

ISSN 1881-6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education



<http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu>

パターンの科学としての数学観に基づく教材分析

前田静香 *Shizuka Maeda*

vol.14, no.1

Apr. 2011

パターンの科学としての数学観に基づく教材分析

前田 静香

鳥取大学大学院地域学研究所

1. はじめに

学習者にとって創造的な学習が行われることは、算数・数学教育において避けては通れないものである。しかし一方で、創造的な学習環境を設計することの困難性も指摘されてきている。教師にとって、授業を設計することは、学習者に知的な探求を行う場を提供することができるかを問われるものである。パターンの科学としての数学観における探求の特性として、i) 対象をパターンとみなすことで新たな数学を生み出すこと、ii) すでに数学として存在するものをパターンとして捉えなおすことの2つの側面が存在する(前田, 2011)。本稿では特にi)に着目し、ある問題場면을教材分析することにより認められたパターンを教材化することについて、具体例を挙げながら検討する。

2. 教材分析におけるパターンの科学としての数学観の利用

教材分析においては、様々な手法がとられるであろう。例えば歴史的側面からのアプローチや、表現方法の検討、数値や問題場面の検討が行われる。1. はじめにでも述べたように、これらの方法で明らかになった事柄に加え、学習者の創造的な学習の設計も視野に入れた教材分析が行われる必要がある。

パターンの科学としての数学について整理すると、その特性は次のようにまとめられる。

- | |
|--|
| (1)万物が対象となること
(2)パターンとして捉えるだけでは、数学として成立しないこと
(3)パターンから新しいパターンが生み出されること |
|--|

さらに2つの探求活動の様相が認められた。

(i)対象をパターンとしてみなすことで、新たな数学を生み出すこと

(ii)すでに数学として存在する物をパターンとして捉え直すこと

これらの事から、パターンの科学としての数学観に基づいて教材分析をおこなうとき、教材分析の対象となる題材についての制限がないこと、教師自身が教材にパターンとしての価値づけを行うことが前提条件として存在することが挙げられる。

教材分析においては2つの立場からの考察が必要であり、数学的な立場からの考察と問題解決の立場からの考察が必要であると考えられる。教師は題材を教材として位置づけるときの数学的な価値を見出すことが求められる。パターンの科学としての数学では、パターンとして対象を認めることをはじめとして、数学化する過程において、パターンを視覚化することや形式化すること、さらにはパターンを拡張することなどを通して構成的に数学を作り上げていくものである。教師は発見されたパターンの数学的な価値、教育的な価値を

明確にすることで、学習者の知的探求を担保すべきである。さらに、パターンの科学としての数学観として用いた見方・考え方について教師自身が用いたものを反省的に顧みること、学習者の活動の繋がりを明確化することが可能である。

3. 自力解決における期待される活動とパターンの科学としての数学観

パターンの科学において重要なのはいかに探求が行われるかにあるといっても過言ではない。学問としての数学において新たな分野や領域の発展のために、数学者たちはパターンの探求を行っている。

パターンは「自然界に現れるパターン、人間の精神によって発明されたパターン、他のパターンから作られたパターン」(スティーン, 2000, p. 13)である。自力解決では、様々な試行錯誤から、対象をパターンとしてみなしたり、発見したパターンをさらに探求し、新たにパターンを発見するという事が行われる。これは一見従来言われてきた算数的活動・数学的活動に準ずるものとして捉えられるが、重要なのは学習者がパターンを発見するという点にある。

よく、数学は自然の中にあるというような表現があるが、決して松ぼっくりが数学を知っていて、その様にふるまって松かさの並びを決定しているわけではなく、人が松かさの並びを見たときに、そこに現れる規則性を数学化しているにすぎないのである。しかし、そういった人が規則的だと見ることができたり、感覚的に「美しい」と思える事柄一例えば黄金比などは自然界に多く見いだすことができるものである。

