ISSN 1881-6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

算数・数学教育における問題解決の学習に関する一考察

～「活用」の過程に焦点を当てて～

渡会亮介　*Ryosuke Watarai*

vol.15, no.7

Mar. 2012

鳥取大学 数学教育学研究室

目次

第 1 章
研究の目的と方法

本章では、研究の目的と方法を述べる。

1.1 では、本研究の動機を述べる。1.2 では本研究の課題を述べる。1.3 では本研究の枠組みを提示する。1.4 では本研究で用いられる用語の意味を述べる。

第１章　研究の動機と課題設定

1.1　研究の動機

正木孝昌氏は「初等数学の授業構成とその改革」（1997 年）で問題解決は 4 つの段階で構成されていると述べている。4 つの段階とは一般的に問題把握、自力解決、練り上げ、まとめで構成されている。しかし、私はこの 4 つの段階以外で、数学的活動を活用させるというところに注目したいと考える。卒業研究を始めて読み始めた 2 つの文献で井ノ迫氏が挙げた事例はとても興味深いものであった。

（例題）四角形ＡＢＣＤの各辺の中点を結んでできる四角形は、平行四辺形となるという証明

＜証明＞

△ＡＢＤと△ＡＥＨを見てみると２辺の比と、その間の角がそれぞれ等しいので、
△ＡＢＤ∽△ＡＥＨである。
そのためＥＨとＢＤは平行といえる。
同じように△ＣＢＤと△ＣＦＧについてみても
△ＣＢＤ∽△ＣＦＧであることが分かる。
したがってＦＧとＢＤは平行といえる。
以上よりＥＨとＦＧは平行である。－①
また、△ＡＢＤと△ＡＥＨの相似比は２：１なので、

ＢＤ：ＥＨ＝２：１であり、ＥＨ＝$\frac{1}{2}$ＢＤ

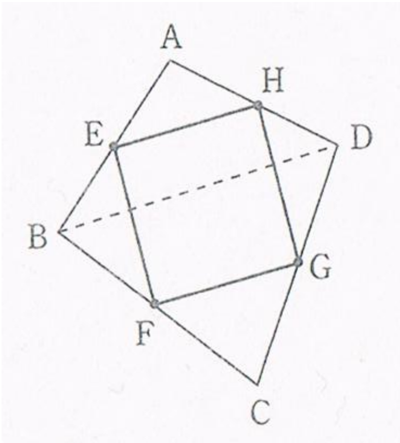


図 1　例題の図

同じように△ＣＢＤと△ＣＦＧについても相似比は２：１なので、

ＢＤ：ＦＧ＝２：１であり、ＦＧ＝$\frac{1}{2}$ＢＤ

つまりＥＨ＝ＦＧであることが分かる。－②
①，②より四角形ＥＦＧＨは平行四辺形であると言える。

このとき、点Ａ，Ｂ，Ｄを固定し、点Ｃを平面上で動かすと以下の図のようになることが分かる。

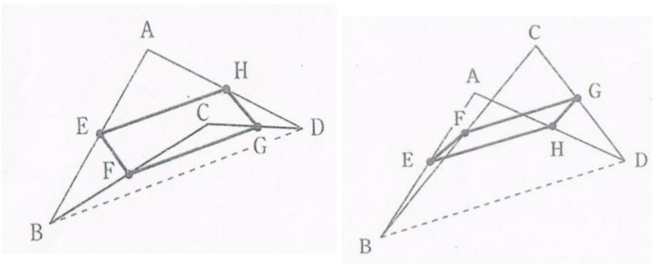


図 2　点Ｃを平面上で動かした図の例

点Cが平面上を動いてＡＢＣ**D** が四角形でなくても四角形ＥＦＧＨは平行四辺形になることが分かる。

以上より、平面上の４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄがあるとき、ＡＢ，ＢＣ，ＣＤ，ＤＡの各辺の中点を結んでできる四角形は、平行四辺形になると定理が拡張できる。

このように条件を変えて活用させることは、新しい数学的事実の発見である。また始めに提示された問題の解決を通してその問題の条件を変えたり、新たな数学的発展をもたらす活動は生徒にとっても大変興味深いものであると考えられる。そのように考えるとき、この活動は一般的に言われる問題解決における過程のどこに位置づけられるのだろうか。なぜ一般的に問題解決が 4 段階で構成されているのか、検討する必要があると考える。

以上を踏まえて、一般的に言われている問題解決の学習過程は 4 段階で良いのか。なぜ 4 段階なのか。また上述してきた通り、もし問題の条件を変え活用させる数学的活動を位置づけるならば、どのような学習過程が検討できるのかを研究していきたいと考えていくものである。

1.2　研究課題の設定

1.2.1 研究課題１　活用場面の位置づけ

①活用場面における数学的活動

②活用の必要性

③活用の意義・役割

1.2.2 研究課題２　活用教材の開発

①教材の分析検討

②教材化への方法

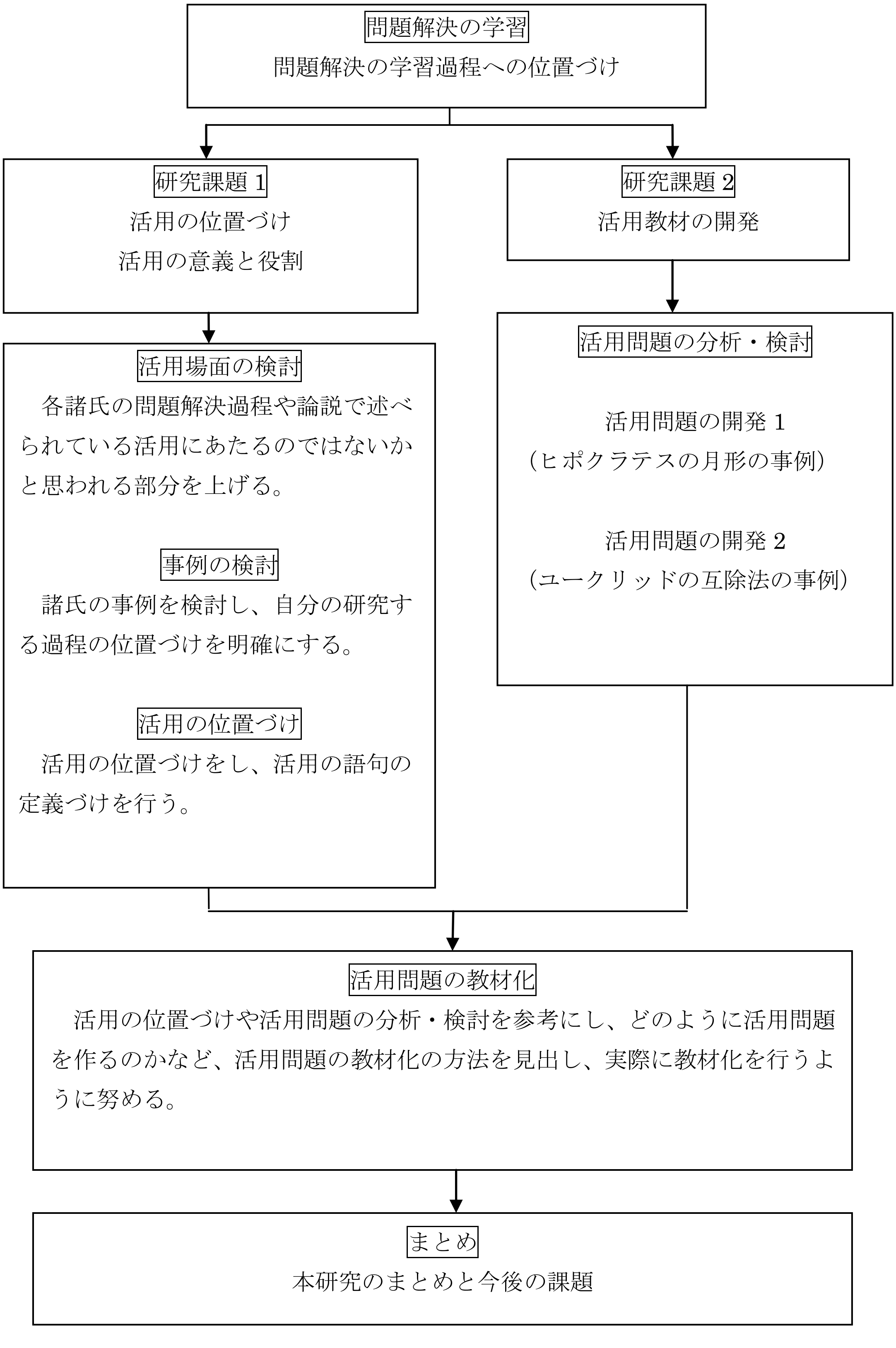
③教材化

1.2.3 研究課題３　活用教材の実践

①実践的試行

②生徒の認知的、情意的検討

1.3　研究の枠組み


問題解決の学習
問題解決の学習過程への位置づけ
研究課題 1
活用の位置づけ
活用の意義と役割
研究課題 2
活用教材の開発
活用場面の検討
各諸氏の問題解決過程や論説で述べられている活用にあたるのではないかと思われる部分を上げる。
事例の検討
諸氏の事例を検討し、自分の研究する過程の位置づけを明確にする。
活用の位置づけ
活用の位置づけをし、活用の語句の定義づけを行う。
活用問題の分析・検討
活用問題の開発 1
（ヒポクラテスの月形の事例）
活用問題の開発 2
（ユークリッドの互除法の事例）
活用問題の教材化
活用の位置づけや活用問題の分析・検討を参考にし、どのように活用問題を作るのかなど、活用問題の教材化の方法を見出し、実際に教材化を行うように努める。
まとめ
本研究のまとめと今後の課題

1.4　用語の定義

ここでは、用語の数学教育的意味の定義をする。

活用　　新しい数学的事実を、生徒自らが主体的に応用、拡張して、さらに新しい数学的事実を発見する活動

拡張　　既習の知識や技能を使い、新しい理論を開発したり、新しく学ぶ内容が豊かになっていくこと

応用　　身につけた知識や、発見した新しい数学的事実を、実際の問題に当てはめ算数・数学の問題として解くことによって数学内外に発展すること

教材化　生徒自身で活用することができそうな１つの問題を、複数の要素的な問題や素材に順序や配置を与え、論理を組み立てて授業構成を行うこと

第 2 章
問題解決の学習について

2.1 章では問題解決学習について述べる。2.2 章では問題解決の学習過程についての諸氏の主張を比較検討し、研究する学習過程の自分たちの見方・考え方を明確にする。

第 2 章　問題解決の学習について

2.1　問題解決の学習とは

新版現代学校教育大辞典によると問題解決学習とは、“現実の生活の中で生じる問題状況において問題の事態を観察し、それと関連するこれまでの経験や知識を想起し、主体的に解決する学習過程を問題解決学習と言う。”[1)]と述べられている。

また、片桐重男氏は“第Ⅳ章で、数学の方法と内容とに関係した数学的な考え方を取り出した。これらの数学的な考え方の育成のねらいとして、算数・数学の授業を展開しなくてはならないのであるが、そのためには、学習の各段階で、どの考え方が用いられるか、したがってどの考え方をそれぞれの段階で指導したらよいかということについての見通しを持つことが望ましい。”[2)]と述べている。

よって、問題解決の学習とは『数学的な考え方の育成をねらいとし、生徒自身が問題の解決を目指し、生徒自身が能動的な学習をする学習方法』と言えるのではないかと考える。

2.1.1 問題解決の学習の目的

片桐重男氏は“算数・数学の学習は、ほとんどが問題解決の連続であり、問題解決の能力を伸ばすものである。したがって、問題解決の能力を伸ばすということは、算数・数学のねらいといえるほど重要である。”[2)]と述べている。

