(p+1)}}{F_n} = \frac{F_{np+1}F_n + F_{np}F_{n+1}}{F_n} = F_{np+1} + \alpha F_{n+1} \quad (\alpha \text{ は定数})$$

よって、$k=p+1$ のときも割り切れる。

以上から、この命題は証明された。

命題 3 は証明されたけれども、命題 3-A のところがわかっていないため、命題 3-A を証明したい。

3-A. $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$ の証明

数学的帰納法で証明

$n=1$ のとき

$$F_{m+1} = F_{m-1}F_1 + F_mF_2 = F_{m-1}\cdot 1 + F_m \cdot 1 = F_{m-1} + F_m$$

つまり、$\boxed{F_{m+1} = F_{m-1} + F_m}$ (1)

よって、明らかに成り立つ。

また、$n=2$ のとき

$$\begin{aligned} F_{m+2} = F_{m-1}F_2 + F_mF_3 = F_{m-1}\cdot 1 + F_m\cdot 2 = F_{m-1} + 2F_m &= F_{m-1} + F_m + F_m \\ &= (F_{m-1} + F_m) + F_m \\ &= F_{m+1} + F_m \end{aligned}$$

つまり、$\boxed{F_{m+2}=F_m+F_{m+1}}$(1)

よって、明らかに成り立つ。

ここで、$n=k-1$のとき「$F_{m+(k-1)}=F_{m-1}F_{k-1}+F_mF_k$」と、

$n=k$のとき「$F_{m+k}=F_{m-1}F_k+F_mF_{k+1}$」の 2 つが成り立つと仮定する。

このとき、$n=k+1$のときを考える。

$$F_{m+(k+1)}=F_{m-1}F_{k+1}+F_mF_{k+2}=F_{m-1}(F_k+F_{k-1})+F_m(F_{k+1}+F_k)$$
$$=F_{m-1}F_k+F_{m-1}F_{k-1}+F_mF_{k+1}+F_mF_k$$
$$=(F_{m-1}F_{k-1}+F_mF_k)+(F_{m-1}F_k+F_mF_{k+1})$$
$$=F_{m+(k-1)}+F_{m+k}$$

つまり、$F_{m+(k+1)}=F_{m+(k-1)}+F_{m+k}$

よって成り立つ。

以上から、この命題は証明された。

このことから、命題 3 は命題 3-A を使って、命題 1 が根底にある命題であると言うことができる。

また、ここで命題 3-A を改変してみる。

3-A の m を n にしてみると、

$$F_{n+n}=F_{n-1}F_n+F_nF_{n+1}$$
$$F_{2n}=F_n(F_{n-1}+F_{n+1})$$
$$F_{2n}=F_n\bigl(F_{n-1}+(F_n+F_{n-1})\bigr)$$
$$F_{2n}=F_n(2F_{n-1}+F_n)$$

よって、 $F_{2n}=F_n(2F_{n-1}+F_n)$

3-A-A . $F_{2n}=F_n(2F_{n-1}+F_n)$

4．連続するフィボナッチ数列は互いに素である。

連続するフィボナッチ数を F_n と F_{n+1} とする。

$n=1$ のとき

$F_1=1, F_2=1$ であるから、明らかに成り立つ。

$n=k$ のとき

F_k と F_{k+1} が互いに素であると仮定する。

このとき、$n=k+1$ のときを考える。

ここで F_{k+1} と F_{k+2} が 1 以外の公約数 α を持っているとする。

$\boxed{F_{k+2}=F_{k+1}+F_k}$ (1)を変形すると、$F_k=F_{k+2}-F_{k+1}$ であるから、

F_k にも公約数 α を持っていることとなる。

しかし、これは、「F_k と F_{k+1} が互いに素である」という仮定に矛盾する。

よって、F_{k+1} と F_{k+2} は互いに素であることが成り立つ。

以上から、この命題は証明された。

このことから、命題 4 は命題 1 が根底にある命題であると言うことができる。

5. 連続する 10 個のフィボナッチ数列の和は 11 である。

連続する 10 個のフィボナッチ数の和を、

$$S_n = F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5} + F_{n+6} + F_{n+7} + F_{n+8} + F_{n+9} \quad (n \geq 1)$$

とする。

数学的帰納法で証明。

$n=1$ のとき

$$\boxed{\begin{aligned} S_1 &= F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8 + F_9 + F_{10} \\ &= 1+1+2+3+5+8+13+21+34+55 \\ &= 143 \ (=144-1=F_{12}-1) \end{aligned}} \quad (5\text{-A})$$

$$= 11 \cdot 13$$

また、$n=2$ のとき

$$\begin{aligned} S_2 &= F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8 + F_9 + F_{10} + F_{11} \\ &= 1+2+3+5+8+13+21+34+55+89 \\ &= 231 \\ &= 11 \cdot 21 \end{aligned}$$

よって、明らかに成り立つ。

ここで $n=k-1$ のとき

「$S_{k-1} = F_{k-1} + F_k + F_{k+1} + F_{k+2} + F_{k+3} + F_{k+4} + F_{k+5} + F_{k+6} + F_{k+7} + F_{k+8} = 11s$

(s は整数)」と、

$n=k-1$ のとき

「$S_k = F_k + F_{k+1} + F_{k+2} + F_{k+3} + F_{k+4} + F_{k+5} + F_{k+6} + F_{k+7} + F_{k+8} + F_{k+9} = 11t$

