ISSN 1881-6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

算数・数学教育における問題解決の学習に関する一考察

~「集団による振り返り」の過程に焦点をあてて~

藤田 綾　*Aya Fujita*

vol.15, no.10

Mar. 2012

鳥取大学 数学教育学研究室

目次

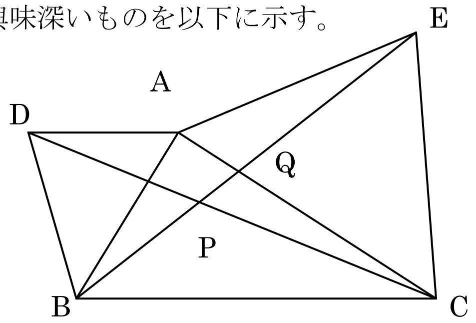
第 1 章

研究の目的と方法

1 研究の目的と方法

1.1 研究の動機

卒業研究を通して、根本博氏著の「数学的活動と反省的経験」を読んでいく中で、数学的活動における「振り返り」は問題解決学習のいろいろな場面で行われているのだということを知った。また、子ども達が問題の解き方をインプットするのではなく、やったことを考え直して、今まで見えていなかったことを探す態度を育むことの重要さを感じたのである。文献の中で、根本氏が挙げていた図形の証明問題を扱った事例で興味深いものを以下に示す。



【問題場面】

上図のような三角形 ABC がある。

この三角形の辺 AB,AC を一辺とする正三角形 ADB、ACE をかき、点 D と点 C、点 B と点 E を結んだ線分の交点を P とするとき、∠EPC の大きさを求めよ。

(証明)

△ADC と△ABE について、

AB=AD　 AE=AC

∠CAD=∠EAB

よって

∠ADC=∠ABE

∠ACD=∠AEB

よって△ADC≡△ABE

また AC と BE の交点を Q とすると

∠EQC=∠AEQ + ∠EAQ

=∠AEQ + 60°（∵∠EAQ=60°）

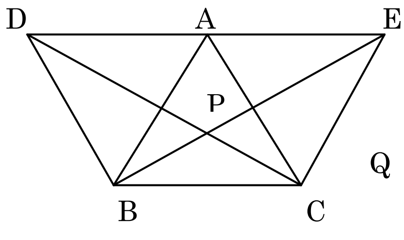
=∠ACD + ∠EPC

よって　∠EPC = 60°　(終)

この問題を通して、子ども達がこの学習を通して、問題の意味を理解することの重要性を述べている。この問題は、△ADC≡△ABE を示し、次に∠ACD＝∠AEB を利用して、∠EPC が 60°であることを導くのが一般的であるだろう。しかし、子ども達にとっては合同の証明だけでも厄介だと考えられる。こういった問題を考える時、「もう一度よく観察してみよう」ということが大切である。こうした問いは常日頃からしておかないと生徒の自然な行動に繋がらない。これが大切であるというのは、生徒にとってそれが、内面での自己の行為に対する意味付けの作業になるからである。

この問題の振り返りの手続きを見ると、解決のために様々な情報を収集していたことが分かる。また、振り返りながら、三角形 ABC が正三角形のときや、鈍角三角形のときはどうなるかなど、条件がかわった場合についても∠EPC は同様の値をとるのか。それとも∠EPC が 60°をとるのは、与えられた条件に関係があるのかなど、知らないうちに問いかけていることにも気づく。以下に△ABC が正三角形の場合と鈍角三角形の場合の証明を示す。

＜△ABC が正三角形の場合＞



(証明)

△ADC と△ABE について正三角形より

AB=AD　　AE=AC

∠CAD=∠EAB　(∵∠BAC 共通)

よって

△ADC＝△ABC　このことから

∠ADC＝∠ABE

∠ACD＝∠AEB(=∠AEQ) ――①

また AC と BE の交点を Q とすると

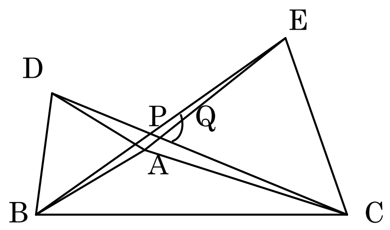
∠EQC=∠AEQ＋ ∠EAQ

=∠AEQ＋60°(∵①)

=∠ACD＋ ∠EPC

よって　　∠EPC＝60°

＜△ABC が鈍角三角形の場合＞



(証明)

△ADC と△ABE について正三角形

AB=AD　　AE=AC

∠CAD=∠EAB　(∵∠BAC 共通)

よって

△ADC＝△ABC　このことから

∠ADC＝∠ABE

∠ACD＝∠AEB(=∠AEQ) ――①

また AC と BE の交点を Q とすると

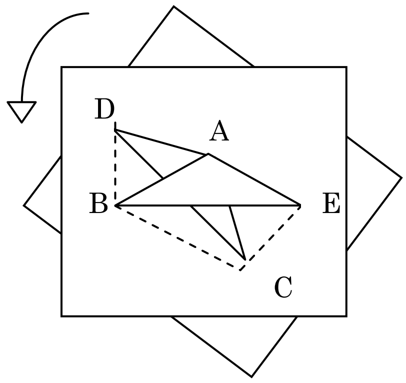
∠EQC=∠AEQ＋ ∠EAQ

=∠AEQ＋60°(∵①)

=∠ACD＋ ∠EPC

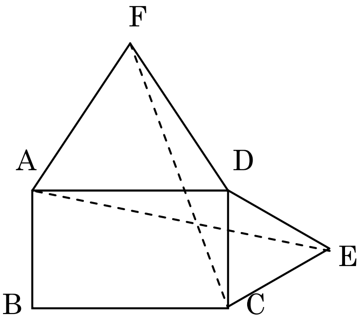
よって　　∠EPC＝60　　(終)

また、図形を次のように見ることもできる。



合同な三角形が描かれている 2 つの平面の一方を回転させる。辺 AD が辺 AB に重なるまで回転すると辺 DC と辺 BE のなす角はその回転角と同じであるので∠EPC =60° は当然のことである。

では「もし、与えられるのが三角形 ABC ではなく四角形 ABCD であった場合は？」辺 AD,CD をそれぞれ一辺とする正三角形を描いたとき∠EPC の大きさはどうなるのか？長方形になったとしでも結果は明らかである。実際に図を動かして考えているのではないが、あたかも図を動かして考えているのと同じように見えてくる。



子ども達に証明の仕方だけでない何かを期待するならば、こういった「振り返り」の活動が必要となると考えられる。私は、こういった活動を「集団の話し合い」のなかに組み込めるのではないかと考えるようになったのである。

「集団の話し合い」では、「自力解決」によって導き出された多様な考えを子ども達が出し合い、共有するという活動が展開さ

れる。子ども達にとって、まず自分の解決した問題の結果や過程を「個で振り返る」場面である。それと同時に、自分以外の考え方や解決の過程を知り、「集団で振り返り」、よりよい考えや新たな問題へつなげるという場面でもあると私は考える。この場面において、子ども達の「振り返る態度」を育むこともちろん重要であるが、私たちが「振り返る機会」が豊富にあるような問題設定をする必要もあると考える。以上を踏まえて、「集団の話し合い」における意義や役割、また数学的活動、「振り返り」を通してみちびかれる新たな問題などについて考えるものである。

