ISSN 1881–6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

パターンの科学としての数学観に基づく算数・数学教授学に関する研究

– 児童・生徒の数学的な見方と問題解決学習に焦点をあてて –

前田静香　*Shizuka Maeda*

vol.14, no.5

Mar. 2012

鳥取大学 数学教育学研究室

目次

第 1 章　序章

本章では，研究の目的・対象・方法を述べる．
1.1 では本研究の目的と，目的設定に至った背景を述べる．1.2 では目的を実現するための方法を述べ，1.3 では論文の構成を述べる．

1.1　研究の目的

算数・数学教育に求められることとは何であるのか，算数・数学教育にできることは何であるのか，そのことに真摯に向き合うべきであると考える．

平成２０年度版の小学校学習指導要領，中学校学習指導要領の教科の目標はそれぞれ「算数的活動をとおして」，「数学的活動をとおして」という言葉から始まる．算数的活動，数学的活動とは児童・生徒が目的意識をもって主体的に取り組む算数にかかわりのあるさまざまな活動を意味していると言われ，そのような教授・学習の場面を設けることが望まれている．しかし，残念なことに我々がその目標を解釈しようと試みるとき，我々がどのような数学観，教育観，指導観を持つべきであるのかについては明言されてこなかったのである．教育に携わる教師一人一人が学習者に対して負う教育的責任を思うと，いささか乱暴な感じがするのは筆者だけであろうか.

本研究では算数的活動，数学的活動について，それらの活動が行われる根幹にあるものとして「数学的な見方・考え方」，そしてそれらの活動が実践される場として「問題解決学習」の授業を考えている．ではどのような数学的な見方考え方を育成していくのか，問題解決学習を実践していくのか，学習指導要領解説に書かれている算数的活動，数学的活動に対する表面的な事柄のみでは明らかに不十分であると考えるのである．学習指導要領解説には，子どもが主体，楽しい，わかりやすい，というような言葉が並び，実践研究もそれのなぞらえたものが多く発表されている．しかし一方で，当該する授業を改善しているそれらの研究は，学習者が真の意味で主体的に活動できる場はより広く考えられるべきであるにもかかわらず，授業の中に限られていたり，既習事項との関連を言いながら，最終的には本時の学習内容を子どもたちに押し付けるような場面も見られる.

筆者は算数・数学の教育的価値を考えるとき，まずはさまざまな数学的知識を獲得することが挙げられる．次にそれらの知識を獲得する過程における活動によって, 試行錯誤を行ったり, 複数の事柄を比較, 推論したり, よりよい方法を見つけようと処理することで，学習者自ら思考できるように育成すること．さらにそれらの思考は場面場面によって独立するものではなく，小・中学校で拡張されていき，ひいては学校教育を離れても創造的に思考が行われることが望まれる．こういった教育的価値を担保するためには，これまで明言することが避けられてきた数学的な見方や考え方はもちろん，教師が授業を設計する際に用いる数学観についても明らかにする必要があると考える．

本研究では算数・数学教授学とあるように，小学校段階だけではなく，中学校やそれ以上の数学教育も視野に入れているが，これから概念や知識を構成していく基礎的な部分を多くつかさどる小学校段階に特に焦点化し研究を行うこととする．そこで重要になるのは，子どもたちの認識の過程である．学習者である子どもたちが数学をすることは容易ではなく，何をどのように認識することで数学を構成していくのかと考えた場合に，これまで様々な研究がなされてきたが，本研究では「パターンの科学」として数学を捉えるということに着目する．パターンの科学としての数学観に基づけば，我々が数学するという場合に自然界にあるパターン，たとえば花の花びらの並び方や動物の行動, 精神によって作られるパターン, 点や線, 数などを，どのように捉え，科学できるかということが問題となる．すなわち，認識する個人によって数学が構成されうるという考え方である．これは特に数学的な思考をし始める段階の学習者にとって，自ら対象と向き合うことを意味し，その手段として数学を用いると言える．そのため，学習者にとって数学とは教えられるものではなく，必要に応じて生み出していくものとして捉えられるのである．その過程において，従来算数・数学

教育で育成していくべきとされてきた，数学的な処理などが豊富に含まれていくことは明らかである．そこで，我が国の算数・数学教育において，パターンの科学としての数学観に基づく算数・数学教授学を構築することを，本研究の目的とする．目的を達成することで，算数・数学の教授・学習全般の改善につながることが期待される．

本研究で取り上げるパターンの科学としての数学は近年注目されてきているものではあるが, その本質が何であるのかを明らかにする必要がある．さらに，パターンの科学としての数学観を算数・数学教授学の根幹として用いるためには，これらが数学的認識の本性として認められるのかを検証する必要がある．したがって次の研究課題が要請される．

<u>**研究課題 A：数学的認識の本性として，パターンの科学としての数学観が認められるか**</u>

また，明らかにされたパターンの科学としての数学観を基にすると，我が国の算数・数学教育の抱える課題，そして数学的な見方・考え方，問題解決学習がどのように捉えなおされるのか, 示される必要がある. つまり, パターンの科学としての数学観と算数・数学教育の相関関係が明らかにされる必要がある．したがって次の研究課題が要請される．

<u>**研究課題 B：パターンの科学としての数学観に基づけば，我が国の算数・数学教育はどのように捉えなおされるか**</u>

さらに，学問としてのパターンの科学としての数学において扱われるパターンは, その範囲を示すことはできない. なぜならば, パターンは人々が捉えようとする限り無限に存在しているといえるからである. (第３章で

詳述する）そのため，算数・数学教育において扱われるパターンについて新たに定義する必要がある．さらにパターンの科学としての数学では，発見されたり，作り出されたパターンが注目されるが,「科学」というように発見される過程，作り出される過程に着目すると，パターンがどのように探究されるのかを明らかにする必要がある．したがって，次の研究課題が要請される．

<u>研究課題 C：算数・数学教育におけるパターンはどのように定義され，パターンの探究ではどのような様相が認められるか</u>

最後に, 算数･数学教育で用いられるパターンとパターンの探究が教授・学習の場面で果たす役割が明らかにされる必要がある．本研究で明らかにされたことをもとに，実践においてパターンの科学としての数学観に基づいて授業が設計され，子どもたちの数学的な見方・考え方がはぐくまれるよう，再現可能なものとしてここまでの理論が整理される必要がある．したがって，次の研究課題が要請される．

<u>研究課題 D：パターンの科学としての数学観に基づく算数・数学教授学の構築に向けて，パターンとパターンの探究の様相はどのような連関モデルとして示されるか</u>

以上の４点の研究課題を解決することで，本研究の目的は達成される．

1.2 研究の方法

本研究はパターンの科学としての数学観に基づく算数・数学教授学を構築することが目的である．そして，この目的を達成するため４つの研究課題を設定した．以下に，研究課題ごとの研究方法を記述する．

パターンの科学としての数学とは何かについて, キース・デブリン(1995)やリン・アーサー・スティーン(2000)の事例をもとに抽出する．さらにフィリップ・キッチャー(1984)の「The Nature of Mathematical Knowledge」をもとに, パターンの科学としての数学を認識論的立場から検証する. 尚, キッチャーの認識論を採用するのは，パターンの科学としての数学観と合致するものであるためである.

研究課題Ａ：数学的認識の本性として，パターンの科学としての数学観が認められるか

＜研究課題Ａに対する方法＞

パターンの科学としての数学について書かれた文献として，キース・デブリン(1995)がある. またアメリカの数学教育においてパターンに着目し，多岐にわたる分野からパターンを用いることに言及した文献として，リン・アーサー・スティーン(2000)がある．これらの文献から一般にパターンの科学としての数学とはいかなるものをさすものであるかを抽出する．さらに，フィリップ・キッチャー(1984)の「The Nature of Mathematical Knowledge」によって抽出されたパターンの科学としての数学観の特性について認識論的立場から検証する．

研究課題Aで明らかになったパターンの科学としての数学観を基にすると，我が国の算数・数学教育の抱える課題，そして数学的な見方・考え方，問題解決学習がどのように捉えなおされるのか，示されなければならない．

<u>研究課題B：パターンの科学としての数学観に基づけば，我が国の算数・数学教育はどのように捉えなおされるか</u>

＜研究課題Bに対する方法＞

数学的な見方・考え方，問題解決学習についての先行研究をもとに，その本質を明らかにし，我が国の算数・数学教育が直面している課題について整理する．またパターンの科学としての数学観から算数・数学教育を俯瞰したとき，抽出された課題，また数学的な見方・考え方，問題解決学習がどのように捉えなおされるものであるかを記述する．

算数・数学教育にパターンの科学としての数学観を採用するにあたり，算数・数学教育で用いられるパターンは学問として数学が対象とするものとまったく同値なものを用いることが妥当ではないため，教育的観点から新たに定義されなければならない．また，パターンの発見，発明の過程における行為についても明らかにされなければならない．

<u>研究課題C：算数・数学教育におけるパターンはどのように定義され，パターンの探究ではどのような様相が認められるか</u>

＜研究課題Cに対する方法＞

学習者，教授する教師双方の立場に立ち，パターンの科学としての数学観から，算数・数学教育に必要とされるパターンとは何であるかを明らかにする．さらにそれらのパターンはどのような思考や操作の過程において，

もしくは結果得られたものであるかを分析し，パターンの探究が行われることについて検証する.