また、“この問題解決の能力を伸ばすことは、実際に問題の解決を通してなされる。しかもその問題の解決は、いうまでもなく問題解決の過程をふんでなされる。このようなことから算数・数学の学習は、ほとんどが問題解決の過程をふんでいるといえるし、またそのようにされることが望ましい。そこで、問題解決の過程を数学的な考え方の構造を考えるよりどころとする。”[2)]とも述べている。

つまり『算数・数学の問題解決の学習の目的は問題解決の能力を伸ばすことである』と考えられる。

2.1.2　なぜ学習過程を分けたか

片桐重男氏は“数学の方法と内容とに関係した数学的な考え方の育成をねらいとして、算数・数学の授業を展開しなくてはならないのであるが、そのためには、学習の各段階で、どの考え方が用いられるか、したがってどの考え方をそれぞれの段階で指導したらよいかということについての見通しを持つことが望ましい。各段階で用いられる考え方は、この段階でこの考え方が必ず用いられるということは言いきれないが、一般に学習のどの段階でどの考え方が用いられることが多いかという意味での数学的な考え方の構造化を捉えることによって、指導の見通しが立てられるだろう。”[2)]と述べている。

つまり、なぜ学習過程を分けるのかと言うと『学習の各過程での学習者の数学的見方・考え方は異なっているが、どの段階でどの考え方が用いられるかという数学的な考え方の構造化を捉えることによって指導の見通しを立てることができる。』と考えられる。

2.2　問題解決の過程について

ここで問題解決の過程について片桐重男氏の「数学的な考え方・態度とその指導」(1988年)を参考に、何人かの諸氏の問題解決の過程についての考えを示し、比較検討してみる。検討を通して、焦点化している学習過程ではどのような数学的活動が行われ、またその活動は何のために行われているのか、また様々な諸氏の問題解決の見方がある中で、これから研究する過程の自分たちの見方・考え方を明確に示すように努めた。

2.2.1 F.Fehr の問題解決の過程

Ⅰ　個人が混乱の場にあり、ここから必要感、目的探究行動が生ずる。具体的問題の場から学習が始まる。

Ⅱ　不満足な場の分析をする。これにより問題を形成する。

Ⅲ　暫定的仮設を立て、検討していく。これを繰り返し、ついにゴールに達する。ここでは新しい問題を解くのに、以前のどんなパターンが助けとなるかを思い出し、これと関連付けることである。この段階がどんなに困難でも解法を教えてはいかず、生徒自身で解を得るように指導しなければならない。

Ⅳ　演繹、精確化の段階

もっとも重要な段階で、具体的問題の解法から抽象的一般的原理法則を作り、解法の論理的骨組みを作ることである。しかし、ただ一度の洞察からパターン全体が明確になることはほとんどないので、次のような方法が考えられる。

(a)特殊な解を一般化すること

(b)多くの類似例から解の同一性を抽象すること

(c)新しい結果へ既知の理論からの論理的鎖をつくること

(d)これらの混合

Ⅴ　検証段階

Ⅰ～Ⅳの段階を新しい経験に応用して、検証する段階である。

このように 5 段階で構成されているとのべている。

問題解決の過程について様々な諸氏の考えが述べてある中で、私が設定した研究課題の「活用の過程」は、フェアのⅤ段階の諸説が最も研究課題にそった過程だと感じた。なぜならば、問題解決の学習をするにあたり、自力解決で行った解法や、まとめで出てきた理論、つまりその授業で新しく学んだことを新しい問題に生かし、問題を解決していく活用の過程にもっとも近いと感じたからである。さらに、Ⅴ段階の検証段階は活用を一つの段階としてとらえていて、フェアは活用の過程を重視していると考えたためである。そのため、他の人々が述べている問題解決の学習過程をフェアの諸説を基準として、彼が示している問題解決過程のどの部分に当てはまるかを示しながら見ていきたい。

2.2.2 G.Polya の問題解決の過程

1　問題を理解すること

　未知のもの、データ、条件は何か、条件は未知のものを決めるのに十分か、過剰か、図をかけ、条件を分離せよ、など。

2　計画を立てること

　前にそれを見たことがあるか、関係のある問題を知っているか、似た問題を見いだせ、解けなかったら関係のある問題を解け、など。

3　計画を実行すること

　計画を実行せよ、各段階をチェックせよ、各段階は正しいか、それを証明できるか。

4　ふり返ってみること（得た解を調べよ）

　結果をチェックせよ、結果を違ったしかたで得られるか、一目でそれが分かるか、　　この問題にその結果や方法が使えるか。

ポリヤの 1 段階の問題を理解することはフェアのⅠ、Ⅱ段階に当たり、ポリヤの 2、3 段階の計画を立てることと、計画を実行することはフェアのⅢ段階にあたり、ポリヤの 4 段階のふり返ってみることはフェアのⅣ、Ⅴ段階と考えることができる。

　なぜならば、個人が混乱の場にあるというのは未知のものに出会ったということであると考えられ、それから必要感、目的探究活動が生じ、不満足な場の分析をするので、データや条件は何かというように問題を色々な角度から検討しようとするのが問題を理解することと考えられるからである。

　暫定的仮設をたて、検討していく。新しい問題を解くのに、以前のどんなパターンが助けになるかを思い出し、これと関連付けることは計画を立てる、計画を実行することにあたると考えられる。この段階はいわゆる自力解決のことを指している。

　具体的問題の解法から抽象的一般的原理法則を作り、解法の論理的骨組みを作ることは、問題をふり返ることによってなされる活動であると考えられる。

2.2.3 J.Dewey の反省的思考

1　暗示

　困難を漠然と自覚し、不安や混乱を感ずる段階。

2　知性的整理

　観察により困難の箇所が明確になる段階。

3　仮設

　明確にされた問題を解決するために、可能と思われるいくつかの仮説、見通しを立てる段階。

4　推理作用

　第 3 段階で立てた仮設が妥当なものかどうか推理によって検討する段階。

5　検証

第 4 段階で妥当となった仮設を、行動によって検証してみる段階。

デューイの 1 段階の暗示はフェアのⅠ段階、デューイの 2 段階の知性的整理はフェアのⅡ段階、デューイの 3、4 段階の仮設と推理作用はフェアのⅢ段階、デューイの 4、5 段階の一部はフェアのⅣ、Ⅴ段階に当たる。

なぜならば、困難を漠然と自覚し、不安や混乱を感ずるから必要感、目的探究行動が生ずると考えられるからである。

観察により困難の箇所が明確になると、不安な場の分析をするというのは同等にあたり、その結果問題を形成する段階と考えられる。

解決するためにいくつかの仮設、見通しを立て、この仮説が妥当なものかどうか推理によって検討するというのは、フェアのⅢ段階の暫定的仮設を立て、検討していく段階に当たると考えられる。

妥当となった仮設を行動によって検証する。これは具体的問題の解法から抽象的一般的原理法則をつくり、そこで分かった原理法則などを新しい問題に応用して検証する段階にあたると考えられる。

このようにデューイの 3、4 段階はフェアのⅢ段階を 2 つに分けている。よって、デューイはフェアの問題解決の過程より自力解決の段階を重視していると考えられる。

2.2.4 G.Wallas の創造的思考

1　準備期(a period of preparation)

問題を解くために長い間努力を続ける。今までに体得した知識、技能を適用してみる。過去の経験を思い起してみる。何度も失敗を繰り返すといったように、問題をあらゆる方面から検討する。意識的に生まずたゆまず努力する段階である。没頭の段階ともいう。

2　孵卵期(a period of incubation)

突然のひらめきは、このような努力の後に、しばらく問題を放棄し、他のことをしたり休息したりしている時に、無意識の世界で創造的な仕事をしていると考えられる時期が孵卵期である。問題をあらゆる面から検討して解決が得られない時は、しばらく問題を意識的にあきらめ、他のことをするか休息するのが良いだろうとしかいえないといわれている。また、探究において、注意をあまり散漫にするのも良くないが、注意を強く一つに強制するのもよくない。

3　解明期(a period of illumination)

孵卵期に続いて、無意識のうちに突然解決、発見がやってくる時である。これは精神が疲れた時にやってくるという体験を述べる学者と、問題を忘れた時にやってくるという経験を述べている学者とがいる。

4　検証期(a period of verification)

第 3 段階の解明期で、完全な形で発見創造されたとはいえないので、結果を証明することが必要である。例えば、解明期で長い計算全体が明らかになるとは限らないので、そこ

で正確に結果を記述しなくてはならない。さらに、洞察した結果を探究の終末とみなさず、その一段階とみなし、それを利用することが必要である。

ワラスの 1 段階の準備期はフェアのⅠ～Ⅲ段階に、ワラスの 2、3 段階の孵卵期と解明期はフェアのⅢ段階に、ワラスの 4 段階の検証期はフェアのⅣ、Ⅴ段階にそれぞれあたる。

なぜならば、問題を解くために長い努力を続けるというのは、フェアの問題解決過程でいうと、混乱の場から必要感、目的探究行動が生じ、不満足な場の分析をして問題を形成し、暫定的仮設を立てて検討していくという一連の過程を準備期ということができると考えられるからである。

孵卵期、解明期の無意識の世界で創造的な仕事をしている、無意識のうちに突然解決、発見がやってくるというのは、暫定的仮設を立て検討していく過程において解決や発見ができたことを示していると考えられる。

結果を証明するというのは、解法から抽象的一般的原理法則を作り、解法の論理的骨組みを作ることと考えられる。また、洞察した結果を探究の終末とみなさず、それを利用することが必要であるというのは、ワラスの過程で言うと 1～3 段階の経験を新しい問題に応用して検証すること。つまり、今までの問題解決の過程を新しい経験に応用する活用の部分を示していると考えられる。

このように、ワラスの孵卵期、解明期はフェアの第Ⅲ段階の自力解決、特にひらめきの部分を重視していると考えられる。

2.2.5 A.H.Schoenfeld の問題解決の過程とストラテジー

シェンフェルドは、問題解決の過程について述べている How to solve It を「現代的に最も妥当な形で、ヒューリスティックスを提供する試みであった」と位置付けている。この考えに基づいて問題解決の段階とストラテジーを次のようにあげている。

１　分析

文を理解する、問題を簡単にする、問題を言いなおす

２　計画

考えの進め方を組織だてる。組織的な分析（全体から特殊へ)。

３　探究

基本的に同等な問題を考える。やや修正した問題を考える。大きく修正した問題を考える。

４　実行

一歩一歩実行する。ローカルな検証

５　検証

特殊なテスト。一般的なテスト

シェンフェルドの 1 段階の分析はフェアのⅠ、Ⅱ段階、シェンフェルドの 2、3、4 段階の計画と探究と実行はフェアのⅢ段階、シェンフェルドの 5 段階の検証がフェアのⅣ、Ⅴ段

階にそれぞれ当たる。

なぜならば、文を理解する、問題を簡単にする、問題を言いなおすというのは、具体的問題の場から学習が始まり、目的探究活動が生じ、不満足な場の分析をし、特に問題を形成するという段階に当たると考えられるためである。

計画の考えの進め方を組織立てるのと、探究の同等な問題や、修正した問題を考えるというのは暫定的仮設を立てるに当たると考えられる。さらに、実行はその仮設を検証することに当たると考えられる。

このように、シェンフェルドは 2、3、4 段階はフェアのⅢ段階をより詳しく分けたものである。計画、探究、実行とあるように自力解決の問題の見通しを立てる部分を重視していることが分かる。

2.2.6 F.K.Lester Jr.の問題解決の過程

レスターはポリヤの問題解決の過程を修正して、その相互の関係をより分かりやすくし、認知とメタ認知との関係を示すようにしたとして「１．方向づけ　２．組織化　３．実行　４．検証」の段階を示している。

レスターの１段階の方向づけはフェアのⅠ、Ⅱ段階、レスターの 2、3 段階の組織化と実行はフェアのⅢ段階、レスターの４段階の検証はフェアのⅣ、Ⅴ段階にそれぞれ当たる。