(t は整数)」

の 2 つが成り立つと仮定する。

このとき、$n=k+1$ のときを考える。

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= F_{k+1} + F_{k+2} + F_{k+3} + F_{k+4} + F_{k+5} + F_{k+6} + F_{k+7} + F_{k+8} + F_{k+9} + F_{k+10} \\ &= (F_k + F_{k-1}) + (F_{k+1} + F_k) + (F_{k+2} + F_{k+1}) + (F_{k+3} + F_{k+2}) \\ &\quad + (F_{k+4} + F_{k+3}) + (F_{k+5} + F_{k+4}) + (F_{k+6} + F_{k+5}) + (F_{k+7} + F_{k+6}) \\ &\quad + (F_{k+8} + F_{k+7}) + (F_{k+9} + F_{k+8}) \\ &= (F_k + F_{k+1} + F_{k+2} + F_{k+3} + F_{k+4} + F_{k+5} + F_{k+6} + F_{k+7} + F_{k+8} + F_{k+9}) \\ &\quad + (F_{k-1} + F_k + F_{k+1} + F_{k+2} + F_{k+3} + F_{k+4} + F_{k+5} + F_{k+6} + F_{k+7} + F_{k+8}) \\ &= 11s + 11t \\ &= 11(s+t) \end{aligned}$$

s,t は整数だから、$s+t$ は整数だから、$s+t$ も整数となるので、$11(s+t)$ は 11 の倍数となる。

よって、$n=k+1$ のときも成り立つ。

以上から、この命題は証明された。

命題 5 は証明された。また命題 5 は命題 1 が根底にある命題であると言うことができる。

しかし、命題 5-A が証明中に導き出されたため、命題 5-A を証明したい。

5-A. $F_1+F_2+\ldots+F_n=F_{n+2}-1$ **の証明**

その 1

(1)を使って証明する。

(1)を変形して、

$$F_1=F_3-F_2$$
$$F_2=F_4-F_3$$
$$F_3=F_5-F_4$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$F_n=F_{n+2}-F_{n+1}$$