最後に, 算数・数学教育で用いられるパターンとパターンの探究が教授・学習の場面で果たす役割が明らかにされなければならない.

研究課題 D：パターンの科学としての数学観に基づく算数・数学教授学の構築に向けて，パターンとパターンの探究の様相はどのような連関モデルとして示されるか

＜研究課題 D に対する方法＞

研究課題 C の解決の過程で分析されたパターンとパターンの探究の様相の関係性をもとに，教授・学習の場面での活用を志向したモデル化を行う. またそのモデルがこれまでの研究で示されてきた問題解決学習とどのように相関しているのかについて分析を行う.

このように研究課題を解決し，本研究の目的を達成する.

1.3 本論文の構成

本論文は序章，終章を含めて８つの章から構成されている．

まず第２章において数学的な見方・考え方，問題解決学習について概観し，我が国の算数・数学教育の抱える課題について分析する．

第３章では，パターンの科学としての数学観について，具体的な事象および認識論から考察し，算数・数学教育を支える数学観として採用することが可能であるかを検討する．次に４章ではパターンの科学としての数学観が用いられた数学教育の先行研究として，C．Eｈ．ビットマンの本質的学習環境について検討を行う．そこでのパターンの用いられ方や教授について分析し，我が国の算数・数学教育との比較を行う．

第５章では，パターンの科学としての数学観から我が国の算数・数学教育を捉えなおし，算数・数学教育において要求されるパターンとは何であるかを明らかにする．さらに６章では，パターンの科学としての数学観に基づく算数・数学教授学の構築に向けて，パターンとパターンの探究の様相の連関モデルを構築し，それを検証する．

第７章では，構築されたモデルをもとに授業を設計し，第８章で本研究の結論と，今後に残された課題を明らかにする．

第 2 章　問題の所在

本章では，我が国の算数・数学教育における数学的な見方・考え方，問題解決学習についての考察を行い，算数・数学教育における課題の抽出を行う．2.1 で数学的な見方・考え方の教育的価値や必要性，また成立の歴史的背景を考察し，2.2 では本研究で取り扱う問題解決学習について考察を行う．

そして，2.3 では以上の考察から，現在の算数・数学教育を反省的に分析し，我が国の抱える課題を抽出する．

2.1 数学的な見方･考え方に関する考察

算数・数学教育において，数学的な見方・考え方を育成することは大変重要であると同時に，その本質や実践にどのように反映すべきかなどの議論が広く行われてきた．しかしながら，数学的な見方・考え方とは言わば人間の思考とも言え，具体的に目にすることはできないものである．ではなぜ，数学的な見方・考え方が算数・数学教育で重要とされてきたのであろうか.

我が国の算数・数学教育では昭和３３年の学習指導要領で初めて小学校・中学校の目標に「数学的な考え方」という言葉が取り入れられた．中島(1983)は「特定の数学的な知識や技能を，少しでも多く能率よく習得させるというねらいに立って数学教育を考えるよりは，むしろ，算数なり数学なりにふさわしい創造的な活動を体験させ，それを通して創造的に考察し処理する能力や態度を伸ばすようにすること…(中略)…こうした精神的能力と態度の陶冶の面でのねらいを表したことば」(p．30)が「数学的な考え方」の育成という表現であるとしている．つまり，算数・数学教育において望まれるべきことは，いかに子どもたちに学問としての数学の知識を詰め込むかということではなく，さまざまな数学的な知識や技能を獲得する中で経験する活動から，創造的に思考することのできる子どもたちを育成することにあるといえる. 国語や社会, 理科といった他の教科ではなく，算数・数学だからこそできる見方や考え方を育てていくことが求められているといえる．では，そのような見方・考え方はどのような場面で見ることができるのうか.

伊藤(1993)では数学的な考え方は問題解決の過程を通して育て得るとし，“数学的な考え方の一つの面は，個々の数学的な内容に関するものです．例えば分数と言う数を生み出してきたアイディア，ある図形を長方形と言う形として捉えようとするアイディアなどがあります．これらは内容面から

みた数学的な考え方です．これに対して，数学的な考え方のもう 1 つの面は，そうした数学的アイディアを生み出したり，まとめあげていく，あるいは，いろいろな内容を組織だてていくときに使われる数学的な方法に関するもの”としている．(伊藤, 1993, p. 117)　このように伊藤氏は数学的な考え方として，2 つの側面をしめしている．数学的な考え方として，数学的内容そのものに関するアイディアとそれらを生み出す方法に関するアイディアが挙げられており，中島氏の主張とも合致している．

我が国の算数・数学教育において，数学的な見方・考え方の必要性が唱えられた背景には，当時の時代背景が関係している．昭和 33 年の改訂は，日本がアメリカの占領から解放され，我が国の方針をもとに初めて学習指導要領の改訂を行ったものである．基礎学力の充実や科学技術教育に力が入れられ，算数科でも指導時間が大幅に増加している．指導時間の増加に伴い，学習内容も増加したのであるが，「形式的な内容の増加だけを持って，算数の学力の充実と考えられることを，できるだけ避けたいという気持ち」(中島．1983.p.33)があったとしている．中島氏は，数学的な考え方を用いて，「統合的，発展的な考察」が行われるような算数・数学教育を目指している．これはのちの数量関係領域とも深く関係するのだが，統合といった観点による発展的な考察が行われるということを意味している．つまり，数学的な見方・考え方とは統合的な見方ができるものという特性を持っているのである．

中島氏はさらに「「数学的な考え方」の育成とは，端的にいって，「算数・数学にふさわしい創造的な活動ができるようにすること」」(中島, 1983, p. 69)としている．ここで，算数・数学教育においてこの「創造的」という言葉を考察してみる．言葉の本来の意味からすれば，創造するとは今まで誰も知り得なかったものを作りだすということであるが，「創造的」な活動を言葉の意味と同列に扱うことは適切ではない．なぜならば，創造的な活動

を行うのは学習者である子どもたちであり，その活動は教師によって設定されるものであるためである．そのため真の意味での創造ではなく，あたかも学習者自身が算数・数学にかかる概念や知識を生み出したかのような活動が設定される必要があるということである．しかし，何もないところに花が咲かないように，そういった概念や知識が獲得されるためには，学習者は活動を行う上で対象をどのように扱うのか，みなすのか，処理すべきなのかなどが了解されていなければならない．また，今備わっている見方・考え方をこえて問題を解決する時，その見方・考え方はこれまで備えていたものを包含，拡張しながらより豊かになっていくものであると言える．よって，数学的な見方・考え方とは，問題や対象に依存するものではなく，どのような場面でも用いれて，また深化，展開可能なものである．

2.2 問題解決学習に関する考察

本研究では，算数・数学教育の「授業」として対象にしているものは，問題解決学習である．問題解決学習の特徴として，溝口(2007)は次の 3 点を挙げている．

第 1：問題解決と言うときの「問題」とは子どもにとっての問題である

第 2：問題解決の過程を通して，知識や技能を獲得させる

第 3：問題解決は，「数学的な考え方」が生きて働く場である

ここで注目すべき点は，数学的な見方・考え方の育成は，算数・数学教育において目標とされるものである．しかし，問題解決学習を通して育まれる力は，数学的な見方・考え方へとつながるものである．つまり，数学的な見方・考え方と問題解決学習は相互関係にあると言える．

