ISSN 1881−6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

学習におけるパターンの捉え方と探求の様相

~パターンの科学としての数学観に基づく学習指導要領の分析を通して~

前田静香　*Shizuka Maeda*

vol.14, no.2

Jun. 2011

鳥取大学 数学教育学研究室

学習におけるパターンの捉え方と探求の様相

パターンの科学としての数学観に基づく学習指導要領の分析を通して

前田　静香

鳥取大学大学院地域学研究科

1.　はじめに

本項では，パターンの科学としての数学観に基づいて，学習におけるパターンの捉え方を規定するとともに，パターンの探求の様相について分析を行うことで学習指導要領の内容の捉え直しを行うことを目的とする．

パターンの科学としての数学では、パターンを捉え、パターンを探求する活動を経て、数学を構成している。算数・数学の教授場面としての問題解決学習の場でも、学習者が算数・数学を構成するような創造的な活動が行われることが望ましい。しかし創造的な活動を設計する教師にとっては、学習者にどのような問題場面を提示すべきなのか、どのような活動を設定すべきなのか、活動間の繋がりはというように、様々な困難性を含んでいる事も確かである。本稿では、算数のカリキュラムをの捉え方としてのパターンを規定し、広く教授の場面でそれらがどのようにふるまわれるかを具体的に検証している。パターンの科学としての数学観が教授・学習にどのように作用するのかについて検討を行っている。

2.　パターンの科学としての数学観とは

パターンの科学とは，数学に対する一つの捉え方の呼称である．L.A.スティーンの言葉を借りれば「数学は，あらゆる種類のパターン―自然界に現れるパターン，人間の精神によって発明されたパターン，ほかのパターンからつくられたパターン―を理解しようとする探求的科学」(スティーン.p.13)であると捉えられる．また，その特性を次の 3 点にまとめられる(前田.2011).

<u>1：万物が対象となること</u>

<u>2：パターンとして捉えることだけでは，数学として成立しないこと</u>

<u>3：パターンから新しいパターンが生み出されること</u>

パターンとみなす主体は個人にあり，どのようなパターンであるとみなせるかには個人差がある．次の数列の問題を例に見ていく．

①1，2，3，4，5 に続く数は？
②2，4，6，8，10 に続く数は？
③1，4，9，16，25 に続く数は？
④1，2，4，8，16 に続く数は？
⑤2，3，5，7，11 に続く数は？
⑥139，21，3，444，65 に続く数は？

このように問われた時，どのように答えるであろうか．①には 6，②には 12，③には 37，④には 32，では⑤や⑥はどのような数字が並ぶのであろうか．

次のようなパターンであるとみなすことができるであろうか．カール・リンダーホルム(*Mathematics Made Difficult*.1971)は，①から⑥まで，これに続く数はすべて 19 であるというパターンであると言った．彼はこの数列に対し，ラグランジュの補間公式を用いたのである．

ラグランジュの補間公式は $P(x)=\sum_{j=1}^{n} y_i \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$ であり，省略せず書くと

$$P(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}y_1+\cdots+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}y_n$$ となる．

例えば数列 1,2,3,4,5,19 の場合を考える．

$$x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4, x_5=5, x_6=6, y_1=1, y_2=2, y_3=3, y_4=4, y_5=5, y_6=19$$

とすると，

$$P(x)=\frac{13}{120}x^5-\frac{13}{8}x^4+\frac{221}{24}x^3-\frac{195}{8}x^2+\frac{1841}{60}x-13$$

となり，P(1)=1,P(2)=2,P(3)=3,P(4)=4,P(5)=5,P(6)=19 となる．（スチュアート.2010.p.157）

筆者にとっては，はいきなり問題の数列の次の数が 19 であるとみなすことは困難であったが，このように説明されれば，少なからず異なる規則をもった数列であるともみなすこともできる．そこには明らかに筆者が見ていたものとは異なるパターンが存在していたと言える．

このように，パターンとみなす主体は個々人に依存しパターンは様々な可能性を秘めている．しかしながらパターンそのものが数学なのではなく，そのパターンがどのような特性や規則性をもったものであるか探求され，数学的に説明されるものであるかが問題となる．また，数学的に表象される事により，そのパターンは客観化され，伝達が可能となる．

3.　パターンの科学としての数学観の利用

3.1.　問題解決学習とパターンの科学としての数学観

問題解決学習においてなぜパターンの科学としての数学観が必要となるのか.

本研究では，問題解決を算数・数学としてふさわしい創造的な活動として捉えている．さらに，創造的な活動を行う場である授業は,「あたかも子どもたち自身が，数学的知識・概念等を発見し，構成し，導き出したものであるような場」(溝口. 2007.p.12)であるべきだと考える．

教師にとって，問題解決学習は端的に言えば問題を解決する能力を育成する事を目的としていると言え, その方法として問題解決学習の授業が用いられると考える. このとき, 教師の立場からすると，問題を解決する能力を育成する目的のために，例えば解決に用いさせたいアイディアや概念，知識を何とかして活動の中に盛り込もうとする．しかし学習者にとっては問題を解決する事と，教師がその問題場面において用いて欲しい解決の方法が一致せず，時には教師の意図していたものは不要のものとなる状況が生じることもある．なぜそのような乖離が生じるか，ここに問題点があると考える．

創造的な活動という点から見ると，私は学習者にとっての算数・数学は自分たちが創り上げるものであり，また探求する対象であると捉えられるような学習観が必要であると考える．そのための授業を教師自身も設計しようと心がけているが，必ずしもその目標が達成されているとは言い難い．このとき，教師と学習者，そして教材を不可分なく結び付けるような数学観が必要であると考える．

パターンの科学としての数学は，何がしかのパターンがあるとみなされた時，それはみなした者によって探求される対象となり得る．どのように探求すべきか，またどうすればそれがパターンであると言い得るのかについての根拠を求められる．さらにそれらのパターンはより洗練されたり，新たな広がりを見せたりするものとなり得る．このとき，数学は探求者によって構成されるのである．

パターンの科学としての数学観に基づく算数・数学教育を考えるという事は，つまり，数学を構成する主体が学習者である環境を設計する事であると換言できる．

どのようなパターンであるとみなすかが個々人に委ねられ，それぞれの探求の道筋が保証されるパターンの科学としての数学観は問題解決学習における自力解決や練り上げの場面で新たな視点を投ずるものとなり得ると仮定づけられる．

E.Ch.ビットマン(2005)はパターンの科学としての数学観に基づいてデザインされる「本質的学習環境」において，意図的に埋め込まれた数学的なパターンが，学習者の知的探求の対象であることや，学習者が主体的に構成することが可能な対象であること，また発見したり，再構成される余地が残されている必要性があるとしている．(Wittmann.2005.p.2)

3.2.　教授の視点からパターンを捉える

算数科で学習する内容について，我々はその対象をどのようなパターンとして捉えることができるのであろうか．問題を解決するというときに，その方法を知っているか否かで，解決できるかできないかが決定される，一般に「解法のパターン」と呼ばれるときのパターンを指すのではない．筆者がこれから見ようとするパターンは対象の捉え方である．よって，本研究におけるパターンは教えるべき内容ではなく，養われるべき数学的なセンスであり，対象の捉え方であると言ってもよいだろう．

パターンは誰しもが知覚できるものであるが故に，おそらく筆者が思いもつかないパターンがこの世には多く存在しているであろうし，構造的には同じものでも，捉えた主体によって異なるパターンであるとされている場合もあるだろう．これはパターンの特性からして至極当たり前のことである．ところが，算数・数学教育学という視点で考えた時，単にパターンとみなせればよいわけではなく，そのパターンとみなすことに教育的意義が付与されるパターンが示される必要がある．そのため，本研究では以下の 2 点の条件を満たすパターンについて検討を行う．

[条件 1] 学習内容を統合的に捉えられるパターンであること．

[条件 2]その様に捉える事で，問題の解決に有効な示唆が得られるパターンであること．

この条件を満たすパターンとして，本研究では以下の 4 つのパターンに着目した．

PS：様々な種類のものの集まりの中で共通するものを認識することで認められるパターン[集合のパターン]

