ISSN 1881–6134

鳥取大学数学教育研究
Tottori Journal for Research in Mathematics Education

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

「論証指導」の基盤としての「説明の指導」：

研究ノート

溝口達也　*Tatsuya Mizoguchi*

vol.15, no.3
Oct. 2012

鳥取大学 数学教育学研究室

「論証指導」の基盤としての「説明の指導」：研究ノート（注1）

溝　口　達　也
鳥　取　大　学

1. 問題の所在

中等教育における論証指導を考えるとき，いわゆる「（数学的）証明」は，そのほとんどが中学校の指導内容として位置づけられており，高等学校においては，特段に論証（証明）が指導内容として位置づけられることはなく，「問い」の一つのスタイルとしてもっぱら扱われることになる。そこでは，必ずしも「証明せよ」という指示に限らず，「示せ」のようなフレーズで問われることもしばしばである。

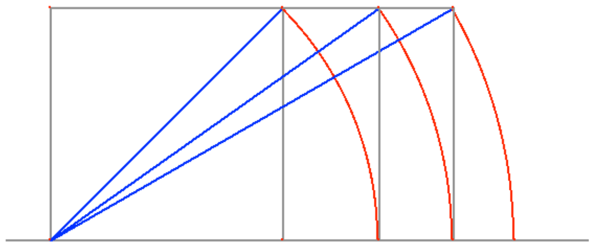
ここで，「証明」とは，後述する通り，「説明」の（条件が厳しいという意味において）特殊な形態として捉えられるものであり，従って「証明する」ことは「説明する」ことに包含される関係にある。「論証指導」というとき，狭義においては「証明」がその対象であるものの，広義においては「説明」まで拡大してとらえることが，数学の学習指導の実践を検討する上で有用であろうと思われる。

そのように考えるとき，次のような問題が浮上することとなる。「証明」は，まだまだ改善の余地は残されているにせよ，少なくともカリキュラム上に明確に位置づけられた内容であるのに対して，「説明」は，小学校算数科以来，カリキュラム上の問題としてとらえられるというよりは，指導法上の問題としての扱いを受ける傾向にある。すなわち，「説明」は，その重要性については多くの人が認識するにもかかわらず，カリキュラムにおける明確な位置づけが与えられていない。このことは，上述の通り，指導者の認識に依存してその扱い方も大きく異なってくる。小学校におけるこうした指導者に依存した「説明」の指導を受けた子どもたちは，しかし中学校においては一定の内容としての「証明」の学習に直面することになり，明らかに学習の前提としての認識，態度，技能等に顕在化されにくい違いを抱えることとなる。一方，指導者は，そのような違いを前提とせず，子どもたちの状態が，あたかも一律であるかのごとく指導計画が設計される。従来から指摘される，《証明の必要を感じない》，《証明の書き方がわからない》，《証明の構想が立てられない》といった証明指導に特有の問題は，すべてではないにしても，以上のような「説明の指導」の実態が大きく影響していると考えられる。

2. 事例的考察〈1〉：平方根数の作図（中3）

与えられた面積の正方形の1辺の長さを求めるよく見られる問題場面がある。そのような問題では，同様にして「面積が1，2，4，9の正方形を作図しなさい。」と続く（方眼紙上で作図）。考えてみれば，子どもにとっては，ここに登場する数は，なんの脈絡もない。あまりにも恣意的であるような印象を受ける。