なぜならば、レスターはポリヤの問題解決の過程をより分かりやすく修正したものであり、ポリヤの段階に該当すると考えられるためである。

このようにレスターの 2、3 段階はフェアのⅢ段階に分けているように、自力解決の段階を重視していることが分かる。レスターの場合はポリヤが計画と主張しているところを組織化と言い変えている。

2.2.7 Leone Burton の問題解決の過程

１　Entry　問題を理解する段階

「問題を調べよ。推測したり、テストしてみよ。用語や関係を明確にせよ。情報を引き出せ。表現や記録の仕方を考えよ」といった手順が使われる。

２　Attack　解決を見出す主要な活動の段階

「組織的にせよ。関係を求めよ。分析せよ。過程を簡単にせよ。答えの持つ性質を見いだせ。特別な場合を試みよ。推測せよ。仮設を作り試せ。関係のある問題を試せ。変数を組織的に変えよ。得た解を、他の解を見出すために使え。逆向きに考えよ。問題の 1 つの面に焦点をあてよ。まずい道を消去せよ。問題をいくつかの場合に分けよ。問題を言いなおせ。記録の仕方を工夫せよ。表し方を変えよ。一般化せよ。」といった手順が使われる。

３　Review　解を検討する段階。

４　Extension　解や問題を拡張する段階

バートンの１段階の Entry はフェアのⅠ、Ⅱ段階に、バートンの２段階の Attack はフェ

アのⅢ段階、バートンの3段階のReviewはフェアのⅣ段階、バートンの4段階のExtensionはフェアのⅤ段階にそれぞれ当たる。

なぜならば、問題を調べるというのは目的探究行動であり、推測したり表現や記録の仕方を考えるというのは、不満足な場の分析をして、問題を形成していく段階に当たると考えられるためである。

バートンの2段階で述べられている手順は、すべて暫定的仮設を立て検討している段階に当たると考えられる。

解を検討する段階というのは、抽象的一般的原理法則を作り、解法の論理的骨組みを作ることであると考えられる。

解や問題を拡張する段階というのは、1～3段階を新しい経験に応用して、検証する段階とも言えると考えられる。つまり、活用の過程を示している。

このように、バートンはフェアの1、2段階を1段階でまとめている。その他はフェアの問題解決の過程とほぼ同じ過程を主張していると考えられる。

以上より、フェアと、バートンを除いた諸氏の問題解決の過程の主張は、主に自力解決の段階を重視していると考えられる。そのため、自力解決の問題解決の過程を2つ3つと分けている傾向が目立つ。一方、フェアとバートンの問題解決の過程は、他の諸氏が検証や、検討の段階と述べているところを分けて主張していることが分かる。そのため、2人の問題解決の過程は問題をふり返り、それまでの段階で学んだことを新しい問題に生かし、解決していく段階を重視していると考えられる。私はこれらの諸氏たちの主張を見て、多くの諸氏が自力解決の段階を詳しく分けている中、フェアやバートンがふり返り、活用の部分をそれぞれ一つの段階として捉えているように、この活用の段階について研究していきたいと改めて感じた。

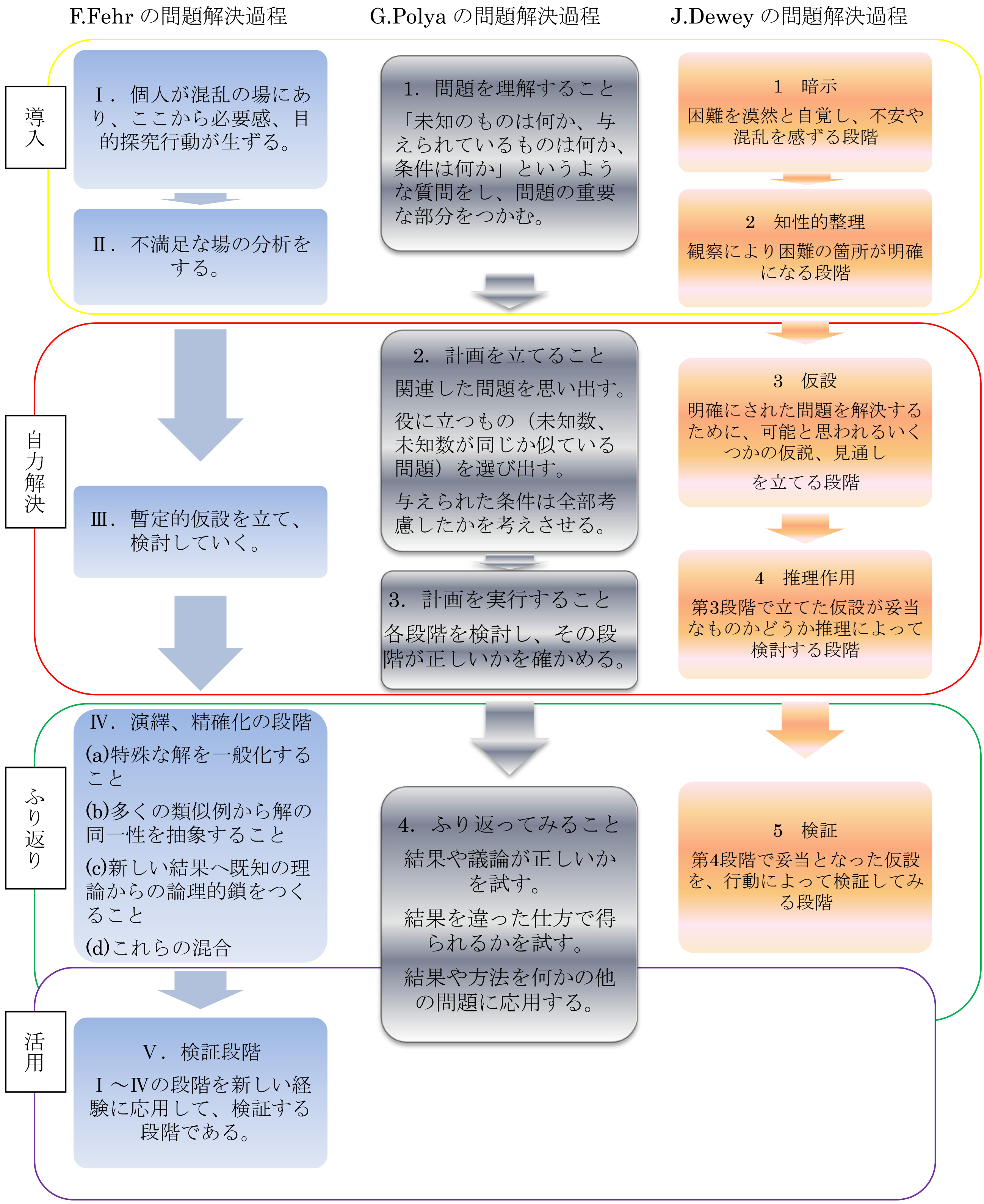


図 3　モデル化した各諸氏の問題解決の過程

第 3 章
活用の過程について

3.1 章では、各諸氏が主張している問題解決の学習過程や、論説の中から活用にあたる部分を挙げていく。3.2 章では諸氏の活用に関する主張を参考に、活用の位置づけや活用の定義を行い、活用の意義や役割、必要性について述べていく。3.3 章は活用問題を分析・検討し、それらの問題をもとに教材化を図る。

第 3 章　活用の過程について

3.1 活用の場面

ここで諸氏の問題解決過程や、研究を進めるにあたって読んできた論説の中から活用にあたる部分を挙げ、活用の過程の位置づけをしていく。

F.Fehr 氏の創造的学習の過程における「検証」では“Ⅰ～Ⅳ段階（Ⅰ個人が混乱の場にある。Ⅱ不満足な場の分析をする。Ⅲ暫定的仮設を立てる。Ⅳ演繹、精確化の段階。）を新しい経験に応用して、検証する段階。”[2)] とされ、これが活用の部分にあたると考えられる。

G.Polya 氏の問題解決の過程における「ふり返ってみること」の段階では、“その結果や方法を何か他の問題を応用することができるか。”[3)] の部分が活用にあたると考えられる。

G.Wallas 氏の創造的思考の過程における「検証期」の段階では“洞察した結果を探究の終末とみなさず、その一段階とみなし、それを利用することが必要である。”[2)] の部分が活用の部分にあたると考えられる。

Leone Burton 氏の問題解決の過程における Extension“解や問題を拡張する段階”[2)] の部分が活用にあたると考えられる。

正木孝昌氏の「初等数学と授業構成とその改革」では“新しい問題が見えてくる。子どもたちの自主的な探究活動が展開する兆しが感じられる。”[4)] と第Ⅳ段階にあたる部分が活用の部分にあたると考えられる。

佐藤　学氏は「自らの学びを振り返り、改めて問い直す新しい課題」のなかで、“plan（課題の同定→見通し）－do（自力解決→集団解決）によって、一応の解決を見た後、必要な振り返りをし（check)、新たな学習課題を見いだし、それに向かって活動していくこと（action）が、大切である”[4)] と述べている。また、do（自力解決→集団解決）で一応の解決をした後、新たな課題として改善―追試―活用の 3 つを挙げている。その中で活用は“学習したことを活用して問題解決するという新たな課題は、基礎的・基本的な知識・技能の確実な定着を図るとともに、思考力・判断力・表現力の育成や、児童・生徒の興味・関心を生かすことが大切である。自らの興味・関心から出発することは、児童の学習意欲を喚起するだけではない。自らの問いを、自らが解決することが求められている。時には、課題の障壁が大きく、解決することを断念しなければならないこともあるだろう。その意味では、自主的、自発的な学習を促し、自己責任感が高まることにもなろう。”[5)] と主張している。

井ノ迫泰弘氏は「発展的・統合的に考えることができる教材」の中で、“ある定理が成り立つとき、その定理の前提となる図形の条件をいろいろと変え、その定理が成り立つ図形的な限界を研究したり、元の図形を含む新しい位置関係の図形で、その定理を拡張した定理が成り立つかどうかなどを追究させるようにします。”[6)] と述べている。また“このような授業方法は、『数学をつくっていく授業』の方法であり、生徒は主体的・自主的に活動するので、学習の効果を期待することができます”[6)] と述べている。井ノ迫氏はこの論説のなかで「数学をつくっていく」というのは“定理や性質を学習者自らが発見しながら、数

学を体験しながら学習する授業のこと”[6)]としている。

長崎栄三氏は“算数を活用する力は、どのような方向にはたらくのであろう。ものに力を加えれば、ある方向に動くように、算数を活用する力は、算数を2つの方向に発展させる。すなわち、算数の外への発展と算数の内での発展である。1970年代にオープンエンドアプローチを提唱した故島田茂先生（元国立教育研究所研究員）は、「数学的活動」を「現実の世界」と「数学の世界」のかかわりの中で描いた。そこには、算数・数学が、現実の問題を契機としてそれを数学的に解決する中で数学外に発展する側面と、算数・数学が、現実の問題を解決したり類似の問題を体系化したりして新しい理論を開発するという数学内で発展する側面の 2 つが挙げられている。そして、いずれも数学的活動としては「数学化」が大きな役割を果たしている。なお、前述の松原先生は、数学化に相当するものを、関数または変換と呼んで、数学的な考え方そのものとしていた。数学外への発展では、現実の問題を算数・数学の問題に直すという数学化が使われ、数学内での発展では、より問題解決に適した問題へと直すという数学化が使われる。”[7)]と述べている。