PF：一意対応するものを認識することで認められるパターン[対応のパターン]

PID：対象の数量的変化を認識することで認められるパターン[増減のパターン]

PM：対象の動的変化を認識することで認められるパターン[移動のパターン]

[条件 1]について，これら 4 つのパターンは学習指導要領に示される内容について，学習する内容 1 つ 1 つについて少なくとも 1 つ以上が確認され，この 4 つのパターンによって内容を捉えることが可能であることが明らかとなった．具体的に適用したものを以下に示す．

3.3　数と計算領域

学習指導要領解説では，A 数と計算の領域における内容を“数”と“計算”とに分類しており，本研究でも分類された学習内容についてパターンの適用を行う．

3.3.1　数と計算領域における集合のパターン

原初的な活動としては，対象の数を数えることが挙げられる．数を数えると言ったときに，数える対象は様々であるが，それがいくつ存在するかについては対象に依存しない．

教科書に書かれたチューリップの絵や風船の絵の個数をおはじきで置き換えた時，そこで認められるのは，例えば「よっつ」と数えられるものである．そこに 4 と言う共通性を見いだし「よっつ」という意味を表すパターンを数の 4 として捉えるのである．数字 4 はどこかに転がっているものではな

く，「よっつ」と数えられた対象から抽象されたものとして捉えられるのである．

また，抽象されて得られた数は一つ一つ存在するのではなく，1,2,3,4……という様に数の集まりとして認識される．学習の内容からいえば，整数と呼ばれる集合として捉えることができる．12 の次には 1 大きい 13 が来るというように整数全体を集合と捉えると数を構成することができる．また，表現形式の違いから分数や小数を集合と捉えることも考えられるが，数という集合で捉える場合には，概念の拡張が必要である．

計算の意味についても集合として捉えることができる．加法の合併や増加，割算の包含除や等分除などは場面としては互いに区別できるものとして教授されるが，そこで行われる演算を見たときには，一つの集合として捉えられる．

3.3.2　数と計算領域における対応のパターン

対象となるものの集まりをより数えやすい他のものの集まりとして置き換えて考えることや，ものに数を対応させることは対応のパターンとしてみなすことができる．

計算において，5+3＝8 が行われる場合，5+3 と対応しているものが 8 であるとみることができる．他にも 4+4 や 6+2 も 8 と対応しており，集合のパターンから見れば，□+△という集合と 8 という集合の間にある対応のパターンとみなすことができるともいえる．

乗法では，一方の定数が 1 ずつ増えるとき，他方はどのように変化していくかと見たり，一方の変数が 2 倍 3 倍となると他方はどのように変化するパターンとして捉えることができる．

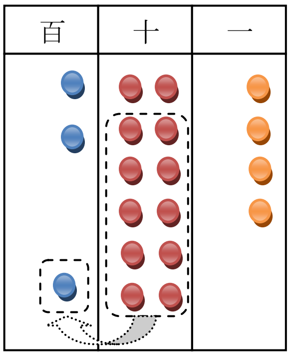
3.3.3　数と計算領域における増減のパターン

数と計算領域では，最も捉えやすいパターンであると考える．増減のパターンは第 1 学年の初めから知覚されるパターンである．2−4−□−8−と続く数列の□には 6 が入る．隣り合う項の差が 2 であることに着目することによって，6 が入るとみなすことができる．

また演算は数の増減に関して，その様相を記述するものと見れば，計算式も増減のパターンを表すものとして捉えられる．

3.3.4　数と計算領域における移動のパターン

十進位取り記数法を○図で表現する場合に移動のパターンとしてみなすことができる．例えば，「ここに 100 枚の折り紙の束が 2 組，10 枚の折り紙の束が 12 組，ばらの折り紙が 4 枚あります．全部で何枚ありますか．」という場合，十の位には 12 個の○があるが，十進位取り記数法では一つの位の中で 0 から 9 までの数しか扱うことができない．十の位にある 10 個の○はなくなってしまうわけではなく，100 の位に一つの○として移動していく．100 は 10 が 10 個集まったものとして対応のパターンがあることから，十進位取り記数法において，このように位間で数を移動させることができるのである．より複雑な場面では，繰り上がりや繰り下がりのある筆算などでも同様のパターンがみられる．



3.4　量と測定領域

学習指導要領解説では，B 量と測定領域における内容を“量の単位”と“量の比較や測定”とに分類しており，本研究でも分類された学習内容についてパターンの適用を行う．

3.4.1　量と測定領域における集合のパターン

長さや体積，重さなどを単位を用いて表現できることは，それらを同一の基準で測りとれるものとして認識されるためである．

3.4.2　量と測定領域における対応のパターン

A さん, B さん, C さんがそれぞれ持っている水筒は誰の水筒が一番多く水が入るのかと言うとき，同じコップで測り取れば, A さん, B さん, C さんの水筒はそれぞれ同じコップという定数でもって，何杯分かと捉えることができる.

また長方形の面積の学習では，周りの長さが 20cm の長方形を与えて，面積と縦と横の関係に着目させることで, 縦と横の組み合わせに対応して面積が表されるというパターンをみなすことができる.

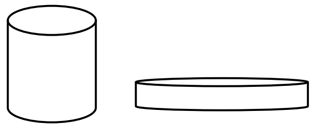
3.4.3　量と測定領域における増減のパターン

長さや体積，重さなどは数値で表されることで演算が可能となり，例えば複数のものの大きさを比較することが可能になる.

同じ底辺の長さをもつ三角形が，高さが変化することで，どのように面積が変化するのかについて捉えることによって､この場面での高さと面積間で振舞われる増減のパターンとみなすことができる。

3.4.4　量と測定領域における移動のパターン

右図のように，(ア)の容器いっぱいに入った水を移し替えると，ちょうど(イ)の容器いっぱいとなるとき，形は変化しても，容積は等しいことが分かる.



また，単位の仕組みは十進位取り記数法場合と同様に捉えることができる.

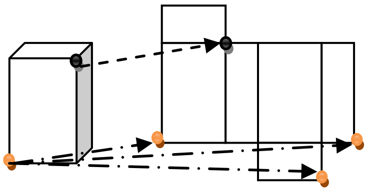
3.5　図形領域

学習指導要領解説では，C 図形領域における内容を“図形についての理解”と“図形を構成する要素”,“図形の見方や調べ方”とに分類しており，本研究でも分類された学習内容についてパターンの適用を行う.

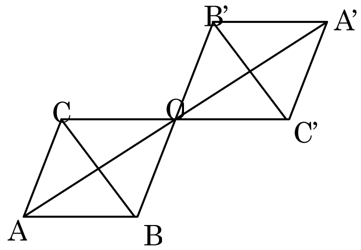
3.5.1　図形領域における集合のパターン

たとえば，一般に三角形と呼ばれるものについて，表象された大きさや色，線の太さや向きには関係なく抽象される特性をもつものに適合する図形を，三角形として捉えることはそこに集合のパターンを認めることである.

3.5.2　図形領域における対応のパターン



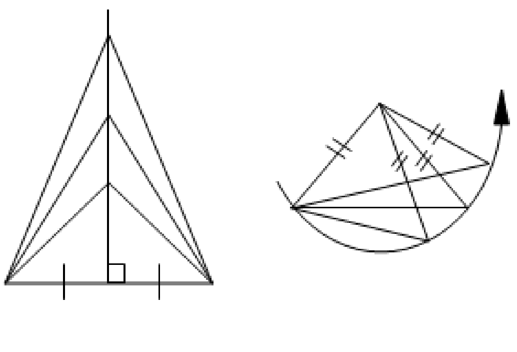
展開図では，図のようにある 1 点が展開図において 1 点として対応することもあれば，1 点が展開図においては 3 点に分散されることもある．しかしこれら 3 つの点は直方体の一点と対応しているものとして捉えることができる.



点対称の位置にある二つの図形において，対応する点を結ぶ直線はすべて 1 点で交わる．つまり図で言えば，点 O であり，対称の中心である．対応する点を結ぶことで，必ず対称の中心をとおることから，このような対応のパターンの中で，例えば点 B と点 C’を結んだ場合には中心点を通らない．つまり，点 B と点 C’は点対称の関係においては対応する点ではないことが明らかとなる.

