ISSN 1881–6134

鳥取大学数学教育研究
Tottori Journal for Research in Mathematics Education

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

式をよむことについての研究

~生徒の式をよむ水準の設定をめざして~

岸川友飛　*Yuto Kishikawa*

vol.15, no.6
Mar. 2012

鳥取大学 数学教育学研究室

目次

第 1 章

研究の目的と方法

本章では、研究の目的と方法を述べる。1.1 では、本研究の動機を述べ、1.2 では本研究の目的と方法を述べる。

第１章　研究の目的と方法

1.1　研究の動機

筆者は自らの学生時代の経験や研究を進めていく中で調べていった参考文献などを通して、自ら学び自ら考えることができる生徒を、数学の学習を通して育てたいと強く感じた。それは、数学の学習が、自ら調べ判断する力や、粘り強く考え続け、考えたことを相手にわかるように説明するといった論理的な思考力や表現力を高めることができるものであると考えるからである。しかし、筆者が生徒(中学・高校)のときには、ただ単に計算や解法のやり方を暗記し、それを用いて解決をしていた活動となっており、思考力や表現力を高めるといった活動になっていないように感じた。そこで、筆者は数学が持っている自分自身で確かめる活動ができるといった活動を活かすことで、与えられた問題を自分で発展させたり、発見したり、工夫してつくったりすることができるという考えをもっと授業の中に取り入れていけないか、そのような生徒自身で問題を見る目を養うことはできないかと考えた。生徒自身で問題の見る目を養うといったことから、生徒自らが授業を作っていくといった活動を考えていくことに結びつけていきたいと考えた。

そのために筆者は、数学の問題を解いていく中でただ提示された問題の答えが出せれば終わりとするのではなく、その結果や解決の過程からまた新たな問題を考えたり、活用したり、提示された問題でも一般性や規則性を見つけて先の結果を予想したりすることを生徒自身で考えさせることが、数学教育の目標や伸ばしていきたい力であるように感じた。また、「数学を教える」といったことを考えたときに、事柄の背後にあるアイディア、本質を見抜き、それを伝えることができるといった活動が大切なのではないかと考える。そこで数学を見る目、考え方、問題の本質が何か、何に目をつけることが大切になるのかといった事柄について研究を進めていきたいと感じた。

1.2　研究の目的と方法

まず、これまでの算数・数学教育はどのようなことが重視されていたのかについて先行研究を調べていった。これまでの算数・数学教育から必要と考えられた今後の算数・数学教育はどのようなことがあるのか、そこから研究の方法を模索していった。

杉山(1999)によれば、これまでの数学教育では、「わかる」「できる」を重視した教育が行われてきた。ただ、現状は、本当に「理解」を目指したものであるかというと、必ずしもそうではないように考えられていた。より多くの情報を、必要なときに確実に引き出せる、といったことを目指していたかもしれないとされており、これに対して、杉山(1999)は、これからの数学教育は、この 2 つに加えて、「みつける」「つくる」そして「つかう」ことを目指した数学教育が望まれることを主張した。「わかる」「できる」とは、その問題の意味が分からなくても公式にあてはめることで解けるといったようなことであり、典型的な例としては入学試験が考えられている。「みつける」といった活動は問題に対しての規則性を見つけ発展させていくなどのことであると考えられている。「つくる」とは、すでに知っている原理や法則をもとにして発展的に物事を考えていくことである。最後に「つかう」の活動として、数学とコンピュータを使って、現象の解析をし、問題の解決をすると考えられている。

「これまでの数学教育」　　　　「これからの数学教育」

「わかる」「できる」 ⇒ 「わかる」「できる」
＋
「みつける」「つくる」「つかう」

図 1　　　　　　　　図 2

図 2 について考えていく際に、「数学的な見方・考え方」が必要になるのではないかと考えた。「数学的な見方・考え方」とは、『様々な問題場面、あるいはその解決において、

どのように隠れていたものが明らかになるのか、そういうことを、教師は、学習指導にあたって検討することが必要とされている』と述べられていた。ここから、本研究の目的として様々な問題場面を考えたときに問題の中に隠れていたもの、つまりその問題でどんなことが言えるのか、問題の裏にあるのは何かについて見ていくことを考えていきたいと感じた。問題場面の本質を探るためにはどういった活動を通して考えていくことが必要か調べていく中で、一つの方法論として「式をよむ」といった活動があるということを知った。「式をよむ」といった活動は、式の構造に着目することで式に隠されている見方・考え方やそこから問題の本質を読みとるという活動であると考えられている。また、その「式をよむ」という活動にはさまざまなよみがあり、「式をよむ」ことには様々なレベルがある。そのレベルを知るために「式をよむ」ことによる、水準の設定を行い、解決者の水準を高めていく事が必要になるのではないかと考えた。解決者の「式をよむ」水準が高まれば解決者自身がその問題に対して発展的なことを見いだし、また新たな発見や新たな考えを持つことができるのではないかと考えた。そこで、この研究では「式をよむ」ことについて考えていき、そこからその式のよみにはどういった見方・考え方ができ、水準の設定ができるのかについて考えていくことを目的としていく。

「式をよむ」⇒「水準設定」
（ 見方・考え方 ）

図 3

［ 本論文の章構成 ］

第 1 章　研究の目的と方法
　研究の目的と方法を述べる。

第 2 章　式をよむことについて分析と考察
　式をよむことについて先行研究の分析について
　述べる。また、問題事例について考え、問題
　事例に対しての式のよみについて考察する。

2.1～2.4　式をよむことについての先行研究の分析

2.5　先行研究を踏まえて,どのような式のよみ
　　を考えていくかによる問題事例

第 3 章　式をよむことに関する水準設定
　式をよむことに関する水準を設定すること、
　水準の設定をおこなう際に必要と考える観点
　について述べる。

3.1～3.2　式をよむことに対する水準の設定について

3.3～3.4　問題事例に対する水準の設定

第 4 章　本研究の結論と今後の課題
　本研究の結論と今後の課題を述べる。

第 2 章
式をよむことについての分析と考察

本章では、式とはどういったものなのかみていき、その次に「式をよむ」活動についてみていく。「式をよむ」活動についてみていくに当たって、まず先行研究について分析、考察を行う。そして、先行研究をもとに筆者が考える問題事例を取り上げ、その問題事例に対してどのような式のよみができるのか分析、検討を行う。

第 2 章　式をよむことについての分析と考察

2.1　式についての分析

本研究を進めていくにあたり、「式をよむ」活動を考えていくことをあげた。「式をよむ」活動を考えていくにあたってまずは、式とは算数・数学教育の活動の中ではどういったものなのか、式に表すとどのようなよさがあるのかなどについて考えていくことも必要になるのではないかと考えた。

式とは、「数学のことば」であると考えられている。ある数・量の問題を日常のことばで表現されているものが「文章題」、これを数学のことばで表現したものが「式」というように考えられている。日常のことばで表現されたものを数学のことばに翻訳できると、形式的な処理ができ、結果が導かれ、その結果を解釈し直すことで、問題の解決をすることができる。これが、数学を使っての問題の解決の図式だと考えられる。実際にその方法について図式化してみると、

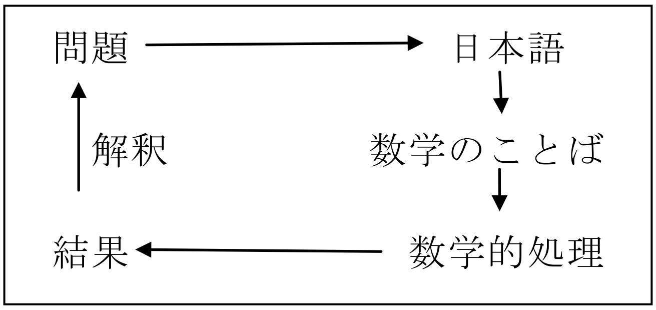

図 4

「数学的なことばで表現されているもの」、これを「数学的モデル」ということがある。ここで、「数学的モデル」ができると、数学的処理ができる。そして、問題が解決できると考えられている。問題を解決するためには何が大事か考えた際に、まずは数学的モデルをつくるということであると考えられている。つまり、式をつくる、立式することができることが大事になると考えられている。式をつくると、次にその式の意味について考えることもできるのではないだろうか。では、どういったよみが「式」をよむ活動にはあるのか。まず一つ目として、式が表していることをそのままよむという活動、そのほかにも、式の形に着目してよむという活動があ