1.2 研究課題の設定

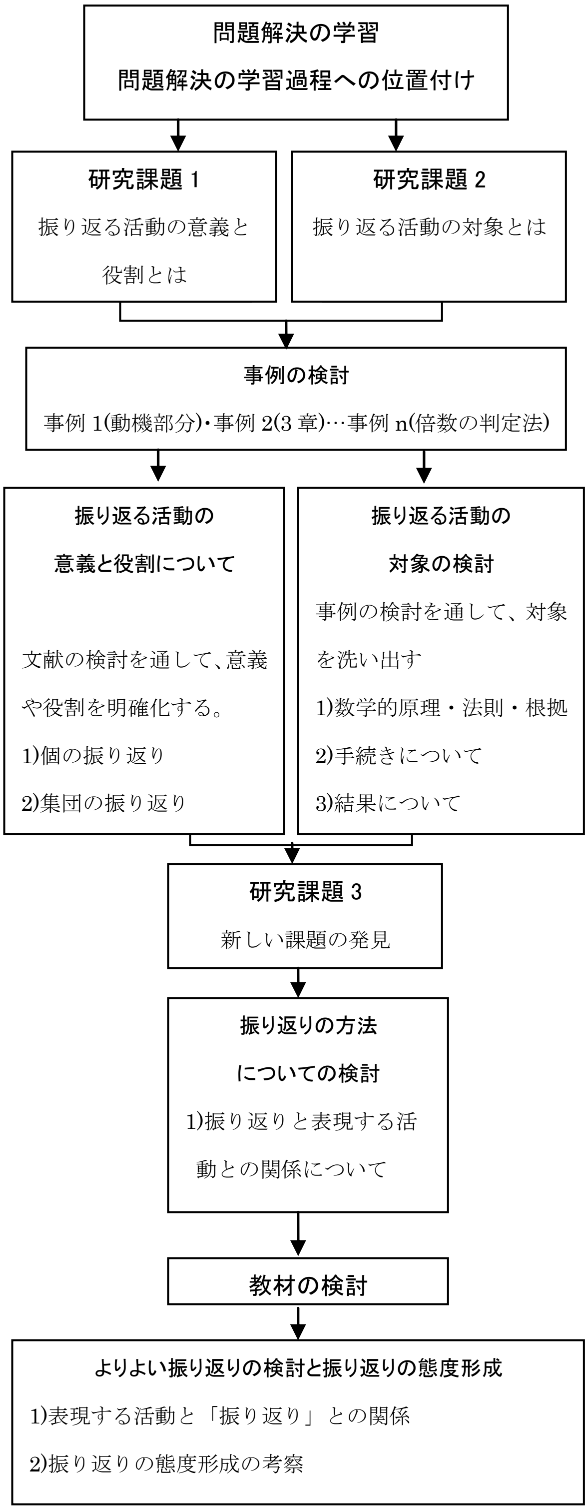
本研究の課題は以下のように設定した。

課題 1 振り返る活動の意義と役割とは何か
(1)個の振り返りについて
(2)集団の振り返りについて

課題 2 振り返る活動の対象とは何か
(1)数学的原理・法則・根拠の追究
(2)手続きについて
(3) 結果について

課題 3 新しい課題の発見
(1)振り返る活動と表現する活動の関係について

1.3 研究の枠組み



1.4 用語の定義

「問題解決の学習」とは

片桐重男氏の「問題解決過程と発問分析」によると、“数学の方法と内容とに関係した数学的な考え方の育成をねらいとして、算数・数学の授業を展開しなくてはならない。”“算数・数学の学習は、ほとんどが問題解決の連続であり、問題解決の能力を伸ばすものである。したがって、「問題解決の能力」を伸ばすということは、算数・数学のねらいといってもよい重要なことである。”[3]と述べられている。

また、教育用語辞典によると、“生活の中で子ども自身が学習課題に気付き、その課題解決をめざして、こども自身が能動的な学習をする学習方法”[4]とあり、新教育学辞典には“学習者がすすんで学習問題をとらえ、解決思考の学習活動をしながら、これを追究し解明していく学習方法”[5]とある。

以上のことを踏まえて本研究では、「問題解決の学習」とは、数学的な見方・考え方、また問題解決の能力を育成するための学習方法として捉えられる。過程としては主に、「問題提示」「自力解決」「集団の話し合い」「まとめ」の 4 つの過程があり、解決する問題は、生徒にとって未知のものである必要があると考える。加えて、活動は生徒の主体的活動であることが望ましいものとする。

「振り返る」とは

根本博氏は「数学的活動と反省的経験」のなかで、本研究の動機部分に用いた事例について、次のように述べている。

“この学習で、証明の仕方だけでない何かを期待するとすれば、それはいったいどんなことか。これをどうすれば生徒に理解してもらえるか。これを明らかにするためには結論を導くまでの過程やその結果をふりかえって考えてみることが必要である。”[1]

“物事には、見えているつもりで見えていないことが意外に多い。図を観察しようというのは、やったことを考え直して、今まで見えていなかったことを探そうということである。”[1]

“こうした問い（「図をもう一度よく観察してみよう」）は常日頃からしておかないと生徒の自然な行為に繋がらない。”[1]

“ふりかえってみると、条件を確認し、何が分かっていれば結論に達するかとか、なぜ正三角形を描くのか、対応する二辺が等しい二つの三角形があるが、これは解決の手がかりにならないか、類似する問題はなかったかなど、解決のために様々な情報を収集、選択していたことが分かる。”[1]

これらを踏まえて、「振り返る」とは問題解決の学習において、やったことを考え直し、今まで見えていなかったことを探すために見直すことである。そして結果だけではなく解決の過程を見直し、再検討して新たな問題を発見しまた、新たな問題を創っていける子どもを育てることを目的としたい。

第２章

問題解決の学習について

2 問題解決の学習について

2.1 問題解決の学習とは

問題解決の学習は 1.4 章の用語の定義でも述べたように、主に「問題提示」「自力解決」「集団の話し合い」「まとめ」の 4 つの過程があるのだが、片桐重男氏の「問題解決過程と発問分析」によると、“数学的な考え方の育成をねらいとして、算数・数学の授業を展開するのだが、そのためには、学習の各段階で指導したらよいかということにつての見通しをもつことが望ましい。この段階でどの考えかたが必ず用いられるということは言いきれないが、一般に学習のどの段階でどの考え方が用いられることが多いかという意味での数学的な考え方の構造化をとらえることによって、指導の見通しが立てられる。そのために学習過程を分ける必要があると考えられる”[3)] とある。

また、G.Polya 氏の「いかにして問題を解くか」において、問題解決の過程を 4 つの段階に区分している。それは、リストの問いと注意をまとめるためであり、リストの問いと注意を示す目的としてつぎの 2 つのことを挙げている。“1 つは学生が手近な問題を解くのを助けることであり、もう 1 つは学生が将来自分で問題を解く能力を養うことである。”[6)] このことから、G.Polya 氏が文献においてリストの問いと注意をまとめるために問題解決の過程を 4 つに区分したのは、各過程で展開される学習者の数学的活動が異なるからであり、また数学的活動を導く数学的見方・考え方も異なるからであると考えた。

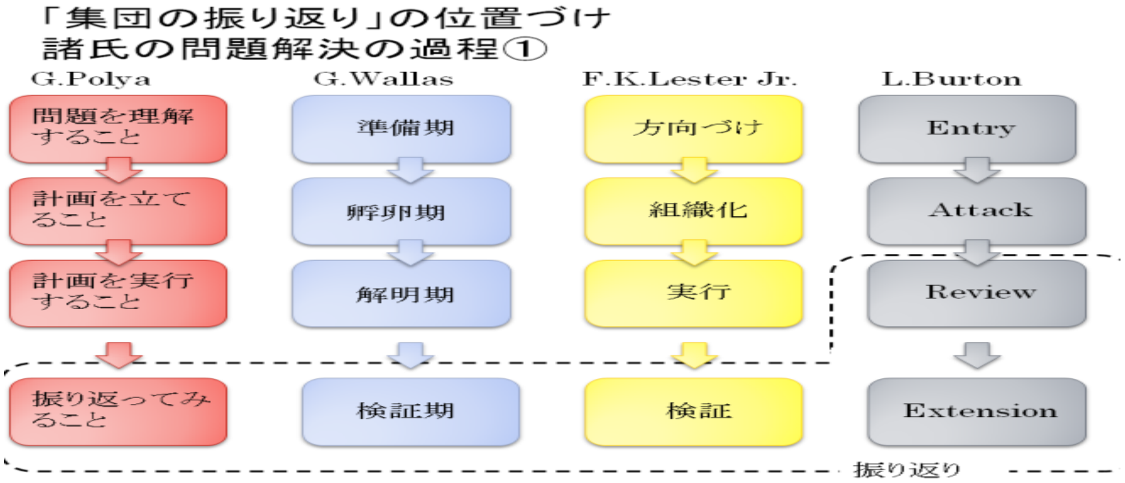
これらを踏まえて、問題解決の学習過程をわける理由として 3 つのことが挙げられる。1 つめは、教師として指導の見通しを立てるために必要であり、2 つめに、各過程で展開される学習者の数学的活動が異なるからであり、3 つめに各過程における数学的活動を導く数学的見方・考え方も異なるからであると考える。

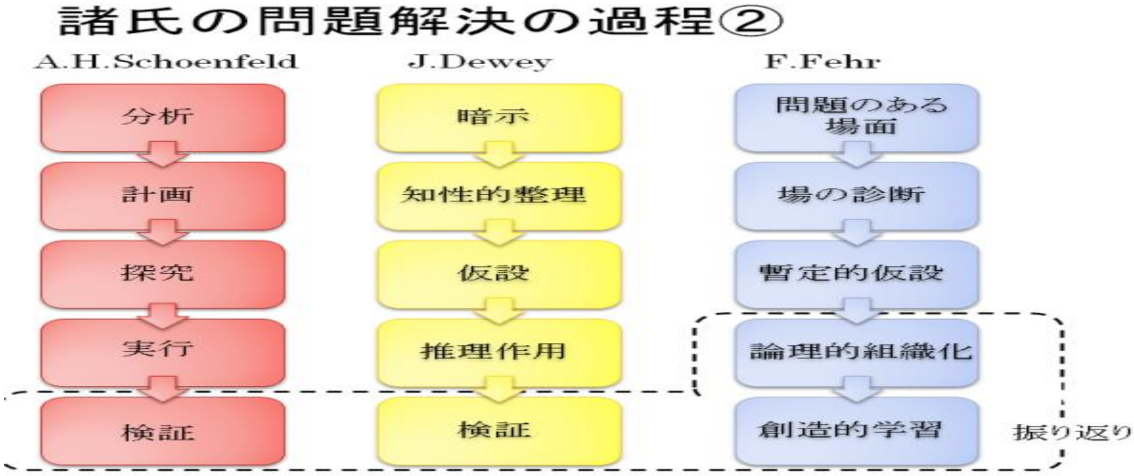
また、問題解決の学習は 1.4 章でも述べたように数学的な見方・考え方、また問題解決の能力を育成するための学習方法と本研究では捉えている。