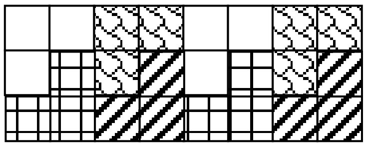
3.5.3　図形領域における増減のパターン

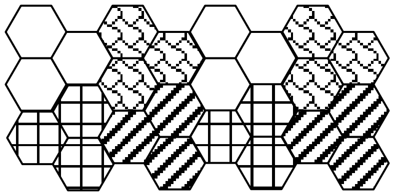
二等辺三角形について，底辺を固定して高さを変化させるとき，また等しい 2 辺の長さを固定し，底辺の長さを変化させると，面積が変化



することが分かる．しかしながら面積が大きくなったり，小さくなったりしたとしても，二等辺三角形としての特性は失われることはない．また特別な場合に二等辺三角形は正三角形となることも確認されるだろう．

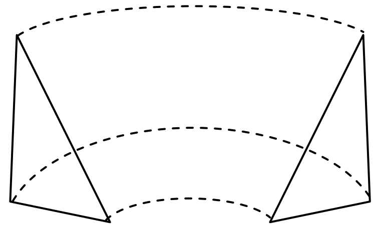
3.5.4　図形領域における移動のパターン





敷き詰めの学習では，単に図形が平面上にすきまなく敷き詰められることだけでなく，一つを基準にした時に，回転させたり，平行移動させたりするなど移動の手続きによって振舞われるパターンであるとみなすことができる．

合同な図形を作図する場合に、ある三角形を別の位置に移動すると捉えると，形や大きさを保持したまま移動するには，何を移動させなければならないかと捉える．作図の方法は「３辺」「２辺とその間の角」「１辺とその両端の角」の３つに着目するものであるが，どうしてその３つだけと言ってよいのか．移動のパターンとして捉えれば，なぜその３つのかき方となるのかが明らかにされるだろう．また，対称な図形についても，図形を構成する要素の移動のパターンとみなすことができる．



3.6　数量関係領域

学習指導要領解説では，D 数量関係領域における内容を“関数の考え”と“式の表現と読み”，“資料の整理と読み”とに分類しており，本研究でも分類された学習内容についてパターンの適用を行う．

3.6.1　数量関係領域における集合のパターン

数量関係領域では数量の関係が何と何によって決定されるかという点が重要となる．

50 ページの本を読んでいくときの，読んだページ数と残りのページ数の関係を考えるとき，読んだページ数という集合と残りのページ数という集合について捉える必要がある．これらの集合が取り得る値の範囲は 0 から 50 であり，これら 2 つの集合は一対一で関係付けられる対応のパターンであるという側面も持つ．

3.6.2　数量関係領域における対応のパターン

数量の関係を捉える方法として，広く表が用いられる．例えば，周りの長さが 18cm の長方形のたての長さと横の長さについて表にまとめてみると，

縦の長さ(cm)	1	2	3	4	…
横の長さ(cm)	8	7	6	5	…

となり，たての長さと横の長さは，たして 9 になる．たての長さと横の長さを対応付けるものは，長方形の周りの長さの出し方によって，捉えられる．対応のパターンは表を用いる場合には，表を縦に見ることでみなせるパターンである．

3.6.3　数量関係領域における増減のパターン

直方体の高さと体積の変わり方について見るとき，直方体のたて 3cm と横 5cm は変えずに高さを変えると，それに伴って体積も変わる．このときの変化の仕方を見る．体積を△，高さを○とすると，

3×5×○＝△となる．

○に 2 を入れると△は 30，○に 4 を入れると△は 60，○に 1 を入れると△は 15 となる．

表にまとめてみると，

高さ○	1	2	3	4
体積△	15	30	45	60

○が 2 倍になった時，△も 2 倍になっている事や，○が 1/4 倍になった時，体積も 1/4 倍になっている事が分かる．

3.6.4　数量関係領域における移動のパターン

数量関係領域では，数量の変化を観察可能な状態にするため，グラフを用いる．比例や反比例とはプロットされる点がどのように変化するものなのか，その動きを観察するために用いられる．観察された動きを対応のパターンで見られたように式で表現されたり，変化の様子の意味づけを行うことが可能である．

また，折れ線グラフなどでは，A から B までの範囲の傾きとして見られる点の移動パターンと B から C までの範囲の点の移動のパターンの違いから, 2 つの移動のパターンの違いを捉えることができる．またそれらは，増減のパターンとしてもみなすことができる．

3.7　各領域の分類

各領域の内容について，4 つのパターンで捉えると，表のように分類される．

PS:様々な種類のものの集まりの中で共通するものを認識することで認められるパターン[集合のパターン]
PF : 一意対応するものを認識することで認められるパターン[対応のパターン]
PID : 対象の数量的変化を認識することで認められるパターン[増減のパターン]
PM : 対象の動的変化を認識することで認められるパターン[移動のパターン]

【　A　数と計算　】

学年	数	計算
第 1 学年	・2位数〔PS.PF.PID〕 ・簡単な3位数〔PF.PID〕	・1位数の加法及びその逆の減法〔PS.PF.PID〕 ・簡単な2位数などの加法及び減法〔PS.PF.PID〕
第 2 学年	・3 位数，4 位数(1 万までの数)〔PS.PF.PID〕 ・十進位取り記数法〔2.3.4〕 ・簡単な分数(1/2，1/4 など)など〔PS.PF.PID〕	・2位数の加法及びその逆の減法〔PS.PF.PID〕 ・簡単な3位数の加法及び減法〔PS.PF.PID〕 ・乗法九九〔PS.PF.PID〕 ・簡単な2位数と1位数の乗法〔PS.PF.PID〕
第 3 学年	・万の単位(1億までの数)〔PS.PF.PID〕 ・小数(1/10 の位)〔PS.PF.PID〕 ・分数〔PS.PF.PID〕 ・そろばん〔PF.PID〕	・整数の加法及び減法(3 位数や 4 位数)〔PS.PF.PID〕 ・整数の乗法(2位数や3位数など)〔PS.PF.PID〕 ・整数の除法(除数と商が1位数)〔PS.PF.PID〕 ・簡単な整数の除法(除数が 1 位数で商が 2 位数)〔PS.PF.PID〕 ・そろばんによる計算〔PF.PID〕 ・簡単な小数，分数の加法及び減法〔PS.PF.PID〕
第 4 学年	・億，兆の単位〔PS.PF.PID〕 ・概数〔PS.PF〕 ・小数〔PS.PF.PID〕 ・分数(真分数，仮分数，帯分数)〔PS.PF.PID〕	・整数の除法(除数が1位数や2位数で被除数が2位数や3位数)〔PS.PF.PID〕 ・計算の結果の見積もり〔PS.PID〕 ・そろばんによる計算〔PS.PID.PM〕 ・小数の加法及び減法〔PS.PF.PID〕 ・乗数や除数が整数の場合の小数の乗法及び除法〔PS.PF.PID〕 ・同分母分数の加法及び減法〔PS.PF.PID〕
第 5 学年	・偶数と奇数〔PS.PF.PID〕 ・約数と倍数(最大公約数，最小公倍数)〔PS.PF.PID〕 ・素数〔PS.PF.PID〕 ・整数と小数の記数法〔PF.PID.PM〕	・乗数や除数が小数の場合の乗法及び除法〔PS.PF.PID〕 ・異分母の分数の加法及び減法〔PS.PF.PID〕 ・乗数や除数が整数の場合の分数の乗法及び除法〔PS.PF.PID〕
第 6 学年	・逆数〔PS.PF〕	・乗数や除数が分数の場合の乗法及び除法〔PS.PF.PID〕

【　B　量と測定　】

	量の単位	量の比較や測定など
第 1 学年		・長さ，面積，体積の直接比較など〔PS.PID〕 ・時刻の読み方〔PS.PF〕
第 2 学年	・長さの単位(mm，cm，m)〔PS.PID〕 ・体積の単位(ml，dl，l)〔PS.PID〕	・長さと体積の測定〔PS.PID〕