自力解決においては、問題が解決されることが一番の目的のように考えられることがあるが、筆者は問題が解決されることは幾つかある目的のごく一部にすぎないと考えている。例えば、【自力解決 C】→【自力解決 B】→【自力解決 A】とあるときに、Cの段階にいた学習者がどうすればより手際よい方法を用いることができるようになるか、質の高い思考へと変容を促すことができるか、どのような見方・考え方を育むことができるかなど様々な要素が絡み合っている。これまでにも、「きまりを調べよう」といった単元が設定されていたが、そこで用いる対象を比較したり、抽出したり、続くものを推測したりという活動はその場面のみ活動に終始して、他の問題の場合にはそういった活動が設定できないような問題場面が設定されていることも少なくない。パターンとして捉えるためには、先にあげた比較することや推測することが探求の活動として必要である。その具体的な探求活動を行う場として自力解決の時間を考えたいのである。

4. 事例 1：より大きな数のたし算

4.1. 対象となる問題場面と学習のねらい

本事例は Wittmann(2009)によるものであり、様々なパターンを発見することが可能である。

1 から 9 までの数字のカードがあります。1 から 9 までの数字を 1 回ずつ使って、3 つ
--

の3桁の数字を作ります。3桁の数字を足し合わせて、1000以下の合計になるものをつくりましょう。

Wittmannはこの問題について、次のような活動をするよう助言している。“まず、与えられたルールに従って、間違えた答えも含めたくさんの結果を得ること。次に、得られた結果を集めて比較を行う。生徒の見つけたパターンについて、教師からのヒントや問題文から間違った結果に気づき、教師の支援を受けながら、今得られている結果のパターンにしたがって、結果で欠けているものを埋めることですべての可能な結果に辿りつく。さらに得られた結果について、すべてが9の倍数になっているというパターンにも気づく事ができる。”(Wittmann,2009,p.253)

本事例での探求活動を行う最低条件は(3桁)+(3桁)+(3桁)のたし算ができることである。手当たり次第に演算を行うのではなく、条件をつけて演算を行い、求められる答えをコントロールすることが可能であること、また計算式や筆算を比較、検討することでこの問題場面がもつ構造を明らかにすることが可能である。

4.2. 小学校第3学年：たし算のしくみ

本事例では、 $53+26$ と $23+56$ の答えが等しくなることつまり、 $(10a+b)+(10c+d)=(10c+b)+(10a+d)$ であることを利用した授業を設計する。本事例では筆算の表現形式を用いるため、位に着目しやすい。また文字式での証明を課すことが妥当ではない小学校第3学年の学習者にとって、十進位取り記数法と○図を用いた説明へと展開することが可能である。

無作為に選んだ数を足し合わせると結果が同じになる理由を探求することが望まれる。

加えて桁数の多い筆算の練習も可能である。

4.2.1. 自力解決における期待される活動の設定に向けた注意点

複雑な筆算の形式であることから演算に時間がかかることが予想される。自力解決においては幾つかの筆算を計算した結果から推測が始められるようにしたい。

また、計算間違いをしている場合には、他の筆算も作ってみる様声かけをし、間違っただけのもの以外が全て一定の答えになることに注意を向けさせることで確かめの必要性を示すことも考えられる。

①いくつかの筆算を計算することで、答えが一定になると仮定できる。

百の位、十の位、一の位にそれぞれ使える数値を入れ替えながら、実験することで、答えが一定の値になるとを予測する。

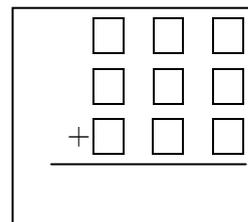
②答えが一つになることについて説明する。

- ・百の位、十の位、一の位3つともを変化させるのではなく、一部だけを抽出して考える。
- ・図を使って、各位の数を入れ替えても答えが常に一定になることを説明する。

4.2.2. 学習指導案【大きな数の筆算】

問題の提示

1から9までの9枚のカードを1回ずつ使って、
 いろいろな計算を作ります。
 百の位に1・2・4，十の位に3・6・9，一の位に5・7・8を
 使ったときの答えは何個できますか。