算数・数学の学習は、ほとんどが問題解決の連続であり、問題解決の能力を伸ばすものである。したがって、「問題解決の能力」を伸ばすということは、算数・数学のねらいといってもよい重要なことである。問題解決の能力を伸ばすことは、問題解決の過程をふんでなされる。このようなことから、算数・数学の学習は、ほとんどが問題解決の過程を踏んでいるといえるし、またそのようにされることが望ましい。そして、その活動は生徒の主体的活動であることが望ましいものであると考える。

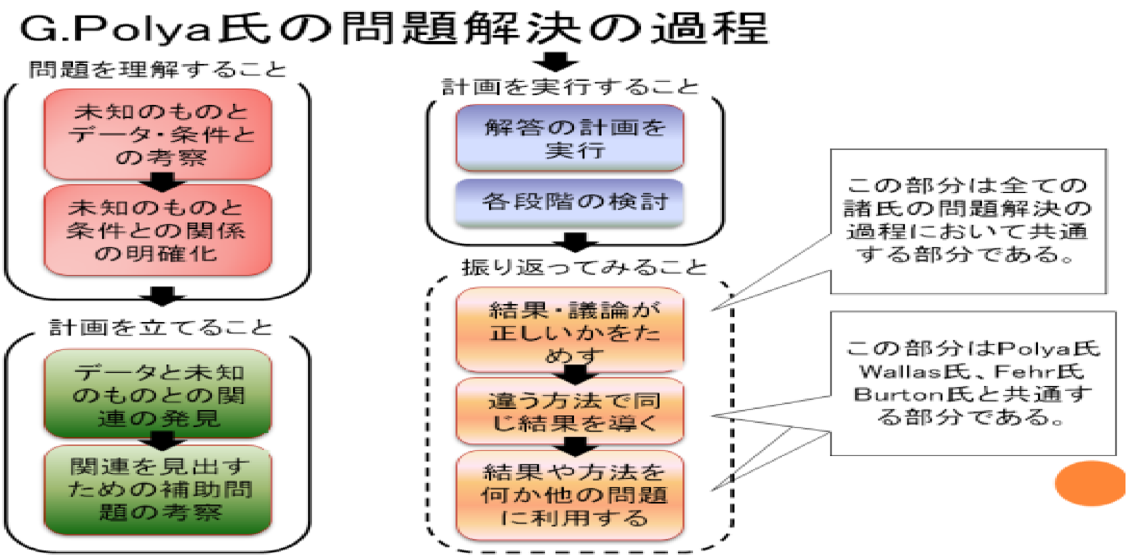
2.2 問題解決の学習過程についての諸氏の主張

片桐重男氏の「問題解決の過程についての諸説」を参考に、諸氏の問題解決の学習過程について検討をしていく。ここでは、問題解決の過程を知り、自分の焦点化した活動には何のために、どのような数学的活動が行われているのか、また自分の主張を明確に位置付けるために検討をしていくものである。下図は、諸氏の問題解決の学習過程をモデル図に示したものである。





次の図は、G.polya 氏の問題解決の過程について詳しく示したものである。



それぞれ破線で囲まれている部分が、本研究で着目する過程であると考える。

つぎに、それぞれの諸氏の問題解決の過程について、本研究で着目する部分で行われる数学的活動を明らかにしていく。

2.2.1 G.Polya 氏の場合

「ふり返ってみること」の過程における数学的活動は、以下のようなものが挙げられる。

・結果が正しいかどうかをためすことができるか
・議論が正しいかどうかをためすことができるか
・同じ結果を違った仕方で導くことができるか
・それを一目で理解できるか
・その結果や方法を何か他の問題に利用することができるか

2.2.2 J.Dewey 氏の場合

「検証」の過程における数学的活動は、以下のようなものが挙げられる。

・第 4 段階で妥当となった仮設を行動によって検証してみる段階

2.2.3 G.Wallas 氏の場合

「検証期」の過程における数学的活動は、以下のようなものが挙げられる。

・結果を証明すること
・洞察した結果を探究の終末とみなさず、それを利用する活動

2.2.4 F.Fehr 氏の場合

「創造的学習」の過程における数学的活動は、以下のようなものが挙げられる。

・これまでのⅠ～Ⅳの段階を新しい経験に応用し、検証する

2.2.5 A.H.Schoenfeld 氏の場合

「検証」の過程における数学的活動は、以下のようなものが挙げられる。

・特殊なテスト
・一般的なテスト

2.2.6 F.K.Lester Jr.氏の場合

「検証」の過程における数学的活動は、以下のようなものが挙げられる。

・検証する

2.2.7 Burton 氏の場合

「Extension」の過程における数学的活動は、以下のようなものが挙げられる。

・チェックする
・振り返ってみる
・伝え方を考える
・同型な問題を考える
・問題の範囲を広げる
・異なった問題を作る

第 3 章

集団による振り返りの過程について

3 集団による振り返りの過程について

3.1　振り返る活動の意義と役割とは何か

動機でも述べたように、根本博氏著の「数学的活動と反省的経験」によれば、数学的活動における「振り返り」は問題解決学習のいろいろな場面で行われている。振り返るタイミングも違えば、振り返る事柄も個人によって異なるのである。本研究では、「問題提示」や「自力解決」の過程また、「集団の話し合い」の過程において子ども一人ひとりが行う振り返りのことを、「個の振り返り」として位置付けることとする。

また、自力解決において一人ひとりが発見した解法や考え方を取り上げて、関係づけ、共通した数学的原理・法則を見出していく「集団の話し合い」の過程において子ども同士が集団で行う振り返りのことを「集団の振り返り」として位置付けることとする。

つぎに、「個の振り返り」そして「集団の振り返り」についてそれぞれの活動の意義と役割を検討する。

3.1.1 個の振り返りについて

山下昭氏は、「論説 1「多様な考え方を結びつける」授業について」において、問題解決的な学習の過程では、一人ひとりが問題の解決に取り組む活動を「一人学び」の局面。そこで発見した解法についての多様な考え方を発表し、授業目標に沿った数学的な価値の視点から個々の考え方を関係づけ、練り上げ、学び合う「比較検討・練り上げ」の局面を中心に展開されると述べている。

はじめに、「一人学び」の局面について山下昭氏は“「多様な考えを結びつける」学習は、一人ひとりの多様な考えをもとに関係づけ、練り上げ、数学的な概念や規則性を明らかにし学習するクラス全体の活動である。このような学習が実を結ぶには、まず児童一人ひとりの学習が確かなものであることが前提である。したがってつぎの「比較検討・練り上げ」の学習の局面を見据え、一人ひとりの児童がこの学習活動に参加できるように教師は、きめ細かい児童一人ひとりの個性や学習特性を踏まえた指導が求められる。特にその中で「1 つの解き方だけでなくいろいろと解き方を考える」こと、「自分の考え方をわかりやすく表現する」ことは児童の個性や学習特性を十分に理解した上での指導が求められる。”[7]と述べており、「一人学び」の局面の充実がそれに続く「比較検討・練り上げ」の局面を充実させるために不可欠なものであるとしている。

その中でもとりわけ、“「1 つの解き方だけでなくいろいろと解き方を考える」こと、「自分の考え方をわかりやすく表現する」ことは児童の個性や学習特性を十分に理解した上での指導が求められる。”[7] と述べているが、これは G.Polya 氏の問題解決の過程である「ふり返ってみること」の中で挙げている、“同じ結果を違った仕方で導くことができるか”[6]と、“それを一目で理解できるか”[6]という教師の問いにあたると考えられる。つまり、自らの解答やそれに用いた手続きを個々で振り返ることは問題解決の学習を充実させるために重要なことであると考えられる。

「個の振り返り」は、自らの解決を子ども自身が振り返ることができるようになるためにとても重要なものであると考える。自分の解決を振り返り、既習の知識を用い

てその正しさを保証することができるような子どもを育てることが大切であると考える。

3.1.2 集団の振り返りについて

「集団の話し合い」の過程における振り返りを考えるにあたり、その意義と役割、つまり何のために話し合い、振り返るのかを考えたい。

杉山吉茂氏は「論説 1　数学をつくる子どもを育てるとは」において、数学的活動を通して数学をつくり、身につけることは学習本来の姿であると考えている。また、「数学をつくる」ということについてつぎのように述べている。“数学は、単なる「ひらめき」から生まれるだけでなく、既習の数学から見つけたり、つくったりすることができることがある。”[8)]本研究においては、このような考えに立ちたいと考える。こども達の既習の知識から「算数・数学をつくる」ことができるのではないだろうか。