る。次の章では、「式」をよむ活動にはどういったものがあるのか。「式」をよむという活動はどういうものなのかについて見ていく。

2.2　式をよむことに関する先行研究の分析

この章では、「式」のよみについてどのようなものがあるのか先行研究からみていった。

杉山氏による先行研究では、「式をよむ」という活動には、『ことがらを簡潔に表現するという式のよさだけでなく、式のもつ他のよさにも目を向けたいという期待がこめられている。式に表現できると、数学の対象として形式的な処理が可能になることも式のよさの一つである。』と述べられていた。また、「式をよむ」ことには以下のように様々なよみ方(①～⑦)があると杉山氏は述べている。そこで、本節は杉山氏(2012)に依拠し、式をよむことの様々なよみについて記述する。

①素朴な「よみ」

式の表していることをそのまま知る、その式が表していることが分かるという「よみ」

例えば、３＋５＝８という式があった場合

「３に５を加えたものは８に等しい」ことを知る、つまり、計算の意味そのことを知る「よみ」である。また、この素朴な「よみ」にも二つの意味がある。一つは数（量）３と５を加え合わせると、その数（量）が８になる一般的な状況を表している。

数式で問題が与えられているときは、その式に一般的に適する値を求めることが要求される。数式に表すときには、与えられた特別な場を示しているとしても、その式は一般をも表していること、逆に、一般を示してはいても、それは個々の特殊の視点から考えることができる。つまり、一つは、一般の中に特殊を見ることであり、もう一つは、特殊の中に一般を見ることである。

②具体に引き戻す「よみ」

　式を与えて具体的な問題を作らせるという活動は、一般の中に特殊を見るものである。
たとえば、「３＋５という式に当てはまる問題を作りなさい」と言われて、子どもが「赤い旗３本と白い旗５本、合わせて何本ですか」というような問題を作るのはそれに当たる。

　かけ算やわり算の式を与えて、それに当てはまるような具体的な問題を作らせることも同じである。これを「具体に引き戻してよむ」と言うことにしよう。このことの価値は、それぞれの演算の意味することの理解を深める意味をもつ。と同時に、それぞれの子がいくつもの具体例を作ることを見ることによって、一つの式がいろいろな具体を表していること、つまり、一般を意味していることを認識させる意味も持っている。

　また、抽象的な概念が、抽象的な概念として現実（具体）から遊離してしまう危険を避ける意味ももつ。「具体に引き戻してよむ」ということは、数式にかぎらず、一般に書物を読むときにも大切なことである。

③特殊の中に一般を「よむ」

　一般の中に特殊を認めるよみ、具体に引き戻すよみに対して、特殊の中に一般を見るよみが考えられる。このことは、今目の前にある特殊が、一般の中の特殊と考えること、つまり、特殊の背後にある一般を意識するということでもある。我々の指導は、このよみに頼っていることが多いが、その意識が教師にあり、「よみ」が適切に行われているかが問題となる。よみとれたことをすぐ正しいと考えるのではなく、そのことが正しいかどうかを確かめる姿勢も必要である。教師が期待しているように子どもがよめていないことがあるということは常に留意しておきたいことである。何をどのようによませようとしているのか、他のよみ方がないのかということを十分考えておくことが必要であろう。

④意図や法則を「よむ」

読み手の力によって、さらに一般的なことを式からよむこともできる。小説でいえば、そこに書かれている事実だけではなく、その事実が示唆している登場人物の性格、さらには、人生にとって意味のある示唆、作者がその小説を通して語りたいことまでよみとることができる。それと同じように、式から書き手の意図などをよむことも可能である。

⑤具体に法則を「よみこむ」

特殊の中に一般をよむという「よみ」があり、一つの式から演算について成り立つ法則までよむことができることを見てきたが、逆に、具体に法則をよみこむという「よみ」がある。このときは、式の形に着目することが大切である。

⑥問題のからくりを「よむ」

導かれてきた結果をそのままにしておかず、式の形に着目してよんでみる試みはしたいものである。そのことにより、意味のあることが見つかることがあるからである。「式をよむ」ことは、問題場面の本質を明らかにするためにも有効である。式をよんで価値あることを導こうとするならば、与えられた数値を使って表現したり、与えられた数値をできるだけ後まで残しておくことが必要である。与えられた数値が、この問題の要素を担っているからである。ただ答えを出すことだけを求めて式を書いていては分からないことである。「式をよむ」ことに価値を認め、そのつもりで式を書き、式をよむ気持ちがなければ見つけられない。「その答えが出てくるからくりは何だろうか」「法則はないだろうか」「何か関係があるのだろうか」という姿勢をもって式や証明を書き、それを「よむ」気持、意識が大切である。大切なことは、与えられた問題について答えを出すことだけで満足するのではなく、そこに法則を見ようとすること、その問題のからくりを知ろうとし、式をよむ努力をすることである。これによって問題の本質がより一層明らかになってくる。

⑦能率的合理的な処理をするための「よみ」

「式をよむ」ことの中には能率よく処理をするために「よむ」ということもある。長い式を計算するとき、端から計算するのではなく、適当な組合せを考えると、早く容易に計算できることがある。これも式をよむことによってできることである。特殊な数に着目していくと問題が簡単に解けてしまうことがある。それができるためには、数や式をよく見、そこにある法則や性質を読んで活かすことが必要である。このようにして、物事の処理をうまくしていくことができる事がある。

2.3　式をよむことに対する考察

「式をよむ」ことについては、2.2 にあげた他にもまだ様々な「よみ」があり、様々な意味があるのではないかと考える。また「式のよみ」にも個人差があり、学習が進めば進むほど、よみとることも多くなるはずである。そのよみの中には、価値あることもよみとることができるようになるはずである。ここでの考察により、「式をよむ」ことは育てられる能力と考えるのではなく、価値あるものを見つける一つの手段であるとも考えることができる。ここでいう、価値あるものというのは式の形によって一見異なって見えるような問題でも、構造が同じことに気づくことができるなどではないかと筆者は考える。また、他にも問題解決にあたる際に生徒の思考過程をよむこと、過程手順・手続きの意味を作り上げることなど「式をよむ」ことで見つけることができるのではないかと考える。ここで、筆者が大切にしたいことは教師と子どもが互いに「式をよむ」姿勢をもち、教師と子どもが共に価値あるものを見つけ、算数・数学を楽しめることだと考える。
「式をよむ」活動は式から何か意味を見出すことである。
「式をよむ」という活動には

Ⅰ「意味が分かる」
Ⅱ「本質が分かる」
Ⅲ「からくりが分かる」

ということが考えられる。

Ⅱができるとその考え方をもとに新たなことが分かり、発展が可能になるのではないかと考えられる。発展ができることを通して発見、創造の手がかりを得ることができるのではないかと考える。また上でのⅠ～Ⅲの分かるは一つひとつが別々に分かるという活動ではなく、3 つの分かるという活動がお互いに関係しあっている活動ではないかと考える。つまり、「意味が分かる」の中に「本質が分かる」、「からくりが分かる」といったことも含まれると筆者は考える。3 つがお互いに関係していると考えていく中で、筆者は先行研究の中で考えられていた「式をよむ」活動の中の「問題のからくりをよむ」活動に焦点をあてた。

2.4　問題のからくりをよむことについての考察

2.4.1　問題のからくりをよむ

2.2 で述べたように、杉山氏は「式をよむ」ことについては様々なよみがあることを示している。その中で筆者は⑥問題のからくりを「よむ」ことについてここでは焦点を当て研究対象とした。その理由は、問題のからくりを知ろうとし、式をよむ努力をすることで問題の本質がより一層明らかになってくると先行研究の中で述べられていたからである。また杉山氏の先行研究を通して筆者が感じた⑥というのはどういったものなのかということについても述べていく。

杉山氏による<u>問題の本質</u>とは、『文章題などの問題を見たときに問題の構造を見抜くことや図では分かりにくいことでも図が表している関係を式に表すことで気づくことが出来ることである』と述べられている。また逆に、式では知っていても、意味が分からないことがある。例えば展開の公式は分配法則を用いて機械的に求めることができるがそれだけのものである。そこで、図形的に解釈することで、式の意味していることが分かるということが問題の本質を知っていく上で大切なことではないだろうかと考えられている。また、問題解決の場面で与えられている数値を使って表現したりすることで、はじめ問題をよんだ時には気づかない時にも式をよむことで気づくことができることがあると考えられ

る。なぜなら与えられている数値というものが、この問題の要素を担っているということも考えられるからである。式を見ていく中で式をうまく処理することも必要となると考えられるが、同時に、式が意味している事柄についてみていくことが必要であると考える。