これをすべてたし合わせると、右辺は相殺されるものがあるので、

$$F_1+F_2+F_3+\ldots+F_n=-F_2+F_{n+2}=F_{n+2}-1$$

以上から、この命題は証明された。

その 2

数学的帰納法を使って証明。

$n=1$ のとき

左辺 $=F_1=1$

右辺 $=F_3-1=2-1=1$

左辺＝右辺なので、明らかに成り立つ。

$n=k$ のとき

「$F_1+F_2+\ldots+F_k=F_{k+2}-1$」が成り立つと仮定する。

このとき、$n=k+1$のときを考える。

左辺＝ $F_1+F_2+\ldots+F_k+F_{k+1}=(F_1+F_2+\ldots+F_k)+F_{k+1}$

$$=F_{k+2}-1+F_{k+1}$$

$$=(F_{k+1}+F_{k+2})-1 \quad (1)$$

$$=F_{k+3}-1$$

よって、明らかに成り立つ。

以上から、この命題は証明された。

このことから、命題 5-A は命題 5 を解決するときの手助けとなる命題となることが分かる。

また命題 5-A から、次の命題 5-B、5-A-A が推測される。

5-B. $F_1-F_2+\ldots+(-1)^{n-1}F_n=(-1)^{n-1}F_{n-1}+1$**の証明**

(1)を使って証明する。

左辺$=F_1-F_2+F_3-F_4+\ldots+(-1)^{n-1}F_n$

$$=F_1-(F_0+F_1)+(F_1+F_2)-(F_2+F_3)+\ldots+(-1)^{n-1}(F_{n-2}+F_{n-1})$$

$$=F_1-F_0+(-1)^{n-1}F_{n-1} \quad (1)$$

$$=1-0+(-1)^{n-1}F_{n-1}$$

$$=(-1)^{n-1}F_{n-1}+1$$

$=$右辺

以上から、この命題は証明された。

5-A-A. $F_1^{\ 2}+F_2^{\ 2}+F_3^{\ 2}+\ldots+F_n^{\ 2}=F_nF_{n+1}$

数学的帰納法で証明

$n=1$のとき

左辺$=F_1^{\ 2}=1^2=1$

右辺$=F_1F_2=1\cdot 1=1$

これは、明らかに成り立つ。

$n=k$のとき

「$F_1^{\ 2}+F_2^{\ 2}+F_3^{\ 2}+\ldots+F_k^{\ 2}=F_kF_{k+1}$」は成り立つと仮定する。

このとき、$n=k+1$のときを考える。

左辺$=F_1^{\ 2}+F_2^{\ 2}+F_3^{\ 2}+\ldots+F_k^{\ 2}+F_{k+1}^{\ \ 2}$

$=(F_1^{\ 2}+F_2^{\ 2}+F_3^{\ 2}+\ldots+F_k^{\ 2})+F_{k+1}^{\ \ 2}$

$=F_kF_{k+1}+F_{k+1}^{\ \ 2}$

$=F_{k+1}(F_k+F_{k+1})$

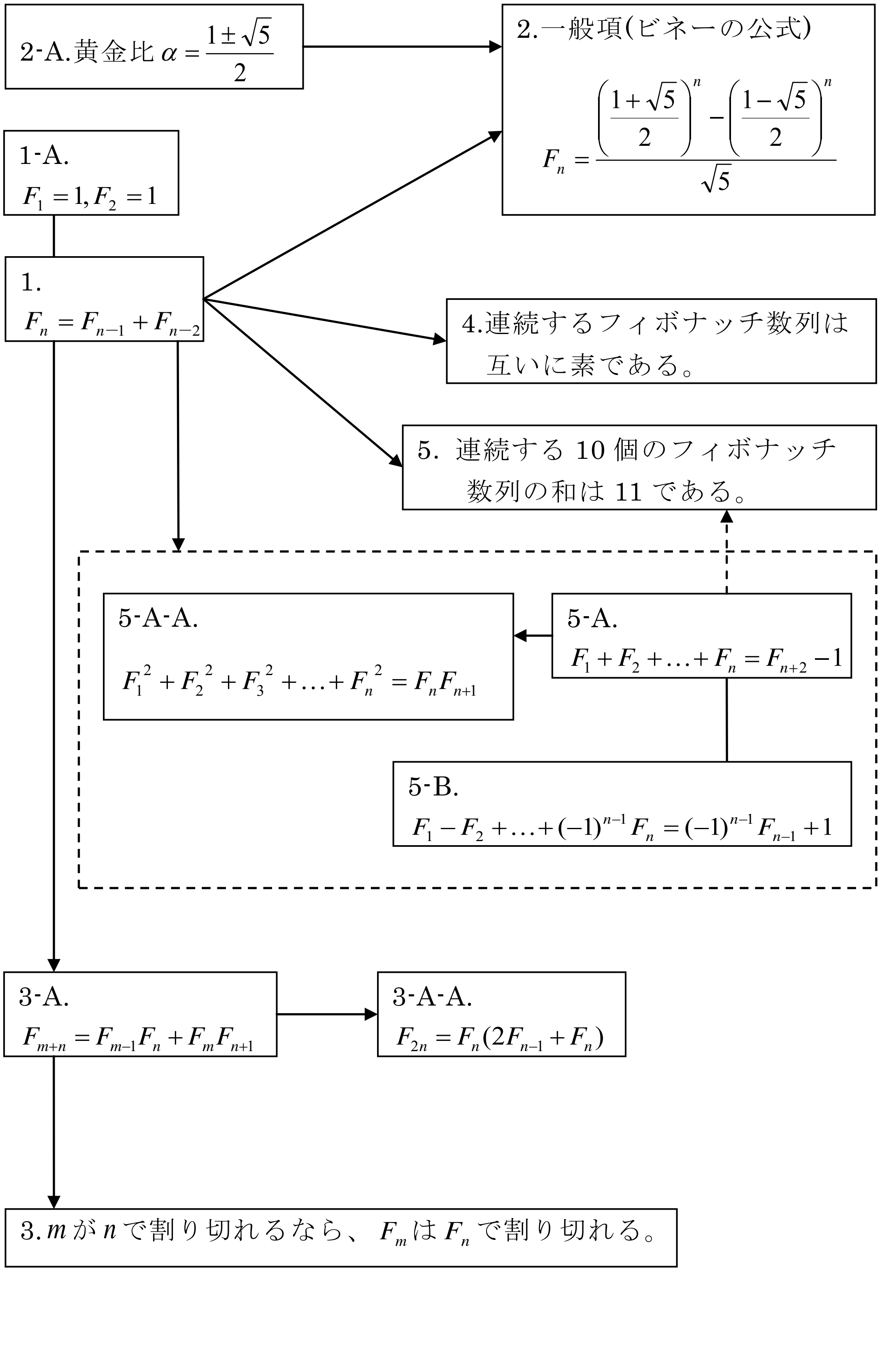
$=F_{k+1}F_{k+2}$

=右辺

よって、明らかに成り立つ。

以上から、この命題は証明された。

以上から、次のような関係図を導くことができると考えられる。



第 4 章　要約

第 4 章では、第 2 章、第 3 章でのことを踏まえて、フィボナッチ数列の“体系”に関する検討を行った。

本研究での体系を作る方法は、本研究の目的より、Freudenthal の“数学化”、中でも“局所的数学化”を用いて行った。

また必要があれば“公理的方法”を行い、論理に矛盾がないように構造を作り、整理を行い、体系を作った。

フィボナッチ数列の命題を 5 つあげ、その 5 つの証明を行った。

フィボナッチ数列 F_n とする。

1.項の導き方： $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

2.一般項(ビネーの公式)： $F_n = \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

3. m が n で割り切れるなら、 F_m は F_n で割り切れる。

4.連続するフィボナッチ数列は互いに素である。

5.連続する 10 個のフィボナッチ数列の和は 11 で割り切れる。

この命題の証明を行った後、命題間の関係図を考えた。

第 5 章
体系における“定義”に関する検討

本章では、4.2 で作成したフィボナッチ数列の“定義”に関する検討を述べる。作成した体系を“体系化”とするために、作成した体系の定義を考察する。そのため、定義に関する先行研究の検討を行い、その体系で考察された定義が本当にそれでいいのかどうか定義の吟味も行って、本研究におけるフィボナッチ数列の体系化を述べる。

5.1 では、数学における“定義”に関する先行研究の検討を述べる。

5.2 では、5.1 で検討したことを用いて、4.2 で作成したフィボナッチ数列の体系の“定義”の検討を述べる。

5.3 では、5.2 で作成されたフィボナッチ数列の“体系化”についての考察を述べる。

第５章　体系における“定義”に関する検討

体系化を考える上で重要なことの一つに“定義”の問題がある。一般に定義という用語は　“証明とするものが見当たらないもの”という捉え方をされている。これは体系化を考えるときにとても重要で、体系を作り上げてから「どれを定義とするのか」ということを考えて、初めて体系化をはかることができる。しかし、ただ単純に「この命題が一番基礎になっているから、これを定義とする」という風に定義を決めて終わりではなく、どれを定義にするのか決めたあとで「なぜこれを定義とするのか」､「これを定義とした場合に、ほかの定理にどのように有効であるのか」といった吟味をして、初めてその体系の定義が決まる。そうすることにより、体系化されたものが洗練され、よりよいものとなる。