このような部分が活用にあたると考えられる。

3.2　活用場面の位置づけ

3.2.1　活用の位置づけ

G.Polya 氏は「ふり返ってみること」の中で、“結果や方法を何かの他の問題に応用することができるか。”[3)]という過程を挙げていた。そこでの例題に「長さが 21 メートルで巾が 16 メートルの四角な平らな屋根の中央に高さ 8 メートルの旗竿をたてたい。この竿を支えるには 4 本の同じ長さの針金がいる。その針金は竿の先から 2 メートル下がった点から屋根の四隅に張り渡される。各針金の長さはいくらか。」という問題がある。

【問題】

長さが 21 メートルで巾が 16 メートルの四角な平らな屋根の中央に高さ 8 メートルの旗竿をたてたい。この竿を支えるには 4 本の同じ長さの針金がいる。その針金は竿の先から 2 メートル下がった点から屋根の四隅に張り渡される。各針金の長さはいくらか。

【解答】

「計画を実行する」の部分で求めることができた直方体の対角線 x を用いて針金の長さを求める問題である。この問題は、針金の長さを x とし、矩形の長さを半分とした a=10.5、b＝8 と高さ c=6 の直方体の対角線 x を求める。

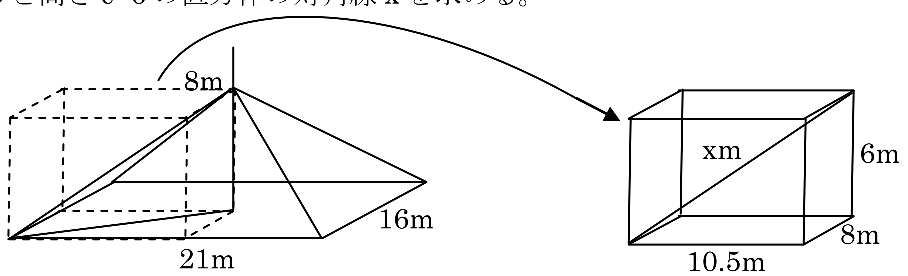


図 4　「ふり返ってみること」の中の問題の図の見方

「計画を実行する」の場面で発見した新しい数学的事実を応用していると考えられる。この過程は F.Fehr 氏の「検証」、G.Wallas 氏の「検証期」、Leone Burton 氏の「Extension」にそれぞれ当てはまっていると考えられる。しかし、今回「活用」の過程を研究するにあたって、新しい数学的事実を用いて、解いて終わるだけでは「活用」の過程としては不十分だと考える。

井ノ迫氏が“ある定理が成り立つとき、その定理の前提となる図形の条件をいろいろと変え、その定理が成り立つ図形的な限界を研究したり、元の図形を含む新しい位置関係の図形で、その定理を拡張した定理が成り立つかどうかなどを追究させるようにします。”[6]と述べているように、（この場合は図形の問題のことだけを言っているが）ほかの問題でも定理を拡張した定理が成り立つかを追究させるような活動をさせたい。つまり、自力解決やふり返りで発見した新しい数学的事実を応用、拡張して、さらに新しい数学的事実を発見できるような活動を活用としていきたい。

また「活用」の過程では、生徒自身が主体的に活用できるようにすることを重視したい。佐藤学氏は活用の過程で“自らの興味・関心から出発することは、児童の学習意欲を喚起するだけではない。”[5]と述べているように、生徒自身が主体的に活用することは、学習指導要領の中学校数学科の目標である“数学的活動を通して、数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則についての理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し、事象を数理的に考察し高めるとともに、数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し、それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる。”[7]ことにもつながるのではないかと考える。

これらを踏まえると「活用」は『新しい数学的事実を、生徒自らが主体的に応用、拡張して、さらに新しい数学的事実を発見する活動』と考えることができる。

3.2.2 拡張・応用の定義

さらに、長崎栄三氏は“算数を活用する力は、どのような方向にはたらくのであろう。ものに力を加えれば、ある方向に動くように、算数を活用する力は、算数を 2 つの方向に発展させる。すなわち、算数の外への発展と算数の内での発展である。1970 年代にオープンエンドアプローチを提唱した故島田茂先生（元国立教育研究所研究員）は、「数学的活動」を「現実の世界」と「数学の世界」のかかわりの中で描いた。そこには、算数・数学が、現実の問題を契機としてそれを数学的に解決する中で数学外に発展する側面と、算数・数学が、現実の問題を解決したり類似の問題を体系化したりして新しい理論を開発するという数学内で発展する側面の 2 つが挙げられている。そして、いずれも数学的活動としては「数学化」が大きな役割を果たしている。なお、前述の松原先生は、数学化に相当するものを、関数または変換と呼んで、数学的な考え方そのものとしていた。数学外への発展では、現実の問題を算数・数学の問題に直すという数学化が使われ、数学内での発展では、より問題解決に適した問題へと直すという数学化が使われる。”[8]と述べている。長崎栄三

氏の文献をもとに、「新しい数学的事実を、生徒自らが主体的に応用、拡張して、さらに新しい数学的事実を発見する活動」と位置づけた活用をさらに詳しく定義してみる。

この文献の中で長崎栄三氏は、活用は数学の内側への発展と、数学の外側への発展があると述べている。ここで、拡張は「範囲または勢力をひろげて大きくすること。ひろがって大きくなること。」と広辞苑に記述されている。広辞苑での拡張の語句の意味と、長崎栄三氏の文献を踏まえると、拡張は数学の内側への発展ととらえることができるのではないかと考える。

さらに長崎栄三氏は同じ文献で数学の内側への発展について“それに対して、算数内で算数が活用されることで、算数はその内実を豊かにしていく。知識を注入して覚えておけということではなく、子どもが自ら考えることを重視するならば、子どもがそれまでに獲得した既習の知識や技能や考え方などを使わざるを得ない。既習の内容を活用することで、新たな内容を学び、さらにそれが既習のものと構造化され内容が豊かになっていく。算数では、学習とともにその内容が一般化され抽象化されて行くことを思うと、このような活用は当然と言えよう。”[8)] と述べている。つまり、この活用の位置づけの中で用いられる「拡張」という語句は『既習の知識や技能を使い、新しい理論を開発したり、新しく学ぶ内容が豊かになっていくこと』と定義できるのではないかと考える。

また、応用は「原理や知識を実際的な事柄にあてはめて利用すること」と広辞苑で記述されていると述べた。広辞苑での応用の語句の意味と、長崎栄三氏の文献を踏まえると、応用は数学の外側への発展ととらえることができるのではないかと考える。さらに“算数外へ算数が活用されることで、現実の問題の解決に結びつくとともに、現実の世界のより深い理解へと結びつく。算数においては、ほとんどの問題が現実場面から起こり、その解決のために新しい算数が創られ、そしてそれを応用することで最初の現実の問題が解決される。数や量や図形は、本来、現実の問題を算数で解くために抽象化されたものである。さらに、算数は世界での個々のでき事の背景には、より一般的な原理や法則があることを示してくれる。例えば、多くの具体的な事象は比例と見なすことができ、そのことで、私たちの住んでいる現実世界のより深い理解へと導いてくれる。”[8)] と述べている。

しかし、単純に応用と言う語句を聞いたとき、応用という言葉は数学の外側への発展だけではなく、数学の内側への発展も表すのではないかと考える。

したがって、この活用の位置づけの中で用いられる「応用」という語句は『身につけた知識や、発見した新しい数学的事実を、実際の問題に当てはめ算数・数学の問題として解くことによって数学内外に発展すること』と定義できるのではないかと考える。

さらに、活用は、生徒自身が新しい数学的事実を発見しよう試みることを重要視しなければならないと考える。発見しようと試みることを活用と位置づければ、新しい数学的事実を発見してもしなくても活用と呼べることができると考える。

したがって、本研究における活用は『既習の知識や、新しい数学的事実を用いて、生徒自身が主体的に応用（実際の問題に当てはめ算数・数学の問題として解くことを）したり、

拡張（既習の知識を用いて新しい理論を開発したり、新しく学ぶ内容が豊かになっていくことを）する活動を活かして、さらに新しい数学的事実を発見しようと試みる活動』と定義しなおすことができるのではないかと考えた。

3.2.3　活用の必要性

学習指導要領の中学校数学科の目標は“数学的活動を通して、数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則についての理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し、事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとともに、数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し、それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる。”[7] である。また、「それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる」について“数学を適切に活用するためには、方程式を立てたり説明や証明の構想を練ったりするなど数学をどのように活用するのか、その方法を身につける必要がある。また、なぜ数学を活用するのか、その必要性や有用性について理解することも必要である。必要性や有用性を理解することは、数学を活用して考えたり判断したりしようとする態度と深く結びついている。学んだ数学を活用したいと感じるためには、その必要性や有用性を実感を伴って理解していることが重要である。したがって、体験を通して主体的に学習に取り組めるようにすることを重視し、数学を活用して考えたり判断したりすることに主体的に取り組む意欲を高めることに配慮する。”[7] と記述されている。

学習指導要領によると、“生徒が学んだ数学を活用したいと感じるためには、その必要性や有用性を実感を伴って理解していることが重要”[7] であると述べているが、生徒が学んだ数学を活用したいと感じる必要性とは何か考えてみる。

味村和行氏は“基礎的・基本的な知識・技能を身につけ、それを活用することによって、算数のよさを実感し、学ぶ意欲を高め、多様な問題場面で活用する態度を育てることを目指しているのである。”[9] さらに、“活用する力は、算数を創りだすとともに子供たちの「生きる力」を育んでいるのである。”[9] と述べている。つまり、活用は理解を深めるだけではなく、活用をすることで算数・数学のよさを実感しやすくなり、算数・数学のよさを実感することで生徒はさらに数学を学ぼうとする意欲の向上にもつながる。そして、算数・数学だけにとどまらず、他教科でも課題を解決するために必要な思考力・判断力・表現力などの育成にもつながり、また社会を過ごしていくための「生きる力」をつけることにもつながっていくのではないかと考える。

よって、活用は問題や定理の理解を深め、算数・数学のよさを実感し、学習意欲の向上も図ることができる。さらに、算数・数学以外の教科での問題解決の力をつけ、社会を過ごしていくための「生きる力」の育成にもつながるという必要性があるのではないかと考える。

3.2.4　活用の意義・役割

算数・数学教育において 1 つの問題が解決されたり、多様に解決し正しさを自ら検証することができたら、問題についての理解が確実に得られると言えるのだろうか。また、新しい数学的事実を利用して解くだけで答えが得られる練習問題で、問題や数学的事実を理解することができるのか。私は生徒自身で既習の知識や新しい数学的事実を用いて、問題を解くだけにとどまらず、さらに新しい数学的事実や定理を発見しようと試みることで、問題や数学的事実の理解が深まるのではないかと考える。

味村氏は“知識や技能が使われず、活用できなければ学習している意味はなく、当然、その良さも実感できる訳がない。学習したことが活用できて、学習が身に付いたと言えるのである。私は、学習が身に付くということを「できて、分かって、活用できて」初めて言えることだと考えている。”[9] と述べている。この論述について見てみると、「活用ができる＝学習が身に付いている」と解釈することができる。

つまり、活用の意義とは『活用を生徒自身ですることができたとき、用いた問題や定理、手続き、方法などの数学的価値を初めて認識することができる。』といえるのではないかと考える。

3.3　活用教材の開発

3.3.1　教材の分析・検討

活用問題として用いることができるか検討をしてみる。

3.3.1.1 活用問題の開発 1（ヒポクラテスの月形）

【問題提示 1】図 1 は、円の中に正方形 ABCD が内接している。さらに辺 AB と辺 AD をそれぞれ半径として、点 A から点 C に向かって円弧を描いた図とする。
図 1 で、正方形 ABCD の面積が部の面積に等しいことを示しなさい。