第 2 の特徴として挙げられているように問題解決の過程について検討する必要がある．G.Polya(1945)は問題を解決する過程について次のように分析している．

第 1 に問題を理解しなければならない

・未知のものは何か．与えられているもの(データ)は何か．

・条件は何か．　　など

第 2 にデータと未知との関連を見つけなければならない．関連がすぐにわからなければ補助問題を考えなければならない．そうして解決の計画を立てなければならない．

・前にそれを見たことがないか．または同じ問題を少し違った形で見たことがあるか．

・問題を言いかえることができるか．それを違った言い方をすることができないか．　　など

第３に計画を実行せよ

・解答の計画をじっこうするときに，各段階を検討せよ．その段階が正しいことをはっきりと認められるか．

第４にえられた答えを検討せよ

・結果をためすことができるか．議論をためすことができるか．

・結果をちがった仕方でみちびくことができるか．それを一目のうちに捉えることができるか．

・他の問題にその結果や方法を応用することができるか

一般に問題解決と呼ばれるものはこの 4 つの相(phase)が含まれた過程をさす．算数・数学教育における問題解決モデルに関する研究の多くが Polya の考えを基にしており，Lester(1978)の問題解決過程の記述的モデルなどが有名である．学習において解決の過程が重要であることは，2.1 で考察した数学的な見方・考え方でも指摘されているものである．

本研究では我が国の算数・数学の問題解決学習としての授業として，溝口(2007)の授業のモデル(図１)を採用する．

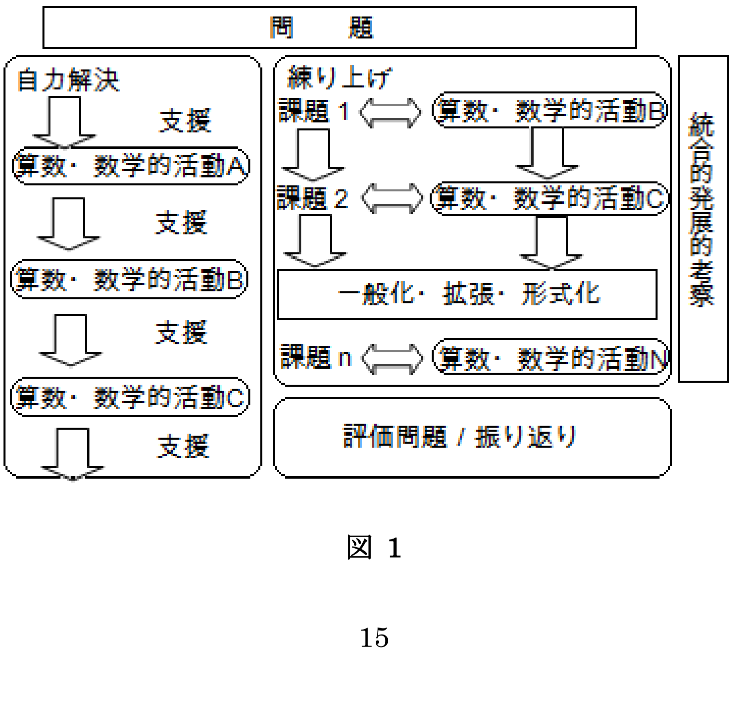


図 1

問題解決における過程は個々人の解決がどう行われるべきかという点に焦点があてられていた．一方，授業として行われる場合，個々人の解決の過程と合わせて，教室空間で行われるということ，そして授業としてどのような教育的価値のあるものを子どもたちに学習させるかが問題である．

問題解決学習では一般に「問題提示」「自力解決」「練り上げ」「振り返り/評価問題」の流れを踏むものである．

「問題提示」では，学習者に本時解決すべき問題が提示される．これまでにも「よい問題とは何か」というように，学習者にとっての問題とは何であるのか, また解決にふさわしい問題であるのかが議論されてきている．

「自力解決」では，段階的な活動の設定が行われる．これは個人差に応ずる授業を行うという目的がある．さらに，それぞれの活動は教師によって期待されるものであり，それぞれの活動は支援によって結びつけられていると言える．自力解決では学習者が自己の能力に合わせて問題の解決に臨むと同時に，教師の支援によって，思考を深化させたり，活動を展開したりする場面であると言える．また教師にとっては，学習者がどのような解決の方法を用いているのか，どういったアイディアで問題にアプローチしているのかを分析する場面でもある．特にこの後に続く練り上げに入るために，教師はすべての学習者が練り上げに参加できるよう，自力解決における活動を支援するため，本時のねらいを明確にした自力解決を設定することが課せられる．

「練り上げ」では，学習者によって解決された個々の活動が，どのように高められるのか，また，探求されるべきことの追求が行われる場面である. つまり, 練り上げで行われるべきことは, 個々の活動の紹介ではなく, 思考の変容を捉えるものであるべきである．また学習者にとっての高まりとは，数学的価値の高まりをさすものである．

このような問題解決学習を通して数学的な知識や概念を形成していく授業を行うためには，教師は良質な教材分析を行う必要がある．まず数学的な立場から教材を分析し，さらにそれを問題解決の立場から，子どもの学習において，どのような活動を設定するかが求められるのである．

2.3 問題の所在

2.3.1 問題解決学習と数学的な見方･考え方

問題解決学習が算数・数学教育において果たす役割は，子どもたちの数学的な見方・考え方をよりよく育てることであると言える．また数学的な見方・考え方が出現する場，育成する場として問題解決学習の授業が認められる．このように数学的な見方・考え方と問題解決学習は表裏一体の関係であると言え，どちらが欠けても算数･数学教育は成立しないと考える．この 2 つをまとめて算数的活動，数学的活動と呼ばれていると考えてもよい．しかし，結論から言えば，算数的活動が数学的な見方・考え方と問題解決学習の本質を包含したものとして教師が捉えることは，学習指導要領の記述では不十分であると言わざるを得ない．さまざまな制約がある中で選ばれた言葉によって記述されているが，結果として表面的かつ最低限度の活動例しか記載されていないことは大変残念なことであると考える．しかし一方で教師の裁量に任されていると考えれば，教師の努力によって，授業が大幅に改善される余地を残しているとも言える．

ところが，往々にして問題解決学習と数学的な見方・考え方が区別されることも多く，結果として問題解決学習がその内容ではなく，授業の流れや展開方法にばかり着目されたり，育てたい数学的な見方・考え方と実際の問題解決学習で行われる活動との内容が合致していない状況を生み出す結果となっていると指摘できる．両者の結び付きが感じられないことから，問題解決学習と数学的な見方・考え方が独立したものの様に捉えがちである．その原因として挙げられるのは，両者を支える一貫した考え方の欠如であると考える．

確かに，子どもたちの育てたい見方・考え方や行わせたい問題解決学習のイメージは個々の教師が持っているのであるが，ではそれらが真に価値ある見方・考え方となっているのか，問題解決学習となっているのかにつ

いて分析する手立てがないのが現状である．筆者はその分析の手立てとして数学観を用いることが妥当であると考えているが，学習指導要領でそれを規定するのは困難なことであると言える．以上の事から，一つ目の課題として数学的な見方・考え方と問題解決学習の根幹となる数学観の欠如が挙げられる．

2.3.2 知的な探求が行われる必要性

問題解決学習を通して獲得される数学的な概念や知識を学習者はどのように捉えるべきなのであろうか．問題解決学習においては，あたかも学習者自身が概念や知識を生み出すような探求が行われる必要がある．学習者が創造すると言っても，厳密には何かこれまで世の中になかったものを創造することを学習者に求めているわけではない．将来的に，また現在であってもそういったことができることに対しては大いに期待するところではあるが，ここではそのことについては棚上げしておく．問題解決学習を行う際に，自力解決の時間は多かれ少なかれ設定されるであろう．

学習者はどのような活動を経ることによって，あたかも自分自身が概念や知識を生み出したのだ，またその真理の責任の担い手であるのだというように育てることができるのだろうか．そのためには，問題の解決に向けて行われる自力解決をはじめとする様々な算数・数学的な活動が，単なる操作などではなく，真に活動する価値のあるものかどうかが吟味されなければならないが，残念ながら現在そうした視点は明確に示されているとは言い難い．つまり，問題解決の授業を設計する際，その活動が知的探求が可能であるか分析する視点が欠如していることが 2 つめの課題として挙げられる．

2.3.3 学習の繋がりの保証

問題解決学習は決して一過性のものでも，イベント的なものでもない．

また，今日獲得した知識や概念は，今日のもので完結した，今日用いた解決の方法は今日の問題だけのものであるというような，授業が細切れのものであるかのように教師や学習者が捉えることも望ましくない．問題解決学習を長期的な視点で捉える必要性は，学習の繋がりを明確にするものがカリキュラムや内容の系統性だけではないことにあると考える．確かに学習を行う上で，カリキュラムや内容の系統性は大変重要であり，概念や知識がどのように拡張されていくか，より洗練されていくかを捉える材料とすることができる．しかし，算数・数学教育が担うべき責任は数学的な概念や知識を教えることだけではないことは明らかである．