なぜこのようなことをする必要があるのかというと、体系化は１つではないからである。体系を見る人によっては“定義”の置き方が異なっていて､筆者が考えた体系の定義が“定理”となってほかの定理が定義になっていたり、“フィボナッチ数列”で体系を考えている人によっては、筆者の考えた体系にはなかったものを“定義”として採用していたりすることがある。つまり、体系が１つではないから、筆者が考えた体系で「これがこの体系の定義である」と述べたとしても、「なぜこの定義でいいのか」､「なぜこの定義でなくてはいけないのか」といったことを明記しなければ、“定義”としての説得力がないからである。そのため、本当にその定義でよいのか、という吟味をする必要がある。

5.1　数学における“定義”に関する先行研究の検討

“定義”を吟味する方法として、清水美憲(2000)の“よい定義”という概念を使って定義の吟味を考える。この概念を使って定義を吟味する理由は、“証明を行う際の定義”についての吟味だからである。

今まで見てきたように、“体系を作る”ということは、定義から定理、定理から定理といったように、何かしらの“つ

ながり”や“関係性”を見て、それを関連付けて体系を作り上げていく。その“つながり”や“関係性”を見ていく方法は、主に“演繹的”か“帰納的”に“証明”を行って、“つながり”や“関係性”を見つけていくと考えてきた。つまり、体系を作る際に、必ず“証明”を行っているのである。そのため、“よい定義”という概念が“証明を行う際の定義”についての吟味の概念であったとしても、証明を行って体系を作っていることから、この概念は有効である、と考える。

清水美憲の「数学的定義の構成活動による定義の役割の理解に関する研究 - 教授実験を通して - 」(2000)によると、次のように述べられている。

> “定義は，ある概念をわれわれが理解する際，また推論を展開する際に，広く重要な役割を果たしている．なかでも，数学においては，事実の体系化や理論の構成(中略)その役割が一層顕著であり決定的である．実際，いくつかの数学的概念や事実を体系化して整理するためには，それらの特徴を明確に把握・記述し，その関係を明らかにする必要があり，それには定義を欠くことはできない．”〈p.4〉

つまり、数学での“定義”は体系化を脳内で行ったり、体系化された性質の関係性を確実に把握しておくために必要不可欠である、と言うことができる。例えば、二等辺三角形とその定義である『2 つの辺の長さが等しい三角形』(図 5.1－1 参照)と、二等辺三角形の定理である①『2 つの底角は等しい』(図 5.1－2 参照)と②『二等辺三角形の頂角の二等分線は、底辺を垂直に 2 等分する』(図 5.1－3 参照)について考えてみる。証明は以下のとおりである。

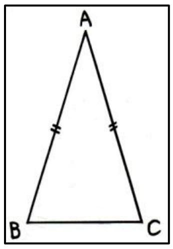


図 5.1－1 二等辺三角形

①『2 つの底角は等しい』

∠A の二等分線をひき、BC との交点を D とする。
△ABD と△ACD で、
∠BAD＝∠CAD…①
AB=AC…②
共通なので AD=AD…③
①～③より、2 辺とその間の角が等しいので、
△ABD≡△ACD

よって、∠B=∠C

図 5.1－2　2 つの底角は等しい

②『二等辺三角形の頂角の二等分線は、底辺を垂直に 2 等分する』
∠A の二等分線をひき、BC との交点を D とする。
△ABD と△ACD で、
∠BAD＝∠CAD…①
AB=AC…②
共通なので AD=AD…③
①～③より、2 辺とその間の角が等しいので、
△ABD≡△ACD

ここから、BD=CD…④
∠ADB=∠ADC…⑤
⑤と∠ADB＋∠ADC＝180°だから、
∠ADB＝90°
よって、AD⊥BC

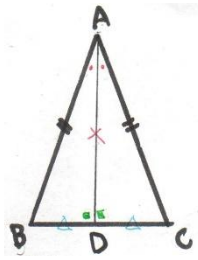


図 5.1－3　二等辺三角形の頂角の二等分線は、底辺を垂直に 2 等分する

これから分かることは、①も②も定義を用いて証明を行っているため、どちらも「定義と関係性をもっている」ということができ、さらにそれは「定義より前にくるもの」すなわち、「定義から派生したもの」と言うことができる。しかし、①と②の関係性をみると、①はお互いの三角形が合同であると証明されたらすぐに導けるものであるのに対して、②はお互いの三角形が合同であると証明されてから、さらに二等辺三角形での角度の大きさを使って証明が行われているので、①よりも②の方が定義よりも離れた位置にあるということができる。(図 5.1－4 参照)

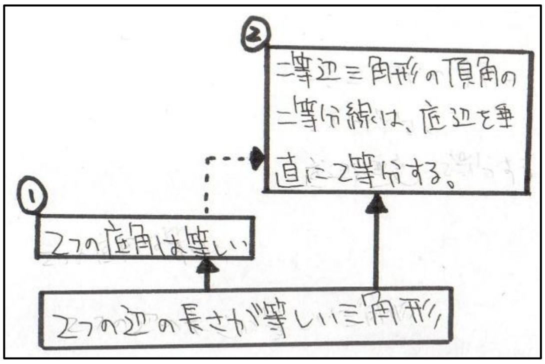


図 5.1－4　定義と定理の関係図

これから分かるように、“定義”を使うことによって、概念の特徴が定義からどのくらいの位置にあるのか、どういう関係を持っているのか、ということが分かるため、“定義”はとても重要である。