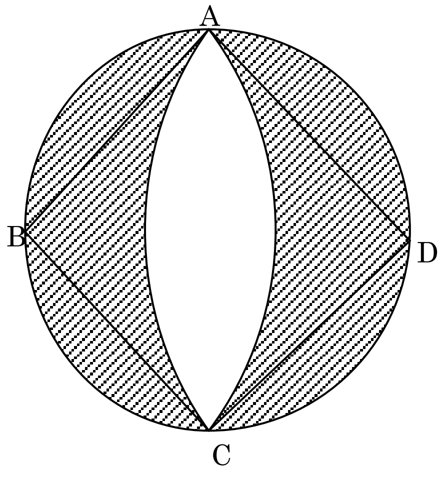


図 5　【問題提示 1】の図形

[解答]

正方形 ABCD の外接円の半径を r とすると、
次のように処理することができる。

部の面積 S は、

$$S = 2 \cdot \{\frac{\pi r^2}{2} - (\frac{\pi(\sqrt{2}r)^2}{4} - \frac{(\sqrt{2}r)^2}{2})\}$$

$$= 2 \cdot \{\frac{\pi r^2}{2} - (\frac{2\pi r^2}{4} - \frac{2r^2}{2})\}$$

$$= 2r^2$$

以上より正方形 ABCD と面積が等しいことが分かる。

このまま解答を求めて終わりにするのではなく、求めた式や図を吟味して、さらに分かることを挙げてみる。

まず、S の式をよく見てみると、{ }の中の式は、図 6 のように半円から白い部分をひいた面積を表していることが分かる。

さらにその面積はr^2となるので、正方形 ABCD の面積の半分であるので図 7 の面積と同じであることが分かる。

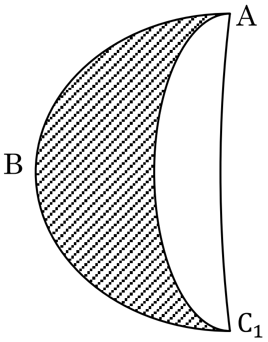


図 6 半円部分

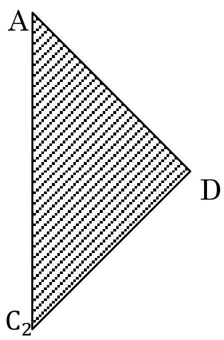


図 7 正方形の半分部分

つまり、「AC を直径とした半円から、AD を半径として D を中心とした円で囲まれた図形の面積は、AC を斜辺とする直角二等辺三角形と等しい」という数学的事実を発見できる。

さらにこれをもとに条件を変え検証してみる。点 C を点C_1、点C_2に分解して、先程のようにAC_1、AC_2をそれぞれ直径、斜辺とした図形を描く。それぞれの点を点 A を中心に円の軌道に沿って回転させ、点C_1が点 B まで、点C_2が点 D まで到達するまでの図形について調べてみる。

点C_1点C_2を動かすと下の図 4 のようになる。さらに、点 B、点 D まで動かすと図 8 の 4 つ目の図形になる。

この図形より、「直角二等辺三角形の直角を挟む二辺を中心とする半円と、斜辺を直径とする半円で囲まれた図形の面積は、直角二等辺三角形に等しい」という数学的事実の発見につながる。

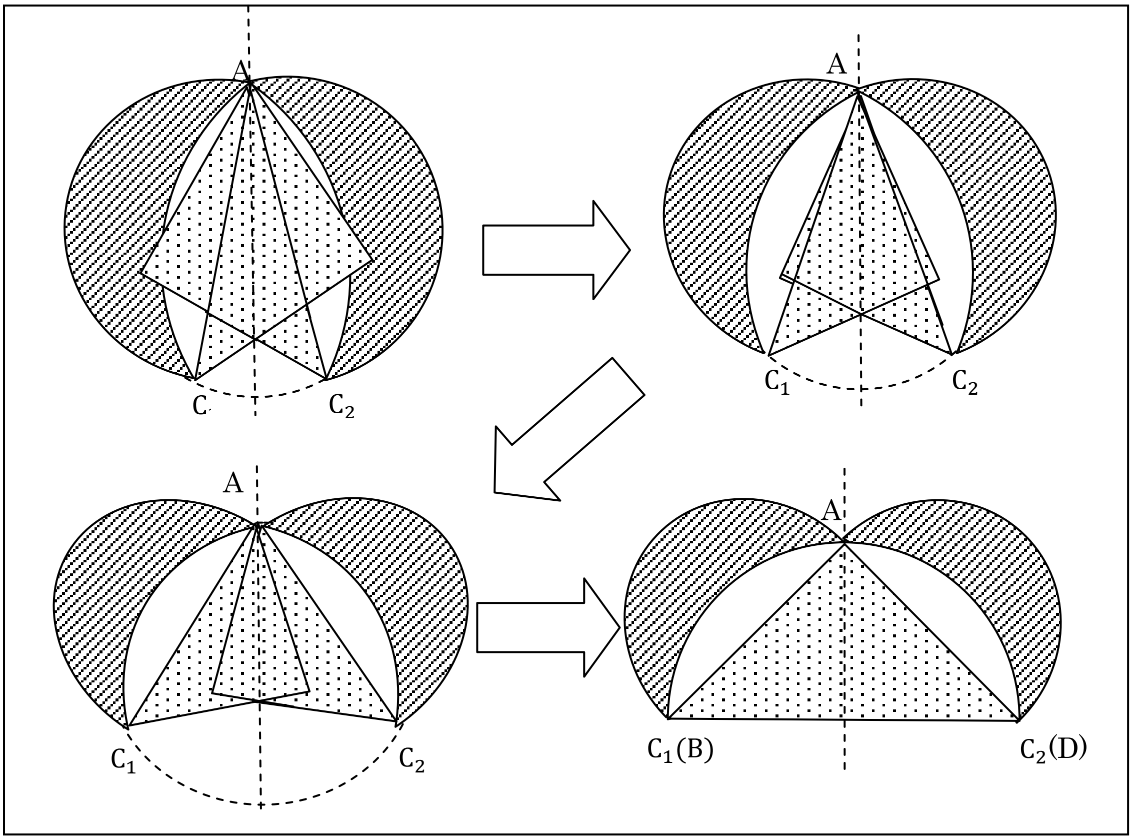


図８　図形を動的に見たもの

また、BD が直径であることから考えらものがあるか。またそのような三角形でも囲まれた面積が同じになるか検討してみる。

BD は直径であるので、円周角の定理により∠BAD＝90°であるといえる。そのため、半円に内接する三角形は∠BAD＝90°の直角三角形が考えられる。

それでは、直角三角形 ABD であるとき、直角を挟む二辺を直径とする半円と、斜辺を直径とする半円で囲まれた図形の面積は、直角三角形に等しいのか。

AB＝2a、BC＝2b、CA=2c とおくと、

斜線部分の面積 S は

$$S=\frac{\pi a^2}{2}+\frac{\pi c^2}{2}-\frac{\pi b^2}{2}+\frac{1}{2}\times 2a\times 2c$$

$$=\frac{\pi}{2}(a^2+c^2-b^2)+2ac$$

ここで三平方の定理より

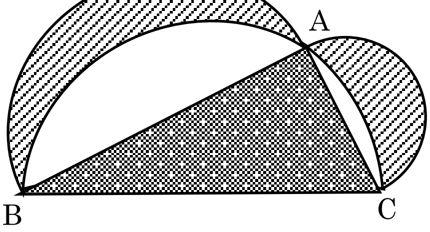
$$b^2=a^2+c^2$$

したがって

$$S=2ac$$

以上より、直角三角形の面積と等しくなることが分かる。これをヒポクラテスの月形という。

【ヒポクラテスの月形】
直角三角形の直角を挟む二辺を直径とする
半円と斜辺を直径とする半円で囲まれた図
形の面積は、その直角三角形の面積に等しい。



「未来へひろがる数学３」（啓林館）ではヒポクラテスの月形に関する発展問題として“図３で、色を付けた部分の面積を求めましょう。求めた面積から、どんなことがわかるでしょうか。”[10] という問題がある。ただ、曲線部で囲まれた面積と直角三角形の面積の関係を調べるだけではなく、このように点 C を C_1 と C_2 に分け、図形を動かす操作を与えることにより、生徒自身で図形を動かし新しい数学的事実を発見しようと試みようとするこの問題を活用問題とすることができるのではないかと考えた。

3.3.1.2　活用問題の開発 2(ユークリッドの互除法)

【問題提示 2】399245 と 462990 の最大公約数を求めなさい。

[解答]
399245 と 462990 をそれぞれ素因数分解し共通因数を見つけ出し､最大公約数を見つける。
399245＝5×7×11×17×61
462990＝2×3×5×11×23×61
したがって最大公約数は
5×11×61＝3355
　このように 2 数の整数をそれぞれ素因数分解すれば､最大公約数を求めることができる。しかし、大きい素因数がたくさんあると、素因数分解するのは時間のかかる作業となる。このように、地道に計算する作業を通して答えまでたどり着くことも大切だが、ここではより効率的に求めるようにしたい。
　まずは、割り算を図形的に考えてみる。
1)割り算について
例えば、8÷2 について考えてみる。
横の長さを 8、縦の長さを 2 の長方形を考えた時、8÷2 という計算は与えられた長方形の中に横と縦の長さがそれぞれ 2 の正方形をいくつ作れるかということを表すことができる。(図 9)

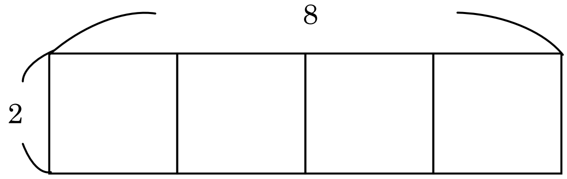


図 9　割り算を図形で考えたときの図

つまり、8÷2＝4 となり 2×2 の正方形が 4 つできるということが分かる。これは余りが出ない時の図を表している。次に余りが出る場合について考えてみる。

68÷32 のとき図で表すと図 10 のように表すことができる。

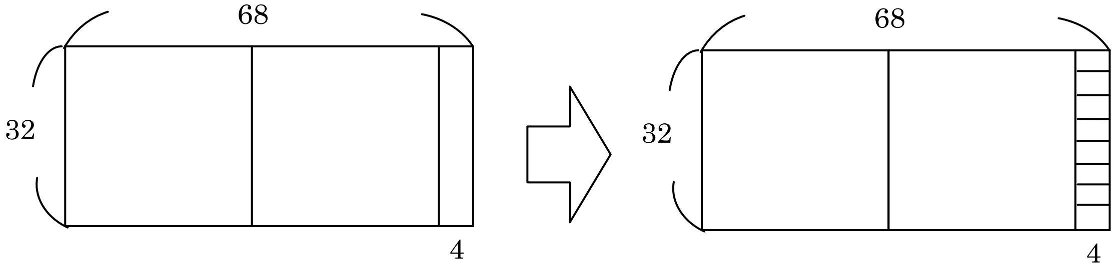


図 10　68÷32＝2…4 の場合

縦 32 横 4 の長方形が余る。次に余った長方形の中で縦 4 横 4 の正方形を作れるかをみると、32÷4＝8 という式で表すことができる。つまり、横 68 縦 32 の長方形は縦 4 横 4 の正方形で敷き詰めることができる。ここで 68 と 38 の最大公約数は 4 である。したがって、長方形の中に正方形を作り、敷き詰められるときの一番大きな正方形の一辺の長さと同じであることが分かる。

この計算を見直してみると、68÷32＝2…4 を①、32÷4＝8 を②とすると、②の 32 は①の割られる数であり、4 は①の余りを表している。そして、余りがなくなったときの式の割る数の 4 が最大公約数になっていると考えることができる。

つまり、割られる数を余りで割る操作を繰り返し、余りがなくなったときの式の割る数が、最初の式の割られる数、割る数(①の場合は 68 と 32)の最大公約数になっていることが分かる。