	・時間の単位(日，時，分) 〔PS.PID〕	
第 3 学年	・長さの単位(km) 〔PS.PID〕 ・重さの単位(g，kg)((ｔ)) 〔PS.PID〕 ・時間の単位(秒) 〔PS.PID〕	・長さと重さの測定〔PS.PID〕 ・単位や計器を適切に選んでの測定など〔PS.PF〕 ・時刻や時間の計算〔PS.PF.PID〕
第 4 学年	・面積の単位(㎠，㎡，㎢)((a，ha))〔PS.PID〕 ・核の大きさの単位(度(°)) 〔PS.PID〕	・面積の求め方(正方形，長方形)〔PS.PF.PID〕 ・角の大きさの測定〔PS.PID〕
第 5 学年	・体積の単位(㎤，㎥) 〔PS.PID〕	・面積の求め方(三角形，平行四辺形，ひし形，台形) 〔PS.PF.PID〕 ・体積の求め方(立方体，直方体)〔PS.PF.PID〕 ・測定値の平均〔PS.PF.PID〕 ・単位量当たりの大きさの求め方〔PS.PF.PID〕
第 6 学年		・概形とおよその面積〔PS.PM〕 ・面積の求め方(円) 〔PS.PF.PID〕 ・体積の求め方(角柱，円柱) 〔PS.PF.PID〕 ・速さの求め方〔PS.PF.PID〕 ・メートル法の単位の仕組み〔PF.PID.PM〕

【 C 図形 】

	図形についての理解	図形を構成する要素	図形の見方や調べ方
第 1 学年	・身の回りにあるものの形〔PS.PF〕		・観察や構成などの活動〔PS.PM〕 ・前後，左右，上下などの言葉〔PS〕
第 2 学年	・三角形，四角形〔PS.PF〕 ・正方形，長方形，著角三角形〔PS.PF〕 ・箱の形をしたもの〔PS.PF〕	・直線，直角，頂点，辺，面〔PS〕	・観察や構成などの活動〔PS.PM〕 ・構成要素の着目する〔PS〕 ・辺の長さを調べる〔PS.PF〕 ・直角に着目する〔PS.PF〕
第 3 学年	・二等辺三角形，正三角形〔PS.PF〕 ・円，球〔PS.PF〕	・角，中心，半径，直径〔PS〕	・観察や構成などの活動〔PS.PM〕 ・構成要素に着目する〔PS〕 ・辺の長さを比べる〔PID〕 ・角の形に着目する〔PF.PID〕
第 4 学年	・平行四辺形，ひし形，台形〔PS.PF〕 ・立方体，直方体〔PS.PF〕	・対角線，平面〔PS〕	・観察や構成などの活動〔PS.PM〕 ・直線などの平行や垂直の関係〔PS.PF.PM〕 ・見取り図や展開図をかく〔PF.PM〕 ・ものの位置を表す〔PS.PF〕

第５学年	・多角形や正多角形〔PS.PF〕 ・角柱や円柱〔PS.PF〕	・底面，側面〔PS〕	・観察や構成などの活動〔PS.PM〕 ・図形の合同〔PS.PF.PM〕 ・図形の性質を見いだす〔PS.PF〕 ・直径と円周の関係(円周率)〔PS.PF.PID〕 ・見取図や展開図をかく〔PF.PM〕
第６学年			・観察や構成などの活動〔PS.PM〕 ・縮図や拡大図〔PF.PM〕 ・対称な図形(線対称，点対称)〔PF.PM〕

【　D　数量関係　】

	関数の考え	式の表現と読み	資料の整理と読み
第１学年	・ものともの との対応〔PS.PF〕 ・数の大小や順序〔PS.PID〕 ・一つの数をほかの数の和や差としてみること〔PS.PF〕	・加法及び減法の式の表現とその読み〔PF.PID〕	・ものの個数を絵や図などを用いて表したり読み取ったりすること〔PS.PF〕
第２学年	・数の大小や順序〔PS.PID〕 ・一つの数をほかの数の積としてみること〔PS.PF〕 ・乗法が１ずつ増えるときの積の増え方〔PF.PID〕	・加法と減法の相互関係〔PS.PID〕 ・乗法の式の表現とその読み〔PS.PF〕 ・(　)や□などを用いた式〔PF.PID〕	・身の回りにある数量を分類整理し，簡単な表やグラフを用いて表したり読み取ったりすること〔PS.PF〕
第３学年	・乗数又は被除数が０の場合を含めての，乗数が１ずつ増減したときの積の変化〔PF.PID〕	・除法の式の表現とその読み〔PS〕 ・数量の関数を式に表し式と図を関連付けること〔PF.PID〕 ・□などを用いた式〔PF.PID〕	・資料を分類整理し，表やグラフを用いて分かりやすく表したり読み取ったりすること〔PF.PID〕 ・棒グラフの読み方やかき方〔PS.PF.PID〕
第４学年	・二つの数量の関係と折れ線グラフ〔PF.PID〕	・四則の混合した式や(　)を用いた式〔PS.PID〕 ・公式についての考え方と公式の活用〔PS.PF〕 ・□，△などを用いた式〔PF.PID〕 ・四則に加に手成り立つ性質のまとめ〔PS.PF〕	・資料を二つの観点から分類整理して特徴を調べること〔PF.PID〕 ・折れ線グラフの読み方やかき方〔PF.PID.PM〕

第 5 学年	・簡単な場合についての比例の関係〔PF.PID〕	・数量の関係を表す式〔PF.PID〕	・百分率〔PS.PF〕 ・資料の分類整理と円グラフや帯グラフ〔PS.PF〕
第 6 学年	・比〔PS.PF〕 ・比例の関係を式，表，グラフを用いて調べること〔PS.PM.PID.PM〕 ・比例の関係を用いて，問題を解決すること〔PS.PM.PID.PM〕 ・反比例の関係〔PS.PM.PID.PM〕	・文字 a，x などを用いた式〔PS.PID〕	・資料の平均〔PS.PID〕 ・度数分布を表す表やグラフ〔PS.PID〕 ・起こり得る場合を調べること〔PS.PID〕

分類された表を見ても分かるように，一つの内容に対して，複数のパターンが適用されていることが分かる．少なくともこの 4 つのパターンについては相互独立ではないということである．対応のパターンはAという集合のパターンからBという集合のパターンへの一意対応であるとみた時に，相互独立の関係ではない．また，集合のパターンを規定する場合にどの点に着目する事で共通とみなすのかと言う場合には，増減のパターンや移動のパターンが集合のパターンとしてみなす視点ともなり得る．さらに，増減のパターンや移動のパターンを分析的に見ようとすれば，集合のパターンや対応のパターンが必要となる．よって，一つの対象を捉えるときに，ただ一つのパターンしか認められないのではなく，様々なパターンとしてみなされる．

4　パターンの探求の様相

4.1　パターンの科学としての数学におけるパターンの探求

本研究ではこれまで，パターンの科学としての数学観について検討するため，具体例を用いて分析を行ってきた．具体例の分析からパターンの科学としての数学におけるパターンの探求の様相を導出することができた．前田(2011)において，2 つの具体例を用いて，パターンの科学としての数学観では，どのようなパターンの探求活動が行われているかについて検証を行った．その具体例として用いたのは，L. A. Steen(2000)の「組み合わせを考える」と K. Devlin(1995)の「有限算術」である．

4.1.1　組み合わせを考える

注）　本項は本文の引用部分をゴシック体(**パターン**)で，筆者の補足部分を明朝体(パターン)で記している．また本書はL．A．Steen と5人の著者によって書かれたものであり，本事例はSteen の考えに沿って Thomas Banchoff によって記されたものである．

＜事例：辺の数を数える＞

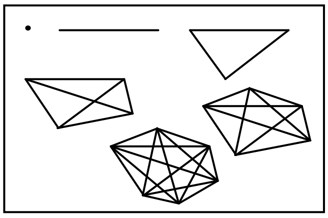


図1

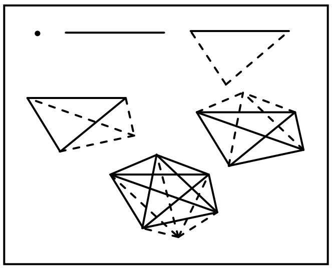


図２

図１の図形について，辺の数がどのように変化するであろうか．

平面図形の場合，実際に作図を行うことで，頂点や辺の数を数え上げるということが行われる．一方で，作図を行う手続きから，そこに潜むアルゴリズムを発　見することもできる．