また、清水は“定義”についてこのようなことを踏まえつつ、さらに“よい定義”という概念について述べている。“よい定義”というのは、“定義”としての役割が十分に果たせているもののことであり、次の 5 つのことが考えられると述べている。

1. それが必要最低限の条件で述べられていること
2. 簡潔であること
3. 同じ類に属する他の概念との関係が明確であること
4. 定義自体は任意であるが用いられる体系内で他の定義と整合的であること
5. すでに定義された用語や無定義述語を用いていること

このように考えた理由に関して、清水は次のように述べている。

“ある概念の考察の範囲が拡がればそれに応じて用語の定義を再検討し、その定義をそのまま用いて差し支えないか、あるいは別の定義が必要かなどを考えることは数学においてしばしばみられる重要な活動である。また、例えばある図形について、その定義が変われば帰結として導かれる図形の性質も変わることの理解は、幾何学の体系を理解するうえで非常に重要である。もともと、定義には真偽はないし、議論のための「約束事」としての性格をもつが、それは、ある理論体系の中で十分なように、またより広い文脈での理論とも整合的であるようにつくられるのである。”〈p.4〉

“定義”というものは最初から“コレ”という風に決まっているのではなく、その体系の中で、常に「この用語で大丈夫か」ということを考えており、それはとても重要な活動であると清水は考えている。これは H.P.フォセットの研究から考えられていることであり、子どもが証明を行うときの“定義”の吟味を行う活動である。

“証明を行う意義”に絡ませて言うと、“証明”は証明を行うことによって、定理を位置づけたり、その体系の中で近いのか遠いのかということがわかる、もしくは見えてくるものである。そのため日本では“定義”というものは天下り式に「これが定義です」というふうに教えられているが、本来はそうではなく、その証明する定理が含まれている体系の中で、証明を行う“定理”とその体系の“定義”はどういう位置関係なのか、ということをはっきりさせる必要がある。その時同時に、定義も「本当にこれでいいのか」、「別にあるのではないか」という観点で吟味をはかっていく必要があるのではないかと考えた。そうすることにより、よりその場面での“定義”としてふさわしいのか、ということも考えられ、より深い思考になる。また、清水は次のように述べている。

“論証の学習において生徒は、個々の定義を理解して用

いるのみならず、そもそもなぜ「定義」が必要なのかについても吟味し、定義の役割とその意義を理解することが望ましいと考えられるのである”〈p.5〉

論証の学習で、“定義”について様々な面から“定義”について吟味し、自分たちで結論を出すことによって、その論理や証明が説得力を持つようになり、また「定義は目的に沿って自分で考えるものだ」という認識が生まれ、“定義”が厳格化される。それを確かめる指標として清水が考えたのが、上に記述した“よい定義”である。

そのため本研究でも、定義の妥当性を考えながら、フィボナッチ数列の“よい定義”について考えていきたい。

5.2 先行研究をもとにしたフィボナッチ数列の“定義”の検討

5.2.1 本研究でのフィボナッチ数列の“定義”の考察

本項では、第 4 章で考えたフィボナッチ数列の体系の定義の吟味を行うために、考えたフィボナッチ数列の体系の定義を考える。

本研究でフィボナッチ数列を体系化する方法として、Freudenthal の“数学化”の考えを用いた。“数学化”では、前に整理したものとどのような関係になっているのか、どういう役割を持っているのかということを考え、整理する。特に数学化で重要なのは、関係性を作り上げるときに、論理的に定義や性質を整理-組織していくことである。すなわち、“数学化”での“定義”の考えは、たくさんある命題の中からそれぞれの命題との関係性を見出したあとで、それらの命題の“根本”となっているものが“定義”であるという考えである。

このことを踏まえて考えた体系を見ると、命題 1 がその他の命題の根本になっていることがわかる。さらに 4.2 でも触れたように、命題 1 だけでは、フィボナッチ数列の数値化を行うことができないので、命題 1-A も必要となってくると考えられる。また、フィボナッチ数列は数列の中の 1 つである

ため、数列の中で使われている用語は“無定義用語”だと考えてもよいこととする。

以上より、本研究で考えられたフィボナッチ数列の体系での“定義”は以下の 2 つであると考えられる。

フィボナッチ数列 F_n とすると、

①第 1 項、第 2 項は 1 （$F_1 = 1, F_2 = 1$）

②第 3 項以降は、前項と前々項の和 （$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n \geq 3)$）

次の 5.2.2 では、ここで考えた“定義”を、先行研究を踏まえ、吟味を行っていく。

5.2.2 本研究でのフィボナッチ数列の“定義”の吟味

本項では、5.1 で見てきた“よい定義”の概念を用いて、5.2.1 で考えて導き出されたフィボナッチ数列の定義が“よい定義”なのか、ということについて吟味していく。

5.2.1 で導き出された、本研究でのフィボナッチ数列の“定義”は以下のように決定された。

フィボナッチ数列 F_n とすると、

①第 1 項、第 2 項は 1 （$F_1 = 1, F_2 = 1$）

②第 3 項以降は、前項と前々項の和 （$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n \geq 3)$）