なぜ、この計算方法をすることにより最大公約数を求めることができるのか求めようとすると、ユークリッド互除法という定理を求めることにつながる。

2)ユークリッド互除法について

a と b の最大公約数を(a, b)で表すことにする。まず､除法の原理 a＝bq+r(0≦r≦b)から、(a，b)=(b，r)。これは、(a,b)は b,r を割り切るので、(a,b)≦(b,r)、また、(b，r)は a,b を割り切るので(b，r)≦(a，b)となることから分かる。ここで次のように割り算を繰り返す。

$a=bq+r$　　　$0 \leqq r<b$

$b=rq_1+r_1$　　　$0 \leqq r_1<r$

$r=r_1q_2+r_2 \quad 0 \leqq r_2 < r_1$

$r_1=r_2q_3+r_3 \quad 0 \leqq r_3 < r_2$

$\cdots \qquad \cdots$

すると、$r>r_1>r_2>r_3>\cdots \geqq 0$ は単調減少列で、負にはならないので、いつか 0 になる。簡単に説明するため、$r_3=0$ とすると

$(a, b)=(b, r)=(r, r_1)=(r_1, r_2)=(r_2, r_3)=(r_2, 0)=r_2$

よって、a と b の最大公約数は r_2 と計算できる。

また r_1 から元の式に代入していくと

$r=r_1q_2+r_2$

$r=(r_2q_3)q_2+r_2$

$=r_2q_3q_2+r_2$

$=r_2(q_3q_2+1)$

r, r_1 を b に代入

$b=rq_1+r_1$

$b=\{r_2(q_3q_2+1)\}q_1+r_2q_3$

$=r_2(q_3q_2q_1+q_1+q_3)$

b,r を a に代入すると

$a=bq+r$

$a=\{r_2(q_3q_2q_1+q_1+q_3)\}q+r_2(q_3q_2+1)$

$=r_2(q_3q_2q_1q+q_1q+q_3q+q_3q_2+1)$

したがって a は r_2 でくくれることが分かる。

ここで最初に除法の原理 $a=bq+r(0 \leqq r \leqq b)$から、(a, b)=(b, r)となると言っているがなぜ最大公約数が等しくなるのかを考えてみる。

(a,b)=(b,r)になる証明

$a=bq+r(0 \leqq r < b)\cdots(1)$という式から、a と b の最大公約数と b と r の最大公約数に等しいといえる。

また $A=\{x \mid x$ は a、b の公約数$\}$ $B=\{x \mid x$ は b、r の公約数$\}$

というように A,B は二つの集合を表す。

証明

(ｉ) $x \in A$、すなわち a, b の任意の公約数を x とすれば、(1)より

$r=a-qb$

により、x は r の約数、

したがって、x は b、r の公約数となり、

$x \in B$、すなわち $A \in B$

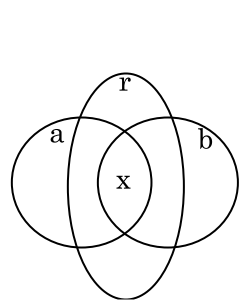


図 11 （ｉ)の集合の図

（ⅱ） x∈B、すなわちb、rの任意の公約数をxとすれば、
(1)により、xはaの約数、したがって、xはa、bの公約数となり、

x∈A、すなわち　B∈A

この(ⅰ)、(ⅱ)により

A＝B

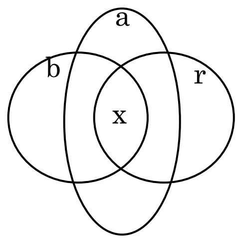


図12 （ⅱ)の集合の図

このように、最大公約数を求めるのが困難なとき、生徒が割り算を図形として考えるという普段とは違った視点で見ることで、生徒がより効率のよい最大公約数の求め方に気づき、なぜこの計算をすれば最大公約数を求めることができるのかという原因を考えてみようと試みて、定理の発見につなげることができるこの問題を活用問題とすることができるのではないかと考えた。

3.3.2　教材化への方法

しかし、活用は3.2章で「既習の知識や、新しい数学的事実を用いて、生徒自身が主体的に応用（実際の問題に当てはめ算数・数学の問題として解くことを）したり、拡張（既習の知識を用いて新しい理論を開発したり、新しく学ぶ内容が豊かになっていくことを）する活動を活かして、さらに新しい数学的事実を発見しようと試みる活動」と定義されている。この２つの問題は新しい数学的事実を発見しようと試みるようにはなっているが、新しい数学的事実を用いて拡張、応用していないと考える。そのため、この事例を活用問題とするためには、この事例の前に新しい数学的事実を発見する場面を設けて、さらにその場面で発見された新しい数学的事実と既習の知識を用いて、ヒポクラテスの月形やユークリッドの互除法という新しい数学的事実の発見にたどりつかなければならない。

つまり、この教材をもとに活用ができるように、教材化を図らなければならない。新版現代学校教育大辞典によると、教材化は“授業実践のために作られたのではない素材を、授業で用いる教材として組織し直すこと。「教材化」と「教材構成」とでは、意味合いが異なる。すなわち、「教材化」と言うときには、ある一つの素材を教材とするという意味合いが強く、「教材構成」と言うときには、複数の要素的な素材に一定の順序・配置を与えてひとまとまりの授業に用いるようにするという意味合いが強い。”[11)] と述べられている。この文献を踏まえて、第3章で行う活用問題の教材化は、『生徒自身で活用することができそうな１つの問題を、複数の要素的な問題や素材に順序や配置を与え、論理を組み立てて授業構成を行うこと』とする。

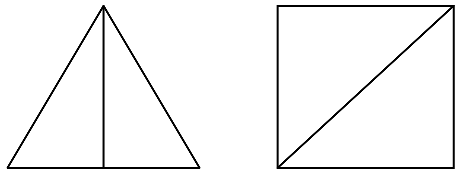
これらをもとに、3.3.1の事例を教材化してみる。

3.3.3 教材化

3.3.3.1 教材化 1（ヒポクラテスの月形）

【問題提示 1】正三角形の高さと平行四辺形の対角線を求めなさい。なお正三角形と正方形の一辺の長さはそれぞれ 2cm と 4cm の場合を求めなさい。

　また正三角形の高さと正方形の対角線をそれぞれ何 cm にすれば、一辺が 8cm の正三角形と正方形を作ることができるか。



自力解決 C

三平方の定理を利用し、正三角形の高さと正方形の対角線を求める。

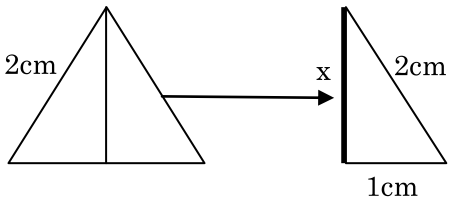


図 13 正三角形の高さを求める場合

図 7 のように正三角形の高さを x とすると三平方の定理より

$2^2 = x^2 + 1^2$

$x^2 = 3$

$x = \sqrt{3}$

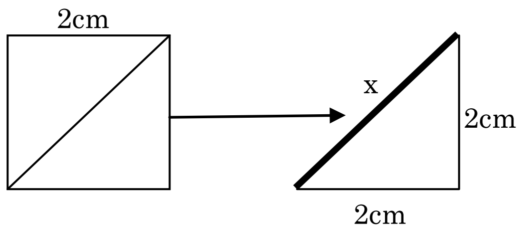


図 14　正方形の対角線を求める場合

図 8 のように正方形の対角線の長さを x とすると三平方の定理より

$x^2 = 2^2 + 2^2$

$\quad = 8$

$x = 2\sqrt{2}$

自力解決 B

　直角三角形の角度が 30°,60°,90° のときと 45°,45°,90° のとき一番短い辺を底辺とすると、底辺と高さと斜辺の比がそれぞれ $1:2:\sqrt{3}$、$1:1:\sqrt{2}$になることに気づくことが

できる。

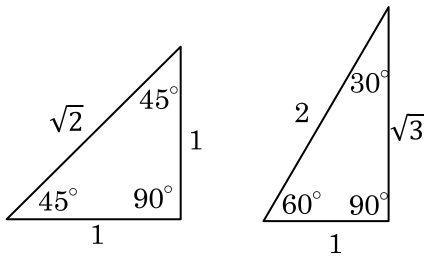


図 15　直角三角形の 3 辺の長さの割合

【問題提示 2】図 1 は、円の中に正方形 ABCD が内接している。さらに辺 AB と辺 AD をそれぞれ半径として、点 A から点 C に向かって円弧を描いた図とする。
図 1 で、正方形 ABCD の面積が部の面積に等しいことを示しなさい。

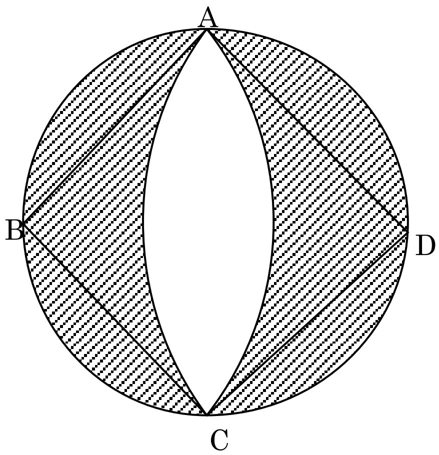


図 5　【問題提示 2】の図形

自力解決 B

正方形 ABCD の外接円の半径を r とすると、円の直径は 2r となる。

したがって、直角二等辺三角形 ACD で考えると、斜辺は 2r なので問題提示 1 の 3 辺の長さの割合より正方形の一辺の長さは$\sqrt{2}$となる。

次のように処理することができる。

部の面積 S は、

$$S=2\cdot\left\{\frac{\pi r^2}{2}-\left(\frac{\pi(\sqrt{2}r)^2}{4}-\frac{(\sqrt{2}r)^2}{2}\right)\right\}$$

$$=2\cdot\left\{\frac{\pi r^2}{2}-\left(\frac{2\pi r^2}{4}-\frac{2r^2}{2}\right)\right\}$$

$$=2r^2$$

以上より正方形 ABCD と面積が等しいことが分かる。

このまま解答を求めて終わりにするのではなく、求めた式や図を吟味して、さらに分かることを挙げてみる。

まず、S の式をよく見てみると、{　}の中の式は、図 6 のように半円から白い部分をひいた面積を表していることが分かる。

さらにその面積はr^2となるので、正方形ABCDの面積の半分であるので図7の面積と同じであることが分かる。

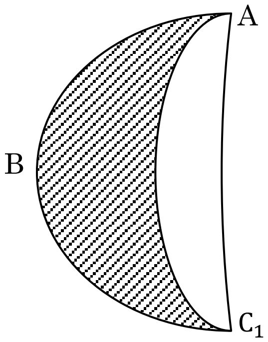


図6　半円部分

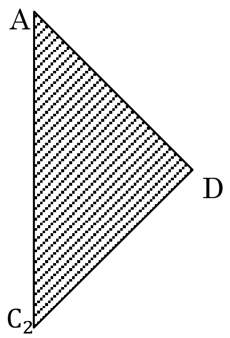


図7 正方形の半分部分

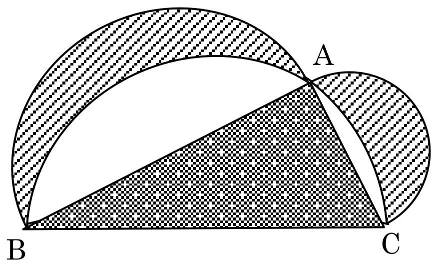
点Cを点C_1、点C_2に分解して、先程のようにAC_1、AC_2をそれぞれ直径、斜辺とした図形を描く。それぞれの点を点Aを中心に円の軌道に沿って回転させ、点C_1が点Bまで、点C_2が点Dまで到達するまでの図形について調べてみる。