自力解決 C 組み合わせを変えて筆算を作り，答えがいつも 900 になることを明らかにする。

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 3 \quad 5 \\
 2 \quad 6 \quad 7 \\
 + 4 \quad 9 \quad 8 \\
 \hline
 9 \quad 0 \quad 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 2 \quad 3 \quad 8 \\
 1 \quad 9 \quad 7 \\
 + 4 \quad 6 \quad 5 \\
 \hline
 9 \quad 0 \quad 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 4 \quad 6 \quad 5 \\
 2 \quad 3 \quad 7 \\
 + 1 \quad 9 \quad 8 \\
 \hline
 9 \quad 0 \quad 0
 \end{array}$$

支 どうしていつも 900 になるのかな。他の答えは作れないのかな。

自力解決 B 作った筆算をもとに，筆算の位取り記数法に着目して，1つの位のみに着目して数の位置を変え，答えの規則性を見つける。

支 すべての場合を調べなくても，900 になることを説明できないかな。

自力解決 A 位取り記数表を用いて，どのように数を組み合わせても，答えが等しくなり，900 以外の答えにはならないことを説明する。

百	十	一
○	○○○	○○○○○
○○	○○○ ○○○	○○○○○ ○○
○○○○	○○○ ○○○ ○○○	○○○○○ ○○○

4.3. 小学校高学年～中学校1年：隠された暗号

本事例では、計算の結果得られる答えが全て9の倍数になっていることを用いて、教材化を行う。

例えば次の例で考える。

この3桁3数のたし算では、1～9までの数が使われる。123+456+789を図を使って表すと、各位の位どり記数表には作業的に右図のような状態が考えられる。このとき○の数は45個存在する。1の位では繰り上がりがある。

百の位	十の位	一の位
○	○○	○○○
○○○○	○○○○○	○○○○○ ○
○○○○○ ○○	○○○○○ ○○○	○○○○○ ○○○○

1の位の○が10個減り、十の位の○が1増え、結果として○の数は $45-10+1=36$ (個)となる。同様に繰り上がりがある場合には○が27個、3回ある場合には○が18個というように9の倍数となる。

代数的に説明すれば、1～9がa～iのいずれかに該当するとすると、

$$\begin{aligned} & (100a+10b+c)+(100d+10e+f)+(100g+10h+i) \\ = & (99+1)a+(9+1)b+c+(99+1)d+(9+1)e+f+(99+1)g+(9+1)h+i \\ = & 99(a+d+g)+(a+d+g)+9(b+e+h)+(b+e+h)+(c+f+i) \\ = & 99(a+d+g)+9(b+e+h)+(a+b+c+d+e+f+g+h+i) \end{aligned}$$

このとき、

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i=1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$

つまり 9×5 なので、この問題を解決した結果得られる答えは常に9の倍数である。

4.3.1. 自力解決における期待される活動の設定に向けた注意点

無作為に筆算を作って計算を行っても、それらの答えが9の倍数になっていると気付くことはまずないと考えられる。数の組み合わせを変化させることでつくることができる数がどのような性質を持っているのか探求するきっかけのつかめる活動を設定すべきである。

①基準となる最小の答えになる数の組み合わせ、最大の数の組み合わせを考える。

例えば、百の位に入る数が1・5・6のとき、それら3つは上段・中段・下段どれに入っても答えに影響しないことを確認する。

さらに、各位の組み合わせを変化することで、結果にどのような影響が生じるかを探求する必要がある。

②作ることでできない数の存在から、答えの取り得る範囲を考える。

まず、本事例では、774～2556の範囲の数で、かつ9の倍数であることを、明らかにする必要がある。

→ある一つの数の組み合わせを基準に、次に大きな答えとなる数の組み合わせを考えるためにはどのような方法をとるべきなのか。

→次に大きな答えとなる数の組み合わせはどのような手順でつくられたのかを反省的に考察する。

4.3.2. 学習指導案【隠された暗号】中学校第1学年

問題の提示

とある遺跡から、謎の箱が発掘された。そこには11個の数字をあてはめるスペースがあり、数字盤をはめ込むことで箱の鍵をあけることができるようだ。しかし、数字盤をはめ込む部分は劣化しており、間違った数字盤をはめ込むと壊れてしまう可能性がある。暗号を正確に解き明かし、箱の鍵を開けてほしい。