ある１点から出発し，他の１点を選びそれと結んで１つの辺を描く．また新しい点を選びその前の２点をつないで２つの辺，あわせて３つの辺が得られる．これで三角形が描かれたのである．さらに，新しい点を１つ選び前の３点をつないで３つの辺が得られ，辺はあわせて６つになる．(図２)

この過程を繰り返して５点，６点で決まる図形を描くことができる．これを「完全グラフ」と呼ぶ．この手続きから，どのようなパターンが姿を表すかを表にすると一目瞭然である．

・表１

点の数	1	2	3	4	5	6	…
辺の数	0	1	3	6	10	15	…

・辺の数の変化を図形がかかれる方法によって捉えると、点の数や辺の数の対応関係を見ることができる。【パターンとして捉える】手続きの【視覚化】

・得られた情報を表にまとめることで、表を縦に見たり、横に見たりすることから２数間の関係を明らかにする。得られた情報の【視覚化】

＜ここから読み取れるパターン＞

1：**系列の組み立てに基づくと，n 番目の時の辺の数は n より小さい自然数の和に等しいことが分かる．たとえば，六点でつくられる辺の数は 1+2+3+4+5＝15 である．より形式化するなら，n 個の自然数の和の公式 $\frac{1}{2}n(n+1)$ で表される．**

2：**各段の辺の数は，その前の段の辺の数と頂点の数の和である．**

・表により視覚化されたものを【形式化】する。

＜事例：三角形を数える＞

「辺の数を数える」で得られた図形について，さらに三角形の個数について，先ほどの表を拡大して新しい情報を含むようにできる．

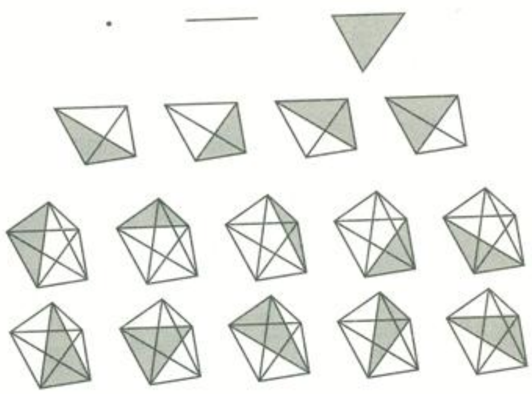


図3

・＜辺の数を数える＞でつくられた図形に含まれる三角形の個数として、新たなパターンをみなそうとしている。
【パターンの拡張】

この時の三角形とは，頂点を結んでできる三角形の事を指し，対角線によってできた交点については含まないとする．つまり，三角形の数を数えることは，頂点3つの組み合わせを数えることと同値であることを示している．図3で得られた情報を，表1を拡大して表すと，表2が得られる．

表2

点の数	1	2	3	4	5	6	…
辺の数	0	1	3	6	10	15	…
三角形の数	0	0	1	4	10	?	?

この表のパターンから推論して，欠けているところを埋めることにする．それは，辺と点を関係づけるやり方とよく似ていることが見えてくるだろう．

＜ここから読み取れるパターン＞

1：頂点の3つの組合せの数と同じだけの三角形があるので，三角形の数はいくつかのものから3つを同時にとった組み合わせの数に等しい．

2：漸化式の関係「ある段の三角形の数は，その直前の段の三角形の数と辺の数の和に等しい」
例えば，6点から作ることのできる三角形は20個である．一般にn個の点に対する三角形の数は$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$である．

・ここでも【視覚化】されたものから、パターンについての【形式化】が測られている。

3：代数を学べば，これらの数を二項係数に結び付けることができ，文字因数を取り去ると，パスカルの三角形を少しずらしたものが得られる．

$$(a+b)=a+b$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$
$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

⇨

1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

たとえば第 4 行は，4 個の点から作られる完全グラフについて，$n=0,1,2,3,4$ に対して順に，n 個の頂点をもつ対象，つまり両端は空集合と全体集合($n=0$と$n=4$)，そしてその間の数は点，直線，三角形の数をそれぞれ表す.

注意深い生徒は，もう一つの大切なパターン，つまり各行の和は 2 の累乗であることに気づくだろう．この観察を洗練された言い方で述べることができる．n 次元単体のいろいろな次元の部分単体の数の総計は，もとの全単体と空単体を含めると 2^{n+1} である．この同じ関係は，二項展開の表で $a=1,b=1$ とおいてもわかるし，また二項係数を $n+1$ 個の要素から $k+1$ 個を同時にとるときの組み合わせと関係づけても分かる．この時起こりうる組み合わせの総数は 2^{n+1} で，これは $n+1$ 個の要素から選ばれた部分集合の数の総計である.

・この場面でみなされるパターンを他の場面に応用し、結び付ける。
【パターンの応用】

4.1.2　有限算術

注）　本項は本文の引用部分をゴシック体(**パターン**)で，筆者の補足部分を明朝体(パターン)で記している．

たとえば，時計の針を考えてみよう．1 時，2 時，3 時，……ときて，12 時になると，そのあとはまた 1 時にもどる．分についても同じで，1 分，2 分，3 分，……ときて，60 分になると，そのあとはまた 1 分にもどる．

この日常的な事実を数学化しようとすれば，数え方を少し変えることが必要だ．0 から数え始めるのである．つまり時刻でいえば，0 時，1 時，2 時，……，11 時と数えてこのあとまた 0 時にもどることにあたり，分の場合は，0 分，1 分，2 分，……，59 分と数えてこの後また 0 分にもどることにあたる．

日常の中であ当たり前だと思っている事をパターンとして改めて捉え直す。

＜時計の短針(時)の算術＞ **例）** **2 時の 3 時間後は 5 時** 2+3＝5 **7 時の 6 時間後は 1 時** 7+6＝1
＜時計の長針(分)の算術＞ **例）** **45 分の 0 分後は 45 分** 45+0＝45 **48 分の 12 分後は 0 分** 48+12＝0

通常の算術の規則の大半は有限算術についても成り立っていることが分かる．これはひとつの領域から別の領域へと数学的なパターンが移動する古典的な例でもある(通常の算術から有限算術へと数学的なパターンとしての「算術的構造」が移動するというわけだ)．

演算に置き換えて考えてみることで、通常行われる算術と、時間の算術では、数の仕組みが同じではないことが見えてくる。
演算を踏まえ、時計の算術が振舞う【パターンを導出する】

有限算術における加法を通常の算術の加法と区別するため，ガウスは等号を三本線の“≡”に置き換え，長針の算術の例を

$$2+3\equiv 5,\ 7+6\equiv 1$$

とし，“＝”の「等しい」を示すものではなく，合同であることを示すためのものとして“≡”を用いた．

通常の演算とは異なる記号を用いてパターンの【形式化】を行う。

時計の算術を超えて，二つの数の積を取り上げる．時間と時間の積は意味がないが，数学的な観点からすれば，積にも完全な意味を与えることができる．その場合は，加法の場合と同じように，普通に積を作り，法 n で割った余りを考えればよいのである．例えば，法 7 については

$$2\times 3\equiv 6,\ 3\times 5\equiv 1$$

となる.

ガウスによる合同数の概念は数学でよく利用され，場合によっては，同じところでいくつかの異なる法が出現することもある. そうした場合には，どういう法に関する議論なのかを明らかにするひつようがあるため，合同式は次のように示される.

$$a \equiv b \pmod{n}$$

ここで n は問題になっている法を示し，また，これが成立しているとき「a と b は n を法として合同である」という. どのような法についても，足し算，引き算，かけ算は簡単である.