同じ文献で杉山吉茂氏は、算数・数学は、原理・法則に基づいてつくられていることのよさについて “原理・法則のよさを強調したのは、そのよさを自覚して指導すると同時に、子どもにもそのよさを理解してもらい、常に原理に基づいて学習を進めていくことを考えることが大切だと考えるからである。”[8)]と述べている。

つまり、児童・生徒の既習の知識からつくられる算数・数学は原理・法則に基づいていており、そのことを生徒が理解することが重要であると考える。特に「集団の話し合い」の過程では、3.1 章でも述べたように、自力解決において一人一人が発見した解法や考え方を取り上げて、関係づけ、共通した数学的原理・法則を見出していく活動が行われる。このような活動が行われる「集団の話し合い」の過程において、学習の振り返りをし、算数・数学は原理・法則に基づいているということを理解することは大変重要であると考える。つまり、この活動は子どもが算数・数学の原理・法則のよさを知るためのものであり、また「算数・数学をつくること」が子ども自身できるようになるためのものであると考える。

「集団の振り返り」は、解決に用いられた数学的原理・法則・根拠を集団で共有し、解法やその結果はなぜそれで正しいのかを振り返るために重要なものであると考える。この「集団の話し合い」における振り返りが自ら振り返ることのできる子どもたちを育てるために大切な場面であると考える。

3.2　振り返る活動の対象とは何か

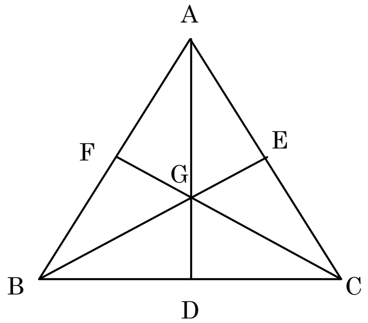
集団による話し合いの過程における振り返りを検討するにあたって、何を話し合うのか。つまり、話し合いの対象が何であるかを考察する必要があると考える。振り返る活動の対象を検討するにあたって、以下に示す問題を例に挙げる。

重心の学習を振り返ることから本事例は開始する。「3 本の中線が 1 点で交わること」「3 本の中線が互いに 2：1 に分ける」「6 つの△GAB、△GBF…の面積は等しい」といった重心の性質を確認してから、はじめに立ち返り、「何をしたからこの図になったの？」という問いを生徒に投げかける。

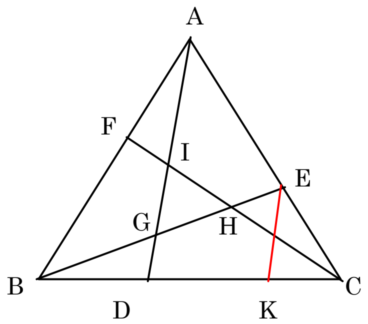
生徒からは「頂点と中点を結んだ」や「正三角形を描いた」とでてくると推測できる。そこで教師は「もしそうでなかったらどうなる」とたずねるのである。そうすること

によって生徒たちから、「中点が 1：2 の点だったら」「正方形だったら」と考えが進むと考えられる。ここで生徒の考えを引き出すために投げかけた問いから生まれた問題について以下に示す。

問題を解決する生徒は、中学校第 3 学年で「相似」が既習であるとする。



正三角形 ABC について
AF：FB＝BD：DC＝CE：EA＝1：2　のとき△ABC は△GHI の面積の何倍か。

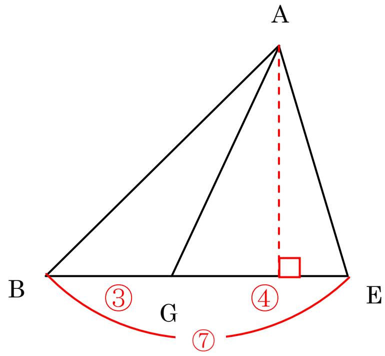


点 E より辺 AD に平行な補助線を引き、補助線と辺 BC の交点を点 K とする。

△ADC と△EKC について
∠ACD＝∠ECK（∵共通の角）
∠ADC＝∠EKC（∵AD//EK）
よって　△ADC ∽ △EKC
DK：KC＝AE：EC＝2：1　・・・①
△BEK と△BGD について
∠EBK＝∠GBD（∵共通の角）
∠EKB＝∠GDB（∵GD//EK）
よって　△BEK ∽ △BGD

BD：DK＝BG：GE＝1：2×$\frac{2}{3}$＝3：4

△ABE について
△ABG と△ABE は高さの等しい三角形であるので、底辺 BE の比が面積の比となる。
よって　$\triangle ABG = \frac{3}{7} \triangle ABE$ ・・・②

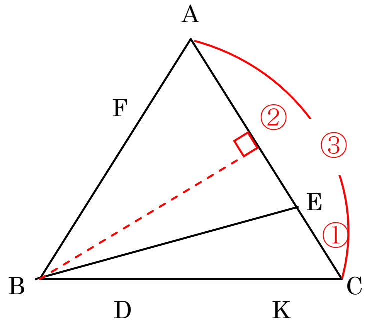


△ABC について
AE：EC＝2：1 より

$\triangle ABE = \frac{2}{3} \triangle ABC$ ・・・③

②③より

$\triangle ABG = \frac{3}{7} \times \frac{2}{3} \triangle ABC = \frac{2}{7} \triangle ABC$



正三角形であるので、
△ABG≡△BCH≡△CAI
よって求める△GHI は

$\triangle GHI = \triangle ABC - 3 \times \frac{2}{7} \triangle ABC$

$$\triangle GHI = \frac{1}{7} \triangle ABC$$

1：2 の場合と同様に、

AF：FB＝BD：DC＝CE：EA＝1：3
AF：FB＝BD：DC＝CE：EA＝1：4
についても求めていくと規則性を見出すことができる。

点	1：2	1：3	1：4	1：5	…
面積	$\frac{7}{1}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{21}{9}$	$\frac{31}{16}$	…

+6　+8　+10

面積について分母の数は平方数になっており、分子は初項が 7 の階差数列になっている。このことから、正三角形の三辺を 1 : 5 にする点をとったとき、△GHI の面積は△ABC の $\frac{31}{16}$ になるということが予想できる。

本時例では、教師の発問によって「振り返り」の場面が設けられていた。正三角形の重心から導入し、重心を描いた図を振り返ることによって「1：2 や 1：3 になる点を取るとどうなるか」や「正方形の場合はどうなるのか」という「こうだったらどうだろうか？」という考えが生徒の中に生じると考えられる。

まず、振り返る対象を考えるなかで対象は主に 3 つあると考えた。一つ目は、「数学的原理・法則・根拠」二つ目は、「手続き」三つ目は、「結果」である。以下では、それぞれの対象について考察していく。

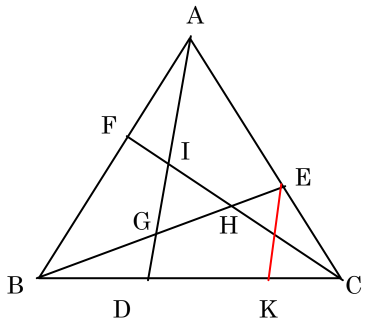
3.2.1 数学的原理・法則・根拠の追究

「集団の話し合い」では、自力解決によって得られた多様な解決を取り上げて、その解決に共通した原理・法則を全体の場で話し合う。しかし、現状ではどのように解いたのかといった説明はされているが、なぜそれでよいのか、またその解決を支える原理はなんであるかという話し合いはあまりされていないのではないだろうか。

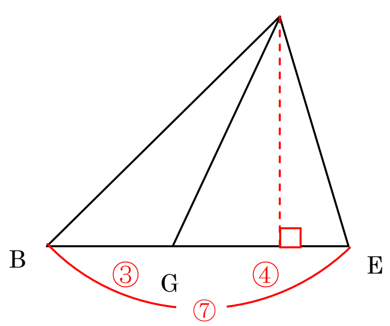
そこで、本論文ではまず振り返る対象となるのは、その学習に用いた数学的原理や法則、また根拠であるべきだと考える。

では取り上げた事例について、具体的に数学的原理・法則を洗い出していくこととする。

正三角形 ABC について
AF：FB＝BD：DC＝CE：EA＝1：2　のとき△ABC は△GHI の面積の何倍か。



まず、この事例の証明に用いられている主な原理として、「相似」が挙げられる。このときの条件は「2 組の角がそれぞれ等しいとき」である。そしてこの証明が正しいという根拠としては「同位角」であることが挙げられると考える。



また、面積比を求める際に用いた根拠として、「高さの等しい三角形の面積比は三角形の底辺の比となる」ということが挙げられる。

点	1 : 2	1 : 3	1 : 4	1 : 5	…
面積	$\frac{7}{1}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{21}{9}$	$\frac{31}{16}$	…
	+6	+8	+10		

最後に、この事例における法則は、問題の解決を通して発見した面積の増加についての規則性があると考える。

この検討によって、この問題の解決における数学的原理や法則、根拠の全てが洗い出せているわけではないと考える。しかし、こういった解決を進める上で、その論理を支える原理や根拠をまず、集団の話し合いの場で振り返り、共有する必要があると考える。