長期的な視点に立って，学習者の学び方を保証しようと考えれば，まさに問題解決学習が担う責任は重大である．学習指導要領の領域内での縦のつながりはもちろん，領域を統合する横のつながり，そして小・中学校間のつながりをも視野に入れる必要がある. 従来であればこれらの役割は「数量関係」領域が担ってきたものであるが，その役割が薄れてきているのではないかということが分析から明らかになった(前田, 2010). 問題解決を行うときには，2.1 のところで見た，内容面を保証することについては，様々な先行研究や学習指導要領などを参考にすることが可能であるが，方法面からみた数学的な見方・考え方による学習の繋がりについては，そのよりどころとなるものがないのが実情ではないだろうか．そのため，方法面からみた数学的な見方・考え方による学習の繋がりを保証する問題解決学習の在り方を議論していく必要があることが，3 つ目の課題として挙げられる．

第２章の要約

本章では，我が国における数学的な見方・考え方，問題解決学習について考察を行い，本研究が対象とする数学的な見方・考え方，問題解決学習について明らかにした．

こうした考察から，今日の我が国における算数・数学教育が抱える課題として，以下の３点が抽出された．

①数学的な見方・考え方と問題解決学習の根幹となる数学観の欠如
②知的探求が可能な問題解決学習の授業設計の分析的な視点の欠如
③方法面からみた数学的な見方・考え方による学習の繋がりを保証する問題解決学習のあり方についての議論

これらの課題は，本論文においてパターンの科学に基づく算数・数学教授学が構築された暁に，解決もしくは改善することができると期待される．

第 3 章　パターンの科学としての数学観

本章は先行研究の検討を行い，パターンの科学としての数学観について明らかにする．3.1 ではパターンの科学としての数学についてその概観を述べ，3.2，3.3 では具体的な事例をもとに，パターンの科学としての数学について検証を行う．3.4 では 3.2，3.3 で得られたパターンの科学としての数学の捉え方についてその特性を定義する．3.5 では数学の本性からパターンの科学としての数学および数学観を分析・検証する．3.6 では，本研究で扱うパターンの科学としての数学観について規定する．

3.1 パターンの科学としての数学

「数学とはなにか」という問いに対して，数の学問であると答える人もいれば，集合である，群であると言う人もいるであろう．実際に数学が歩んできた長い歴史の中で,「数学とはなにか」という答えは数学に向き合う人々の関心により流転してきたものである．本章で取り上げるパターンの科学とは，言わば数学に対する一つの捉え方であると言える．人々が何を対象に数学を議論するのかによって変わる答えに，W.W.ソーヤーは次のように答えた．

> 「‘数学とは，可能なすべてのパターンの分類と探求である’といっておきましょう．こゝで使うパターンというのは，たれもが賛成してくださる使い方ではありません．それは非常にひろい意味に解釈して，心の中で認めることができる法則をもっているもの, ほとんどすべてを包含しています. 生命，そして知的な生命は世の中にある法則性があるから可能なのです.」（ソーヤー, 1960, p. 6）

パターンという言葉が我々に与えるイメージで言えば，解法のパターンであったり，決まった手順のようなものが思い浮かぶが，ソーヤーをはじめとしてこれから挙げる K.デブリンや L.A.スティーン, そして P.キッチャーはけしてそういったものを指してパターンと呼んでいるのではない．なぜ我々はこれほど長い年月をかけて数学を発展させることができたのか.そして今なお数学が対象とする範囲が拡大し続けているのか．我々が数学と呼ぶ営みに対し，この『パターン』がどのように関係しているのかを明らかにしたい.

①1，2，3，4，5 に続く数は？	②2，4，6，8，10 に続く数は？
③1，4，9，16，25 に続く数は？	④1，2，4，8，16 に続く数は？

⑤2，3，5，7，11 に続く数は？	⑥139，21，3，444，65 に続く数は？

このように問われた場合に，どのような数が続くと言えるだろうか．①には 6，②には 12，③には 36，④には 32 が入ると言うのが一般的であろう．では⑤や⑥はどのような数字が並ぶのであろうか．①～④の数列に続く数を決定づけることは，我々にとっては造作もないことであろう．なぜならば，我々はこれらの数列に対して，個々の数列のもつ構造を見ることができているためである．これらの数が続くために，我々は数列の均衡を乱さない数を選択するのである．ところが，この問題には，⑤と⑥が残っている．それでは，これら 6 つの数列に続く数が全て同じ数となるとみなすことも可能であることをお見せしたい．カール・リンダーホルム(*Mathematics Made Difficult,* 1971)は，①から⑥まで，これに続く数はすべて 19 であると言った．彼はこの数列に対し，ラグランジュの補間公式を用いたのである．ラグランジュの補間公式は

$$P(x)=\sum_{j=1}^{n} y_i \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$$

であり，省略せずにかくと，

$$P(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}y_1+\cdots+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}y_n$$

となる．

$$x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4, x_5=5, x_6=6, y_1=1, y_2=2, y_3=3, y_4=4, y_5=5, y_6=19$$

とすると，

$$P(x)=\frac{13}{120}x^5-\frac{13}{8}x^4+\frac{221}{24}x^3-\frac{195}{8}x^2+\frac{1841}{60}x-13$$

となり，

$$P(1)=1, P(2)=2, P(3)=3, P(4)=4, P(5)=5, P(6)=19$$

が成り立つ．(スチュアート，2010，p.157)

具体的な事例をもとに，パターンの科学として数学を捉えるとはどういったことをさすのか，また，認識論的立場から見て，パターンの科学とは一体何であるのかを本項で明らかにする．

3.2　K.デブリンのパターンの科学としての数学の捉え方

「数学とは何か？」という問いは歴史とともに何度も生まれ変わってきたものであり，その中でもアメリカの数学者 K.デブリンは「数学はパターンの科学である」という定義を採用している．数学のかなりの部分が物理的世界にその動機をもっているが，数学の中核を形成する部分のすべてが物理学的な世界に存在するわけではない．例えば，数や点，線などは物理的には存在せず,「人間の集団的な心の中にのみ存在する抽象的なもの」(デブリン, 2005, p. 16)である．例えば,「三角形を知っていますか？」と聞かれれば，多くの人が「知っている」と答えるであろう.「では，あなたは三角形をかくことができますか？」と問われれば「かけます」と言って，紙に鉛筆を使って三角形の図をかくことでしょう．つまり，3 人いれば 3 通りの三角形の図が描かれることになるのである.

数学者はその抽象的なものの特性や規則性，法則性などをパターンとして捉え，科学することによって，それを数学と呼んでいるとデブリンは捉えている.

偉大な数学者たちが築き上げてきた数学をデブリンは次のような言葉で表している.「数学の新しい分野が開花する最初の段階というのは，あるパターンの同定から始まる．次にパターンを，自然数の概念とか三角形の概念といった，数学的な対象なり構造なりに抽象化する段階がやってくる.これらの抽象的な概念を研究した結果として，観察されたさまざまなパターンから公理が定式化されるのである．この段階までくると，最初の段階でこれらの公理を導くことになった現象についてそれ以上調べる必要がなくなる．ひとたび公理系が決まると，純粋に抽象的なセッティングの中で実行される理論的証明によってすべてが遂行できるようになる. もちろん，この全プロセスを作動させる原材料ともいうべきパターンは，日常的な世界の何かであるかもしれない」(デブリン. 2005.　p. 95).　ここでは，日常

な世界を数学化していくことについて，デブリンの具体例をもとにみていく．

3.2.1. 有限算術

注）本項は本文の引用部分をゴシック体(パターン)で，筆者の補足部分を明朝体(パターン)で記している．

たとえば，時計の針を考えてみよう．1 時，2 時，3 時，……ときて，12 時になると，そのあとはまた 1 時にもどる．分についても同じで，1 分，2 分，3 分，……ときて，60 分になると，そのあとはまた 1 分にもどる．

この日常的な事実を数学化しようとすれば，数え方を少し変えることが必要だ．0 から数え始めるのである．つまり時刻でいえば，0 時，1 時，2 時，……，11 時と数えてこのあとまた 0 時にもどることにあたり，分の場合は，0 分，1 分，2 分，……，59 分と数えてこの後また 0 分にもどることにあたる．

＜時計の短針(時)の算術＞	＜時計の長針(分)の算術＞
例） 2 時の 3 時間後は 5 時 2+3＝5 7 時の 6 時間後は 1 時 7+6＝1	例） 45 分の 0 分後は 45 分 45+0＝45 48 分の 12 分後は 0 分 48+12＝0

通常の算術の規則の大半は有限算術についても成り立っていることが分かる．これはひとつの領域から別の領域へと数学的なパターンが移動する古典的な例でもある(通常の算術から有限算術へと数学的なパターンとしての「算術的構造」が移動するというわけだ)．