しかし，割算の場合には，不可能な場合が生じる事がある.　たとえば，12 を法として 7 を 5 で割ることはでき，その答えは 11 になる.

$$7/5 \equiv 11$$

これは両辺を 5 倍した

$$7 \equiv 5 \times 11$$

が成立することからわかる. 5×11＝55 を 12 を法として考えると，55＝4×12+7，つまり，55 を 12 で割った余りが 7 になることから，7≡55 となるためである. しかし，12 を法とする場合，5 を 6 で割ることは不可能である. それは，1 から 11 までの数を 6 倍したものの中に 12 で割って 5 余るものは存在しないからである.

しかし，法 n が素数の場合には，割り算は常に可能である. したがって，この場合の有限算術は有理数や実数とよく似た性質をもつ. 数学者の言葉でいえば，素数を法とする有限算術は体であるということになる. ここにはまた，もうひとつのパターンがみられる. 割り算が可能となるような有限算術が得られる素数に関するパターンである.

加法・減法・乗法では有効にはたらいたパターンであるが、除法では十分には機能せず、除法がいつでも成り立つパターンの範囲が新たに求められた。【新たなパターンの導出】

2 つの事例の探求活動はそれぞれ以下の様相が確認され，対象は異なるものでも，活動として同等のものが確認された.

(S:LA.Steen[組み合わせを考える]，D:K.Devlin[有限算術])

S1	対象をパターンとしてとらえる	D1	パターンを導出する
S2	パターンの視覚化		
S3	パターンの形式化	D2	パターンの形式化
S4	パターンの拡張	D3	新たなパターンの導出
S5	パターンの応用		

この探求の様相から，「パターンの科学」としての数学についてその特性を以下の 3 点にまとめた(前田.2011)

1：万物が対象となること

2：パターンとして捉えることだけでは，数学として成立しないこと

3：パターンから新しいパターンが生み出されること

「パターンの科学」としての数学として認められたこれらの活動の様相は，学校での学習場面においてどのような様相として表現されるものであるかを検討する．

4.2　「パターンの科学」としての数学観における探求の様相と問題解決学習

問題解決学習は一般的に【問題の提示】→【自力解決】→【練り上げ】→【評価問題/振り返り】という展開がされることが認められる．パターンの科学としての数学観から見ると問題解決学習で行われる活動はどのように位置づけられるだろうか．

4.2.1　万物が対象となること

パターンの科学としての数学の対象は自然界にあったり人間の精神によって作られるものであったり，他のパターンから作られたパターンである．しかしながら，例え同じものを見たとしてもすべての人が全て同じパターンとしてみなすことはできないかもしれない．それはパターンが鋳型のように，すでに法則として存在するものがあり，それを万物に対してあてはめることによって，パターンであると捉えるものではないからである．

算数・数学の学習において，万物が対象となるとはどういうことか．例えば，小学校第１学年の子どもたちははじめに，ものの個数を数える活動を行う．子どもたちが「みっつ」と呼んでいるパターンの対象は，リンゴであったり鉛筆であったり，ウサギやゾウであるかもしれない．3 つのリンゴや 3 本の鉛筆，3 匹のウサギ，3 頭のゾウなど様々な集まりに対して「みっつ」と数える行為は集まりに対するパターンを表現したものであり，子どもたちは「みっつ」という意味を表す数として「3」を知るのである．認識していた対象を表現する手段として，3 という数を獲得した子どもたちは，次に整数のパターンへと認識を広げていくであろう．そこでは「ひとつ」「ふたつ」「みっつ」「よっつ」…と数えていたものが，1,2,3,4…という形でかき表され，リンゴのときにも，鉛筆のときにも，その個数が１ずつ増え，それを表す数の並びもただ記号が並んでいるのではなく，その意味として１ずつ数が大きくなるという規則性のあるものとして，約束されて並んでいるものであることを知るのである．

小学校段階の子どもたちにとって，数を獲得することや演算方法を獲得することは数学を構成するという点から見れば大変重要なことである．自分たちが知覚するもの，精神によって認識するものがどのようなパターンを振る舞い，表現され得るのかということに子どもたち自身が学習者として着目する必要がある．このことは，問題解決学習の目的の一つである「創造的な活動」と密接に関わりあることである．

以上のことから，算数・数学の学習においても，学習者がある対象の共通性や規則性を知覚することが必要である．そして，その共通性や規則性というのはどのような場面で確認されるものであるのかについて，知覚する主体である学習者によって捉えられることが必要である．

4.2.2　パターンとして捉えるだけでは数学として成立しないこと

パターンは確かに万物を対象とするものであったが，パターンとしてみなすことができても，パターンそのものが数学となり得るわけではない．

ある種のパターンに気づいたり，ある種のパターンを使っているという段階では，まだパターンを形式化したり，科学的な分析にかけるということと同じではない．数学として扱うためには，世界の中の新しいパターンを発見し，それらのパターンを分析，記述し，公理体系が構築される必要がある．(デブリン,1995)

学習場面において，ある種のパターンに気付くとき，その多くの対象が具体的なものであろう．例えば，“いくつといくつ”という学習で，おはじき5個は何個と何個でできているかという学習を行う．箱の中に赤いおはじきと青いおはじきが入っており，そこから5つを無作為に取り出したとき，赤いおはじきがいくつと青いおはじきがいくつで5個のおはじきになっているかを考える．赤いおはじきが3つと青いおはじきが2つの時も，赤いおはじきが1つと青いおはじきが4つの時もおはじきは全部で5となると言うパターンがそこに存在することが認められる．いくつといくつで5になるのかというときに，それらの組み合わせは幾つ存在し，どうしてそれ以外の組み合わせは認められないのかと言うことを，小学校第1学年の子どもたちであっても，探求させたいのである．学習者に「どうしてそうなるのか」ということを探求し「そうなる理由や根拠」についての責任の担い手となれるよう子どもたちの能力を養っていくために，この探求活動が必要であると考える．

4.2.3　パターンから新しいパターンが生み出されること

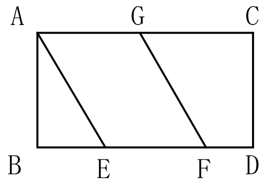
パターンは個々に存在しているものではなく，構造化可能であったり，相互作用してはたらいたりするものであること，また拡張・一般化が可能であることを含んでいる．

算数・数学教育では，各領域を統合的に見ること，また既習の事柄を用いて学習を行うこと，その場面で明らかになった事柄を他の場面にもあてはめて考えることができるような子どもを育てることは共通の認識であると考えている．これらの事柄を達成するこれは個々の学習において認められたパターンが独立して存在するのではなく，関連しあって存在することであると換言できる．このとき大変重要なはたらきをするのが 2：パターンとして捉えるだけでは，数学として成立しないことで述べた，パターンの探求活動である．パターンを探求する際には，パターンが構成される仕方や方法について探求する．そのため，場面は異なっていても探求の方法が同じであるときや，同じ構造をもったものであるとみなせる場合に，あるパターンは独立して存在するものではないとみなすことができる．

例えば，パターンとしてイメージしやすいものとしては，図形の求積公式があるだろう．三角形の求積公式は(面積)＝(底辺)×(高さ)÷2 であるし，平行四辺形の場合には(面積)＝(底辺)×(高さ)，台形の場合は(面積)＝(上底+過程)×高さ÷2 となる．これらの公式の関係性はどうなっているのであろうか．次のような問題場面のとき，それぞれ公式をパターンとみなすと，パターンが相互に関係しているものとして捉えられる．

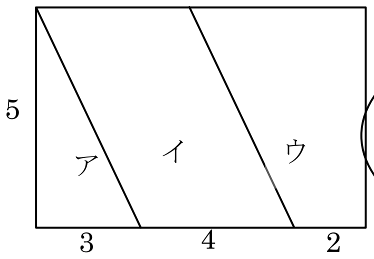
長方形を図のように三角形と平行四辺形，台形に分けます.
三角形，平行四辺形，台形の面積の比は
どのようになるでしょうか.

このとき，BE : EF : FD＝3 : 4 : 2 とします.



解決 C-1

高さを具体的な数値で仮定して面積を求めて面積比を求める.