3.2.2 手続きについて

つぎに、「集団の話し合い」において、話し合われる対象は、問題の解決に用いた手続きであると考える。

理由としては主に 3 つある。

第一に、解決に用いられた手続きに、いかに既習の内容が使われているかを明確にするためであると考える。

第二に、手続きを集団で話し合い振り返ることで、よりよい方法やより洗練された方法を明らかにしていくためであると考える。

第三に、用いた手続きが他にどのような場面で適用することができるかを振り返るためであると考える。

これについても、取り上げた事例をもとに対象を洗い出していく。

まず一つ目に、この事例の解決にあたって大切な手続きは、補助線を引くことであると考える。

この事例では、既習の事柄である「相似な三角形の比」を使うという観点から、補助線を用いて同位角をつくりだしている。

そして、用いた補助線が最も手際のよい解決につながるものであるか、話し合う必要があると考える。

また、この問題場面だけでなく、様々な図形問題などを考える際に必要となってくるものであると考える。類似した問題を考え、補助線を引くという手続きがこの他にどのような場面で適用できるかを振り返る必要もあると考える。

二つ目に、証明した「相似」の関係を用いて、面積比や辺の比を求めていくという手続きがあると考える。つまり、相似の証明をしてそれを用いて問題を解決するという手続きである。

このように、証明をした結果を用いて問題を解決するといった二つ以上の段階を経て解決する問題である。これについても、既習事項である「相似」を新しい問題場面に適用できるかどうかを振り返り、その手続きが洗練されたより手際のよい方法であるかを話し合い、共有することが大切であると考える。

加えて、問題の解決に既習の事柄を用いる際にも、新しい場面にその手続きを適用する際にも、その根拠となるのはこれまで話し合い、明らかにした数学的原理・法則・根拠であるということである。したがって、手続きを振り返る際にも、数学的原理・法則・根拠が重要な役割を果たすと考える。

3.2.3 結果について

最後に、これまで話し合った原理・法則・手続きをもとに、結果の正しさについて話し合う必要があると考える。

自ら解決の正しさを保証できるのは様々な教科のなかにおいて数学のみである。集団の話し合いにおいて、結果の正しさについて振り返ることで、自ら正しさを保証できる子どもたちを育てることはとても重要なことであると考えるからである。

これも同様に、事例をもとに対象を洗い出していく。

まず、1：2のとき、1：3のとき、1：4のとき、それぞれの証明を振り返り、導き出された△ABCは△GHIの面積の何倍かという結果について確認していく必要があると考える。

次に、導き出された結果から発見した法則に基づいて、1：5のときの結果を推測したものについても同様の手続きで振り返ることが必要であると考える。

どのような手続きを踏んで、解決の結果の正しさを保証していくのかということを話し合い学んでいくことで、問題を解決して終わるのではなく、自ら振り返り導き出した解の正しさを確かめられるようになるのではないだろうか。

そして、加えて述べたいのは結果が振り返りの対象となる際にも、その正しさを保証し、解決の裏付けとなるのは数学的原理・法則・根拠であるということである。したがって、振り返る対象としてまず挙げられるべきは数学的原理・法則・根拠であると考える。

3.3 新しい課題の発見

3.3.1 振り返る活動と表現する活動の関係について

これまでに「集団の話し合い」の過程において、何のために集団で話し合い、振り返るのか、そして、何を話し合うのかを検討してきた。

この章で検討していくのは、どのように振り返るのか、つまり振り返る方法についてである。とりわけ、振り返る活動と表現する活動との関係について検討していくこととする。

根本博氏は、「論説 1　学習を振り返り、新しい課題を見出す」において、振り返って考える活動と表現する力の関係について次のように述べている。“算数科の目標の内「日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考え、表現する能力を育てる」については、「考える力と表現する力とは互いに補完し合う関係にあるといえる。考えを表現する過程で、自分のよい点に気づいたり、誤りに気づいたりすることがあるし、自分の考えを表現することで、筋道を立てて考えを進めたり、よりよい考えを作ったりできるようになる。」（「小学校学習指導要領解説　算数編」p.20）と述べられている。実践上、考える力の育成は表現する力（言語に関する能力）の育成と関連付けた指導が求められることになろう。”[9)]

つまり、振り返る活動と表現する活動は、自らの考えを表現し、それを振り返る材料として見直すことで、解決のよさや誤りに気付くだけでなく、筋道を立てて考えたり、より洗練された解決を試みたりできるようになるなど、どちらも重要な活動であり、互いに密接に関係しているものと考えられ

る。

　また、同じ文献において根本氏は、結果を求めるだけでなく、新たな事実や課題を探りながら学習を進めるためには、何をどのように考え解決を進めてきたかを書き留める必要があり、ここに表現する力の育成が深くかかわると述べている。この考えを書き留めたものについて根本氏は、“図や式、あるいは文章で残しておけば、振り返る際に役立つ。さらに発展的に思考を進めるきっかけになる。”[9]と述べており、また“「自分はこんなことを考えていたのだ」と自らの理解が確かめられる、また、考えを整理することができる。そして、表現しておけば振り返って考えることができる。”[9]とも述べている。

　このことから、解決に用いた考えなどを書き留めることは、自分の考えを客観的に振り返り、整理するためにとでも重要なことであると考えられる。そして、この表現する力をつけると、自然と自らの考えを振り返るための材料ができあがるので、振り返る態度を形成するためにも必要なことであると考える。

第 4 章

振り返る活動にもとづく教材の研究

4 振り返る活動にもとづく教材の研究

4.1 教材の検討の視点

本研究における「振り返る」ことの定義にもあるように、問題を解決する際に用いた手続きを新たな問題場面に適用していくような教材を検討したい。そのためにまず、振り返ることで、解決の手続きがどの範囲まで適用できるのか、その限界を知るためという視点で具体的な事例を検討していくこととする。

4.2 教材の検討(1～20 の倍数の判定法)

まず、着目した教材は 3 と 7 の倍数の判定法についてである。以下に、具体的な事例を示す。

【問題 1】123456 が 3 の倍数であるかどうか手際よく調べる方法はないか。

(解答)

$$
\begin{aligned}
123456 &= 100000 + 20000 + 3000 + 400 \\
&\quad + 50 + 6 \\
&= (99999 + 1) + 2\times(9999 + 1) \\
&\quad + 3\times(999 + 1) + 4\times(99 + 1) \\
&\quad + 5\times(9 + 1) + 6 \\
&=(99999 + 2\times9999 + 3\times999 \\
&\quad + 4\times99 + 5\times9) + 1 + 2 + 3 \\
&\quad + 4 + 5 + 6 \\
&=(99999 + 2\times9999 + 3\times999 \\
&\quad + 4\times99 + 5\times9) + 21
\end{aligned}
$$

21 が 3 で割り切れるので、123456 は 3 の倍数である。

このように示すことができる。この 3 の倍数の判定法は、各桁の数に分けて 3 の倍数の最大のものを探し、その余りを 3 で割り判定するというものである。

この問題を踏まえて次に示す問題について考える。

【問題 2】52164 は 7 の倍数であるかどうか手際よく調べる方法はないか

(解法 1)

7 の倍数になっている数に着目して抜き出していき、その余りを 7 で割り判定するというものであり、計算は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
52164 &= \underline{50000} + \underline{2100} + \underline{64} \\
&= \underline{49000} + \underline{1000} + \underline{\underline{2100}} + \underline{63} + \underline{1} \\
&= (49000 + 2100 + 63) + 777 \\
&\quad + 223 + 1 \\
&= (49000 + 2100 + 63 + 777) \\
&\quad + 210 + 14 \\
&= (49000 + 2100 + 63 + 777 \\
&\quad + 210) + 14
\end{aligned}
$$

14 が 7 で割り切れるので、52164 は 7 の倍数であることがわかる。

(解法 2)

52164 を各桁の数に分けて 7 の倍数の最大のものを探して抜き出していき、その余りを 7 で割り判定するというものであり、計算は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
52164 &= 50000 + 2000 + 100 + 60 + 4 \\
&= 5\times10000 + 2\times1000 + 1\times100 \\
&\quad + 6\times10 + 4\times1 \\
&= 5\times(9996 + 4) + 2\times(994 + 6) \\
&\quad + 1\times(98 + 2) + 6\times(7 + 3) + 4 \\
&= (5\times9996 + 2\times994 + 98 + 6\times7) \\
&\quad + 5\times4 + 2\times6 + 2 + 6\times3 + 4 \\
&= (5\times9996 + 2\times994 + 98 + 6\times7) \\
&\quad + 56
\end{aligned}
$$

56 が 7 で割り切れるので、52164 は 7 の倍数であることがわかる。

この解法 1・2 はどちらも、既習の 3 の倍数の判定法を導き出す手続きを振り返ることで、導き出される考え方である。桁に着

目して考えるということや、3 の倍数の最大のものを抜き出していくことで、大きな数を余りという小さな数へと還元していくことなどの考え方や手続きを適用して、7 の倍数の判定法を考えたのだと考えられる。