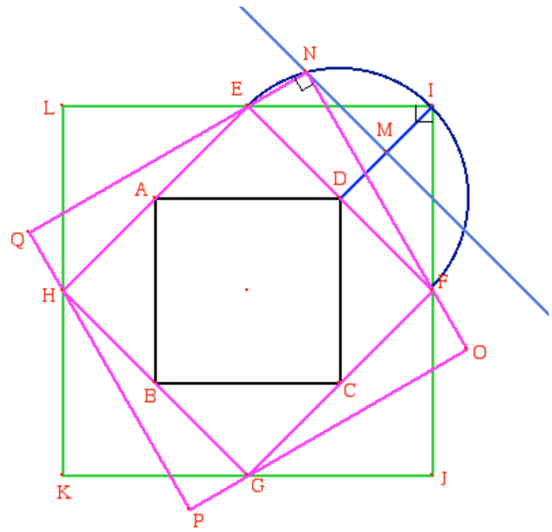
もし，どんな正方形でも作図ができるならば，この問題は解決される。年間計画を大幅に変更して，平方根と三平方の定理を一緒に扱うのであれば，図1のようにして，√2，√3，...を作図していくという方法もある。しかし，実際にはそうした変更は困難であろう（こうした指導計画の変更自体は，より一層検討されるべきではある）。



〔図1〕

これに対して，異なる方法を次のように考えてみよう (図2参照)。

［A］ <u>**はじめに**</u>，面積が1である正方形ABCDを作図する（これは，方眼紙上でも構わない）。次に，その外側に，倍の面積（面積が2）の正方形EFGHを作図する（自明なので，作図の仕方は省略）。まずここで，√2が作図できたわけである（正方形EFGHの1辺)。<u>**次に**</u>，EFを直径とする半円を作図し，中心Dの垂線と円周との交点をIとする。IDの中点Mを通ってEFに平行な直線が円周と交わる点（の一方）をNとすると，三角形EFNは，面積1/4の直角三角形になる。同様の仕方で，FG，GH，HE上に，△FGO，△GHP，△EHQを作図すると，これら4辺上の三角形の面積の和は1であり，かつ四角形NOPQは正方形であるから，四角形NOPQの面積は3である。<u>**そうすると**</u>，この正方形の1辺の長さは√3である。



〔図2〕

［A］の「説明」は，「はじめに～」，「次に～」，「そうすると～」といった手順を示す「語彙」で接続されている。ここで，いくつかの点に対して疑問が呈せられる。すなわち，作図の手順を示す仕方は，必ずしも演繹的に論証されているわけではない。特に次の2点については，真偽が必ずしも自明ではない。

① △EFNの面積が $\frac{1}{4}$ であること。

② 四角形NOPQが正方形であること。

そこで，通常これらのことについて，「証明」することが求められる。

［B］（四角形ABCD=1，四角形EFGH=1 は，前提とする。）

①について

△EFI= $\frac{1}{4}$□EFGH=$\frac{1}{2}$　〔ここでは，円周角の定理を用いている。〕
△EFNは，底辺をEFとするとき，その高さはMDに等しく，これは，IDの半分である。よって，△EFN= $\frac{1}{2}$△EFI=$\frac{1}{4}$
②について
△EFNと△FGOの両者は同じ手続によって構成されることから，△EFN≡△FGO
このとき，∠NEF+∠NFE＝∠DFG+∠NFE=90°　であるから，点N, F, Oは一直線上にある(∠NFO=180°)。同様にして，点G, H, Eは，それぞれ直線OP, PQ, QN上にある。また，NF+NE=NF+FO=OG+GP=… すなわち，NO=OP=PQ=QN
以上より，図形NOPQは正方形である。

数学的な論証としては，(厳密さについてはさらなる要請があるとしても)［B］によって満足される。しかし，数学教育の立場から検討したいことは，問題の所在でも述べたように，果たしてこうしたアイデアがいかにして生み出されるか，という点を明瞭にすることである。少なくとも，［B］によっては，それは明らかではない。そこで次のような「説明」が求められる。