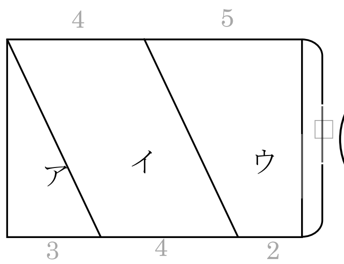
高さを 5 として，
ア＝3×5÷2＝7.5
イ＝4×5＝20
ウ＝(2+5)×5÷2＝17.5
として，ア : イ : ウ＝7.5 : 20 : 17.5

計算していくと，
(7.5÷5) : (20÷5) : (17.5÷5)
＝1.5 : 4 : 3.5　(10 倍して)
＝15 : 40 : 35　(5 でわると)
＝3 : 8 : 7

C-1 と C-2 は
(三角形)＝(一辺)×(高さ)÷2
(平行四辺形)＝(底辺)×(高さ)
(台形)＝(上底＋下底)×(高さ)÷2
というように、図形と求積公式とを一意に対応するものとして捉えている

解決 C-2

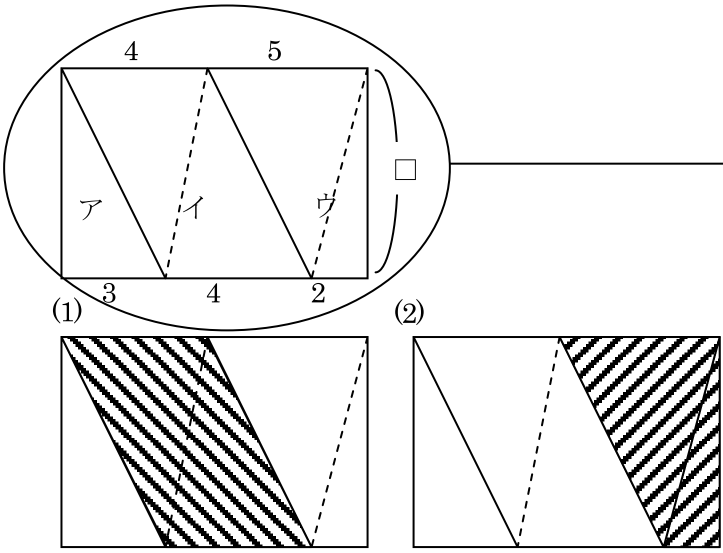
高さを□で表し，式の操作によって面積比を求める.



高さを□とおいて，
ア : イ : ウ
＝ (3×□÷2) : (4×□) : {(2+5)×□÷2}
＝ (3×□÷2) : (4×□÷2×2) : {(2+5)×□÷2}
＝(3×~~□÷2~~) : (4×~~□÷2~~×2) : {(2+5)×~~□÷2~~}
＝3 : (4×2) : (2+5)
＝3 : 8 : 7

解決 B

アとイとウをすべて三角形に分割することにより，三角形の求積公式のみを用いて面積比を求める



Bは、図形を構成する要素として三角形に着目している。平行四辺形も台形も三角形２つによって構成されるものであるとみなすことによって、式の表現もC-1やC-2とは異なった表現となっている。

Bでは、平行四辺形の求積公式を三角形の求積公式によって構成できること、また台形においても同様であることが捉えられている

ア：イ：ウ＝3×□÷2：4×□÷2×2(1)：5×□÷2＋2×□÷2(2)

＝3：4×2：(5+2)

＝3：8：7

解決A

アとイとウを全て台形とみなすことにより，台形の求積公式のみを用いて面積比を求める．

ウ…上底が５，下底が２の台形

イ…上底と下底が共に４の台形

ア…上底が０，下底が３の台形

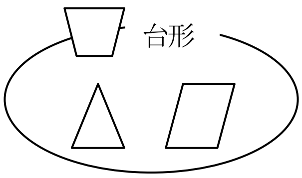
ア：イ：ウ＝(0+3)×□÷2：(4+4)×□÷2：(5+2)×□÷2

□÷2 が全て相殺されるので，

ア：イ：ウ＝0+3：4+4：5+2

＝3：8：7

Aでは、図形について、



のように、図形の包摂関係と求積公式を結びつけて捉えている。

この事例は面積比についての場面であるが，活動 C-1，C-2 では図形それぞれの求積公式が用いられている．これは三角形は三角形の求積公式で求めるもの，平行四辺形は平行四辺形の求積公式でと言ったように，一つの対象に対して一つのパターンがあてはめられている．しかし，活動Bにおいては，平行四辺形や台形を２つの三角形によって構成される図形であるとみなすことによって，平行四辺形や台形の求積公式を三角形の求積公式で置き換えて考えることが可能であることに着目している．また活動Cでは，図形の特性に着目し，三角形や平行四辺形を特殊な場合の台形とみなすことが行われている．以上のことから，三角形や平行四辺形，台形の求積公式は個々に存在するものではなく，図形の構成や包摂関係を考えた場合に相互に関係しあっている事が分かる．

4.3　パターンの探求

パターンの科学としての数学観でも指摘したように，パターンの科学としての数学観におけるパターン探求が不可欠である．パターンの探求の様相として認められたのは対象を視覚化したり，形式化したり，拡張するといったものである．4.1 での検討から導出された探求の様相は対象や問題場面に依存するものであった．

パターンの科学としての数学観においてパターンを探求することは不可欠の活動であり，その必要性は対象と対象から発見されるパターンを結び付けるものである．すなわち，パターンの探求とは，対象から導出されるパターンがなぜパターンとしてみなされるのか，理論負荷的な役割を担うものである．

一般的に用いられるパターンは，数のパターンや計算のパターン，形のパターンなど，それぞれ対象に依存するパターンを意味するものである．しかし，本研究では，対象に依存せず，対象の捉え方としてパターンを捉えるものとする．実際の学習場面では，算数・数学教育においては，結論の根拠や理由に相当するものとしてパターンの探求を捉えることができる．

5.　パターンとパターンの探求の様相の連関

5.1　事例から見るパターンとパターンの様相の連関

ひき算の性質として，被減数と減数から同数を引いても答えは変わらない［a-b=(a-c)-(b-c)=d ］という性質を考える．この性質は学習指導要領では扱う事にはなっていないが，ひき算のたしかめなどにも用いられる考え方である．

問題の提示　○ここに赤いおはじきが 9 個，青いおはじきが 5 個あります．おはじきは全部で 14 個です．おはじきを全部この箱の中に入れます．
○ここから 8 個取り出すと，赤いおはじきと青いおはじきは
それぞれ何個になるだろう．
・例）赤…5 こ　　　青…3 こ
○取り出した赤いおはじきは袋の中にある青いおはじきより
何個多いでしょう．
・箱の中の青いおはじきは 2 こだから，5−2＝3　で 3 個多い

取り出した赤いおはじきの数は，箱の中にある青いおはじきより何個多くなるでしょう．いくつ多くなるか理由を考えてみよう．

現象について実験的に取り出す活動を行う事で、【増減のパターン】が見えてくる。ここでは、答えとなる数がどの場面でも変化しないと言うパターンが捉えられる。

自力解決 C
取り出したおはじきと袋の中のおはじきを図などにかいて，差の数に着目する．
取り出したおはじき
○○○○○●●●　　（赤…5，青…3）
箱の中のおはじき
○○○○●●　　（赤…4，青…2）
（式）　5−2＝3
取り出したおはじき
○○○○●●●●　　（赤…4，青…4）
箱の中のおはじき
○○○○○●　　（赤…5，青…1）
（式）　4−1＝3
・いつも 3 つ多くなりそうだ
支１ 他にどんな取り出し方があるのか手際よく整理できないかな．
支２ いつも 3 こ多くなるのか，一目でわかる方法はないかな．

実験で得られた結果を基に、加不足なく組み合わせとなる数について、表に表す。
取り出したおはじきと袋の中のおはじき、そして差を【対応のパターン】として捉え直す。

自力解決 B
表に数をかいてきまりを見つける．

取り出したおはじき	赤	8	7	6	5	4	3	2
	青	0	1	2	3	4	5	×
箱の中のおはじき	赤	1	2	3	4	5	6	
	青	5	4	3	2	1	0	
差		3	3	3	3	3	3	

・たしかにいつでも 3 つ多くなりそうだ．

支１どうしてそうなるか，きまりを説明できないかな.
支２どうして差が２や４にはならないのだろう．理由があるのかな

自力解決A

差が3となる理由を図と式で説明する.