また､7の倍数の判定は別の方法もある。以下にそれを示す。

(解法 3)

調べる数を、一の位と十の位以上とに分けて、一の位を 2 倍したものを十の位以上の数から引いていき、最終的に被減数が 0 または±7 になれば与えられた数は 7 の倍数であると分かる。というものである。計算は以下のようになる。

52164	52164	
8	84	←21×4
5208	5208	
16	168	←21×8
504	504	
8	84	←21×4
42	42	
4	42	←21×2
0		

ので 52164 は 7 の倍数であると分かる、という手続きである。

この方法の証明は以下のようになる。

（証明）

与えられた整数を 10A+B とするただし、A,B は整数で、A≧0、9≧B≧0 である。

まず、10A+B が 7 の倍数であるとすると、

$10A + B = 7m$　　(m は整数)

とおける。これより

$B = 7m - 10A$

これを　$A - 2B$　に代入して

$A - 2B = A - 2(7m - 10A)$

$= A - 14m + 20A$

$= 21A - 14m = 7(3A - 2m)$

これで、与えられた数が 7 の倍数であれば、上の手続きを施したのちの数も 7 の倍数であることがいえた。したがって、この手続きを続ければ、最後には、0、±7 になる。

逆に、A－2B が 7 の倍数とすると

$A - 2B = 7n$　　(n は整数)

$A = 7n + 2B$

とおける。これを$10A + B$に代入すると、

$10A + B = 10(7n + 2B) + B$

$= 70n + 21B$

$= 7(10n + 3B)$　　（終）

この 7 の倍数の判定法や証明を振り返るなかで、一の位を 2 倍し、十の位以上の数から引くという操作をする理由を考えると、それぞれ一の位を 21 倍したものを引いていることが分かる。

このようにして、判定法の手続きを見直すことで 21 という 7 の倍数であり、一の位が 1 となるものをかけて、それを引いているということに気付いた生徒は次に 11 や 13 など他の数の判定法を見出すことができるだろう。

4.1 章でも述べたように､解決の手続きがどの範囲まで適用できるのか、その限界を知るためという視点で、他の数においても手際よく判定する方法があるのではと、これまでの手続きを振り返り、3 から 9 へ、また 7 から 11 , 13 へと適用してく活動を期待したい。

以下では、この視点のもと 2～20 の倍数についての判定を考えていく。

4.2.1　2 , 5 , 10 の倍数の判定

＜2 の倍数＞

…一の位が偶数かどうか

2 の倍数は必ず偶数になるので、2 の倍数の判定法は「一の位が偶数かどうか」である。

＜5 の倍数＞

…一の位が 0 か 5 かどうか

5 の倍数は一の位が必ず 0 か 5 になるので 5 の倍数の判定法は「一の位が 0 か 5 かどうか」である。

＜10 の倍数＞

…一の位が 0 かどうか

2 , 5 , と同様に、10 の倍数は一の位が必ず 0 になるので 10 の倍数の判定法は「一の位が 0 かどうか」である。

4.2.2　3 , 9 の倍数の判定

＜3 の倍数＞

…各位の数を足したものが 3 の倍数になっているかどうか

－略－

＜9 の倍数＞

…各位の数を足したものが 9 の倍数になるかどうか

(ex)123456 が 9 の倍数かどうか

$$
\begin{aligned}
&123456\\
&= 100000 + 20000 + 3000 + 400 + 50 + 6\\
&= (99999 + 1) + 2\times(9999 + 1) + 3\times(999 + 1) + 4\times(99 + 1) + 5\times(9 + 1) + 6\\
&=(99999 + 2\times9999 + 3\times999 + 4\times99 + 5\times9) + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6\\
&=\underline{(99999 + 2\times9999 + 3\times999 + 4\times99 + 5\times9)} + 21
\end{aligned}
$$

かっこの中はすでに 9 の倍数になっている

よってあまりの 21 について 9 の倍数であるかどうかを確かめればよい。

$21\div9=2$ あまり 3

したがって、123456 は 9 の倍数ではない。

4.2.3　7 , 11 , 13 , 17 , 19 の倍数の判定

＜7 の倍数＞

…一の位と十の位以上とに分けて、一の位を 2 倍したものを十の位以上の数から引いていき、最終的に 0 または±7 になるかどうか。

－略－

＜11 の倍数＞

…一の位と十の位以上とに分けて、一の位の数をそのまま十の位以上の数から引き最後に 0、±11 になるかどうか

(ex)74679 は 11 の倍数かどうか

74679	74679	
9	99	←11×9
7458	7458	
8	88	←11×8
737	737	
7	77	←11×7
66	66	
6	66	←11×6
0	0	

7 の倍数を判定する手続きを振り返り、11 は 11 の倍数のなかで一の位が 1 となる最小の値であるので、一の位をそのまま十の位以上の数から引いていくと分かる。

証明は以下のようになる。

（証明）

与えられた整数を 10A+B とするただし、A,B は整数で、A≧0、9≧B≧0 である。

まず､10A+B が 11 の倍数であるとすると、

$10A+B=11m$ (m は整数)

とおける。これより

$B=11m-10A$

これを $A-B$ に代入して

$A-B=A-(11m-10A)$

$=A-11m+10A$

$=11A-11m=11(A-m)$

これで､与えられた数が 11 の倍数であれば､上の手続きを施したのちの数も 11 の倍数であることがいえた。したがって、この手続きを続ければ最後には､0､±11 になる。

逆に、A−B が 11 の倍数とすると

$A-B=11n$ (n は整数)

$A=11n+B$

とおける。これを$10A+B$に代入すると、

$10A+B=10(11n+B)+B$

$=110n+11B$

$=11(10n+B)$ （終）

＜13 の倍数＞

…一の位と十の位以上とに分けて、一の位の数を 9 倍したものを十の位以上の数から引き最後に、0 または±13 になるかどうか

(ex)88257 は 13 の倍数かどうか

88257	88257	
63	637	←91×7
8762	8762	
18	182	←91×2
858	858	
72	728	←91×8
13	13	

7 や 11 と同様に、一の位が 1 になる 13 の倍数の最小のものは 13×7 の 91 であるので、一の位を 9 倍して十の位以上の数から引いていくと分かる。

証明は以下のようになる。

（証明）

与えられた整数を 10A+B とするただし、A,B は整数で、A≧0、9≧B≧0 である。

まず､10A+B が 13 の倍数であるとすると、

$10A+B=13m$ (m は整数)

とおける。これより

$B=13m-10A$

これを $A-9B$ に代入して

$A-9B=A-9(13m-10A)$

$=A-117m+90A$

$=117A-91m=13(9A-7m)$

これで､与えられた数が 13 の倍数であれば､上の手続きを施したのちの数も 13 の倍数であることがいえた。したがって、この手続きを続ければ最後には､0､±13 になる。

逆に、A−9B が 13 の倍数とすると

$A-9B=13n$ (n は整数)

$A=13n+9B$

とおける。これを$10A+B$に代入すると、

$10A+B=10(13n+9B)+B$

$=130n+91B$

$=13(10n+7B)$ （終）

＜17 の倍数＞

…一の位と十の位以上とに分けて、一の位の数を 5 倍したものを十の位以上の数から引き最後に、0 または±17 になるかどうか

(ex)20978 は 17 の倍数かどうか

20978	20978	
40	408	←51×8
2057	2057	
35	357	←51×7
170	170	
0	0	←51×0
17	17	

17の倍数の最小のもので一の位が1となるものは17×3の51であるので、一の位を5倍して十の位以上の数から引いていくと分かる。

証明は以下のようになる。

(証)

与えられた整数を10A+Bとする。

（ただしA,Bは整数で、$A \geqq 0$、$9 \geqq B \geqq 0$）

まず10A+Bが17の倍数であるとすると、

10A+B=17mとおける。（mは整数）

これより、$B=17m-10A$

これを$A-5B$に代入すると

$$
\begin{aligned}
A-5B &= A-5(17m-10A)\\
&= A-85m+50A\\
&= 51A-85m \quad \cdots \quad ①\\
&= 17(3A-5m)
\end{aligned}
$$

これで、与えられた数が17の倍数であれば、上の手続きを施したのちの数も 17 の倍数であることがいえた。したがって、この手続きを続ければ最後には、0、±17になる。

逆に、$A-5B$が17の倍数とすると

$A-5B=17n$ （nは整数)

$A=17n+5B$

とおける。これを$10A+B$に代入すると、

$$
\begin{aligned}
10A+B &= 10(17n+5B)+B\\
&= 170n+51B\\
&= 17(10n+3B)
\end{aligned}
$$

（終）

＜19の倍数＞

（解法1）

…一の位と十の位以上とに分けて、一の位の数を17倍したものを十の位以上の数から引き最後に、0または±19になるかどうか

（解法2）

…各位の上の位の数から2のべき乗をかけて、その和が19の倍数かどうか

まず、解法1について。

(ex)633023が19の倍数であるかどうか

633023	633023	
51	513	←171×3
63251	63251	
17	171	←171×1
6308	6308	
136	1368	←171×8
494	494	
68	684	←171×4
−19	−19	