［C］正方形EFGHによって面積が2である正方形が作図され，従って√2　の作図が達成された後，正方形EFGHの外側に，やはり倍の面積（面積が4）の正方形IJKLを作図すれば，その1辺の長さは2（＝√4）になる。√3が飛んでしまったわけであるが，このとき，元の正方形（正方形EFGH）の外側に加えられた4つの三角形の面積の総和は2であるから，面積が3の正方形を作るのであれば，この外側に，その面積の総和が1になる合同な4つの（直角）三角形が作図できればよいことになる。つまり，１つ１つの三角形の面積が（この場合であれば）半分になればよいわけで，そのためには，三角形の高さが半分になればよい。そこで，図のように，DIの中点をMとして，Mを通ってEFに平行な直線と半円EIFの交点Nをとれば，三角形EFNは，求めていた面積1/4の直角三角形になる。同様に4辺上に作図し正方形NOPQを得れば，これは面積が3の正方形であるからその1辺の長さは√3になる。
さらに，同様の手順で，元にする正方形から外側に4つの（直角二等辺）三角形が得られ，このそれぞれの三角形の高さを，必要な割合に内分した点を求めて（この方法は，平行線の性質を知っていればできる）...とすれば，どんな平方根数でも作図ができることになる（換言すれば，どんな面積の正方形も作図できるということである)。

以上［A]～[C］までの異なる「説明」を見た。ここで，［B］は，上述の通り，真偽が明瞭でない点を文字通り論証する「証明」である。一方，［C］は，幾分事柄の厳密さという点で［B］を別途必要とする箇所もあるが，［B］と共通していえることは，（必ずしも演繹的ではない)《推論*reasoning*》が含まれることである。これに対し，［A］にはそのような推論は含まれない。ローゼンバーグ(2011)は，「科学的説明」に要請される事柄として，

(1)　説明項は被説明項の言明を論理的に含意する。

(2)　説明項には，演繹の妥当性に欠かせない法則が少なくとも一つ含まれる。

(3)　説明はテスト可能でなければならない。

(4)　説明項は真でなければならない。

の４つをあげるが，数学教育の文脈における子どもの学習過程に求められる「説明」としてはこれらのすべてが満たされる必要はないとしても，注目すべきは，(2)で指摘される「法則」の含意である。上に指摘した通り，《推論》が含まれるということは，某かの論理的出発点に立つ必要があったり，あるいはそうした論理の形式が，ローゼンバーグの指摘する「法則」と解釈することが可能である。こうした視点に立つとき，もはや［A］は，およそ「説明」と呼べるものではない。むしろ「報告」とでも称したほうがよいものである。

ところが，多くの小学校における算数の学習指導においては，この［A］のタイプが，あたかも「説明」であるかのごとく指導される傾向にある。しかも，「説明」を求める場面のほとんどが，［A］のタイプである。少なくとも，算数・数学として求められる「説明」でないことは，上述の通りである。これが，問題の所在で述べた，子どもたちの，あるいは中学校入学以前の学習指導の実態である。

3. 説明と証明

宮崎(1995)は，「説明」と「証明」について，「学校数学における説明を，説明の内容と説明の表現という構成要素に関してさらに制限したものが，学校数学における証明である。つまり，学校数学における証明は，学校数学における説明の特殊なものであることになる。」と述べた上で，その〈内容〉と〈表現〉について次のように規定する。

構成要素	学校数学における説明	学校数学における証明
内容	子どもにとって普遍妥当な前提から当該の命題までの論理的な推論	子どもにとって普遍妥当な前提から当該の命題までの演繹的な推論
表現	言語・図・具体物	数や図形に関する命題の連鎖を表すための言語

「表4.1　学校数学における説明⊃学校数学における証明」(宮崎, 1995 より抜粋)

さらに，宮崎は，〈内容〉と〈表現〉を２軸とするマトリックスを構成し，ここから次のような「説明」の指導の道筋を結論づける。(注2)