　先行研究から問題のからくりをよむ活動についてみていく中で、筆者は杉山氏が考えている問題の本質と同じように、その式がどのような問題の構造をつくっているのかみていくことが大切であると考える。そして、その中で筆者が感じた問題のからくりとは問題の意味を読みとること、問題を解いていく中で背景(式の中から解決の手がかり)となるものは何かをよみとることではないかと考えた。問題のからくりをよむというのは、与えられた問題についてただ答えを出すことだけで満足をするのではなく、その問題の答えを導き出していこうとするときに問題の本質は何であるかをみていくことであると考える。

2.4.2　先行研究の問題のからくりをよむ問題事例

先行研究ではどういった式のよみがされていたのか。実際に先行研究で取り上げられている問題事例についてみていき、「問題のからくりをよむ」ことについても整理していく。

杉山氏(2012)の「問題のからくりをよむ」問題事例

『二等辺三角形△ABC の等辺 AB , AC の上に、図のように正三角形を書き、その頂点をそれぞれ D , E とする。

∠B＝77°のとき、∠BDC ，∠DCB ，∠DPB の大きさをそれぞれ求めよ。（ただし、P は辺 BE と辺 CD の交点）』

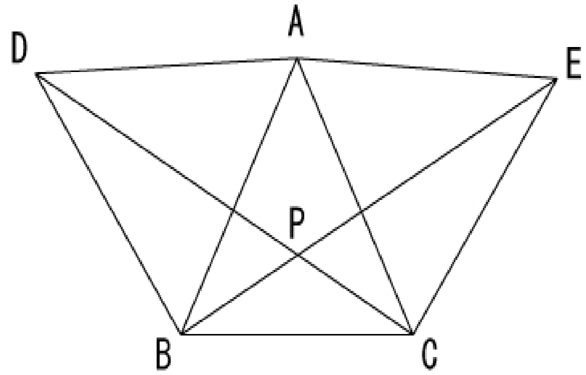

図 5

解決の手段として、素朴に計算で求めるとしたら、二等辺三角形の底角が 77°なので

頂角 BAC は

∠BAC＝180－77×2＝26

△ADB は正三角形だから

∠DAC＝60＋26＝86

△ADC は二等辺三角形だから

∠ADC＝（180－86）÷2＝47

∠BDC＝60－47＝13

∠DCB=∠ACB－∠ACD＝∠ABC－∠ADC

＝77－47＝30

∠DPB＝∠DCB＋∠EBC＝∠DCB＋∠DCB

＝30＋30＝60

と求められる。

問題解決を考えた際にはこのようにすることも考えられるが、「式をよむ」ことに価値をおいた場合、このような式は書かない。なぜなら、与えられている数値を用いて式が書かれていないために、式をよみとる手がかりが奪われているからであると考えられる。式をよんで価値あることを導こうとするならば、与えられている数値を使って表現したり、与えられた数値をできるだけ後まで残しておくことが必要である。なぜなら与えられた数値が、この問題の要素を担っているからであると考えられている。そこで、上の解決を「式をよむ」ことについて価値をおいて解決の方法を考えると、

∠BDC＝60－47
　　　= 60－{180－(180－77×2＋60)}÷2
　　　= (60×2－180＋180－77×2＋60)÷2
　　　= (60×3－77×2)÷2
　　　= (180－77×2)÷2

すると、最後に出てきた式[（180－77×2）÷2]から「∠BDC は△ABC の頂角∠BAC の半分である」ことがよみとれる。正三角形とは関係なしに、頂角の半分なのである。
ここで、二等辺三角形と一つの正三角形を取り出してみる。そして、頂角 A を中心にして円を書くと、D も B も C もその円周上にある。すると、大きさを求めようとした∠BDC は円周角になっていることが分かる。円周角は中心角の半分だから、∠BDC は頂角 A の半分であってよいことが分かる。

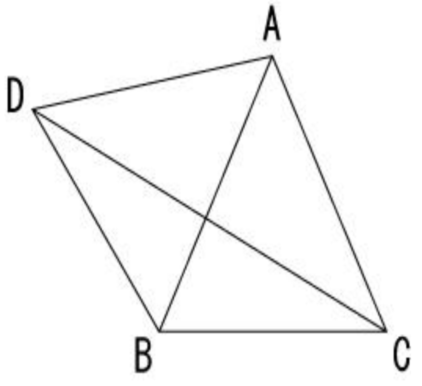

図 6

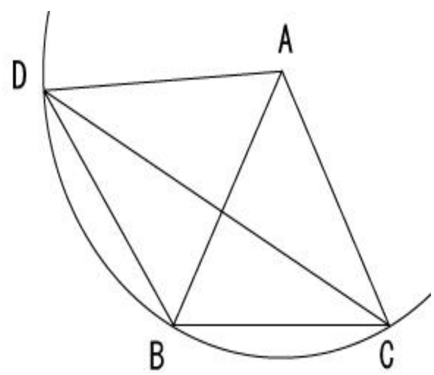

図 7

証明をしてみると新たに分かってくることもある。証明を見てみると、使っているのはABを半径とした円を書くことと、AB＝AC＝ADから、B、C、Dがこの円周の上にくるということだけである。ということは、最初の問題は正三角形である必要はなく、ADがもとの二等辺三角形の等辺ABと等しければよく、DBまでABに等しくする必要はないことが分かる。つまり、正三角形ABDである必要はなくABとADの長さが等しければ同じように考えることができる。また逆にある正三角形ACEに関しても正三角形ABDと同様のように言える。

2.5　問題のからくりをよむ問題事例

2.5.1　問題事例

杉山氏の問題事例など先行研究での式をよむ活動を通して、どういった式のよみを解決者によませていきたかが大切になると感じた。そのための問題事例を考え、問題事例に対してのどのような式のよみができるのかについてみていく。今回筆者の問題事例として、以下のような問題を考えた。この問題についてどのようなアプローチがあるのか。また、アプローチに対してどのような式のよみがあるのかについてみていく。

(問題)次の和の最大の素因数を求めよ。

$$0! + 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + 4 \times 4! + \cdots + 20 \times 20!$$

この問題を考えた際に、全ての項をそれぞれ計算して計算した項を足しあわせ問題を解決していくといった考えを持つかもしれない。だが、その考えを用いていく際に考えられることはとても手間がかかることや、また計算のミスなど問題の解決に困難を感じるなど考えられる。実際ここでは20までとなっているが、100や1000など数が大きくなったときにはどうしたらよいかなどの問題も考えられる。そのように考えた際に計算をせずとも問題の解決を考えることができるのか。問題ができている式の意味についてみていき、そこ

から解決の手がかりを得ることで問題解決を行うことはできないか考えた。つまり、「問題のからくりをよむ」といったよみをこの問題で考えていくことで、計算せずとも問題が分かるといったことができるのではないか、問題の本質といったものが分かるのではないかと考えた。そこでまず、立式することでどんな数の時にも成り立つといった根拠をみつけることはできないか考えた。問題事例を全て足し合わせた数は次の式のように立式することができる。

$$S=0!+\sum_{n=1}^{20}(n\times n!)$$

上のように式を立式することはできるが、この式からでは問題である最大の素因数を求めるといったことは式の中から見つけ出しにくいのではないかと考えた。実際この式を見ているだけでは上手く解決の手がかりを得るといったことが筆者はできなかった。では、立式する前に何か手がかりを得ることはできないか。また、違った形に式の立式はできないか。計算の中から考えの手がかりや問題の規則性を得ることはできないか考えた。

それぞれの項と出てきた項を足しあわせていくといったことをおこなった。その時に下のような問題の規則性があるのではないかと推測ができた。では、実際にその推測を根拠とする式は何かをみつけていくといったことが必要となってくる。

0まで	$0!$	=	1		
1	$0!+1\times1! = 1+1$	=	2		$\times2$
2	$2 + 4$	=	6	$=2\times3$	$\times3$
3	$6 + 18$	=	24	$=2^3\times3$	$\times4$
4	$24 + 96$	=	120	$=2^3\times3\times5$	$\times5$
5	$120 + 600$	=	720	$=2^4\times3^2\times5$	$\times6$
6	$720 + 4320$	=	5040	$=2^4\times3^2\times5\times7$	$\times7$
:					
20まで					
			前の数×(n+1)		×(n+2)

前の数と次に出てくる数との関係を見てみると、上のような倍数の規則があるのではないかと考えられる。上のような規則があるのではないかと推測することができたが、本当にその推測は正しいのか。最初の方にだけ倍数の規則があるだけではないか、どんなときにも成り立つといった根拠をまだこの過程では示されていない。この規則が成り立つ根拠を見つけ出し、立式できた式から式をよむ活動を見ていく必要がある。ここで「問題のからくりをよむ」には次のような手順が考えられる。