<鍵をあける暗号のヒント>

1~9までの数字を1度ずつ使い3桁の数字を3つ作る。それを足し合わせてできる数字のうち、783より大きく1575より小さいもののうち、12番目、6□番目、79番目の数字を順に並べよ。

支 3桁の数字を3つ作ると、どのくらいの組み合わせが考えられるか。

支 答が一番小さくなる3桁の数の組み合わせと、一番大きくなる数の組み合わせは何だろうか。

自力解決 C 各位に用いる数を決定することで、答を決めることができることを説明する。
(筆算の位取り記数法に着目して、各位に用いる数の組み合わせを考える)

$$\begin{array}{r}
 147 \\
 258 \\
 +369 \\
 \hline
 774
 \end{array}
 \quad \Rightarrow \quad
 \begin{array}{r}
 \{1.2.3\}=6 \\
 \{4.5.6\}=15 \\
 \{7.8.9\}=24 \\
 \hline
 774
 \end{array}$$

支 数字の組み合わせと答えの関係が複数の答の場合でも見れないか。

支 その答えより5答を大きくすることは可能か。

自力解決 B 答が一番小さくなる組み合わせと答えが783になる組み合わせに着目し、数の入れ替えと答えの関係を明らかにする。(十の位が1増えて、一の位が1減ると答えが9増える)

$$\begin{array}{r}
 \{1.2.3\}=6 \\
 \{4.5.6\}=15 \\
 \{7.8.9\}=24 \\
 \hline
 774
 \end{array}
 \quad \Rightarrow \quad
 \begin{array}{r}
 \{1.2.3\}=6 \\
 \{4.5.7\}=16 \\
 \{6.8.9\}=23 \\
 \hline
 783
 \end{array}$$

支 筆算を作らなくても、答えを求めることはできないか。

支 ここまで得られた答えを整理して、その間の欠けている答えを予測することができないか。

自力解決 A

3桁3つの数の合計で最小のものは774で、最大のものは2556で、その間198個の答えがある。それらはすべて9の倍数であることを代数的に明らかにする。

・答えは9ずつ増えており、774の次(一番目)の答え783は774+9、2番目の答えは792で774+9+9である。

つまり、 $774=774+(9\times 0)$ 、 $783=774+(9\times 1)$ 、 $792=774+(9\times 2)$ …

と考えることができ、

12番目の答えは $774+(9\times 12)=882$ 、同様に、67番目は1377、79番目は1485。

よって、暗号は88213771485である。

5. 事例2：多角形の内角の和

5.1. 対象となる問題場面と学習のねらい

多角形の内角の和は $180 \times (n - 1)$ である。多角形を三角形や既習の図形に分割することで求められる知識であるが、本事例はその活用にあたるものである。

複雑な凸多角形のうち、3つだけが鈍角です。
そのような多角形は最大何角形でしょう。

n 角形の内角の和は一般に一定であることに對し、内角の和とそれを構成している内角のそれぞれの角度の関係性について考察することがねらいである。

5.2. 小学校第5学年：内角の和

n 角形の内角の和が $180 \times (n - 1)$ で求められる学習をした児童に対して、 n 角形の内角がどのような特徴をもっているか、角度に着目して探求する。

内角の和が一定であることに對し、それぞれの内角の角度の変化を観察することによって、 n 角形が成立する場合とそうでない場合に角度がどのように関わっているのかを考えさせる。

5.2.1. 自力解決における期待される活動の設定に向けた注意点

本事例では、様々な図形を作る実験的な操作を行うことが目的となってしまうてはいけない。図形を作るのは、あくまでそこに潜むパターンを垣間見るためであり、作業に終始しては、「真にその答えが最大値なのか」という問いに答えることはできないためである。

①角度を考えながら作図する。3つ以上鈍角がなければかけない図形を探す。

・正多角形の角度を変化させながら観察を行う。(このとき、凹多角形にならないように気をつける)