有限算術における加法を通常の算術の加法と区別するため，ガウスは等号を三本線の“≡”に置き換え，長針の算術の例を

$$2+3\equiv5，7+6\equiv1$$

とし，“＝”の「等しい」を示すものではなく，合同であることを示すためのものとして“≡”を用いた．

時計の算術を超えて，二つの数の積を取り上げる．時間と時間の積は意味がないが，数学的な観点からすれば，積にも完全な意味を与えることができる．その場合は，加法の場合と同じように，普通に積を作り，法 n で割った余りを考えればよいのである．例えば，法 7 については

$$2\times3\equiv6,\ 3\times5\equiv1$$

となる．

ガウスによる合同数の概念は数学でよく利用され，場合によっては，同じところでいくつかの異なる法が出現することもある．そうした場合には，どういう法に関する議論なのかを明らかにするひつようがあるため，合同式は次のように示される．

$$a\equiv b\pmod n$$

ここで n は問題になっている法を示し，また，これが成立しているとき「a と b は n を法として合同である」という．どのような法についても，足し算，引き算，かけ算は簡単である．

しかし，割算の場合には，不可能な場合が生じる事がある．　たとえば，12 を法として 7 を 5 で割ることはでき，その答えは 11 になる．

$$7/5\equiv11$$

これは両辺を 5 倍した

$$7\equiv5\times11$$

が成立することからわかる．5×11＝55 を 12 を法として考えると，55＝4×12+7，つまり，55 を 12 で割った余りが 7 になることから，7≡55 となるためである．しかし，12 を法とする場合，5 を 6 で割ることは不可能である．それは，1 から 11 までの数を 6 倍したものの中に 12 で割って 5 余るものは存在しないからである．

しかし，法 n が素数の場合には，割り算は常に可能である．したがって，この

場合の有限算術は有理数や実数とよく似た性質をもつ．数学者の言葉でいえば，素数を法とする有限算術は体であるということになる．ここにはまた，もうひとつのパターンがみられる．割り算が可能となるような有限算術が得られる素数に関するパターンである．

「有限算術」ではパターンの科学と言う名のもとに，一体何が行われているのか分析する必要がある．まず本事例を通して，どんな行為が行われているのかを分析する必要がある．ここでは 3 つの行為が確認された．

D1 パターンの導出

パターンの導出とは，対象がどのような法則をもったものであるかを明らかにし，パターンとして捉えることである．本事例では，時計の針が表す時間が周期的であることに着目し，そこにパターンを見いだしている．

D2 形式化

形式化とは，パターンとみなしたものを，表象することである．本事例では，時計の算術から得られたものを有限算術として $a \equiv b \pmod{n}$ と数学的に処理しあていることが認められる．

D3 新たなパターンの導出

対象から得られたパターンでは，対応しきれない範囲に対し，新たにその範囲を含め機能するようなパターンを導出することである．本事例では，足し算，かけ算，ひき算では，有理数や実数とよく似た性質が認められる．しかし，割算の場合には適応できない場合が認められ，新たなパターンが導出されている．

次にデブリンは何をパターンと呼んでいるのかと言う点が考察される必要がある．有限算術では，時計を題材に上記のような行為が行われているが，まず時計の針が指し示す時間は整数のように無限に拡大するのではなく，循環している事は周知の通りである．デブリンはその循環している様子にパターンを見いだし数学的に捉え直していると言える．つまり，現実の事象に対して規則性を見いだし, それをパターンと呼んでいると言える．

また，同著に「数学する本能」(2006)があるが，特に動物の行動や植物の生え方や人間の赤ちゃんの認識に対して，我々が数学しているというように捉えられるとある．それは我々が振舞いや事象に対して，パターンとして捉えることができるからこそ，数学として分析的に見ることができていると換言することもできる．つまり，パターンという一言に包含される要素は数え上げることは不可能であるが，それらが振舞うことにラベリングを施し，そのパターンとみなされたものがどこに属するのかを分析することは可能である．実際にデブリンは「数学：パターンの科学」において，「計算」「推論と伝達」「動きと変化」「形」「対称性と規則性」「位置」という分類で様々なパターンを紹介している．

3.3　L.A.スティーンのパターンの科学としての数学の捉え方

1988 年,「*The Science of Patterns*」で L.A. スティーンはこれまで数や空間の学問として考えられてきた数学が変換の時を迎え，パターンとパターンを知覚することに由来するものによって構築される理論としての数学になることを指摘している. その後，スティーンは 1980 年代から 1990 年代にかけて，アメリカにおける学校数学教育の状況に対する危機感を改善するため，一連の報告の中の一つとして「*On the Shoulder of Giants: New Approaches to Numeracy*」[1](1990)を執筆している．本書(スティーン, 2000)はスティーンと 5 人の著者によって書かれたものであり，序においてスティーンは“各著者は，現在の学校やカリキュラムの制限を心配することなく，数理科学に深い根拠をもつアイディアを探求するよう要請された．しかし，彼らは数多くの創造力に富む例を通して，数学的アイディアが形式的でない子供時代の探求から形式的な学校及び大学での学習を通して，どのように発展するかを示唆している”とし，“カリキュラムのための確定的な勧告としてではなく，可能性あるものの見本としてであり，数学の活力と効用を反映するような新しい創造力あふれたプログラムの開発に刺激をあたえるため”のものである(スティーン, 2000, 序ⅳ‐ⅴ). そのことを踏まえたうえで，スティーンがパターンの科学としての数学をどのように捉えているのかを明らかにする.

スティーンは伝統的に人々が持ってきた数学を静的な学問としてみる見方は次のような事を原因として，生じていると捉えている.「伝統的な学校数学は，ごく少数の構成要素(たとえば算術，幾何，代数)を取り上げ，それを水平に配列してカリキュラムをつくってきた．まず算術，ついで簡単な代数，次に幾何，ついで進んだ代数，そしてあたかも数学的知識の総括であるかのように最後に微積分といった具合である．この層状のケーキの

[1] 本論文では 2000 年に出版された本書の翻訳, 世界は数理でできているを参考に考察を行い, 引用箇所では原文も参考に考察を行った.

ような数学教育へのアプローチは，数学の多種多様な根源からくる形式ばらない発展を妨げる効果を生んできた」. スティーンは学校教育においての数学は次の学習のための学習ではなく,「数学の根源と子どもの教育経験における数学の各分野とのつながり」をつけたものとして, 子どもに示されるべきであるとしている . (スティーン, 2000, p. 6- 7).

学校教育への示唆として，スティーンは「一般の人々の視界の外で，数学は急激な速さで成長し続け，新しい分野を生み，新しい応用を数多くつくりつつある」(スティーン, 2000, p. 2)ものとして着目した. その本質はパターンに対する限りない探求としての数学という見方である．数学を生み出すための探求に着目し，数学者の特性を次のように記している．「隠されているパターンを明らかにすることは，数学者が最も得意とするところである．そして，大きな発見の一つひとつが，いっそう深い探求の可能性を秘めた豊かな新しい領域を開いていく」(スティーン,2000,p.1)．このような言葉からも分かるように，スティーンはパターンの探求こそが数学を発展させていくものであると捉えている．

「人が数学の言語を使って行うのは，パターンを記述することである．数学は，あらゆる種類のパターン――自然界に現れるパターン，人間の精神によって発明されたパターン，ほかのパターンからつくられたパターン――を理解しようとする探求的科学である」(スティーン, 2000, p. 13).

では，探求されたパターンを記述していくことについて，スティーンらの具体例を通して見ていく．

3.3.1 組み合わせを考える

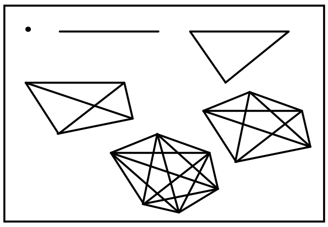
注）本項は本文の引用部分をゴシック体(**パターン**)で，筆者の補足部分を明朝体(パターン)で記している．

(本書は Steen と 5 人の著者によって書かれたものであり, 本事例は Steen

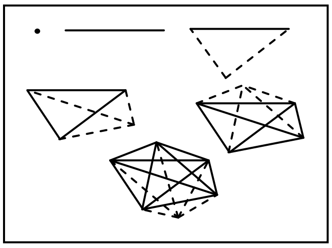
の考えに沿って Thomas Banchoff によって記されたものである)

事例１：辺の数を数える

図形について，辺の数がどのように変化するかを探求するものである.



平面図形の場合，実際に作図を行うことで，頂点や辺の数を数え上げるということが行われる．一方で，作図を行う手続きから，そこに潜むアルゴリズムを発見することもできる.