（証明）

与えられた整数を 10A+B とするただし、A,Bは整数で、$A \geqq 0$、$9 \geqq B \geqq 0$である。

まず、10A+Bが19の倍数であるとすると、

$10A+B=19m$ (mは整数)

とおける。これより

$B=19m-10A$

これを　$A-17B$　に代入して

$$
\begin{aligned}
A-17B &= A-17(19m-10A)\\
&= A-323m+170A\\
&= 171A-323m = 19(9A-17m)
\end{aligned}
$$

これで、与えられた数が19の倍数であれば、上の手続きを施したのちの数も 19 の倍数であることがいえた。したがって、この手続きを続ければ最後には、0、±19になる。

逆に、$A-17B$が19の倍数とすると

$A-17B=19n$ (nは整数)

$A=19n+17B$

とおける。これを$10A+B$に代入すると、

$$
\begin{aligned}
10A+B &= 10(19n+17B)+B\\
&= 190n+171B\\
&= 19(10n+9B)
\end{aligned}
$$

（終）

解法 1 は、7 , 11 , 13 , 17 に適用してきた手続きを振り返り、19 にもそれを適用することでできる解法である。しかし、これまでの数と違い一の位が 1 となる最も小さい 19 の倍数は、171 になってしまい、“一の位にかけて十の位以上の数から引く”という手続きを踏む際に、一の位にかける数が 17 となるので、判定の作業が煩雑になってしまう。そこで、19 については別の解法 2 を考えた。

（解法 2）

(ex) 12426 が 19 の倍数かどうか

$1\times1+2\times2+4\times4+2\times8+6\times16=133$

$133\div19=7$

よって 12426 は 19 の倍数である。

証明は以下のようになる。

（証）

ある整数 N について

$$\mathrm{N}=\mathrm{a}\times10^{\mathrm{n}}+\mathrm{b}\times10^{\mathrm{n}-1}+\cdots+\mathrm{c}\times10+\mathrm{d}$$

とする。

このとき、10 について

$$10=\frac{20}{2}=\frac{19+1}{2}=\frac{19}{2}+\frac{1}{2}$$

であるので 19 の倍数でない部分は$(\frac{1}{2})^{\mathrm{n}}$となる。この整数 N が 19 の倍数であるには両辺を2^{n}倍すればよい。

両辺に2^{n}をかけると

$$2^{\mathrm{n}}\mathrm{N}=\mathrm{a}\times20^{\mathrm{n}}+2\mathrm{b}\times20^{\mathrm{n}-1}+\cdots+2^{\mathrm{n}-1}\mathrm{c}\times20+2^{\mathrm{n}}\mathrm{d}$$

19 を法として、20≡1 なので

$$2^{\mathrm{n}}\mathrm{N}=\mathrm{a}+2\mathrm{b}+\cdot\cdot\cdot+2^{\mathrm{n}-1}\mathrm{c}+2^{\mathrm{n}}\mathrm{d}\ (\mathrm{mod}19)$$

2^{n}は 19 で割り切れないので N が 19 の倍数であるためには

$$\mathrm{a}+2\mathrm{b}+\cdot\cdot\cdot+2^{\mathrm{n}-1}\mathrm{c}+2^{\mathrm{n}}\equiv0\ (\mathrm{mod}19)$$

つまり、整数 N の各桁の上の位の数から 2 のべき乗をかけたものの和が 19 になれば整数 N は 19 の倍数になる。

（終）

4.2.4　4 , 8 , 16 の倍数の判定

＜4 の倍数＞

…下 2 桁の数が 4 の倍数かどうか

(ex)123456 は 4 の倍数かどうか

100 は 4 の倍数である。よって、

$123456=123400+56$

と変形すると、$100=25\times4$ より、

123400 は 4 の倍数になっていることが分かる。

よって下 2 桁の 56 が 4 の倍数になっていればよいので、

56÷4＝14

したがって 123456 は 4 の倍数である。

＜8 の倍数＞

…下 3 桁の数が 8 の倍数であるかどうか

…下 3 桁の数を 2 で割り、その商が 4 の倍数であるかどうか

(ex1)123456 が 8 の倍数かどうか

$123456=123000+456$

と変形すると、$1000=125\times8$ より、

123000 は 8 の倍数になっていることが分かる。

よって下 3 桁の 456 が 8 の倍数になっていればよいので、

456÷8＝57

したがって 123456 は 8 の倍数である。

(ex2)123456 が 8 の倍数かどうか

456÷2＝228

4 の倍数の判定法より、

28÷4＝7

よって 123456 は 8 の倍数である。

＜16 の倍数＞

…下 4 桁の数を 2 でわって、商が 8 の倍

数であるかどうか

(ex)197520 が 16 の倍数かどうか

16×625＝10000 より下 4 桁が 16 の倍数であるかどうかを調べればよい。

197520 の下 4 桁 7520 について

まず 2 でわって

7520÷2＝3760

8 の倍数かどうかを調べる

3760÷2＝1880

下 2 桁が 80 で 4 の倍数になっているので 197520 は 16 の倍数である

（197520÷16＝12345）

4.2.5　6,12,14,15,18,20 の倍数の判定

＜6 の倍数＞

…2 の倍数かつ 3 の倍数

(ex1)123456 は 6 の倍数かどうか

2 の倍数であるかどうかは、一の位が偶数であればよいので、このとき一の位は 6 なので、2 の倍数と言える。

また、3 の倍数であるかどうかは各位の数を足して和が 3 の倍数かどうかなので、

1＋2＋3＋4＋5＋6 = 21

21 = 3 × 7

よって 2 の倍数であり、かつ 3 の倍数あるので 123456 は 6 の倍数である。

(ex2)46186 は 6 の倍数かどうか

(ex1)と同様に判別すると、

一の位は 6 なので、2 の倍数である。

各位を足すと 4＋6＋1＋8＋6 ＝25

これは前述の 3 の倍数の判定法より、3 の倍数ではない。

よって、46186 は 6 の倍数ではない。

(46186÷6 = 7697.66…)

＜12 の倍数＞

…3 の倍数かつ 4 の倍数

(ex1)95340 は 12 の倍数かどうか

3 の倍数の判定法より、

9＋5＋3＋4＋0 = 21 (= 3×7)

よって 95340 は 3 の倍数である。

4 の倍数の判定法より、

下 2 桁は　40 = 4×10 であるので

95340 は 4 の倍数である。

したがって、95340 は 12 の倍数である。

(95340 = 12×7945)

(ex2)76388 は 12 の倍数かどうか

3 の倍数の判定法より、

7＋6＋3＋8＋8 = 32

よって 76388 は 3 の倍数ではない。

4 の倍数の判定法より、

下 2 桁は　88 = 4×22 であるので

76388 は 4 の倍数である。

したがって、76388 は 12 の倍数ではない。

(76388÷12 = 6365.66…)

＜14 の倍数＞

…2 の倍数かつ 7 の倍数

(ex1)12110 は 14 の倍数かどうか

一の位が 0 であるので

12110 は 2 の倍数である。

7 の倍数の判定法より

最終的に-7 となるので

12110 は 7 の倍数である。

したがって、

12110 は 14 の倍数である。

(12110 = 14×865)

$$\begin{array}{r} 12110 \\ \underline{\quad 0} \\ 1211 \\ \underline{\quad 2} \\ 119 \\ \underline{18\quad} \\ -7 \end{array}$$

(ex2)13290 は 14 の倍数かど

一の位が 0 であるので

13290 は 2 の倍数である。

7 の倍数の判定法より

最終的に 3 となるので

13290 は 7 の倍数ではない。

$$\begin{array}{r} 13290 \\ \underline{\quad 0} \\ 1329 \\ \underline{\quad 18} \\ 114 \\ \underline{\quad 8} \\ 3 \end{array}$$

＜15 の倍数＞

…3 の倍数かつ 5 の倍数

(ex1)11685 は 15 の倍数かどうか

3 の倍数の判定法より

1＋1＋6＋8＋5 = 21 (=3×7)

よって 11685 は 3 の倍数である。

5 の倍数の判定法より

一の位が 5 であるので

11685 は 5 の倍数である。

したがって、11685 は 15 の倍数である。

(11685 = 15×779)

(ex2)15970 は 15 の倍数かどうか

3 の倍数の判定法より

1＋5＋9＋7＋0 = 22

22 は 3 の倍数ではないので

15970 は 3 の倍数ではない。

5 の倍数の判定法より

一の位が 0 であるので

15970 は 5 の倍数である。

したがって、15970 は 15 の倍数ではない。

(15970÷15 = 1064.66…)

＜18 の倍数＞

…2 の倍数かつ 9 の倍数

(ex1)17892 は 18 の倍数かどうか

一の位が 2 であるので

17892 は 2 の倍数である。

9 の倍数の判定法より

1＋7＋8＋9＋2 = 27 (=9×3)