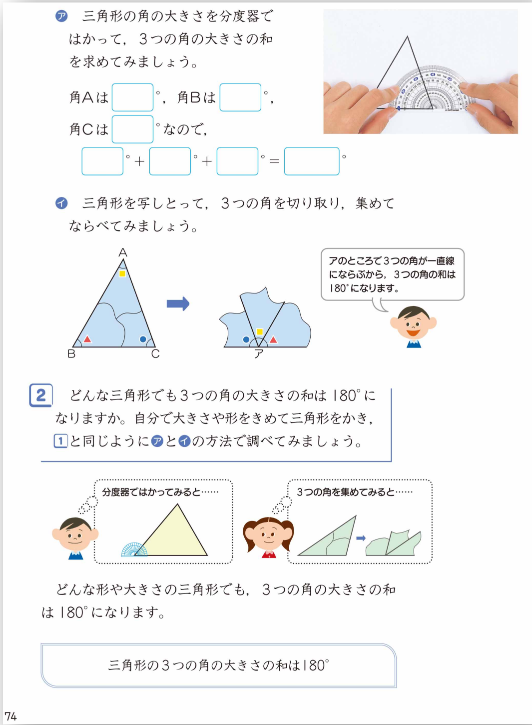
説明の表現 ＼ 説明の内容	数や図形に関する命題の連鎖を表すための言語	数や図形に関する命題の連鎖を表すための言語以外の言語・図・具体物
子どもにとって普遍妥当な前提から当該の命題までの演繹的な推論	説明A	説明B
子どもにとって普遍妥当な前提から当該の命題までの論理的だが演繹的でない推論	説明D	説明C

「表4.7　本研究で採用する道筋–説明Cから説明Bを経て説明Aに至る–」(宮崎, 1995 より抜粋)

宮崎の扱う「説明」は，本稿が意図する「説明」に比べて，幾分制限が強いものの，《推論》が含まれるとする点は共通するところである。すなわち，学校数学においては，《推論》が含まれてはじめて「説明」としての資格が付与されるものであるとすることができる。**問題となるのは，そうした「説明」の指導<u>課程</u>である。**

4. 事例的考察〈2〉：三角形の内角の和（小5）

小学校第5学年の学習内容である「三角形の内角の和」は，多くの教科書において，右に示すように，〔3つの角をちぎって集める〕ことが行われる。これをもって，まさに「3つの角の和は180°になる」とされるのである。これは，上で述べた［A］のタイプそのものであり，従って，全く「説明」の体をなしていない。換言すれば「やったらこうなった」以外の何物でもない。（実際の作業では，貼り付けの不器用さから，必ずしも平角にならないことが多い。）



ア　三角形の角の大きさを分度器ではかって，3つの角の大きさの和を求めてみましょう。

角Aは □°，角Bは □°，

角Cは □°なので，

□° + □° + □° = □°

イ　三角形を写しとって，3つの角を切り取り，集めてならべてみましょう。

2　どんな三角形でも3つの角の大きさの和は180°になりますか。自分で大きさや形をきめて三角形をかき，1と同じようにアとイの方法で調べてみましょう。

どんな形や大きさの三角形でも，3つの角の大きさの和は180°になります。

三角形の3つの角の大きさの和は180°

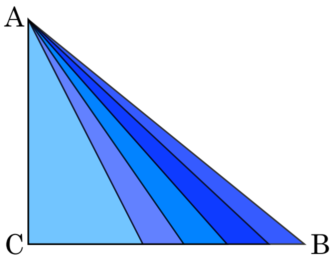
74

「説明」には《推論》が含まれることを指摘した。そうであれば，次のような指導過程が考えられる。[注3]

問題：「直角三角形の２つの角の大きさの変わり方を調べよう。」

【算数的活動A】[注4]

子どもは，直角三角形ACBにおいて，直角の∠Cを固定し，点Bを動かすことで，∠Aと∠Bの変化の様子を観察する。ここから，∠Aと∠Bの和はいつでも90度になっていることを発見する。すなわち，ここではじめて《角の和》に目を向ける認識が発生する。

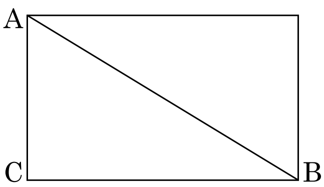


角A	30	35	40	45	50	55	60	…
角B	60	55	50	45	40	35	30	…

このことの「説明」においては，点Bを動かすことによって得られたデータをもとにした，帰納的推論が含まれる。

【算数的活動B】

算数的活動Aで得られた（帰納的に見つけた）事柄を演繹的に論証する：「長方形を対角線で切ると2つの合同な直角三角形ができたという経験から，どんな直角三角形でも右の図のように合わせれば，長方形が作れる。