5.2.1 でも見たように、フィボナッチ数列は①と②の両方がないと、本研究での体系内ではフィボナッチ数列の完全な定義とはならない。このため、“定義の吟味”を行うにあたっては、この 2 つを“1 つ”だと捉えて吟味を行うこととする。

5.1 で見てきた“よい定義”は、以下に挙げる。

1．それが必要最低限の条件で述べられていること 2．簡潔であること 3．同じ類に属する他の概念との関係が明確であること 4. 定義自体は任意であるが用いられる体系内で他の定義と整合的であること 5．すでに定義された用語や無定義述語を用いていること

このこと踏まえて、本研究での体系のフィボナッチ数列の定義が“よい定義”であるかを、1つ1つ検討しながら見ていくこととする。

1．それが必要最低限の条件で述べられていること

本研究での体系のフィボナッチ数列の定義(以下、定義と記述)は、ほかの命題(以下、定理と記述)の一番基礎になっている、という観点から導き出されたものであるが、それと同時に“数値化できるか”というところも大変重要になってくると考える。なぜなら、定理の中には、フィボナッチ数列が数値化されないとわからないものも含まれており、そのような定理とこの定義を関係づけようと思ったら、“数値化できる”というのは必須条件となってくると考えるからである。

このことを踏まえて定義を見ると、この 2 つがあるからこそ数値化することができることが容易に分かる。逆に片方だけしかなければ成り立たないし、これ以上のことを記述されていても成り立つことに支障はないことから、この定義は数値化できるのに必要最低限で表すことができていると捉えることができ、この条件は満たされていると考える。

数値化：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，・・・

2．簡潔であること

広辞苑によると、“簡潔”という意味は、次のように記述されている。

“表現が簡単で要領を得ていること。
くだくだしないこと。”

これを数学に置き換えて考えると、数学の定義は次のように述べることができるのではないかと考えた。

“短い文で、論理的に述べられている”

この理由について、“表現が簡単”、“くだくだしない”というのは、数学で考えると“短い文”に、“容量を得ている”というのは、数学で考えると“論理的”になると考えたからである。このことから、数学はでの“簡潔である”という意味は“短い文で、論理的に述べられている”ということになると考えられる。
このことを踏まえると、本研究での体系のフィボナッチ数列の定義は、2 つの短い文で述べられており、さらにその文だけですべての項をカバーできており、論理的であると考えることができることから、この条件は満たされていると考える。

3. 同じ類に属する他の概念との関係が明確であること

例えば、第 2 章で少し触れた“ルーカス数列”も“数列”というくくりで見れば同じ類に属し、さらに言えば定義の②“$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n \geq 3)$”を見ると、これもルーカス数列とフィボナッチ数列では共通な部分であるため、同じ類に属する、ということとなる。しかし、ルーカス数列とフィボナッチ数列が決定的に違うのは第 1 項と第 2 項の置き方である。フィボナッチ数列は第 1 項も第 2 項もともに“1”であるのに対して、ルーカス数列は第 1 項が“1”、第 2 項が“3”である。このことからも分かるように、

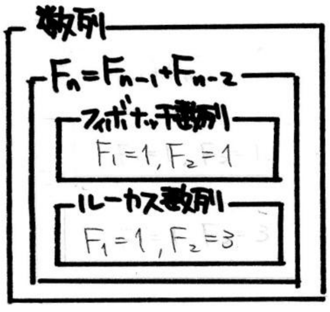


図 5.2.2－1　ルーカス数列とフィボナッチ数列

ルーカス数列とフィボナッチ数列は、同じ類に属するけれども、第 1 項、第 2 項の置き方が違うところから、関係性が明確であるということができ、この条件は満たされているということができる。(図 5.2.2－1 参照)

4．定義自体は任意であるが用いられる体系内で他の定義と整合的であること

第 4 章で体系を考え、5.2.1 で考えた体系の定義はどれかということについて考えたことから、本研究での体系のフィボナッチ数列の定義は、他のものと整合的と考えられるので、この条件は満たされているということができる。(詳しくは、4.2 に記述)

5．すでに定義された用語や無定義述語を用いていること

5.2.1 で定義を考えたときに、「フィボナッチ数列は数列の中の 1 つであるため、数列の中で使われている用語は“無定義用語”だと考えてもよい」と考えたため、研究での体系のフィボナッチ数列の定義は、考えた時点で無定義述語を使用していることから、この条件は満たされていると言うことができる。

以上の検討から考えて、筆者の考えたフィボナッチ数列の体系の定義は、“よい定義”だと言うことができる。

第 5 章　要約

第 5 章では、4.2 で作成したフィボナッチ数列の“定義”に関する検討を行った。

体系を考える上で定義を吟味する理由を、清水美憲(2000)の先行研究をもとに考察した。その中で、“定義”としての役割が十分に果たせているものを “よい定義”とし、次の 5 つのことが挙げられる。

1. それが必要最低限の条件で述べられていること
2. 簡潔であること
3. 同じ類に属する他の概念との関係が明確であること
4. 定義自体は任意であるが用いられる体系内で他の定義と整合的であること
5. すでに定義された用語や無定義述語を用いていること

また、4.2 でのことを踏まえ、本研究でのフィボナッチ数列の“定義”を考察した。

フィボナッチ数列 F_n とすると、

①第 1 項、第 2 項は 1　$(F_1 = 1, F_2 = 1)$

②第 3 項以降は、前項と前々項の和　$(F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n \geq 3))$