ある 1 点から出発し，他の 1 点を選びそれと結んで 1 つの辺を描く．また新しい点を選びその前の 2 点をつないで 2 つの辺，あわせて 3 つの辺が得られる．これで三角形が描かれたのである．さらに，新しい点を 1 つ選び前の 3 点をつないで 3 つの辺が得られ，辺はあわせて 6 つになる.

この過程を繰り返して 5 点，6 点で決まる図形を描くことができる．これを「完全グラフ」と呼ぶ．この手続きから，どのようなパターンが姿を表すかを表にすると一目瞭然である.

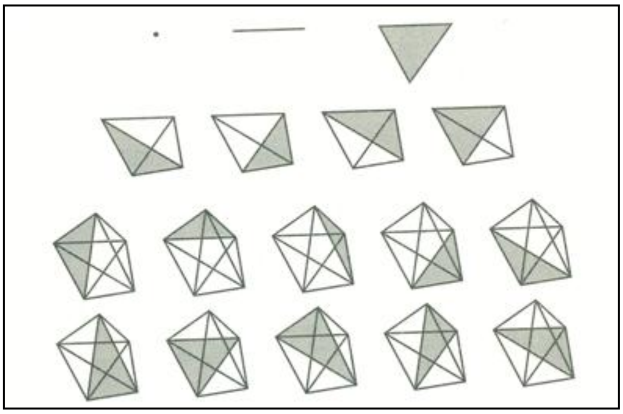
点の数	1	2	3	4	5	6
辺の数	0	1	3	6	10	15

＜ここから読み取れるパターン＞

1:系列の組み立てに基づくと，n 番目の時の辺の数は n より小さい自然数の和に等しいことが分かる．たとえば，六点でつくられる辺の数は 1+2+3+4+5＝15 である．より形式化するなら，n 個の自然数の和の公式 $\frac{1}{2}n(n+1)$ で表される.

2:各段の辺の数は，その前の段の辺の数と頂点の数の和である.

事例２：三角形を数える



「辺の数を数える」で得られた図形について，さらに三角形の個数について，先ほどの表を拡大して新しい情報を含むようにできる．

この時の三角形とは，頂点を結んでできる三角形の事を指し，対角線によってできた交点については含まないとする．つまり，三角形の数を数えることは，頂点３つの組み合わせを数えることと同値であることを示している．ここで得られた情報を，表1を拡大して表すと，表2が得られる．

点の数	1	2	3	4	5	6	…
辺の数	0	1	3	6	10	15	…
三角形の数	0	0	1	4	10	?	?

この表のパターンから推論して，欠けているところを埋めることにする．それは，辺と点を関係づけるやり方とよく似ていることが見えてくるだろう．

＜ここから読み取れるパターン＞

1:頂点の 3 つの組合せの数と同じだけの三角形があるので，三角形の数はいくつかのものから 3 つを同時にとった組み合わせの数に等しい．

2:漸化式の関係「ある段の三角形の数は，その直前の段の三角形の数と辺の数の和に等しい」

例えば，6 点から作ることのできる三角形は 20 個である．一般に n 個の点に対する三角形の数は $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ である．

3:代数を学べば，これらの数を二項係数に結び付けることができ，文字因数を取り去ると，パスカルの三角形を少しずらしたものが得られる．

$$
\begin{aligned}
(a+b) &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 \\
(a+b)^6 &= a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{lllllll}
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}
$$

たとえば第 4 行は，4 個の点からるくられる完全グラフについて，$n=0,1,2,3,4$ に対して順に，n 個の頂点をもつ対象，つまり両端は空集合と全体集合（$n=0$と$n=4$），そしてその間の数は点，直線，三角形の数をそれぞれ表す．

注意深い生徒は，もう一つの大切なパターン，つまり各行の和は 2 の累乗であることに気づくだろう．この観察を洗練された言い方で述べることができる．n 次元単体のいろいろな次元の部分単体の数の総計は，もとの全単体と空単体を含めると2^{n+1}である．この同じ関係は，二項展開の表で$a=1, b=1$とおいてもわかるし，また二項係数を$n+1$個の要素から$k+1$個を同時にとるときの組み合わせと関係づけても分かる．この時起こりうる組み合わせの総数は2^{n+1}で，これは$n+1$個の要素から選ばれた部分集合の数の総計である．

スティーンはパターンの探求こそが数学を発展させていくものであると述べているが，この事例では，どのように探求されているのかを分析する．

S1 対象をパターンとして捉える

パターンとして捉えるとはそこにアルゴリズムを認めることである．特に対象をどのように捉えるかが重要であり，本事例では，作図のアルゴリ

ズムによって，図１の図形が図２のように生成されているパターンとして捉えられる．

S２形式化

形式化とは具体的な数値による演算の形式での表象や，より一般な場合として演算の形式にすることである．形式化によってそのパターンの構造を明らかにする．本事例では，n番目の辺の数を求めたり，n個の点に対する三角形の数などを表した式が認められる．

S３パターンの応用

パターンの応用とは，ある対象を捉えるときに用いたパターンを他の対象を捉えるときにも同様に用いることである．本事例では，辺の数の増え方についての同様のパターンが，三角形の数の増え方についても認められるのではないかという観察が認められる．

S４パターンの拡張

パターンの拡張とは，パターンとして得られたものから新たなパターンを生みだすことである．本事例では，表２で得られた数の変化を二項係数に結び付けることで得られたものから，さらにn次元単体のいろいろな次元の部分単体の数の総計となるパターンが新たに得られた．

また，探求の方法として，有効な手段として，視覚化することが挙げられる．特に複雑な対象を考察する場合に用いられると分析される．視覚化とは，隠れたパターンを探すためにデータを視覚的に示すことであり，データ解析の第一歩である．例としては，いろいろな形のグラフが関数や関数を視覚的に表す事である．（スティーン,2000）視覚化することによって

得られたデータをより分析的にみることにより，それらのデータがどのように構成されたものであるかを明らかにするきっかけとなる. 本事例では，作図のアルゴリズムを表として表すことで，数値の変化を捉えようとする行為として認めることができる.

スティーンは特にパターンを探求するという事に重きを置いており，パターンとは我々が対象をどうみなすことができるか，また対象のもつ構造をどのように表現することができるかということを問題にしていると言える.

3.4 パターンの科学としての特性

デブリンとスティーンのいうパターンとは，我々がある対象を見た時に見出すことができた規則性や法則性であると言える．なぜパターンとしてみなすことができるのか，そのパターンとはどういった構造を持っているのかを探求すること，さらにそのパターンが他のパターンとして拡大されていくことを含めて「パターンの科学としての数学」と呼ぶことができる．

一方で，我々が目にすることのできないもの，例えば数や点，線などもデブリンとスティーンはパターンであると述べている．つまりデブリンやスティーンの事例として取り上げたものとは別に，この世に存在しえないものについても，数学の対象として我々は扱ってきたと言える．数や点，線など人間の精神によって生み出されたものに対して，我々は取り扱う場面に応じてそれらを規定してきたのである．目に見えるものの規則性や法則性をパターンとして捉えたのと同様に，目に見えないもの，非存在物に対しても我々は規則性や法則性を与え，数学的な名称を付与してきたと言える．

以上のことから，パターンの科学としての数学の特性は次のようにまとめられる．

(1)万物が対象となること
(2)パターンとして捉えるだけでは，数学として成立しないこと
(3)パターンから新しいパターンが生み出されること

デブリンとスティーンはパターンの科学というときに, 必ず探求活動を行っている．その過程はパターンを発見し，分析し，記述し，公理体系の構築である．ここで，パターンを探求するという場合，2 つの側面があることを認められる．

まず一つ目は，新しい数学を生み出す事を前提としたパターンの科学と

しての数学である.「一般の人々の視界の外で，数学は急激な速さで成長し続け，新しい分野を生み，新しい応用を作りつつある．この成長を導くのは，計算や公式ではなくて，パターンに対する限りない探求である」(スティーン, 2000, p. 2).