〔パターン化　⇒　問題の一般化　⇒　からくりをよむ〕

ここでいう、パターン化というのがどのような式のアプローチができるのか、またそのアプローチからどういった規則を見出していけたのかをみていくことであると考える。そして、そこからみつけ出した規則が成り立つことを論証していくことが問題の一般化といったように考えることができる。最後のからくりをよむにあたるところが、立式できた式からどういった式のよみができたのかを考えていくところである。

この手順を考えるにあたり、まず式のアプローチについてこの問題にはどういったことが考えられるのかみていくことが必要になると考える。

2.5.2　問題事例に対してのアプローチ

問題事例に対して、どのような式のよみができるのか見ていく前の準備として、ここではどのようなアプローチがあるのかについてみていく。式をよむ活動についてみていったときに式をよむ活動には様々な式のよみがあり、そのよみはよむ人によっても、また問題によっても異なるということが分かった。同様に式をよむアプローチを考えていく際にも様々なアプローチがあるのではないかと式をよむ活動をみていく中で感じた。今回の問題事例に対しても様々な式をよむアプローチがあると考えられるが、今回は 2 つのアプローチを考えそのアプローチについてみていく。

★アプローチ 1

20 まで考える前に 4 までで分かることはないか、何か規則を見つけることはできないかを考えた。

以下のようにそれぞれの項をみていったとき

$$0!+1\times1!+2\times2!+3\times3!+4\times4!$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1+1}_{2}+4}_{6}+18}_{24}+96}_{120}$$

ここから、$S_2=2$，$S_3=6$，$S_4=24$，$S_5=120$ とすると

$$\begin{cases} S_3=3S_2 \\ S_4=4S_3 \\ S_5=5S_4 \end{cases}$$

表す事ができる。

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ S_n &= n\times S_{n-1} \\ &= n\times\{(n-1)\times S_{n-2}\} \\ &= \cdots = n\times\{(n-1)\times\ldots\times3\times S_2\} \\ &= n\times(n-1)\times\ldots\times3\times2 \\ &= (n)! \end{aligned}$$

つまり、ここで0!初項としてみたときに

初項　2 項　3 項　4 項　5 項　⋯　21 項

$$0! + 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + 4 \times 4! + \cdots + 20 \times 20!$$

20 は第 21 項目にあるとみることができるので、21! となり最大の素因数はその中に含まれている 19 になるのではないかと考えることができる。しかし、これは帰納的推論となっていて本当に成り立つのか根拠は見つけられていない。ここで、(n)! が一般に成り立つ根拠を式から見つける必要がある。その根拠を見つけることで、いつも成り立つことを論証できる。いつも成り立つことを論証するためには数学的帰納法を用いてこの問題での演繹は何なのか、式の中に根拠を見出しからくりを探る。

★アプローチ 2

$0! + 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + 4 \times 4! + \cdots + 20 \times 20!$　までを

$b_1 = 0!$ ～ $b_{20} = 20 \times 20!$ といったようにそれぞれの項としてみたとき、それぞれの項ができている形に注目すると、b_1 以外の項では $n \times n!$ と表す事ができる(ここでの n は 2 ～ 20 までを示す)。ここでは、それぞれの項の形を手がかりに式を見ていくことはできないか考えた。すると、以下のような式のアプローチができるのではないかと考えた。

$0! + 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + 4 \times 4! + \cdots + 20 \times 20!$

$\underbrace{1 \qquad 1}$　2×2　$3 \times 3 \times 2$　⋯　$20 \times 20 \times \cdots \times 3 \times 2$

2　2×2　$3 \times 3 \times 2$　⋯　$20 \times 20 \times \cdots \times 3 \times 2$

$2(\underbrace{1 \qquad 2}_{3}$　3×3　$4 \times 4 \times 3$　⋯　$20 \times 20 \times \cdots \times 3)$

$2 \times 3\,(\underbrace{1 \qquad\qquad 3}_{4}$　4×4　⋯　$20 \times 20 \times \cdots \times 4)$

$2 \times 3 \times 4\,(\underbrace{1 \qquad\qquad\qquad 4}_{5}$　⋯　$20 \times 20 \times \cdots \times 5)$

:

$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times 20\,(\underbrace{1 \qquad 20}_{21})$

$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times 20 \times 21 \quad \Rightarrow \quad 21!$

このアプローチはそれぞれの項に含まれている倍数をくくり出していくと、また新たに倍数をくくり出していくといった考えである。このアプローチはそれぞれの項の形を手がかりに考えている。最終的にこのアプローチから出た考えは全ての項を足し合わせた数は(　項数＋1　)!　と見ることができるのではないかと推測した。　$\Rightarrow$　$b_1 + \cdots + b_n = (n+1)!$
式の中に根拠を見つけ出し、式をよむ活動について考えていく。

2.5.3　アプロ―チからの式のよみ

ここでは、前節で述べたアプローチ 1、アプローチ 2 のそれぞれについて式の根拠を見つけ出し、どのような式のよみができるのかについてみていく。式の根拠を見つけることで、どんな数のときにも成り立つことがいえ、それぞれのアプローチについて正しいことがいえると考えられる。

●アプローチ 1 についてのよみ
アプローチ　1　について考えていく際にそれぞれの項とそれぞれの項を足しあわせたものと分けて見ていくと、

それぞれの項	それぞれを足しあわせていった数	
$a_1 = 0!$	$S_1 = 1 = 1!$	
	$\Downarrow$	×2
$a_2 = 1 \times 1!$	$S_2 = 2 = 2!$	
	$\Downarrow$	×3
$a_3 = 2 \times 2!$	$S_3 = 6 = 3!$	
	$\Downarrow$	×4
$a_4 = 3 \times 3!$	$S_4 = 24 = 4!$	
	$\Downarrow$	×5
$a_5 = 4 \times 4!$	$S_5 = 120 = 5!$	
	$\Downarrow$	×6
$a_6 = 5 \times 5!$	$S_6 = 720 = 6!$	

このアプローチについてみていくと、それぞれの項を足し合わせてく数が増えていくと、足し合わせた数は 2 倍,3 倍,4 倍,・・・と増えていくことが分かる。ではこの規則はどんな数の時も成り立つのかについて考えていく。足し合わせていくと数が増えていくということから前の数が次の数に関係していることが分かる。このときそれぞれの項に注目して、そこから式を考えることはできないか。それぞれの項について見ていくと、前の結果が次の結果にa_1以外の項で
(次の項数)!−(前の項数)! といった関係を見ることができる。それぞれの項は以下のような式の形を見ることができる。

それぞれの項に注目すると、

$a_1 = 0!$

$a_2 = 1 \times 1!$

$2! - 1!$

$a_3 = 2 \times 2!$

$3! - 2!$

$a_4 = 3 \times 3!$

$4! - 3!$

$a_5 = 4 \times 4!$

$5! - 4!$

$a_6 = 5 \times 5!$

$6! - 5!$

$(n)! - (n-1)!$ とみることができる。

この式を見てみると、それぞれの項はその項の数の階乗から前の項の数の階乗を引いたものとなっていると見ることができる。この式についてどんな数のときにも成り立つか、自然数 n を用いて第 n 項目はどうみることができるのか考える。

$$a_n = n! - (n-1)!$$

(ただし、n が 1 の場合は上の式は成り立たない。)

⇒ $a_1 = (1)! - (0)! = 0$ となり、$a_n = n! - (n-1)!$が成り立たないことが分かる。

ここで、n が 1 に対しては $a_1 = (0)!$ として以下のように n～1 まで見ていく。

$$a_n = (n)! - (n-1)!$$
$$a_{n-1} = (n-1)! - (n-2)!$$
$$a_{n-2} = (n-2)! - (n-1)!$$

:

$$a_3 = (3)! - (2)!$$
$$a_2 = (2)! - (1)!$$
$$a_1 = (0)!$$

n~1 までを全て足し合わせると見たとき、左辺をS_nと見たときに、右辺は 1 階層目の $0!$ と 2 階層目の $-(1)!$ が打ち消し合う。同様に他の階層でも同じように見ていくことができ、最終的に足しあわせた際に右辺は $(n)!$ となることが分かる。$a_n + \sim a_1 = n! \quad \Rightarrow \quad S_n = n!$

また、$a_n = n! - (n-1)!$の式を見た際に$a_n = n! - (n-1)! = (n-1)!\,(n-1)$ となっていると見ることもできる。このことから、前の数は次の数を表すときに関係しているとみることができるのではないかと考えた。

それぞれの項を順々に足し合わせていくことを以下のように図で考えていくと、

0!=1 → ○

0!+1×1!=2 → ○○

0!+1×1!+2×2!=6 → ○○○○○○

0!+1×1!+2×2!+3×3!=24 → $\underbrace{○○○\cdots○○○}_{24}$

倍数関係となっていることを用いて○の並び方を考えると、

0! → 0!+1×1!