取り出したおはじき　○○○○○○○○
箱の中のおはじき　●●●●●

取り出したおはじき　●○○○○○○○
箱の中のおはじき　○●●●●

取り出したおはじき　●●○○○○○○
箱の中のおはじき　○○●●●

取り出した赤いおはじきが 1 個減ると，箱の青いおはじきも1個減る．それでも差は変わらない.

取り出した赤いおはじきが 2 個減ると，箱の青いおはじきも2個減る．それでも差は変わらない.

支２答えはいつも同じだけど，どこが変わっているのかを式に表して表現できるかな.

式にまとめると，

8-5＝(8-1)-(5-1)

＝(8-2)-(8-2)

…

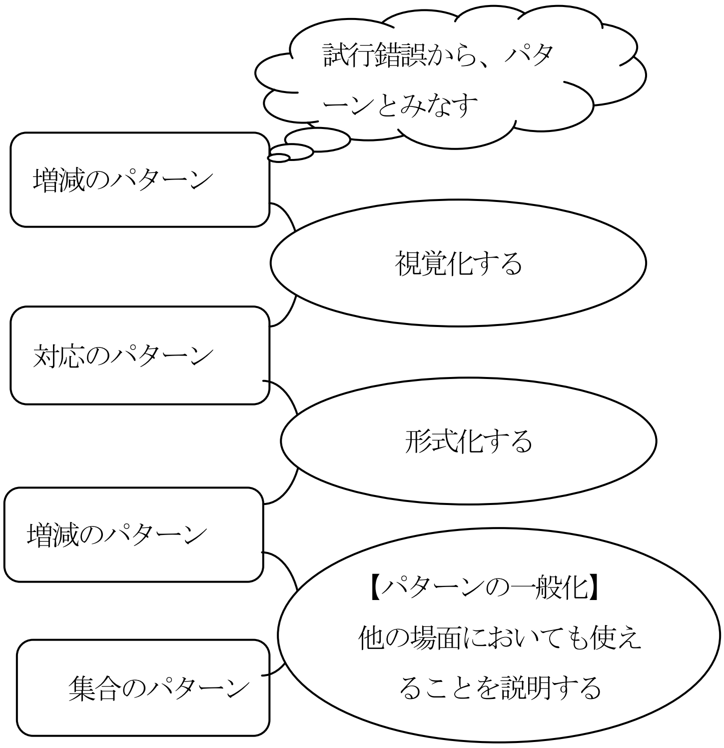
○図によって、この場面のパターンを形式化する。点線で区切られる○の数や□で囲まれた○の数は場面によって変化しても、構造は変わらないことが分かる。

自力解決CないしBにおいて、初めてこの問題のもつパターンのようなものが捉えられる。答えが「どんなときにも３になりそうだ」という増減のパターンについて、それが本当に確からしい事を説明する活動が自力解決Aに設定されている。変化しないという増減のパターンはどのような場面で確認されるのかについて、具体的な場面を式や○図で記述することで探求を行っていると言える。ここで記述された振る舞いが、自力解決Bでは取り出した赤と青のおはじきと箱の中にある赤と青のおはじきを対応のパターンとして加不足なく整理することで、数の変化の仕方(横軸での確認)について分析を深めている。さらに、自力解決Aではこの場面のパターンの構造を図式に表し、式と対応させることでひき算の性質を導き出すことができたのである。このひき算の性質は構造が明らかにされ、○図による説明により、他の場面においても用いることのできる性質であることが確認されている。

このように、パターンはただ知覚されるだけでは不十分であり、探求する活動はパターンが知覚されることにより誘発されるものであるため、パターンとその探求活動は連関して存在するものであると言える。

5.2　事例[ひき算の性質]におけるパターンとパターンの探求の様相の連関

ひき算の性質の具体例では、まず問題の場面とパターンとしてみなすことから始まり、そのパターンは増減のパターンとして捉えられた。さらに増減のパターンを探求するために視覚化が行われ、結果として、対応のパターンとして増減のパターンが捉え直された。これはパターンの構造を保持したまま、パターンを探求する際に用いた視覚化により、パターンの転換が行われたとみなすことができる。さらに、対応のパターンにより、答えとなる 3 以外には差が認められないことを、図によって形式化することで、ひき算の性質の中に現れる増減のパターンが捉えられたのである。



また、その増減のパターンはこの問題場面には依存せず、一般化が可能であることから、新たなひき算の意味として、集合のパターンとしても捉えられる。

このように、パターンとパターンの探求の様相は相互に連関しあい、探求されることにより他のパターンとして構造を捉えることができたり、パターンの転換が行われることが明らかとなった。

6.　おわりに

6.1　パターンとパターンの探求の様相の連関で学習場面を捉える教授的示唆

「パターンの科学」としての数学は，数学の一つの捉え方であると同時に，日々拡大する世界を数学として捉える新たな見方としても注目されている．不思議なことに人間は対象の美しさであったり，均衡のとれる様などから，パターンを認識できる．さらに我々はそのパターンを探求する手法をこれまでの経験から備えていたり，新たに生み出すことができるのである．

子どもたちにとっては,「算数」という教科として眼前に現れる．「算数」という教科において対象とされる事柄に対して，初めは探求する方法を持ち得ていないであろうし，認識できるパターンも限られているかもしれない．しかしながら，パターンとして対象を捉え，自らが数学を構成する責任の担い手になるという経験を学習の中で経ることで, 捉えられるパターンが拡大するであろう．また，数学を構成する段階で様々な探求活動を経ることは，パターンを自在に操作し，パターンを使いこなすことができるようになると考える．5 章の具体例からも分かるように、子どもたちが捉えたパターンははじめ“答えがいつも 3 になりそうだ”というもので、子どもたちはそれが確からしいとは思えても、確実にそうであるとは言えなかった。個々人で教授観や学習観があるため、確からしい事が確認されればよしとする教師もいるかもしれないが、筆者は学習者が自らの思考に対

し、責任を担えるようにすべきだと考える。そのためには、学習場面をパターンとパターンの探求の様相の連関で捉え、パターンが探求されることにより、数学を構成し得るような教授・学習場面が提起されるべきであると言えよう。

このようにパターンの科学としての数学観に基づけば，算数・数学教授学で問題解決学習が重要であると認められてきたことが再度捉え直すことができるであろう．数学に関する知識や概念とそれを探求する活動が相互に関係していることを誰よりも実感できるのは教師であろうし，パターンの科学としての数学観に基づけば，概念や知識が数学であると狭義の中で捉えてしまうこともなくなるであろう．パターンの科学としての数学観は，年齢や経験に関係なく数学に対する本質的なアプローチを行う事ができる数学観であると言える．

引用・参考文献

Keith Devlin[山下純一訳](1995). 数学：パターンの科学. 日経サイエンス社

Lynn Arthur Steen［三輪辰郎訳］(2000). 世界は数理でできている. 丸善株式会社

Wittamann.E.Ch.(2005).*Mathematics as the Science of patterns: A guideline for Developing Mathematics Education from Early Childhood to Adulthood*. The paper presented at the International Colloquium Mathematical Learning from Early childhood to Adulthood".July7-9.2005

イアン・スチュアート［水谷淳訳］(2010). 数学の魔法の宝箱. ソフトバンククリエイティブ株式会社

細水保宏編著；ガウスの会執筆(2007). ガウス先生の不思議な算数授業録. 東洋館出版社

溝口達也(2007). 算数・数学学習指導論. 鳥取大学数学教育学研究室

前田静香(2011). パターンの科学に基づく算数・数学教授学を志向した基礎的研究. 鳥取大学数学教育学研究. 13(4), p.1-16

文部科学省(2008). 小学校学習指導要領解説　算数編. 東洋館出版社

文部省(1973). 関数の考えの指導. 東京書籍株式会社

鳥取大学数学教育研究　　**ISSN 1881–6134**

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。
- 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
- 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
- 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
- その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/