よって 17892 は 9 の倍数である。

したがって、17892 は 18 の倍数である。

(17892 = 18×994)

(ex2)63802 は 18 の倍数かどうか

一の位が 2 であるので

63802 は 2 の倍数である。

9 の倍数の判定法より

6＋3＋8＋0＋2 = 19

19 は 9 の倍数ではないので

63802 は 9 の倍数ではない。

したがって、63802 は 18 の倍数ではない。

(63802÷18 = 3544.55…)

＜20 の倍数＞

…4 の倍数かつ 5 の倍数

(ex1)19740 は 20 の倍数かどうか

4 の倍数の判定法より

下 2 桁は　40 = 4×10 であるので

19740 は 4 の倍数である。

5 の倍数の判定法より

一の位が 0 であるので

19740 は 5 の倍数である。

したがって、19740 は 20 の倍数である。

(ex2)16890 は 20 の倍数かどうか

4 の倍数の判定法より

下 2 桁は　90 なので、4 の倍数ではない。

5 の倍数の判定法より

一の位が 0 であるので

16890 は 20 の倍数ではない。

(16890÷20 = 844.5)

第 5 章

本研究のまとめと今後の課題

5　本研究のまとめと今後の課題

　卒業研究を通して、「集団の話し合い」の過程における「振り返り」が算数・数学教育において重要なものであると実感した。そして、本研究の 1 章で設定した研究課題について考察していくことで、「集団の話し合い」における振り返りがどのようなものであるか、また、その意義や役割、「振り返り」を通してみちびかれる新たな問題などについて明らかにしようと努めた。

課題 1 振り返る活動の意義と役割とは何か

　この研究課題を検討するにあたって、まず、振り返りには「個の振り返り」と「集団の振り返り」があると考え、この二つについて山下昭氏と G.Polya 氏、そして杉山吉茂氏の文献をもとに考察した。

　「集団の振り返り」では、自ら振り返ることのできる子どもを育てるために、解決に用いられた数学的原理・法則・根拠を集団で共有し、その正しさやよさを知ることが大切であると考えた。そして、「個の振り返り」において、既習の知識を用いて、自分の解決を振り返り、正しさを保証できるような子どもを育てるためにも大切な活動であるのではないかと考える。

課題 2 振り返る活動の対象とは何か

　「集団の話し合い」において、何を話し合い、振り返るのか。つまり、振り返る「対象」が何であるかについて検討した。そして、その対象には大きく「数学的原理・法則・根拠の追究」「手続きについて」「結果について」の 3 つがあると考えた。

　まず一つ目に「数学的原理・法則・根拠の追究」を挙げるのは、「集団の話し合い」の過程において、どのようにして解いたかの説明ではなく、なぜそれでよいのか、その解決を支える原理はなにかということを話し合い、共有する必要があると考えるからである。

　二つ目に「手続き」を挙げるのは、用いられた手続きに既習の内容が使われているかを明確にし、よりよい方法やより洗練された方法を見出していくために必要だと考えるからである。また、その手続きがほかにどのような場面で適用できるかを振り返るためにも重要であると考える。

　三つ目に、「結果」を挙げるのは、集団の話し合いにおいて結果の正しさについて振り返ることで、自らの解決の正しさを保証できる子どもたちを育てることは重要なことであると考えるからである。

　そして、この検討を通して「手続き」や「結果」を振り返る際にも、その解決を支える「数学的原理・法則・根拠」が重要であることが分かった。

課題 3 新しい課題の発見

　この研究課題を検討するにあたって着目したのは「振り返る活動と表現する活動の関係について」である。このことについて、根本氏の文献を参考に考察をした。

　そこからまず、表現する力を育てることで、子どもたちが自ら振り返るための手掛かりを残すことができるようになるのではないかと考えた。

　そしてさらに、解決に用いた考えなどを書き留めることは、自分の考えを客観的に振り返り、整理するためにとでも重要なことであると考えられる。

これらのことを検討し、自ら振り返ることのできる子どもを育てることは算数・数学教育において重要なことであると感じた。解決を振り返り、正しさを保証することや、用いた手続きを違う問題場面に適用することは、問題の答えが出たらそれで終わりではなく、違う見方やより洗練された解決に繋げるための大切な活動であると考える。

今後の課題としては、一つ目に「3.1 章 振り返る活動の意義と役割とは何か」において、「個の振り返り」と「集団の振り返り」についてそれぞれ意義と役割を文献から検討したが、具体的な事例を用いて検討することができなかったことである。事例を検討し、振り返る活動の意義と役割につて明らかにする必要があると考える。

二つ目に「3.3 新しい課題の発見」についても 3.1 章と同様のことが言える。こちらの研究課題についても具体的な事例を用いて振り返る活動と表現する活動の関係について考察する必要があると考える。

三つ目に、4 章において問題を振り返り、適用できる範囲を知るという視点から、倍数の判定法という教材を検討してきたが、授業設計には至らなかった。したがって、実践的検討もできていない。実際に子どもたちは既習の知識を用いて振り返り、問題を解決することができるのか、また、用いた手続きを違う場面に適用することができるのか。そして、その際に教師はどのような支援をする必要があるかなどを検討する必要があると考える。

引用・参考文献

1) 根本博「数学的活動と反省的経験」東洋館出版社　1999 年 12 月

2) 日本教育方法学会編「LESSON STUDY IN JAPAN 日本の授業研究
『授業研究の方法と形態(下)』2009 年

3)片桐重男「問題解決過程と発問分析」明治図書出版　1988 年 9 月

4)教育用語辞典

5)新教育学辞典

6)G.Polya　「いかにして問題をとくか」丸善株式会社　1989 年 4 月

7) 山下昭 「論説 1『多様な考え方を結びつける』授業について」2011 年 6 月

8) 杉山吉茂 「論説 1　数学をつくる子どもを育てるとは」2011 年 5 月

9) 根本博「論説 1　学習を振り返り、新しい課題を見出す」2011 年 7 月

10)井ノ迫泰弘「中等数学の授業構成とその改革（1)」

11) 正木孝昌　「初等数学の授業構成とその改革」

12) http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/number/multiple.htm

謝辞

本研究を進めるにあたり、ご指導いただいた方々に深く感謝いたします。

矢部敏昭先生には、本当にお世話になり、心から感謝しております。本来、工学部の学生である私が地域学部で数学教育に関する卒業論文を書くことができるようになったのも、矢部先生が私たち学生の意向を大切にしてくださり、工学部との間で架け橋となり尽力してくださったからです。先生は 2 年間、研究の仕方もわからない私に一から丁寧に指導してくださいました。行き詰っているときには頑張ろうと、声をかけてくださり、矢部研究室一丸となって研究を頑張っていくんだということを学びました。私が研究したいテーマを通すことができたのも、矢部先生のご指導あってのことです。本当に感謝しています。研究だけではなく、ゼミで聞いた一つひとつの言葉は私がこれから生きていく上で、大切にしていきたいと考えています。

溝口達也先生にもまた、大変お世話になりました。溝口先生の授業を受けたことも算数・数学教育のむずかしさや奥深さを知るきっかけとなりました。私が研究をしていく上で、気付けなかったことやより深く考える必要がある部分など、的確な指摘をいただきました。自分にまだ足りないことや、問題点を明確にしていただいたおかげで、卒業研究にもより熱心に取り組むことができました。深く感謝いたします。

応用数理工学科の藤村薫先生にも感謝しています。地域学部で卒業論文を書きたいという私たちの考えを一人ひとり聞いて、授業との両立のこと、将来のことなど、親身になって相談に乗ってくださいました。やりたいことをしたらいいという先生の後押しもあって、地域学部で数学教育の卒業論文を書くことができました。工学部の研究をしていないにも関わらず、快く研究室を使わせてくださり、卒業研究に集中することができました。深く感謝しております。

また、地域学部の先輩方もお忙しい中、私たちの相談に親身になって考えてくださいました。前田静香さんや、池田和彌さん、尾崎いづみさん、玉川奈緒さんは私たちに卒業研究だけでなく、これから社会で生きていく上で大切な礼儀や気遣いなど、たくさんのことを教わりました。研究室で唯一の先輩である日野治樹さんは、私たちのゼミにも参加してくださり、私たちにはないような問題の視点を与えてくださいました。

また、同じ矢部研究室のメンバーである渡会亮介さん、佐々木翔平さん、山根敬大さん、川畑翔史さんにはいつも支えられました。研究が行き詰っているときには、話し合い、ともに考えを出し合い乗り越えていくことができました。溝口研究室のメンバーである吾郷将樹さん、岡田郁美さん、岸川友飛さん、古林知佳さん、山本幸子さんにも、いろいろな場面で助けられました。工学部とは勝手が違い、戸惑うことが多い中、快く仕事を引き受けてくれたり、研究の相談に乗ってくれたりと、とても心強い存在でした。深く感謝します。

2013 年 1 月 28 日

藤田綾

鳥取大学数学教育研究　　**ISSN 1881–6134**

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。

- 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
- 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
- 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
- その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/