②角度を仮定して、実際に作図を行うのではなく、仮想で処理する。

③特殊な場合を仮定して、作ることのできる図形を考える。

5.2.2. 学習指導案

問題場面

○多角形の内角の和の学習をしました。今日は少し難しくしてみようと思います。
一つだけ鈍角になるような三角形がかけますか？四角形がかけますか？
では2つが鈍角だとどうですか？三角形はかけますか？四角形ではどうですか？
では3つが鈍角の四角形はできるでしょうか？

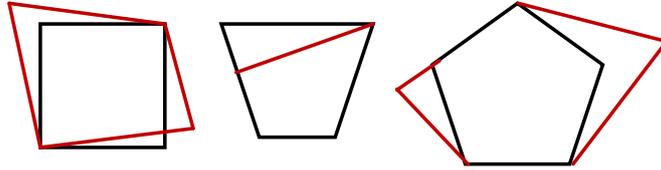
支 分度器を使って角度を調べながらここう。

3つだけが鈍角になっている多角形を作りましょう。何角形を作ることができますか。

支 (ワークシートを用意し)角度を大きくしたり、小さくしたりできないか。

支 どうすれば簡単に作図できるだろう。

自力解決 C 鈍角を3つ作るためには、内角がそれぞれどのようになればよいかを観察し、理由を考える。(ワークシートの図形：正方形、等脚台形、正五・六・七・八・九角形)



支 本当にこれ以上の多角形を作ることはできないか。もしそうだとしたら、その理由を説明できないか。

支 内角の内訳を作図をしなくても予想できないか。

自力解決 B 六角形、七角形、八角形に着目して、内角の内訳を考える。
例)

									計
六角形	175	170	170	70	70	65			720
七角形	179	179	179	93	90	90	90		900
八角形									

七角形はどんなに工夫しても4つの鈍角が必要そうだ。

支 どんな場合でも言えるようにするには、どうしたらいいだろう。

自力解決 A 鈍角以外を直角 90° として考え、説明する。

鈍角にならない一番大きな角は 90° .

①七角形では、4つが鈍角ではないので、 $90 \times 4 = 360$

$(900 - 360) \div 3 = 180$ つまり、七角形をかくことができない。

②七角形では、4つが鈍角ではないので、 $90 \times 4 = 360$

4つの角が 90 になると、長方形か正方形になり、七角形にはできない。

答. 六角形

5.3. 中学校第1学年：内角の和(不等式)

ここでは、内角の和そのものではなく、そこから見えてくる関係性を不等式の題材として採用する。

中学校第1学年の段階では不等式の変形によって解を導くことはできないが、角度が取り得る範囲について不等式を用いて表現することができる。また文字に数値を代入することで答えと予想した数値が適当なものであるかを判断することができる。

ここでは解を求めることを目的とするのではなく、あくまで問題の構造としての内角や外角に着目して角度の取り得る範囲を明らかにする手段としての不等式を扱う。

5.3.1. 自力解決における期待される活動の設定

5.2.1 で挙げたものに加え、文字式により一般化を行う。

5.3.2. 学習指導案

問題の提示

複雑な凸多角形の内角のうち、3つだけが鈍角である。そのような多角形は最大何角形で鈍角の大きさは何度になるでしょう。

自力解決 B 内角の和をもとに、数を操作して考える

	三角形	四角形	五角形	六角形	七角形	八角形
内角の和	180°	360°	540°	720°	900°	1080°
1つの角	60°	90°	108°	120°	128.571…	135°
3つ以外の角が90°	×	$(360-90)/3 = 90°$	$(540-180)/3 = 120°$	$(720-270)/3 = 150°$	$(900-360)/3 = 180°$	