○　　　○○

○が 2 つできる。→○×2

0!+1×1! → 0!+1×1!+2×2!

　　　　　　　　　　○○
○○　　　　　　　　○○
　　　　　　　　　　○○

○○の組が 3 つできる。→○○×3

0!+1×1!+2×2! → 0!+1×1!+2×2!+3×3!

○○　　　　　　　○○○○○○○○
○○　　　　　　　○○○○○○○○
○○　　　　　　　○○○○○○○○

○○　　　　　　　　　　　　○○
○○の組が 4 つできる。→ ○○×4
○○　　　　　　　　　　　　○○

○の並び変えより、図を以下のように見ることもできる。

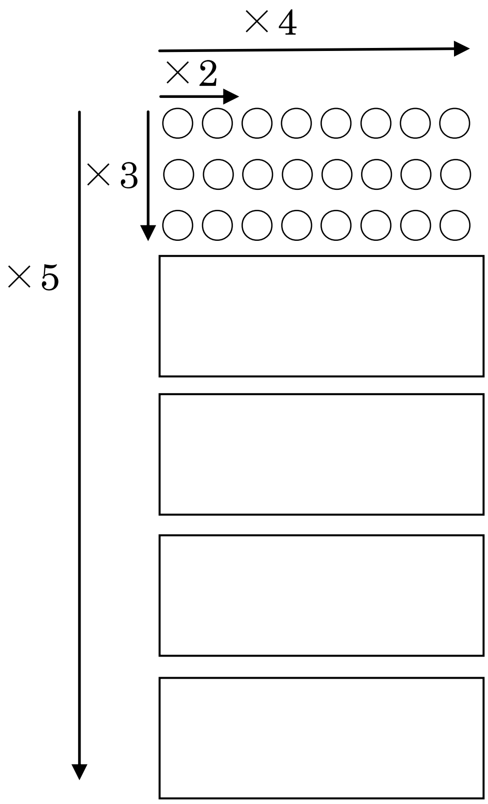

図 8

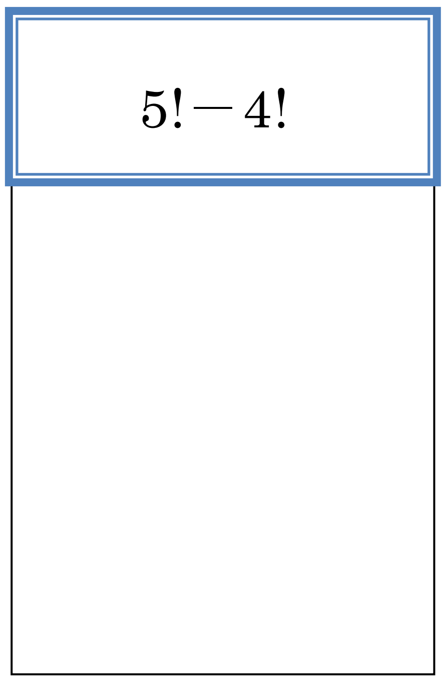

図 9

図 8 は〇がそれぞれの増えていく数である。$0! = 1$というのを〇1 つで表し、$0! + 1 \times 1! = 2$というのを〇が 2 つといったようにみていったとき、図 8 のように倍数を見ていくことができるのではないかと考えた。図 8 を見ていったとき偶数の倍数を横に、奇数の倍数を縦に見ていくといった見方である。また図 8 で表している(×5)までは $S_4 = 5!$ を表している図といったことが見ることができる。次に図 9 の $5! - 4!$ は $S_4 - S_3$ のことを表しているとみることができ、 $S_4 - S_3$ の式から a_5 であることを図からよみとれることができる。このように、式から図に表してみることでよめる式のよみや、図から式にすることでよむことができるよみがあることが分かる。

アプローチ 1 についてみていく際に次にどのような推論ができるのか。それぞれの項からどのような式が成り立つか、どのような式とよむことができるのか考えてみると、

・それぞれの項を一つずつ見ていくと、a_1以外の項では $n \times n!$ となっており、その項は次の $n!$ から前の $(n-1)!$ を引いたものとなっていることが分かる。また、次の $(n!)$ から前の $(n-1)!$を引いた式をみていくと前の $(n-1)!$でくくることができ、くくり出した後の式は前の項の項数となっている。これは、それぞれの項を表しているとみることができる。

$$n! - (n-1)! = (n-1)!(n-1)$$

次にそれぞれの項を全て足しあわせる。つまり、

$$0! + 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + 4 \times 4! + \cdots + 20 \times 20!$$

n 階層目～1 階層目を全て足し合わせたとみると、

・項を順々に全て足していったときに、左辺では全て足し合わせた数 S_n と表すと、右辺ではa_2の後の数－$(1)!$と a_1の$(0)!$は打ち消し合い、他の階層でも同じように見ていくことができる。最終的に右辺は $n!$ となり、式は

a_n～$a_1 = S_n = n!$ となることを式より見ていくことができる。

●アプローチ2についての式のよみ

ここで、それぞれの項を順々に足しあわせていく。

$$b_0 = 0! = 1$$

$$b_1 = \underbrace{0!}_{b_0} + (1)(1!) = b_0 + (1)(1!) = b_0(1+1)$$

$$b_2 = \underbrace{0! + (1)(1!)}_{b_1} + (2)(2!) = b_1 + (2)(2!) = b_1(1+2)$$

$$b_3 = \underbrace{0! + (1)(1!) + (2)(2!)}_{b_2} + (3)(3!) = b_2 + (3)(3!) = b_2(1+3)$$

ここで第 m 項目(m は自然数)のときは

$$b_m = \underbrace{0! + (1)(1!) + (2)(2!) + (3)(3!) + \cdots + (m-2)(m-2!)}_{b_{m-1}}$$
$$+ (m-1)(m-1!) + (m)(m!)$$

$$= b_{m-1}(1+m)$$

となることが考えられる。

ここから、次のようにそれぞれの階層ごとに分けて式をみていくことをおこなった。

$$b_m = b_{m-1}(1+m)$$
$$b_{m-1} = b_{m-2}\{1 + (m-1)\}$$
$$b_{m-2} = b_{m-3}\{1 + (m-2)\}$$
$$\vdots$$
$$b_3 = b_2(1+3)$$
$$b_2 = b_1(1+2)$$
$$b_1 = b_0(1+1)$$

それぞれの階層の式をみていった際に、2 階層目の右辺 b_1 は 1 階層目の左辺 b_1 のことを表している。つまり、2 階層目の式 $b_2 = b_1(1+2) = \{b_0(1+1)\}(1+2)$ とみることができる。この考えを用いて考えていくと、階数が増えていくごとに 2 倍,3 倍,⋯とくくり出せるとみることができる。

n 階層（ b_nのとき ）	くくり出せる倍数	
0 階層目（ b_0のとき ）	1 倍	1!
	⇩	⇩
1 階層目（ b_1のとき ）	2 倍	2!
	⇩	⇩
2 階層目（ b_2のとき ）	3 倍	3!
:	:	:
m 階層目（ b_mのとき ）	m+1 倍	$(m+1)!$

それぞれの階層を手がかりに b_m を見ていくと、以下のような式のよみができる。

$$
\begin{aligned}
b_m &= b_{m-1}(1+m) \\
&= b_{m-2}\{1+(m-1)\}(1+m) \\
&= b_{m-3}\{1+(m-2)\}\{1+(m-1)\}(1+m) \\
&= \cdots \\
&= b_2(1+3)\ldots\{1+(m-2)\}\{1+(m-1)\}(1+m) \\
&= b_1(1+2)(1+3)\ldots\{1+(m-2)\}\{1+(m-1)\}(1+m) \\
&= b_0(1+1)(1+2)(1+3)\ldots\{1+(m-2)\} \\
&\qquad \{1+(m-1)\}(1+m) \\
&= 1\times 2\times 3\times 4\times\cdots\times(m-1)\times m\times(m+1) \\
&= (m+1)!
\end{aligned}
$$

このように新しい階層に前の階層が含まれていることを用いて考えていくことができる。

第 2 章の要約

本研究は、数学教育において生徒自身が問題の本質を見抜き、それを伝えるといった活動が大切になるのではないかと感じ、様々な問題場面で隠れているもの、その問題でどんなことが言えるのかについて考えていく力を養っていくことを目的としている。式をよむ活動に焦点を当て、問題の本質についてどのようにみることができるのかについてみていく。第 2 章では、式をよむ活動とは何か、式をよむためにはどのようなことが大切なのかについて考察した。先行研究の分析より、式をよむ活動について次のような考えを得ることができた。