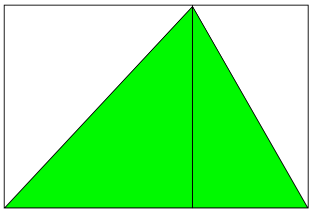
【算数的活動C】

直角三角形以外の三角形について調べる：活動の進展に伴い，3つの角の関係に気づいてくる。そこまできて，三角形の場合，直角であろうと何度であろうと，どんな場合でもいえる角の間の関係〔３つの内角の和は180°〕を定立し得る。

ここでも，様々な特殊をもとにして，帰納的に推論することが含まれる。

【算数的活動N】

さらに算数的活動Cで帰納的に得られた事柄を，小学校における既知の事柄をもとに演繹的に論証する：「一つの頂点から垂線を下して2つの直角三角形を作ることができれば，それらの内角の和はそれぞれ二直角の大きさであるから，垂線を下して出来る平角部分を差し引けば180°である」（柴田, 1987)



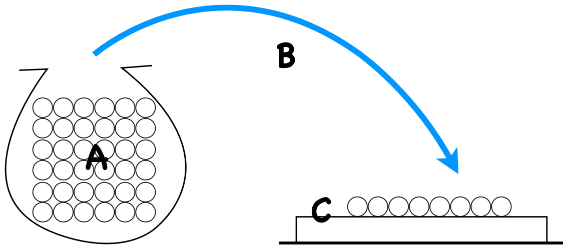
ここでは，演繹的推論が用いられるが，その表現手段は，「図」に依存したものである。すなわち，「説明」ではあるが「証明」ではない。実際，中学校における「証明」では，このような仕方はとられず，平行線の公理をもとに証明する。このことについて，柴田は次のように述べる。「この事例の場合，いうまでもなく結論を得るための。前提が異なるのである。小学校での論議の仕方は，「長方形の内角の和が360°[注5]であること」を当たり前の事としている。それに対して中学校のそれは平行線の公理を想定している。（中略）平行線の公理を認めれば，長方形（正方形を含む）の内角の和の360°であることが示される。逆の命題については必ずしも成立しない。」(柴田, *ibid.*) それでも，小学校においてこのような「説明」は是非とも求めたいところである。それは，《推論》の中に特殊な条件が用いられていないことを意識するという意味において，「特殊の中に一般を見る」ことを大切にしたいと考えるからである。

5. 推論

宮崎(1995)は，「学校数学における説明」の「内容」として「子どもにとって普遍妥当な前提から当該の命題までの論理的な推論」と述べた。しかし，その「論理的な推論」については明示していない。ここで，《推論》一般について確認しておきたい。

いま，次のような3つの命題を考える。

A. この袋の中の玉は，すべて白い。【規則】
B. この台の上にある玉は，すべてこの袋の中から取り出されたものである。【場合】
C. この台の上にのっている玉は，すべて白い。【結果】



〔図3〕

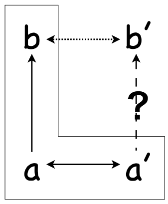
ここで，《AとBならばCである》のような【規則】と【場合】から【結果】を導き出す推論を，演繹　*deduction*と呼ぶ。演繹的推論は，結論が，普遍妥当に真であることが保証

される。

それでは，もし，《BとCならばAである》という推論を考えるとどうであろう。つまり，（袋の中身はわからないけれども）袋から玉を取り出して台の上にのせたところ，それらはすべて白い玉であった，というものである。このことから，袋の中身は，すべて白い玉である，と推測することができる。しかし，袋の中身がすべて白い玉であるかどうかは，必ずしも保証されない。すなわち，結論が偽である可能性がある。このような【場合】と【結果】から【規則】を導き出す推論を帰納 *induction* と呼ぶ。帰納的推論は，そのデータが多ければ多いほど，より真らしい，ということが強められる。このケースにおいては，台の上にならぶ玉の数が多ければ多いほど，袋の中身はすべて白い玉であろうという推測が強められる。