二つ目は，すでに数学として存在するものを，捉えなおすことを前提としたパターンの科学としての数学である．デブリンやスティーンの事例について，我々は示されたものを少なからず知っていたり，形式化されたものを理解できるであろう．しかし，数学的な記号で示されたものがどのようなパターンの探求の結果得られたものかその具体が示されていると言える．

3.5 数学の本性

我々の体系的な数学に対する知識の根拠とは何であり，どのように推論を始めるのであろうか．そして，どのように数学として作り上げていくのかについて，数学的な認識の本性すなわち認識論的立場から議論されなければならない．

3.5.1 歴史的発展

現代の個人の数学的認識を明らかにするとはどういうことか．Philip Kitcher は個人の数学的認識が歴史的にどのように発展したものであるかを捉えることによって，我々の数学的認識の根源を明らかにする.「ある世代の数学者の知識というのはその前の世代の知識を拡張することによって得られる」と Kitcher は捉えている．つまり，「個々人の認識は集団の権威の認識を基礎に置」いたものであるということである(Kitcher, 1984, p. 4-5)．すなわち我々の認識について明らかにするためには，その集団の認識の由来が調べられなければ，個々の認識を説明することはできないのである．その要請に答えるためには，数学史という歴史的な要請が求められる. “多くの数理哲学者が数学史は認識とは無関係のものであるとみなしてきた”のは，“数学者は歴史的な過程を通して精巧に作り上げられてきた数学とは無関係に祖先によって我々に残された知識の主要な部分を推測することができる．そのため彼らは体系的な知識を完成することが困難であった歴史的な過程での具体例を挙げて示す推論のパターンを省みない事を支持する”からである．(Kitcher, 1984, p. 5)それは数学の特性として，認められるものである．しかし我々の認識は如何なるものであるかという問いに対しては，認識がどのような推論の出発点にたち，如何なる変遷をたどり進化してきたのかという問いに答えられなければならない．

Kitcher は数学的認識は認知によって獲得された基本的な知覚から生ず

るとする．Kitcher がアプリオリに数学的認識を説明しきれないとするのは，これが大きく関わっているのである．「2～3 千年前に私達の先駆者はメソポタミアのどこかで算術や幾何学の幾つかの単純な事実を，現実的な経験の学習によって進取の口火を切ったのである．それらの質素な起こりの数学は性質を受け継ぐためのさい先のよいものとなり，認識の印象的な本体として花開いたのである」(Kitcher, 1984, p. 5). この見解は大きな批判を受けるものであると予想される．それは，これらの経験的な事柄が我々に純粋な数学的認識を与える事ができるのかというものであろう．このことについては 3.5.2 の認識の本性において詳述する．

3.5.2 **認識の本性**

数学的認識がありふれた知覚から得られるとはどういうことであるのか. Kitcher は我々の認識の根拠を生態学的実在論における「アフォーダンス」[2]に求めたのである．アフォーダンスとは，J.J.Gibson によって提唱され，有機体(人間)が主に知覚するものはその環境からのアフォーダンスであるとするものです．つまり「数学は私達がどんな対象に関しても実行することができる収集や要請の活動」であり，「私(Kitcher;訳者注)は数学が対象に基づいて環境の中で行うことのできる活動を理想化した科学であると言う構成主義者の立場」をとると結論付けるのである．(Kitcher, 1984, p. 12)

数学的アプリオリ主義を Kitcher が拒否するのは数学的な認識が知覚の経験からは異なる根源から得られるとするのではなく，我々の認識が環境からのアフォーダンスによって知覚されたものであるとするからである．そしてそれらの知覚されたものを実験的に行ったり，観察の結果として認

---

[2] アフォーダンスとは，環境が動物に与える意味を表す造語である．動物(有機体)に対する刺激という知覚心理学の概念ではなく，動物(有機体)がその生活する環境を探索することによって獲得することができる意味・価値であると定義される．(ギブソン,1985)

識が発達していくものであるとしている．つまり，「プロト(原始の)数学的な知識が世界を操って，操作を観察することによって得られることができるということである．これらの質素な始まりから，数学的な知識は，現代の理論の印象的なコーパス(主要部)に発達するのである」(Kitcher, 1984, p. 148)

3.5.3 数学的認識論から見たパターンの科学としての数学

3.4 でみたように，パターンの科学としての数学は 2 つの探求活動の様相を有したものである．それらは
ｉ)対象をパターンとみなすことで，新たな数学を生みだすこと
ⅱ)すでに数学として存在するものをパターンとして捉え直すこと
とまとめられる．

キッチャーの数学的認識論から見れば，「ｉ)対象をパターンとみなすことで，新たな数学を生みだすこと」とは，認識の根源としての知覚を認め，どんな対象に関しても実行することのできる収集や要請の活動としての数学として，パターンの科学としての数学が認められることを意味する．さらに収集，要請された活動が理想化されていくことにより，数学として取り扱われ，構成的に拡大していくのである．

また「ⅱ)すでに数学として存在するものをパターンとして捉え直すこと」とは，その数学的認識の本性を明らかにするための歴史的な過程へのアプローチであると換言できる．それにより，我々現代に生きる人々の数学的認識について明らかにすることができ，推論の出発点から，様々な推論のパターンを経て，現在の認識へと発展してきたという事を我々は知覚することができるのである．

3.6　本研究におけるパターンの科学としての数学観

パターンの科学としての数学の特性は次のようにまとめられる．

(1)万物が対象となること
(2)パターンとして捉えるだけでは，数学として成立しないこと
(3)パターンから新しいパターンが生み出されること

パターンの科学としての数学は 2 つの探求活動の様相を有したものである．それらは

ｉ)対象をパターンとみなすことで，新たな数学を生みだすこと

ⅱ)すでに数学として存在するものをパターンとして捉え直すこと

パターンと言う言葉のもつイメージから，パターンは公式や定理など，静的なものとしてパターンという言葉が捉えられ得る可能性がある．しかし，パターンとみなすのはほかでもなく，対象を認識する本人である．つまり，パターンとみなす主体は個々人に依存し，パターンは様々な可能性を秘めているのである．そのため,「パターンの科学」としての数学観におけるパターンとは動的なイメージであり，パターンを探求する人によって，数学が構成されることが可能なのである．

パターンとみなす主体は個々人に依存しパターンは様々な可能性を秘めている．しかしながらパターンそのものが数学なのではなく，そのパターンがどのような特性や規則性をもったものであるか探求され，数学的に説明されるものであるかが問題となる．また，数学的に表象される事により，そのパターンは客観化され，伝達が可能となる．

第 3 章の要約

本章では，パターンの科学としての数学についての先行研究から，具体例を抽出し，そこで見られた様相について，キッチャーの認識論的立場から検証を行った．

その結果，パターンの科学としての数学観の特性は次の 3 点に集約される．

(1)万物が対象となること
(2)パターンとして捉えるだけでは，数学として成立しないこと
(3)パターンから新しいパターンが生み出されること

また，パターンの科学としての数学は 2 つの探求活動の様相を有したものである．それらは

ⅰ)対象をパターンとみなすことで，新たな数学を生みだすこと

ⅱ)すでに数学として存在するものをパターンとして捉え直すこと

である．

以上の事柄について，認識論的な側面から検証を行った結果，数学的認識論から見れば，「ⅰ)対象をパターンとみなすことで，新たな数学を生みだすこと」とは，認識の根源としての知覚を認め，どんな対象に関しても実行することのできる収集や要請の活動としての数学として，パターンの科学としての数学が認められることを意味する．さらに収集，要請された活動が理想化されていくことにより，数学として取り扱われ，構成的に拡大していくのである．

また「ⅱ)すでに数学として存在するものをパターンとして捉え直すこと」とは，その数学的認識の本性を明らかにするための歴史的な過程へのアプローチであると換言できる．それにより，我々現代に生きる人々の数学的認識について明らかにすることができ，推論の出発点から，様々な推論のパターンを経て，現在の認識へと発展してきたという事を我々は知覚することができるのである．

第４章　本質的学習環境における
パターンの科学としての数学観の利用

本章では，パターンの科学としての数学観を利用して算数教育についての研究を取り上げ，検討を行う．

4．1 では，ドイツの Wittmann が提唱する本質的学習環境とパターンの関連性を述べ，4．2 では，パターンが学習にどのような影響を及ぼしているのかを考察した．また我が国でのパターンの科学としての数学観の利用に向け，4．3 では本質的学習環境を批判的に考察し，本章以降の布石とする．

4.1 デザインとしての本質的学習環境とパターン

Wittmann はドルトムント大学名誉教授であり，数学教育学者である．本研究では Wittmann の論文 *Mathematics as the Science of patterns: A guideline for Developing Mathematics Education from Early Childhood to Adulthood.*(2005)に着目した．なぜ Wittmann が数学教育を議論するとき，「パターンの科学としての数学」に着目したのかを検討することで，Wittmann の数学教育学に対する理念を考察したい．

Wittmann はこれまでの数々の論文において，次のような用語を用いて，算数・数学教育についての提言を行ってきた．Teaching Units(Wittmann.1984), Substantial Teaching Units(Wittmann.1995) そして，Substantial Learning Environment(Wittmann.2000)である．表現の変化は，一般に「teaching」という言葉が，教師の「指導」という意味合いが強調される傾向があるため，児童・生徒・学生の活動をより強調するために用語変更を行ったのである．(山本.2009) このような用語の変更はあるにせよ，いずれの場合にも一貫して Wittmann が主張するのは，これらは教師が授業を自ら設計でき，児童・生徒の学習の場となるものであるというものである．つまり，デザイン科学としての数学(Wittmann.1995)を成り立たせるための題材としての意味合いが強いように思われる．