支 文字式を用いて、この表の内容を表現できないか。

支 3つの鈍角のうち、1つが90°より大きく、180°より小さい範囲の中にあることを式で表して処理できないか。

自力解決 A-1 3つの鈍角の和が取り得る範囲に着目し、不等式に表して考える。

$$90 < \frac{1}{3} \{180 \times (n-2) - 90(n-3)\} < 180$$

$$270 < 180 \times (n-2) - 90(n-3) < 540$$

$$270 < 180n - 360 - 90n + 270 < 540$$

$$270 < 90n - 90 < 540$$

支 外角の和が360°であることは解決に使えないか。

自力解決 A-2 外角の和に着目し、不等式に表して考える。

$$180n - 180(n-2) > 90(n-3)$$

$$n > 7$$

6. おわりに

結語にかえて、デブリン(2007. p. 166)のこんな一節を紹介したい。

数学が簡単にできる人がいる一方で、さっぱり理解できないという人がたくさんいるのだろうか？

ある家に初めて入ったときは、もちろんそこに不案内である。しかし、しばらく歩きまわっているいろいろな部屋をのぞいたり、戸棚のなかをみたりしていると、すぐにわかっていく。しかし家のなかに入ることができず、立てたときに使われた指示書やプランから得られる知識しかなかったらどうだろうか。しかも、その指示書やプランが非常に専門的な言葉で書かれていて、どうにもこうにも理解できなかったら？そこに住むのがどんな感じか、よくつかめないだろう。そして想像のなかでさえ、その家に入ることができないだろう。

教材を分析しようとするとき、子どもにとって難解な指示書やプランにあたる数学的な知識や概念は、教師にとっては専門的ではなく、ひどく当たり前のものである。パターンという大変簡潔な言葉で表される内容は、我々にとってなじみの深いものから、全くの未知のものまで広く含まれており、教師は自分にはわからない代数記号や方程式を相手にあしたときの「数学に取り掛かることができない」という状態を忘れてしまうのかもしれない。学習者が問題解決学習やその他の活動においても活動に取り組めないというとき、教師は提示する問題や活動内容に、子どもたちが自由に家を歩き回りながら部屋の配置や家具の種類、またその部屋は何をする部屋なのか、階段はどこにあって何段あるかなど様々なものに触れられる機会を設けているだろうか。

パターンの科学としての数学観が算数・数学教育の教材研究に対し特に優れている点は、教師にとってすでに知っている事柄であっても、パターンとして見た場合には新たな視点で見ることができたり、そのパターンを説明するためには多様な探求活動に裏付けされた根拠が必要になる点である。それらの活動を学習者の実態に応じて捉え直すことができる。2つの事例で挙げた事柄は一般的なパターンという言葉からは連想しづらいものであったことが予想される。しかし、対象を探求するために、あえて条件や手段を限定することで、そこに規則性や手順を見いだすことで問題の探求や解決に結び付けることも可能である。

－引用・参考文献－

Keith Devlin [山下純一訳](1995). 数学：パターンの科学. 日経サイエンス社

Keith Devlin[山下篤子訳](2007). 数学する遺伝子. 早川書房

Lynn Arthur Steen [三輪辰郎訳](2000). 世界は数理でできている. 丸善株式会社

Wittmann. E. Ch. (2009). *OPERATIVE ROOF IN ELEMENTARY MATHEMATICS*. Proceeding of the ICME study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education Vol2. pp. 251-256

前田静香(2011). パターンの科学に基づく算数・数学教授学を志向した基礎的研究. 鳥取大学数学教育研究. 13(4). pp. 1-16

鳥取大学数学教育研究 ISSN 1881-6134

Site URL : <http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu>

編集委員

矢部敏昭 鳥取大学数学教育学研究室 tsyabe@rstu.jp

溝口達也 鳥取大学数学教育学研究室 mizoguci@rstu.jp

(投稿原稿の内容に応じて、外部編集委員を招聘することがあります)

投稿規定

- ❖ 本誌は、次の稿を対象とします。
 - ・ 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文、またはその抜粋・要約・抄録
 - ・ 算数・数学教育に係わる、理論的、実践的研究論文／報告
 - ・ 鳥取大学、および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
 - ・ その他、算数・数学教育に係わる各種の情報提供
- ❖ 投稿は、どなたでもできます。投稿された原稿は、編集委員による審査を経て、採択が決定された後、随時オンライン上に公開されます。
- ❖ 投稿は、編集委員まで、e-mailの添付書類として下さい。その際、ファイル形式は、PDFとします。
- ❖ 投稿書式は、バックナンバー（vol.9以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551 鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX 0857-31-5101 (溝口)

<http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/>