（詳しくは3.3.1.1）

直角三角形の面積と等しくなることが分かる。これをヒポクラテスの月形という。

【ヒポクラテスの月形】

直角三角形の直角を挟む二辺を直径とする半円と斜辺を直径とする半円で囲まれた図形の面積は、その直角三角形の面積に等しい。



【問題提示3】

直角三角形ABCの各辺を一辺とする正三角形△ABD、△BCE、△ACFをつくる。四角形ADEFはどのような図形になるか検討してみよう。

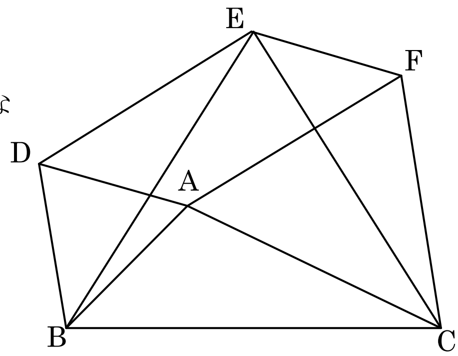


図16　【問題提示3】の図

自力解決B

△ABD、△BCE、△ACF は正三角形であるので、

AB＝BD＝AD

BC＝BE＝CE

AC＝AF＝CF　・・・①

△ABC と△DBE についてみると、

∠ABC＝60°－∠EBA

∠DBE＝60°－∠EBA

よって∠ABC＝∠DBE といえる。・・・②

①、②より 2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので

　△ABC≡△DBE　・・・③

また同様に△ABC と△FEC についてみると、

　∠ACB＝∠FCE　・・・④

①、④より 2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので

　△ABC≡△FEC　・・・⑤

①　③、⑤より

　AD=EF　　AF＝DE　であるので

2 組の対辺が等しくなるので四角形 ADEF は平行四辺形といえる。

自力解決A

平行四辺形の辺は正三角形の一辺となっており、正三角形の長さは△ABC の形によって変わることに気づき、自ら三角形 ABC の形を変え、平行四辺形の他にどんな図形ができるのかを調べることができる。

例えば四角形 ADEF がひし形になるとき

AB=AC の二等辺三角形にすると

先ほどの解答のように

△ABC、△DBE、△FEC が合同であることを示すと、AB＝AC なので、

DB＝DE　FC＝FE となり

AD＝DE=EF＝FA はすべて等しくなり

ひし形であるといえる。

　また、∠DAB と∠FAC の角度はそれぞれ 60°であることが分かる。つまり、

∠DAB＋∠BAC＋∠CAF＋∠DAF＝360°

∠BAC＋∠DAF＝240°

であることが分かる。つまり、∠DAF は∠BAC の大きさに依存していることに気づく。

　そのため∠DAF が 90°になるためには、∠BAC を 150°にすればよい。そうすれば平行四辺形 ADEF の内角はそれぞれ 90°になり、長方形になることが分かる。

さらに、辺の長さが全て等しくなれば、正方形になるので、AB、AC の長さを等しくすればよい。つまり、三角形 ABC を∠BAC＝90°の直角二等辺三角形にすることで、平行四辺形 ABCD は正方形になることが分かる。（表１）

表 1　三角形 ABC と四角形 ADEF の関係

△ABC	四角形 ADEF
一般な三角形	一般の平行四辺形
AB=AC の二等辺三角形	ひし形（正方形）
∠A＝150°の三角形	長方形（正方形）

このように、問題提示 1 から直角三角形の３辺の比の関係を発見することにより、次の問題提示 2 で斜線部の面積を求める際に役立てることができる。さらに、点 C を分割し、図形を動的に見ることを通してヒポクラテスの月形という新たな数学的事実を発見するという作業をすることで､問題提示 3 で生徒自らが元の△ABC の形を操作する手助けとなり、図形を操作し三角形の形を変えることで四角形 ADEF の形も変わり､△ABC が特定の形になったとき四角形 ADEF も正方形やひし形といった形になるという発見につなげることができる。

最終的に三角形 ABC と四角形 ADEF にはどのような関係があるのかということを生徒自らが発見しようと試みるので、この一連の活動を活用と呼ぶことができるのではないかと考える。

3.3.3.2 教材化 2（ユークリッドの互除法）

【問題提示 1】258594 は 7 の倍数かどうか調べなさい。

$\boxed{\text{自力解決 C}}$　258594 を 7 で割っていき、割りきれるかどうかを調べる。

$\boxed{\text{自力解決 }B_1}$　258594 を各桁の数に分けて、余りを調べる。

258594=200000＋50000＋8000＋500＋90＋4

=2×(99995+5)+5×(9996+4)+8×(994+6)+5×(98+2)+9×(7+3)＋4

=(2×99995＋5×9996+8×994+5×98+9×7)+2×5+5×4+8×6+5×2+9×3+4

=(2×99995＋5×9996+8×994+5×98+9×7)+119

119 が 7 で割り切れるので 7 の倍数であることが分かる。

$\boxed{\text{支援}}$　3 の倍数の判定の仕方を参考に調べることができないか。

$\boxed{\text{支援}}$　ただ 7 で割りきる方法より手際よく判定する方法はないか。(自力解決 B_2 の図 17 を提示する）

$\boxed{\text{支援}}$　なぜ十の位以上の数から一の位の数を 2 倍した数をひくと 7 の倍数の判定ができるのか。

$\boxed{\text{支援}}$　一の位の数を B、十の位以上の数を A とおく。

自力解決 B_2

与えられた整数を 10A+B と置く。($A \geqq 0$、$9 \geqq B \geqq 0$)

10A+B が 7 の倍数であるとすると $10A+B=7m$…①

とおくことができる。(m は整数)

したがって①から $B=7m-10A$

これを $A-2B$ に代入すると、

$$
\begin{aligned}
A-2B &= A-2(7m-10A) \\
&= 21A-14m \\
&= 7(3A-2m)
\end{aligned}
$$

つまり、与えられた数が 7 の倍数であれば、上の手続きを施したものは 7 の倍数であることが言える。この手続きを続ければ、最後には、0, ±7 になる。したがって、7 の倍数であることが分かる。

258594
8
25851
2
2583
6
252
4
21
2
0

図 17　7 の倍数の判定法

自力解決 A

自力解決 B_2 の式の中の $A-2B=A-2(7m-10A)$ という式に着目して、なぜ一の位を 2 倍したのか、2 倍して十の位以上の数からひいた数は 7 の倍数になるかの理由が分かり、11 や 13 などの他の素数の倍数の判定方法を生徒自ら考え、見出すことができる。

A の係数の一の位は必ず 1 になり、11 は一の位が 1 であるので、一の位の数をそのままひく。13 の倍数で一の位が 1 であるものは 91 であるので、一の位の数を 9 倍してひけばよい。

11 の倍数

$10A+B=11m$ とする。(m：整数)

$B=11m-10A$

これを $A-B$ に代入すると

$$
\begin{aligned}
A-B &= A-(11m-10A) \\
&= 11A-11m \\
&= 11(A-m)
\end{aligned}
$$

つまり、一の位の数 B で十の位以上の数 A をひいた数は 11 の倍数になる。その計算を続けると、11 で割り切れることが分かる。

13 の倍数

$10A+B=13m$ とする。(m：整数)

$B=13m-10A$

これを $A-9B$ に代入すると

$A-9B=A-9(13m-10A)$

$=91A-117m$

$=13(7A-9m)$

つまり、一の位の数 B を 9 倍した数で、十の位以上の数 A をひいた数は 13 の倍数になる。その計算を続けると、13 で割り切れることが分かる。

支援　なぜ一の位の数を 2 倍するのか。

支援　11 や 13 の倍数の判定方法も調べてみよう。

【問題提示２】次の問いに答えなさい。

(1) 399245 は 17 の倍数か調べなさい。

(2) 399245 と 462990 の最大公約数を求めなさい。

自力解決 B_1

17 の一の位は 7 であるので、整数の十の位以上の数から一の位を 3 倍したものをひいていけばよいことが分かり、その手続きを行っていく。最後の数が 0 か±17 になれば、17 の倍数であることが分かる。

(証明)

与えられた整数を 10A+B とする。A、B は整数（$A \geqq 0$、$9 \geqq B \geqq 0$）

まず、10A+B が 17 の倍数であるとすると、

$10A+B=17m$（m は整数）とおける。

これより　$B=17m-10A$

これを $A-5B$ に代入して、

$A-5B=A-5(17m-10A)$

$=A-85m+50A$

$=51A-85m$

$=17(3A-5m)$

つまり、一の位の数 B を 5 倍した数で、十の位以上の数 A をひいた数は 17 の倍数になる。その計算を続けると、17 で割り切れることが分かる。

自力解決 B_2

399245 が 17 で割り切ることができ、さらに今まで使用してきた数で倍数の判定法を行い、素因数分解を行っていく。

399245 の素因数を用いて、462990 の因数を見つけ出し、最大公約数を探していく。

$399245 \div 17 = 23485$

23485 を今までの倍数判定を使い、素因数分解すると、

$399245 = 23485 \times 17$

$$\left(\begin{array}{r} \underline{23485} \\ \underline{10} \\ \underline{2338} \\ \underline{16} \\ \underline{217} \\ \underline{14} \\ 7 \end{array}\right)$$

図 18　7 の倍数の判定法をした場合

$=5\times7\times11\times17\times61$

このように素因数分解したときの、5，7，11，17，61 を用いて

399245 と 462990 の共通因数を見つけ出し、最大公約数を探す。

$\boxed{\text{支援}}$ 17 の倍数を判定するには一の位の数を何倍すればよいか。

$\boxed{\text{支援}}$ 最大公約数を求めるには最初に何をすれば手際よく求めることができるか。

$\boxed{\text{支援}}$ できた人は他に最大公約数を手際よく求める方法を考えてみよう。

$\boxed{\text{自力解決 A}}$

自力解決 B の方法より手際良い方法を生徒自ら探そうとする。

462990÷399245＝1…63745

399245÷63745＝6…16775

63745÷16775＝3…13420

16775÷13420＝1…3355

13420÷3355＝4

最大公約数は 3355

(ユークリッドの互除法)

a と b の最大公約数を(a, b)で表すことにする。まず､除法の原理 $a=bq+r(0\leqq r\leqq b)$から、(a，b)=(b，r)。これは、(a,b)は b,r を割り切るので、(a,b)≦(b,r)、また、(b，r)は a,b を割り切るので(b，r)≦(a，b)となることから分かる。ここで次のように割り算を繰り返す。

$a=bq+r \qquad 0\leqq r<b$

$b=rq_1+r_1 \qquad 0\leqq r_1<r$

$r=r_1q_2+r_2 \qquad 0\leqq r_2< r_1$

$r_1=r_2q_3+r_3 \qquad 0\leqq r_3<r_2$

$\cdots \qquad \cdots$

すると、$r>r_1>r_2>r_3>\cdots\geqq0$ は単調減少列で、負にはならないので、いつか 0 になる。簡単に説明するため、$r_3=0$ とすると