○式をよむ活動には様々なよみがあり、その一つ一つのよみが価値ある活動をみつけることができる手段である。
⇒様々な式をよむ活動の中で、新たなことが分かり、発展が可能になると考えられる。

○先行研究の分析より、問題の解決を考えていくときにはどのような式のよみを解決者に期待するのか。
⇒どのような問題事例を取り上げるかを検討することが必要となる。

○「問題のからくりをよむ」手順として、
[パターン化 ⇒ 問題の一般化 ⇒ からくりをよむ]
といったことが考えられ、それぞれの手順を考え、問題のからくりをよむことについて検討していく。

式をよむ活動には様々なよみがあることから、第 3 章では式をよむことに対する水準の設定について検討していく。

第 3 章
式をよむことに関する水準の設定

本章では、水準を設定するとは何か、水準を設定することのよさについて検討する。水準を設定するためには何が必要となるのか、水準を設定することで 2 章までの式のよみはどのようにみていくことができるのか述べる。また、筆者が考えた問題事例に対して水準を設定することで分かったことは何か考察する。

第３章　式をよむことに関する水準の設定

3.1　水準設定の意図

２章までは式について、また式をよむことについて述べてきた。本章では水準の設定について述べていく。式をよむ活動に水準の設定が必要だと考えたのは、その問題を解いていくプロセスをみてみると、一見同じように見えるようなものでも異なっているといったことが考えられる。異なっているプロセスの際に、水準の設定を設けることで、問題の構造が分かりやすくなり、水準を高めていく中の授業者の支援も考えやすくなるのではないかと考えたからである。式をよむ活動について考えていった際、式をよむ活動には様々なレベルのよみがあり、その一つ一つのよみに価値があると述べてきた。価値あることを見つけ出したり、解決の初めは分からなかった事柄でも水準の設定を設けることで分かる手助けをしてくれるのではないかと考えたからである。筆者は、この分からなかったことが分かるといったことは、新しい発見に繋がるのではないかと考えた。水準を設定したときにどのように活動が変化していくのかをみていくことも大切な活動として見ていきたいと考えている。水準について考えていくにあたって、筆者の問題事例に対してどういった水準の設定ができるのかについてみていく。そして今後は、他の問題にも同じような水準の設定を考えることはできないか、また同じような水準の設定ができない場合はどのような違った水準の設定ができるのかについても検討していきたいと考えている。水準の設定をたてるにあたって、まず大事になるのは筆者自身がそれぞれの問題に対してどのような「式のよみ」(⑥ 問題のからくり）ができたのかが大切になってくると考える。また、「式をよむ」といった活動は前でも述べたようによむ人によっても、問題によっても様々なよみ方がある。式をよんでいく中でまた違った見方・考え方がみつかっていくかもしれない。水準を設定するにあたり様々なレベルでの考えがあり、各発達段階で水準の設定に変化があることも考えられるが、ここではそれらについては考慮せず、問題をよんでいくことでの水準の設定について考える。

水準を設定する必要性について考えたが、ではどのように考えていくと水準を設定することができるのかについてみていく。水準といったものを考えたときには、様々な見方・考え方があり、水準はバラバラになっているのではないかと考えた。つまり、水準を設定するためにはしっかりと整理することも大切であると考えた。このとき、水準を設定していくにあたり、それぞれの式のよみに対してどういった観点を持っているのかを考えていくことが必要だと考えた。ここで観点とは式をよむ人がその式に対してどのような見方・考え方をしたのか、どのような価値を見出すことができたのか、式をよむにあたってどういった推論を持ったかといったことであると筆者は考える。従ってまずは、水準設定をおこなっていくにあたって、観点について考えていくことを行う。

3.2　水準設定を行うための観点の検討

水準設定をおこなうことのよさについて前節でみていった。その中で、水準の設定をおこなうためには観点が必要になるのではないかと考えた。ここでは観点とは何か、また観点を立てるためにはどういったことが必要になるのかについてみていく。

筆者は水準の設定を考えていくプロセスとして、

〔 観点を探す　⇒　水準の設定について 〕

と考えていくことが必要だと考えた。観点とはそれぞれの式のよみに対し、どういった見方・考え方ができたのかといったことであると考えた。観点を考えていく際には何が大切になるのか、どういう推論がたてられるのかについてみていくことでみえてくるものであると考える。また、水準を設定するにあたって、観点は二つ以上必要だと考えた。観点を二つ以上設定することで、一方向だけの問題の見方・考え方ではなく、様々な方向からの見方・考え方ができるからであると考える。下図のように観点を二つ以上設定することで、水準設定の分類ができ、事象の分析(整理)ができ、問題の構造をよみとりやすくなると考えられる。水準設定をする際にはなるべく多くの観点を持つことで問題の構造をよみやすく

すると考えられる。ここで観点を二つ(観点 A , 観点 B)考えた際の水準設定はどうなるのかについて見てみる。

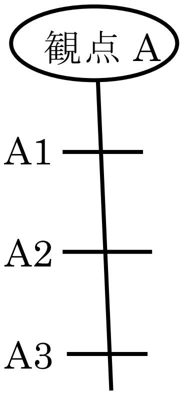

図 10

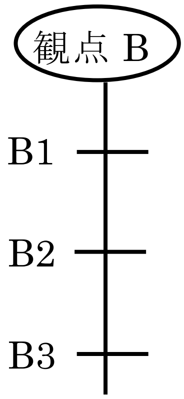

図 11

ここでの観点 A や B の数はそれぞれ 3 つずつとなっているが問題の見方・考え方を考えたときには増えるといったことも考えることができる。観点の数や観点の中の見方・考え方に関しても、それぞれの問題事例に関して異なることや観点を立てる人によっても異なることが考えられる。今回の研究に関しては筆者が考えた問題事例に対しての式をよむ観点についてどのようなことが考えられるのかについてみていく。

ここで、例として上の二つの観点(A , B)から水準設定を考えていくと

観点 A 観点 B	A1	A2	A3
B1	高い		
B2			
B3			低い

表 1

ここでは、観点(A3 , B3)を水準が低く、観点(A1 , B1)を水準が高いと設定したとき、低→高の道筋としては 6 通りの行き方が考えられる。しかし、理論的にありえないことなど考えられることがある、その場合は必ずしも道筋は 6 通りでは

ないことも考えられる。また観点 A , B はここでは、観点A(A1 , A2 , A3)、観点 B(B1 , B2 ,B3)といったようにそれぞれ 3 つずつ考えていたが、上で述べたように問題や観点を立てる人によって変わることも考えられるため、道筋としては多くなったり、少なくなったりすることも考えられる。上では 2 つの観点を考えたときの水準設定は二次元としてみることができるとみていったが、もし観点が 3 つや 4 つと増えていく際には三次元、四次元として水準設定をもっと細かく見ていくことができると考える。

3.3　問題事例(2.4)に対しての観点・水準設定

前節までは水準設定・観点とはどういったものかといったことについてみていった。この節では、問題事例についての観点・水準設定をみていく。問題事例についての観点は筆者がどのような見方・考え方ができたかについてここでは上げ、その観点を用いてどのような式のよみに対する水準設定ができるのかについてみていく。また、問題事例についての式をよむアプローチについて二つ考え、それに対する式のよみを考えたが観点・水準の設定に関してはアプローチ 1 についてみていくことにする。

アプローチ 1 についての観点

観点 A, それぞれの項の式からのよみ

観点 B, 項の式を全て足し合わせた式からのよみ

ここでは、観点を上のように 2 つ(観点 A , 観点 B)設定した。また、2 つの観点それぞれの中でどのようなことをよむことができるのか A1~A3、B1~B3 といったように 3 つずつ考えた。観点 A と観点 B で A3 から A1、B3 から B1 に向かうほどより様々なよみができているものとし、より高いよみができているものとしている。

観点 A (それぞれの項の式からのよみ)の A1～A3 は以下のように設定した。

A1　それぞれの項の式は $a_n = (n)! - (n-1)!$ と表すことができ(ただし n が 1 は成り立たない。)、a_n～a_1 までを全て足し合わせると $S_n = n!$ と表すことができる。

A2　それぞれの項の式は前の項数 $(n-1)$ に前の項数の階乗($(n-1)!$)をかけたものとなっている。
つまり、$a_n = (n-1) \times (n-1)!$ となっている。