この定義が“よい定義”なのかどうか、を 5 つのことと照らし合わせ、吟味を行った。

1. それが必要最低限の条件で述べられていること

数値化できるので、満たされていると考える。

2. 簡潔であること

数学に置き換えると、“短い文で論理的に述べられている”と捉えることができ、この定義だけでフィボナッチ数列のすべての項をカバーできるので、満たされていると考える。

3. 同じ類に属する他の概念との関係が明確であること

ルーカス数列を例にとって考えると、定義の②は共通な部分であるが、第 1 項と第 2 項の置き方が違うので、関係が明確であることから、満たされている。

4. 定義自体は任意であるが用いられる体系内で他の定義と整合的であること

定義を考えるときにこの項目を考慮して作ったため、満たされている。

5. すでに定義された用語や無定義述語を用いていること

定義を考えるときに無定義術語を使用していると考えていたため、満たされている。

このことから、筆者の考えたフィボナッチ数列の体系の定義は、“よい定義”だと言うことができた。

第 6 章
本研究の結果と課題

本章では、第 2 章～第 5 章を通して行った本研究の結果と今後の課題について述べる。

6.1 では、本研究を行って得られた結果について述べる。

6.2 では、今後の課題について述べる。

第 6 章　本研究の結果と課題

6.1　本研究の結果

本研究の目的は、『体系化するとどのようなメリットがあるのか』ということを踏まえて、『フィボナッチ数列はどのように体系化され得るのか』、『フィボナッチ数列を体系化することにどのような意味・価値があるのか』ということである。

これを明らかにするために、まず体系化をすることの意義、また H.Freudenthal (1973)の「数学化」や杉山吉茂(1986)の「公理的方法」といった体系化を行う方法について見てきた。体系化をすることができるようになることによって、「思考の経済化」が身につくようになる。それを身につけることによって、数学である命題を証明する際に、結論に至るまでの推論を少なくすることができるだけでなく、日常生活を送る際に手に入れたい情報が多くあるときでも、その中で 1 つだけ手に入れたらすべてが手に入る情報があるという判断をつけることができ、それだけ労力がいらないというメリットがあることが明らかにされた。また、体系化を行う方法には 2 つの方法がある。1 つは、数学的手段によって現実を整理-組織するという「数学化」である。この「数学化」にはレベルがあり、最初のレベルであり、非数学的な場面を数学化する「現実を数学化すること」と、次のレベルであり数学的な場面を数学化する「数学を数学化すること」に分けられる。さらに「数学を数学化すること」は、それが局所的かそうでないのかによって「局所的数学化」と「大域的数学化」に分けることができることを明らかにした。もう 1 つは基礎の公理を設定し、その公理に基づいて純粋に論理的に理論を構築する「公理的方法」である。この「公理的方法」には、ある対象で既に知られている、もしくは感覚的に認められている存在を、あえて論理的に構造の中に位置づけるためにある仮定をおき、その仮定から感覚的に認められている存在を論理的に導くことによってその存在を証明し、感覚的な存在を論理的な存在にするという「古典的な公理的方法」と、仮の公理を設定(仮設)し、ある対象の中で論理を位置づけてい

く中で、仮設した公理の一部を修正したり、加除したりを繰り返し行って限界性や独立性を考えながら公理を変更し、そこから出来た公理系からどのようなことが論理として帰結するかを調べ、考えていく「現代的な公理的方法」の2つがあることを明らかにした。

また、“フィボナッチ数列”の歴史についても明らかにした。フィボナッチ数列を作った人物であるレオナルド・フィボナッチであり、商人として旅しながら研究を続け、4つの作品を発表し、どの作品も大きな功績を残して現在の数学に大きな影響を与えたということが明らかにされた。フィボナッチ数列は、その発表された作品の中の『算板の書』に「ウサギの問題」として記述されており、それがフィボナッチ数列の起源だと言われていることが明らかにされた。

これを踏まえ、本研究での体系を作る方法は、本研究の目的から考え、Freudenthal の“数学化”、中でも“局所的数学化”を用いて行った。しかし、論理的に導くことができないということがあった場合は、“公理的方法”の“原理を探る”、“仮設を立てる”といったことを行って、論理に矛盾がないように構造を作り、整理を行い、体系を作っていく。“公理的方法”を行い、論理に矛盾がないように構造を証明によって体系を導き出した。

本研究の体系においては、5 つの命題(性質)から証明をしていく中で体系を導き出すという「局所的数学化」の手法を取った。それによって導き出された体系に言えることは、ある命題を証明するためにさかのぼっていくと、必ず命題1にたどりつくということである。直接命題1から証明されるものもあれば、命題1から証明された命題を用いて証明されるものもあり、また命題1と組み合わせて証明を行っているものもあった。このことから言えることは、命題1が他の命題の根底となっているもの、すなわち定義であるということである。そうであれば、すべての命題は定義から派生しているということができる。しかし、命題1だけではフィボナッチ数列を数値化しようとしてもできず、さらに第1項と第2項が別の数字でも成り立ってしまうため、フィボナッチ数列の定義としては不十分である。そこで、フィボナッチ数列の定

義は命題 1 と命題 1-A であると考えた。
しかし、導かれた定義が本当に“よい定義”なのか、ということはわからない。そこで、清水美憲(2000) が述べている、“よい定義”を参考にした。“よい定義”とは、“定義”としての役割が十分に果たせているもののことであり、次の 5 つを果たしているものと考えている。