考えられるケースは，もう一つある。《AとCならばBである》という推論である。袋の中にはすべて白い玉が入っており，台の上におかれた玉もすべて白い。ということは，この台の上にある玉は，袋から取り出されたのではないか，という推測である。このような【規則】と【結果】から【場合】を導き出す推論をアブダクション *abduction* と呼ぶ（日本語の適切な訳がない）。帰納的推論同様，アブダクションも，結論が偽である可能性がある。アブダクションには，理想化，極限化，システム化のようなタイプが分類されるが，最も典型的なケースとして，類推，すなわち類比的推論 *analogical reasoning* があげられる(伊東, 1975)。類推は，次のように形式化することが可能である。

いま，aとa'に類比な関係が認められる（本質的に似たところがある）。《aならばbである》ことはわかっている。ところが，「a'ならばb'である」のb'を直接導くことができない（困難である）。ここで，aとa'の関係と同じ関係を有するように，b'をbに対して考えることができる。これによって得られたb'を用いて，「a'ならばb'である」という命題を構成する。このような推論が類推と呼ばれるものである。



〔図4〕

6. 事例的考察〈3〉：関数のグラフを問題解決に利用すること（中・高）

次のような問題場面について検討してみよう。

ある濃度の食塩水が１kgあります。この食塩水から100gをとりさり，水を100g加えてよく混ぜた後，さらにこの食塩水から200gをとりさり，水を200g加えてよく混ぜたところ，8.64%の食塩水になりました。はじめの食塩水は何%だったでしょう。

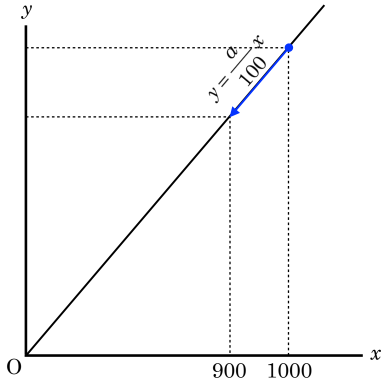
種々の学力調査等で示されるように，多くの中学生にとって与えられた方程式を解いたり，所与の式のグラフをかくことについては，概ね達成されているものの，問題場面から方程式を立式したり，グラフをよむという活動を不得手としている。このことは，換言すれば，なぜ当該の方程式が立式されるか，またグラフから何をどうよみとるのか，といった「説明」が十分にできていないことでもある。

上の問題場面の場合，次のような「説明」が期待される。

［1］　はじめの食塩水〔A〕の濃度をa%とすると，食塩水Aに含まれる食塩の量(y)は食塩水の量(x)に比例するので，

$$y=\frac{a}{100}x$$

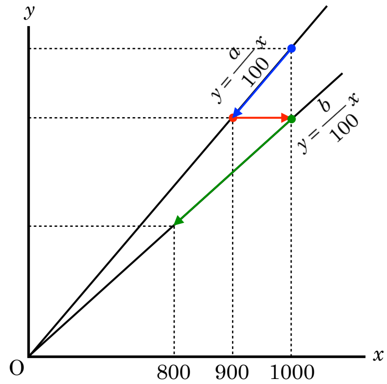
と表せる。
食塩水Aから100gをとりさっても，その濃度は変わらない。



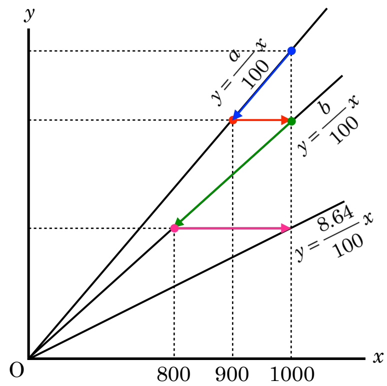
［2］　次に，食塩水Aに水を100g加えた後の食塩水〔B〕の濃度をb%とすると，明らかに$a>b$であり，