A3　それぞれの項は前の項が関係している。

観点 B (項の式を足し合わせた式からのよみ)の B1～B3 は以下のように設定した。

B1　新しい項までを足し合わせた式($S_n = n!$)から前の項までを足し合わせた式($S_{n-1} = (n-1)!$)を引いたときに出てくる式は新しい項の数を表す。

$$S_n - S_{n-1} = n! - (n-1)! = a_n$$

B2　図的にそれぞれの項までを足し合わせたと見ていくと、横に偶数倍、縦に奇数倍と倍数関係を考えていくことができる。

B3　それぞれの項数までを順々に足し合わせていったときに足し合わせた項数ずつ倍数されていく。
(例) $S_3 = 3 \times S_2$

上のように観点の中にどのような推論が立てることができるのか見ていったときに、今回のそれぞれの観点は観点 A を考えていく中で観点 B を考えていくことができることや観点 B を考えていく中で観点 A を考えていくことができるといったようにお互いが関係しあっている。
2 つの観点からの水準設定を以下のように①(A1 , B1)が一番高い水準と位置づけ、⑨(A3 , B3)を一番低い水準とみたときの表とする。

観点 A 観点 B	A1	A2	A3
B1	①	②	③
B2	④	⑤	⑥
B3	⑦	⑧	⑨

表 2

この上の表を考えたときにどこが一番高い水準、一番低い水準であるのかといった位置づけをおこなった。低い所(⑨)から高い所(①)に向かう過程としてこの表から以下の 6 つの道筋が考えられる。

(ⅰ) ⑨ ⇒ ⑧ ⇒ ⑤ ⇒ ④ ⇒ ①
(ⅱ) ⑨ ⇒ ⑧ ⇒ ⑤ ⇒ ② ⇒ ①
(ⅲ) ⑨ ⇒ ⑧ ⇒ ⑦ ⇒ ④ ⇒ ①
(ⅳ) ⑨ ⇒ ⑥ ⇒ ③ ⇒ ② ⇒ ①
(ⅴ) ⑨ ⇒ ⑥ ⇒ ⑤ ⇒ ② ⇒ ①
(ⅵ) ⑨ ⇒ ⑥ ⇒ ⑤ ⇒ ④ ⇒ ①

低い所から高い所に向かう上の 6 つの道筋というのはどれも同じように高まっていく道筋であるのかといった疑問が起こる。そこで、観点 A と観点 B について整理して考えてみると、6 つの道筋は一つ一つが違ったものと位置づけることができるのではないかと考えた。そこで、どの道筋というものが活動として高まっていく中でより高いものとみていくことができるのかについて考えた。観点 A と観点 B はお互いが関係しあっていると前では述べた。確かに活動をしていく中で観点 A が高まれば観点 B が高まり、観点 B が高まれば観点 A が高まるとみていくことはできると考えられる。だが、⑨から次に高まる観点を考えてみると次のような疑問を感じた。最初に高まるのが観点 A の場合は、観点 A(それぞれの項の式からのよみ)から観点 B(項の式を全て足し合わせた式からのよみ)を考える際は項の式を手がかりに全てを足し合わせた式についてみていけるとできるので考えていくことができると考える。だが、反対に最初に高まる観点が B の場合は、観点 B から観点 A をみていくといったこと

は式をよむ活動を考えていく際に、観点 A から観点 B をみていくよりもよみにくいのではないかと筆者は考えた。また観点 B というのは、観点 A が高まっていく見方・考え方の中で観点 B の見方･考え方も高まっていくのではないかと筆者は考える。ここから筆者は上であげた 6 つの道筋について以下のように位置づけをおこなった。

（ⅰ）⑨ ⇒ ⑧ ⇒ ⑤ ⇒ ④ ⇒ ①
（ⅱ）⑨ ⇒ ⑧ ⇒ ⑤ ⇒ ② ⇒ ①
（ⅲ）⑨ ⇒ ⑧ ⇒ ⑦ ⇒ ④ ⇒ ①

高い ↑ 低い

筆者が考えた上の 3 つの位置づけとして、⑨(A3,B3)⇒⑧(A2,B3)までは 3 つとも同じだが⑧の次に⑤(A2,B2)がくるのか⑦(A1,B3)がくるのかで違いが出ている。⑧の見方・考え方から⑦の見方・考え方を考えていく際には、式の形式的処理をおこなうことで式のよみができると考える。続いて⑧の見方・考え方から⑤の見方・考え方を考えていく際には、それぞれの項の式から出た数を図として見ることで考えれるといったものであり、各項の式から出てきた数の関係をよむことができるものであると考えられる。⑦の見方と⑤の見方を比べた際に上のような見方･考え方ができることを踏まえ、筆者は⑤の方が高いと位置づけた。

続いて、⑤から②(A2,B1)の方が高いのか④(A1,B2)の方が高いのかといったことについて考える。②と④のそれぞれをみていくと、②は⑤から観点 B が高まっていることが分かる。図(B2)の見方では増えていく○の数を見ていく中で、倍数関係をよみとることができるといった式のよみをおこなっている。倍数関係や増えていく○の数を見ていくことで、前の項と新しい項との関係をみるといった見方･考え方を②ではおこなっている。次に、④は⑤から観点 A が高まっていることが分かる。式の形式的処理や B2 で出てきた図の倍数関係を用いるなど様々なことを手がかりに⑤からの見方･考え方を高めていくことができるとしている。様々なことをよむ見方・考え方ができるといったことを踏まえて、②と④を比べ④の見方・考え方の方が高い位置づけとしている。以上のこ

とより、3 つの道筋について上のように高い、低いといった位置づけをおこなった。
　筆者は水準を設定していくにあたって、どのように問題の見方・考え方を高めていけば水準は高まっていくのか考えた。しかし、活動としては低い方から高い方に向かうことばかりを考えがちだが、高い方から低い方に向かうことも考えられる。このときに様々な発見が考えられることもあると筆者は考えた。だが、今回の研究での水準設定に関しては低い方から高い方に向かう時にどういったことが考えられるのかについてみていく。筆者が低いと設定した水準に向かうことで新たな発見に気づくことについては、今後の課題としてみていくことを考えていく。

3.4　水準設定を通しての検討

　問題事例に対しての観点・水準設定について考えた。どのような観点をその式のアプローチについてみていくかによっても水準設定は異なることや観点を今回は 2 つ考えたが、3 つや 4 つなど増えていったときにはどのように水準設定は変わってくるのか、その変わった水準設定でまた違った問題の式のよみを考えることはできないのかなど考えていくことについて今回の研究では見ることができなかった。また、問題によってアプローチの仕方や問題の見方・考え方、式のよみなど異なってくる問題場面でも同じような観点の設定や水準の設定などは考えていくことはできないのか見ていくことも今後の水準設定を見ていく中で考えていく課題となっている。
　今後は今回の水準の設定を活かすために、問題事例を実際の授業で扱うなどの実践をおこなっていくことを考えていきたい。水準を設定することで本当に活動は高まっているのかを実践を通して検討、分析していく必要があると考える。その中で⑨から⑧に向かうなど低い水準から高い水準に高めていくためにはどのような支援が考えられるのかなど今後の課題として取り上げていきたいと考えている。

第3章要約

第3章では、第2章での式のよみを踏まえて、式のよみに対する水準の設定について検討をおこなった。水準の設定が必要だと考えたのは、式のよみには様々なよみがあり、その活動一つ一つが大切な活動であるからである。しかし、様々なよみを見ていく際に、どういったことが大切になるのか見ていくかで式のよみに対する見方が変わってくるのではないかと考えた。見方を考えていく際に、水準を設定することで問題の構造が分かりやすくなり、問題解決の初めは分からなかったことでも分かるといった新しい発見に繋がるのではないかと考えた。

水準を設定する前準備としては、観点というものが必要になると考えた。観点は、式のよみに対してどのような見方・考え方をしたのか、どのような推論を持ったのかといったことである。水準の設定、観点について検討したことについてここでは述べた。

○水準を設定する際に以下のような手順を考えた。

[　式をよむ観点の設定　⇒　水準の設定　]

○第2章で扱った問題事例に対して、どのような観点を持つことができるのか考え、2つの観点を考えた。
また、考えた2つの観点を用いて、どのような水準の設定ができるのか検討した。

第 4 章

本研究の結論と今後の課題

本章では、この本研究から得た結論とその結論からの今後の課題を述べる。

第 4 章　本研究の結論と今後の課題

4.1　本研究の結論

筆者は研究の動機で[数学の問題を解いていく中でただ提示された問題の答えが出せれば終わりとするのではなく、その結果や解決の過程からまた新たな問題を考えたり、活用したり、提示された問題でも一般性や規則性を見つけて先の結果を予想したりすることを生徒自身に考えさせることが目標や伸ばしていきたい力のように感じた。また、「数学を教える」といったことを考えたときに、事柄の背後にあるアイディア、本質を見抜き、それを伝えることができることが大切なのではないと考える。そこで数学を見る目、考え方、その事柄の本質が何か、何に目をつけることが大切なのかといったことについて研究を進めていきたいと感じた。]