$(a, b)=(b, r)=(r, r_1)=(r_1, r_2)=(r_2, r_3)=(r_2, 0)=r_2$

よって、a と b の最大公約数は r_2 と計算できる。

また r_1 から元の式に代入していくと

$r=r_1q_2+r_2$

$r=(r_2q_3)q_2+r_2$

$\quad=r_2q_3q_2+r_2$

$\quad=r_2(q_3q_2+1)$

r, r_1 を b に代入

$b=rq_1+r_1$

$b=\{ r_2(q_3q_2+1) \} q_1+ r_2q_3$

$= r_2(q_3q_2q_1+q_1+q_3)$

b,r を a に代入すると

$a=bq+r$

$a= \{r_2(q_3q_2q_1+q_1+q_3)\}q+ r_2(q_3q_2+1)$

$= r_2(q_3q_2q_1q+q_1q+q_3q+q_3q_2+1)$

したがって a は r_2 でくくれることが分かる。

(a,b)=(b,r)になる証明

$a=bq+r(0\leqq r<b)\cdots(1)$という式から、a と b の最大公約数と b と r の最大公約数に等しいといえる。

また　A＝{x | x は a、b の公約数}　　B={x | x は b、r の公約数}

というように A,B は二つの集合を表す。

証明

(ｉ)　x∈A、すなわち a，b の任意の公約数を x とすれば、(1)より

$r=a-qb$

により、x は r の約数、

したがって、x は b、r の公約数となり、

x∈B、すなわち　A∈B

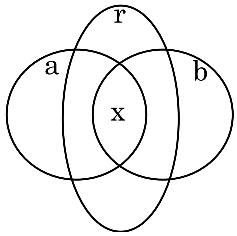


図 11　(ｉ)の集合の図

(ⅱ)　x∈B、すなわち b、r の任意の公約数を x とすれば、

(1) により、x は a の約数、したがって、x は a、b の公約数となり、

x∈A、すなわち　B∈A

この(ｉ)、(ⅱ)により

A＝B

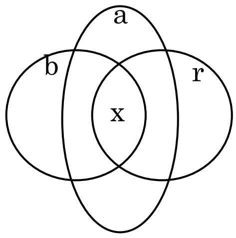


図 12　(ⅱ)の集合の図

【例】a=731　b=153　q=4　r=119 とすると、a，b，r のそれぞれの約数は

a＝{1,17,43,731}　b={1,3,9,17,51,153}　r={1,17,119}

(ｉ)の場合の x(a と b の公約数)は x＝{1,17}

$r=a-bq$ から

$=731-153\cdot4$

$=\underline{17}(43-9\cdot4)$

下線部は a,b の公約数の積を表している。つまり、r は x の要素と定数をかけ合わせた数を表しているので、x は r の約数であることが分かる。

つまり、x は a,b の公約数{1,17}でもあるので、b,r の公約数{1,17}であることも言える。

したがって、$x \in B$　より　$A \in B$

（ⅱ）の場合の x(b,r の公約数)は x＝{1,17}

(1) から　$a=bq+r$

$$=153 \cdot 4+119$$

$$=\underline{17}(9 \cdot 4+7)$$

下線部は b,r の公約数の積を表している。つまり、a は x の要素と定数をかけあわせた数を表しているので、x は a の約数であることが分かる。

つまり、x は b,r の公約数{1,17}でもあるので、a,b の公約数{1,17}であることも言える。したがって、$x \in A$　より　$B \in A$

問題提示 1 では倍数判定法の問題を提示し、生徒自身で簡単に倍数の判定ができるよさや、自力解決Ｂのように判定のできる根拠を見出してもらうように活動をしてもらいたい。さらに、他の倍数の判定法を探し出そうとし、その結果を問題提示 2 の最大公約数を見つける手助けになるようにしていく。しかし、問題提示 2 は問題提示 1 の結果を使っても時間のかかる作業になる。この活動を通して、もっと効率よく求めることができないかと考え、生徒自身で他の答えの求め方を探し出そうとし、最終的にユークリッドの互除法に結びつくことができるこの一連の活動を活用と呼べるのではないかと考える。ユークリッドの互除法にたどりつくために、3.3.1.2 で示した割り算を図形的に見ることを支援として加えればより定理の発見につながるのではないかと考える。

第 4 章
本研究のまとめと今後の課題

4.1 章では本研究での活用についてのまとめを述べる。4.2 章では研究を通して残った課題を提示する。

第４章　本研究のまとめと今後の課題

4.1　本研究のまとめ

今回の研究で、活用は算数・数学教育において重要な学習過程であると考える。動機で述べたように、正木氏の文献では学習過程を 4 段階に分けていて、その中に活用は含まれていなかったが、今回の研究を通して、自力解決やふり返りだけでは必ずしも問題の理解ができたと言えるわけではなく、自力解決などの過程で発見した新たな数学的事実や既習の事項を生徒自身で主体的に活用できたとき、用いた問題や定理、手続き、方法などの価値を初めて認識できたと判断できるのではないかと考えた。

また、活用をする場面を作るためには、用いた問題や定理、手続き、方法を活用できるように問題構成や教材化を行わなければならない。既習の事項や前の問題で発見した数学的事実を用いて、問題の解決を通して新たな数学的事実の発見を試みることで初めて活用したということができる。そのため、ただ新しい数学的事実を発見できる問題を解くだけでは本研究での活用と言うことができない。活用させたい問題をもとに、複数の問題に順序や配置を与え授業構成を行うことで生徒自身が活用する場面を作ることができるので、活用するためには、このような場面を作る教材化を図らなければならない。生徒が活用する場面を教師が作り続け、生徒が活用する機会を増やすことができれば、次第に活用する力がつくことができるのではないかと考える。

さらに、活用は問題の理解だけではなく、算数・数学のよさを実感し、学習意欲の向上にもつながる。そして算数・数学教育だけではなく、他教科での問題解決の力をつけたり、社会に出るための「生きる力」の育成にも大きく関わることであると考える。つまり、活用する力をつけるということは、学習そのものととらえることのできる重要な過程であると考えられ、常に学習過程の中に位置づけ、活用できる学習をしていかなければならないと考えるものである。

4.2　今後の課題

今後の課題の一つ目は活用問題への授業構成である。3.3 章でとりあげた活用問題の教材化の部分で、ヒポクラテスの月形の問題があったが、生徒自身で図形を動的に見て、最終的にヒポクラテスの月形という数学的事実の発見につながるようにして、生徒に直線図形の面積が曲線で囲まれた面積と等しくなる驚きや不思議さを感じてもらえるように教材化をしようと考えた。しかし、ヒポクラテスの月形につながる開発問題 1 を生徒自身でいきなり動的に見るということは困難であると考えられ、また教師側からいきなり図形を動的に見よという発問をしてしまい、生徒が言われるがままに図形を動かし定理を発見しても、理解が深まるとは思わない。したがって、この教材の以前に図形の活用が幅広くできるように、生徒自身で図形を動的に見る活動ができる教材を洗い出し系統化することを課題として位置づけた。

二つ目の課題は、生徒自身が活用できるように促すための教師側の発問や支援である。

活用はいきなりできるものではなく、日々の授業の中で生徒自身が活用しようと取り組むことを積み重ねて、初めて活用する力がつくものだと考える。生徒の活用しようという姿勢を作るためには、教師側の発問や支援が大きく関わっていると考えている。今回の研究では、主に問題の開発や教材化について研究し、どのような教材にすれば生徒は活用してくれるのかについて焦点を当てていた。しかし、3.3 章の教材でも発問や支援をする場面があり、どのように発問、支援をしていけば生徒は活用の必要性を感じて取り組んでくれるのかについて調べることを課題として位置づけた。

三つ目の課題は、活用教材の実践を通しての生徒の情意的検討である。本研究の研究課題の三つ目に活用教材の実践を挙げていたが、今回の卒業研究では実践にまで至らなかった。しかし、第 3 章は私がこのような教材にすれば生徒は活用してくれるのではないかと考えただけであり、実際に生徒が今回提案した教材に向き合ったとき、本当に生徒は主体的に活用してくれるのか。また、活用の過程を通して本当に数学的理解が深まるのかなどの情意面の検討をしていくことを課題として位置づけた。

※引用・参考文献

[1] 安彦　忠彦　等 (2002) 「新版　現代学校教育大辞典 6」株式会社ぎょうせい　p274

[2] 片桐　重男 (1988)「数学的な考え方・態度とその指導 2　問題解決過程と発問分析」 明治図書出版株式会社　p11-22

[3] G.Polya, (1954) 「いかにして問題をとくか」 p23　丸善株式会社

[4] 正木　孝昌 (1997) 「初等数学の授業構成とその改革」 学校数学の授業構成を問い直す　日本数学教育学会編　p160

[5] 佐藤　学 (2011) 「論説 2　自らの学びをふり返り、改めて問い直す新しい課題 ―「改善」―「追試」―「活用」―」 新しい算数研究　No.486　7 月号　p8-10

[6] 井ノ迫泰弘 (1997)「中等数学の授業構成とその改革（1）」 学校数学の授業構成を問い直す　日本数学教育学会編　p166～170

[7] 文部科学省, 「中学校学習指導要領解説　数学編」 p14　教育出版

[8] 長崎　栄三　「月刊　新しい数学研究　1 月号　算数を活用する力を育てる指導」 東洋館出版社　p4～p7

[9] 味村　和行　「月刊　新しい数学研究　1 月号　算数を活用する力を育てる指導」 東洋館出版社　p8～p11

[10] 岡本　和夫、他 39 名 (2011) 「未来へつながる数学３」 啓林館　p213

根元　博 (1999) 「数学的活動と反省的思考」 東洋館出版

[11] 安彦　忠彦　等 (2002) 「新版　現代学校教育大辞典 2」株式会社ぎょうせい　p356

小高　俊夫,『図形・空間のカリキュラム改革へむけて　―スキーマ形成論の展開と「統合幾何」の提案―』 p156～p160　東洋館出版社

謝辞

本研究を進めるにあたり、これまで多くの方々に御指導いただきましたことを深く感謝しております。

指導教官の矢部敏昭先生には、本当にお世話になり感謝しております。私は工学部の学生であるのに、卒業研究で数学教育の研究をしたいという気持ちを矢部先生が聞いて下さり、1 年以上もゼミで御指導をしていただきました。数学教育について全く知識のなかった私ですが、毎回のゼミで親切に教えていただきました。さらに、数学教育だけではなく、論文の書き方、研究のやり方、文献の読み方、ものの見方や考え方、そして教育に携わる姿勢など数多くのことを学ばせていただきました。この 1 年間、矢部先生から御指導をいただきまして、矢部先生は教育者として、人として本当に尊敬するところばかりで、将来教師を目指している私に大きな刺激を与えていただきました。矢部先生から教わったことや学んだことを、これからの教師生活に活かせるように精進していきたいと思います。矢部先生から多くのことを学ばせていただき、深く感謝しております。

また、溝口達也先生にも、講義や卒業論文中間発表会のときに御指導いただき、本当に感謝しています。講義や中間発表、大学院入試のときに、私自身が研究で気づかなかったことや、曖昧な部分をご指摘していただき、常に私自身の研究を見直すきっかけになり、本当に勉強になりました。数少ない場面でありましたが、毎回適切に指導していただき深く感謝しております。

そして、研究室のメンバーにも恵まれました。矢部研究室の先輩でもある日野治樹さんには、本当によくしていただきました。工学部から数学教育のゼミに参加する際、研究のことだけではなく、研究室でのあり方、礼儀など何も分からなかった私に親切に教えていただき深く感謝しております。溝口研究室の池田和彌さんは溝口先生の講義で行き詰ったとき、忙しい中アドバイスをしていただき、また同研究室の玉木義一さんは研究のことや大学院試験で用いられる数学教育について一緒に考え、親切に教えていただき深く感謝しております。そして、今まで共に研究をしてきた矢部研究室の同期の川畑翔史さん、藤田綾さん、佐々木翔平さん、山根敬大さんは、励まし合い、喜び合える、よい仲間として一緒に成長することができました。このメンバーで研究することができて良かったです。ありがとうございました。

応用数理工学科の藤村薫先生にも深く感謝しております。本来は、応用数理工学科で卒業研究をするところ、数学教育の卒業研究をしたいという気持ちを聞いていただき、大変お忙しい中、矢部敏昭先生にお願いしていただきました。本当に感謝しております。

このように、多くの方々に支えられ、この論文を完成させることができました。これから大学院に進学後も、今までの大学生活で学んだことを活かして、さらに研究に励みたいと思います。

最後に、大学を卒業するまで応援し続けてくれた家族に感謝の気持ちを申し上げます。

平成 25 年 1 月 28 日
渡会　亮介

鳥取大学数学教育研究　　ISSN 1881–6134

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。

- 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
- 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
- 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
- その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX 0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/