$$y=\frac{b}{100}x$$

と表され，食塩水Bから200gをとりさっても，その濃度は変わらない。



［3］　さらに，食塩水Bに水を200gを加えた後の食塩水〔C〕の濃度が8.64%である。（明らかに，$b>8.64$）



［1］～［3］によって表された各々のグラフの傾きのyの増分に着目すると，

$$\frac{b}{100}\times 800=\frac{8.64}{100}\times 1000$$

より，$b=10.8$。すなわち，食塩水Bの濃度は，10.8%である。このことから，

$$\frac{a}{100}\times 900=\frac{10.8}{100}\times 1000$$

より，$a=12$。
したがって，はじめの食塩水(食塩水A)の濃度は，12%である。

ここで展開されるグラフをツールとした推論は，アブダクションである。すなわち，【規則：比例関係】と【結果：問題場面に示された各々の条件】から【場合：グラフ上の操作】を導出するものである。「説明」が《推論》を含むものであるならば，推論の様態についても，カリキュラム上の位置づけが議論されるべき問題として浮上するであろう。

7. おわりに

「説明」という語が，教育実践において独り歩きする感がある中で，「論証指導」およびそのカリキュラムを開発を目指す上で，「説明の指導」の一貫性のある系統を明らかに

することは不可欠であるように思われる。一方，「カリキュラム」という語についても，その意味を共有することが困難な状況にある。例えば，わが国の学習指導要領は，教育課程の基準ではあっても，各学校において設定される年間計画としての教育課程（または教科課程）そのものではない。「カリキュラム開発」として何を想定するかは，その成果をどこに求めようとするかによって違いが生じてくる。これは，いわゆる学問研究としての目的と教育実践としてのそれとして捉えることも可能であるかもしれない。しかし，少なくとも筆者は，そのように受け止めることには抵抗がある。数学教育学研究は，教育実践に寄与して初めて価値を有するものであると考えることがその理由である。従って，カリキュラム（教育課程）という語で目指すべきは，教育実践に対して直接的資料となり得るものでありたいと考えるのである。

注

1) 本稿は，科学研究費補助金　基盤研究B「中等教育を一貫する数学的活動に基づく論証指導カリキュラムの開発研究」（研究代表者：岩崎秀樹）の支援を受けており，同第1回研究会（2012/09/29~30）における発表資料に若干の加筆修正したものである。
2) 宮崎は，さらに〈思考〉という軸を加えて，「説明の水準」を設定している。
3) 子どもたちにとって困難であるのは，３つの角の大きさという変数を３つも同時に扱わなければならないことであり，これらが一定の関係を有することは，自然に発想され得ることではない。そこで，１つの角を固定したとき，他の２つの角の関係について考えるという場を設定することで，３つ目への関心が生まれやすくなることが期待される。
4) 本稿における「算数的活動」の意味規定については，必ずしも学習指導要領におけるそれとは一致しない。詳細は，溝口(2010)を参照。
5) 原著では，「180°」となっているが，明らかに記載間違いであるため，引用者が訂正した。

引用・参考文献

- 伊東俊太郎 (1975). 創造の機構：科学的発見の方法論的考察. 理想(理想社), 506, 69-82.
- 溝口達也 (2010). 新訂 算数教育の理論と実際『第10章　指導方法』(pp.172-197), 聖文新社.
- 宮崎樹夫 (1995). 学校数学における証明に関する研究：証明に至る段階に説明の水準を設定することを通して. 未公刊学位論文（筑波大学）.
- アレックス・ローゼンバーグ (2011). 科学哲学：なぜ科学が哲学の問題になるのか. 春秋社.
- 柴田録治 (1987). 図形（論証）指導の改善をめざして：改善の根底に据えるべきもの. イプシロン, 29, 1-15.

鳥取大学数学教育研究　　ISSN 1881–6134

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

投稿規定

- ❖ 本誌は，次の稿を対象とします。
  - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
  - 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
  - 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
  - その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供
- ❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。
- ❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。
- ❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/