と述べた。この目的を考えていくために、

(1)「式をよむ」

(2)「式をよむ」活動における水準の設定

について検討していった。

まず(1)について先行研究での分析を行った際、「式をよむ」活動には様々なよみがあり、よむレベルも解決者に応じて異なるということが分かった。また式をよむ活動を考えていく際に、どのような式のよみを解決者にさせたいのか、そのためにはどのような問題の設定が望ましいのかなどが重要になると考えた。そこで、2.5 で問題事例を上げ、問題事例に対してどのようなアプローチができるのか検討をおこなった。問題事例に対してアプローチを考えた後には、式のよみはどのようにできるのか検討をおこなった。検討をおこなっていく中で、様々なアプローチがあり、アプローチに対しても様々な式のよみがあることが分かった。そこで、(2)「式をよむ」活動における水準の設定をおこなった。「式をよむ」ことにおける水準の設定を行うことで「式をよむ」活動の構造が分かりやすくなり、解決者に対する水準を高めるといった活動を考えることができるのではないかと考えた。

(1),(2)について考えていく中で、本研究の結論として以下のようなことが分かった。

(ⅰ)問題事例に対していくつかのアプローチを考える中で
本研究では、2 つのアプローチを考えた。
⇒本研究で考えた 2 つのアプローチのうちの 1 つの
アプローチについての式のよみの検討をおこなった。
(ⅱ)アプローチを通していくつかの式のよみを検討
⇒(ⅰ)についてのアプローチを見ていく中で
・項の式に着目してよむよみ
・項の式を足しあわせていく中でよめる式のよみ
・図的に見ていく中で式に表せる式のよみ
など考えてきた。
(ⅲ)いくつかの式のよみを整理し、問題の構造を分かりやすくするために観点を考え、水準の設定をおこなった。
⇒(ⅱ)での式のよみに対する見方・考え方(2 つの観点)を考えていくことで、どのような式のよみがより高いよみになるのか水準の設定をおこなった。

4.2　今後の課題

今後の課題として、まずは杉山氏の「問題のからくりをよむ」以外のよみについても分析を行い、違ったよみのときにどういった水準の設定ができるのかについて検討していきたいと考える。また、「式をよむ」活動について調べてきたが「式に表す」活動(事象を数理的に捉えて表す過程)ことと表裏一体になっていることが研究を進めていく中で分かった。このことから、「式に表す」活動は「式をよむ」活動を考える上で大切になる一つの活動として、今後筆者の問題事例に対しても、他の問題場面でも「式に表す」活動について検討していく必要があると考える。「式の形式的処理」活動(表現された式を一定の規約に従って形式的に変形することができる機能)も関係することが分かった。それら三つの関係を図にして考えると次の図のようになると考えた。

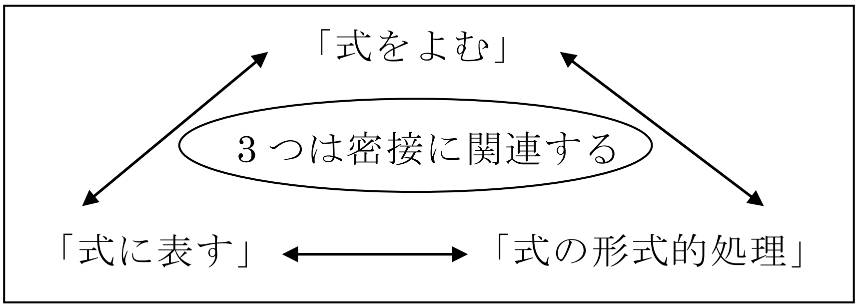

図 12

「式に表す」活動とはどのように表すことなのか、「式に表す」活動でどのような価値を問題場面で考えていけるのか。また、「式に表す」活動で「式をよむ」活動がどのようによむことができるのかを考えていく必要があると考える。「式をよむ」活動と「式に表す」活動を別々に見ていくだけでなく、これらの関連についても今後検討する必要があると考える。

「式をよむ」活動を考えた後に、水準の設定について取り上げていった。水準設定を行なうことで問題の構造がより分かりやすくなり、問題の本質がよりいっそう分かると考えていった。実際の問題事例を取り上げ水準の設定を行なったが、水準の設定を考えて行く際にどのような観点を考えることができるのか、その観点の中にはどういったものがあるのか筆者が問題を見ていく際に考えて行った。考えて行く中で水準の設定については、授業者の水準の設定、生徒自身の水準の設定といったように見方によって異なることもあるのではないかと考える。今後は他に違った観点を考えることはできないのか、観点の中にどういったものがあるのかも含め今後考えていく課題としている。今回はこのような見方・考え方ができるのではないかと筆者の考えだけでの式のよみ、水準設定となっているが、これを実際の問題場面で扱った際には筆者が考えたような観点は出てくるのか、それとは違った観点が出てくるのか、実践していく中で見えてくるものはないのかについても今後検討していきたい。そして、その中で筆者が考えるような式のよみ、水準の設定を考えいくにはどのような支援ができるのかなどについても今後の課題として残っている。

※引用・参考文献

・杉山吉茂、(2012)、確かな算数・数学教育をもとめて、(東洋館出版社)、pp.113～125
・杉山吉茂、(2009)、中等科数学科教育学序説、（東洋館出版社）、pp.155～160
・杉山吉茂、（2009）、初等科数学科教育学序説、（東洋館出版社）
・溝口達也、(2007)、算数・数学学習指導論、鳥取大学数学教育学研究室
・礒田正美・原田耕平、(1990)、生徒の考えを活かす問題解決授業の創造 - 意味と手続きによる問いの発生と納得への解明 - 、(三松堂印刷)
・日本数学教育学会、（2010）、数学教育学研究ハンドブック、(東洋館出版社)、pp.83～94、pp.221～244
・教育科学／数学教育　7 月号 No.427、（1993）、多様な考えを生かし発展させる指導、(明治図書出版)、pp.24～28
・教育科学／数学教育　7 月号　No.488、（1998）、生徒の多様な考えを生かした指導事例、(　明治図書出版　)

謝辞

本研究を進めるにあたり、これまで多くの方々にご指導いただいたことに深く感謝いたします。

指導教官の溝口達也先生には、言葉で言いあらわすことができない程感謝しております。私が工学部所属の学生にも関わらず、研究室に入ることを快く受け入れて下さり、また研究に関しても本当に多くのことをご指導していただきました。本当に先生には感謝でいっぱいです。

矢部敏昭先生には、卒業論文中間発表の際にご指導いただき本当に感謝しております。矢部先生からのご指導のおかげで、私自身がおこなっている研究に関してどんなことが大切なのか整理することができ、研究に対しての方向性を考えることができました。本当に感謝申し上げます。

研究室の先輩である、岡慎也さん、池田和彌さん、玉木義一さんには論文作成を進めていく中で、忙しい中でも快く相談にのって下さり、多くのことを教えてくださったことに深く感謝申し上げます。また、夏合宿で多くの先輩・先生方からの貴重なご指導をいただいたことに深く感謝申し上げます。同級生である吾郷将樹さん、岡田郁美さん、古林知佳さん、山本幸子さんにも研究室の仲間として受け入れていただいたこと、後輩である下采瑞希さん、松岡涼さん、宮崎諒平さん、山根三佳さん、横田真照さんにも多くのアドバイスをいただけたことなど感謝しています。

応用数理工学科の後藤知伸先生、中井唱先生には快く地域教育学科での研究をおこなうことを認めて下さり、様々な相談にものって下さりました。本当に感謝申し上げます。そして、生態システム解析学研究室の皆さんには研究室の仲間として私を温かく見守って下さりました。また応用数理工学科の藤村薫先生には、お忙しい中、地域教育学科で研究させていただくために溝口達也先生にお願いして頂きました。先輩である日野治樹さんにも地域教育学科で研究していくためにたくさんの相談にのっていただきました。本当に感謝申し上げます。このように多くの人に支えられ、研究を進めていくことができました。研究できたことに感謝し、今回の研

を今後もっと活かしていけるように頑張っていきたいと思います。最後に、大学 4 年間様々な面で支援を頂きました家族・親族に、この場を借りて心から感謝を述べたいと思います。

平成 25 年 1 月
岸川友飛

鳥取大学数学教育研究　ISSN 1881–6134

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

投稿規定

- 本誌は，次の稿を対象とします。
  - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
  - 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
  - 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
  - その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供
- 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。
- 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。
- 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/