1. それが必要最低限の条件で述べられていること 2. 簡潔であること 3. 同じ類に属する他の概念との関係が明確であること 4. 定義自体は任意であるが用いられる体系内で他の定義と整合的であること 5. すでに定義された用語や無定義述語を用いていること

これを踏まえて、定義が“よい定義”なのかということの吟味を行った。命題 1、命題 1-A を一括りとして吟味を行った結果、全ての項目を満たしていることが明らかにされた。
筆者が実際にフィボナッチ数列で体系化を行い、“フィボナッチ数列を体系化する”というのは、体系化の練習になるのではないかと考えた。なぜなら、フィボナッチ数列には先にも述べた通り、多くの定理が存在している。それがどのように証明されてきたのか、あるいは、どうやって証明されうるのかということを考えるには、とてもいい教材になるのではないかと考えた。そういった思考を身につけることによって、「思考の経済性」を身につけることができ、数学の場面だけではなく、日常生活でも生かすことができると考える。

6.2 今後の課題

本研究では、“フィボナッチ数列の体系化”を実際に行い、“体系化の意義”や“フィボナッチ数列の価値づけ”を行うことができた。しかし、“体系化”を行って“思考の経済化”を身につけるにはどうすればよいのかという教育の場面につなげることができなかった。
また、授業で“体系化”を行うとした場合に、どのような教材を用いれば効果的であるのかということも考えることができなかった。

引用及び参考文献

H.Freudenthal．(1973)．Mathematical as an Educational Task．D.Reidel 社

M･S･マホーニィ(佐々木力 編訳)．(1982)．歴史における数学．勁草書房

杉山吉茂．(1986)．公理的方法に基づく算数・数学の学習指導．東洋館出版

宮崎樹夫．(1995)．学校数学における証明に関する研究 - 証明に至る段階に説明の水準を設定することを通して -

清水美憲. (2007). 算数･数学教育における思考指導の方法. 東洋館出版

数研出版．(2007)．改訂版 数学 B．数研出版

中村滋．(2008)．フィボナッチの小宇宙　改訂版．日本評論社

村井出 編．(2008)．広辞苑　第六版．岩波書店

佐々木力．(2010)．数学史．岩波書店

アルフレッド・S・ボザマンティィエ, イングマル・レーマン(松浦俊輔 訳)．(2010)．不思議な数列フィボナッチの秘密．日経 BP 社

清水美憲．(2000)．「数学的定義の構成活動による定義の役割の理解に関する研究 - 教授実験を通して -」．数学教育学論究 第 73・74 巻．pp.3-26．日本数学教育学会

塩見拓博．(2007)．「ハンス・フロイデンタールの数学化」．鳥取大学数学教育研究．9(8)

三浦伸夫．(2013)．「フィボナッチが学んだ数学、伝えた数学　第 1 回目」．現代数学 2013 年 4 月号 48 巻 556 号．pp.37-43．現代数学社

謝辞

本研究を進めるにあたり、ご指導いただいた多くの方々に、心より感謝申し上げます。

指導教官である溝口先生には、丁寧かつ熱心なご指導をしていただきましたこと、深く感謝申し上げます。なかなか就職先が決まらず、さらに 11 月に応用実習ということもあって、研究がうまく進まず、途中で研究の方向性や終着点もわからなくなりつつあった私に、丁寧にご指導してくださいました。また、「具体例を使わないと、責任転換になってしまうから、きちんと自分で考えて、責任転換しないように。」というお言葉は、私の心にとても響き、「研究に向かう態度」、さらに論理的思考を養うことができるようになったと感じております。溝口先生には、研究のことだけでなく、算数・数学教育をはじめ、たいへん多くのことを学ばせていただきました。本当にありがとうございました。

また、研究室の先輩である玉木義一さん、吾郷将樹さん、岡友章さん、岸川友飛さんには、研究で行き詰ったり、論文作成の上で困ったことがあれば、快く相談に乗ってくださり、さらに共に考えてくださり、深く感謝申し上げます。「研究は厳しく、人間関係は温かく」という溝口先生のお言葉通り、研究は厳しかったですが、先輩方・同期・後輩たちに支えられ、今の私がいるのだと感じております。本当にありがとうございました。

さらに、夏合宿では、大阪教育大学の真野先生、埼玉大学の松嵜先生をはじめ、広島大学のみなさま、大阪教育大学のみなさま、埼玉大学のみなさま、横浜国立大学の三輪さん、溝口研究室の OB のみなさまから、多くのご助言、ご指導をいただきました。心より感謝申し上げます。

また、同級生である下釆瑞季さん、宮崎諒平さん、山根三佳さん、横田真照さんには、研究を進める仲間として、共に苦労を分かち合ったり、研究について相談したり、研究以外でも共に時間を共有でき、互いに刺激を与えながら、共に協力し合って研究を進めることができました。深く感謝申し上げます。

　そして、研究室の後輩である坂元里佳子さん、白枝果歩さん、若林直広さんには、夏合宿、卒業論文発表会、打ち上げの準備など、忙しいにもかかわらず、様々な面で大変お世話になりました。これから研究で多くの壁、苦難があると思いますが、共に支えあい、協力しながら、乗り越えていってほしいと思います。

　このように多くの方に支えられ、本論文を完成させることができましたことに、深く感謝申し上げます。大学生活で学んだこと、身についたことを社会生活にも活かせるよう、これからも励んでいきたいと思います。

平成 26 年 1 月
松岡涼

鳥取大学数学教育研究　ISSN 1881−6134

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。

- 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
- 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
- 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
- その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/