本質的学習環境とは，は次のような性質をもつ指導･学習の単元である．(Wittmann,1995,p.365-366)

(1)算数・数学指導の主要な目的，内容，原理がある水準において示されていること，

(2)この水準を超えた重要な数学的な内容，過程，方法と結び付いており，数学的活動の豊かな源であること，

(3)柔軟性をもち，個々の学級の特殊な事情に合わせることができること，

(4)算数・数学指導に関する数学的，心理学的，教授学的観点を統合し，実証的研究の豊かな環境を形作ること．

Wittmann は本質的学習環境をもとに，児童・生徒・学生の学習をデザインすることを要請しているのだが，それらの学習とパターンの科学としての数学の関係性どのように捉えているのかを明らかにする．

Wittmann は「math 2000」[3]の冒頭でキース・デブリンの「パターンの科学としての数学」(1995)について触れ，「作り上げられた系統的な数学では役に立たず，少し間違った数学の学習センスを示すものとなるが，パターンはより原初的な様相である．それ故に，研究の過程でパターンの探求や，継続，変化や発明という行為として現れる．これらのプロセスは遊びの本性と一致した数学の本性であり，数学は一種の遊びである」[4](筆者訳)としている．遊びの本性が数学の本性と一致するとはどういうことであるのか．Wittmann の“race to 20”を例にとって考えてみる．このゲームは 1 から 20 までの数が 1 列に並んでおり，プレーヤーは交互におはじきを置いていく．その時，1 つか 2 つのおはじきを置く事ができる．20 におはじきを置くことができたプレーヤーの勝ちというゲームである．

①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳

図 2 : race to 20

例えば，ルールを言わずに，1 から 20 までかかれた紙といくつかのおはじきを与え「これで遊んでみて」と言うとどうだろうか．おそらく子どもたちは各々の遊びを構成し始めるであろう．子どもたちはそこに自分たちな

[3] プロジェクト「mathe2000」はドイツのドルトムント大学の数学教育の研究開発プロジェクトとして 1987 年に設立されたものである．幼稚園から高等学校の数学教育，教員養成における数学教育に関する研究開発が行われている．

[4] Als Vorbild dienen weniger systematisch ausgearbeitete fertige Muster, die leicht ein falsches Verständnis von Mathematiklernen suggerieren, sondern mehr Muster in statu nascendi. Leitend sind dementsprechend das Erforschen, Fortsetzen, Verändern und Erfinden von Mustern im Forschungsprozess. Dieser Prozess hat der Natur der Mathematik entsprechend einen spielerischen Charakter: Mathematik ist eine Art Spiel.

りの規則を作り上げることによって遊びとして成立させるのである．これはパターンの科学としての数学が，万物に対するパターンの認識から始まり，それらのパターンについて要素を構成していくという過程を通して数学化していくという点と共通している事をさしているものであると考えられる．

また，Wittmann は「発見による学習」の原理を，教授や学習の基本原理として挙げており，このことから，パターンの科学としての数学に傾倒したのではないかと考える．それを裏付けるものとして，Wittmann が「mathe2000」の生みの親として挙げた 4 人について検討する．

「mathe2000」の生みの親として，Wittmann はハンス・フロイデンタール(Hans Freudenthal)，ジャン・ピアジェ(Jean Piaget)，ヨハネス・キューネル(Johanes Kűhnel)，ジョン・デューイ(Jone Dewey)の 4 人を挙げている．「フロイデンタールは出来上がった数学ではなく，活動(過程)としての数学を重視し，教授・学習過程の出発点として，出来上がった体系をもってくることを反教育的であると厳しく批判した数学者である．彼は数学を創造していく過程(数学化)こそ，数学教育の基本であるべきだと主張した．またピアジェは，子どもたちは環境との相互作用の中で，環境を自らの認知構造に同化し，あるいは認知構造を調整することにより，自らの知識を能動的に構成することを実証し，算数・数学学習は構成的で社会的学習であることを明確にした．20 世紀初頭の改革運動の推進者の一人であるキューネルは，将来の教授学について，「指導と受容ではなく，組織化と活動こそが教授・学習過程の特徴になる」と述べた．児童至上主義者と誤解されがちなデューイは，児童の発達とカリキュラムの発展の相補性を明確に主張した教育学者であり(『子どもとカリキュラム』)，実践家との密接な協力なしには，いかなる研究や改革も水泡に帰すことを明らかにした人である」(國本他.2004.121-122)． 4 人の考え方は，キース・デブリンの

パターンの科学としての数学という考え方やフィリップ・キッチャーの認識論と符合するものである.

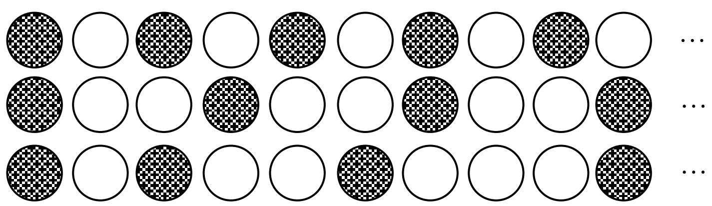
4.2 本質的学習環境におけるパターンの役割

Wittmann(2005)にこのようなエピソードが載っている.

おはじきのパターン

このゲームは Richard　Faiman が 1965 年にノーベル物理学賞を授与されたときの彼の講演の引用である.

～私がまだ幼く，子ども用のいすが必要だったころ―覚えている一番古い記憶だが―，私は父と夕食後によくゲームをしていた．父はロングアイランドシティのある場所から長方形をした風呂場の床のタイルをたくさん取ってきた．タイルを次々と並べ，一番端のタイルを押して，タイルが倒れていくのを見ていた．ここまではよかった．次にゲームがレベルアップされた．タイルには様々な色があった．白，青，青，白，青，青また白，青，青とおかなければならず，私はもう一つ青がおきたかったのに，そこは白でなければいけなかった．みなさんはすでに気づいているでしょう．これがねらいとしていることは何かということに…. はじめ，父は一緒に遊びながら楽しませ，徐々にその中に教育的価値を盛り込んでいった．思いやりのある母は，夫の仕組んだことや考えの趣旨に気付き「お願いだから，この子の好きなようにさせてあげて」といいましたが，父は「いいや，この子にはパターンに注意してもらいたいんだ．私が幼いころに経験させてやれる数学はこのくらいなんだ」



(Wittmann．2005.p.6)

Wittmann らは学習の中にパターンの科学としての数学観を用いることに関して，実証的研究を通して学習者の学習の様子について分析を行って

いる．学習において多くの学習者が，当面する規則が何を表すものであるかを理解し，規則を解明することに多くの時間を費やす必要があるとしている．しかし，その規則を明らかにすることができる段階に達すると，問題として与えられるものの中に潜むパターンを解明するだけではなくなるとしている．確かに学習を行うために教師が提示する問題に組み込まれたパターンを解明することが課題として示されるが，それ以上のパターンを学習者が探究しようとすることが挙げられる．

Wittmann が示す本質的学習環境の例としては，計算三角形や数の石垣などがある．計算三角形(図 3)や数の石垣(図 4)は豊かな計算練習ができるだけでなく，学習者自身が様々なパターンを生み出す事の出来る本質的学習環境であると言える．このような本質的学習環境を基にして構成される授業展開は「数学的なパターンを探求し，発見・再構成を行うことを期待される．さらにそこで発見されたパターンがなぜ成り立つのかを考察・表現する活動を基本とする学習環境である．そこでの学習は数学的パターン(教科内容)自体の学習であると同時に．そこでの学習のあり方自体についても学習(メタ学習)である」．(山本,2009,p.158)

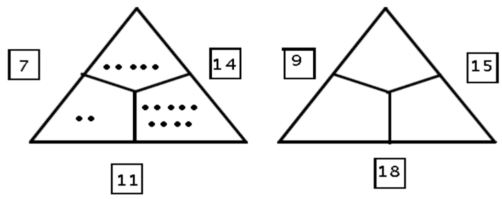


図 3：Arithmogons(Wittmann,1984,p.9)

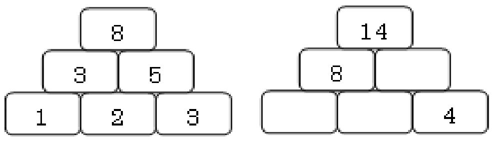


図 4：数の石垣

本質的学習環境の特筆すべき点は，構造を保持したまま，様々な場面に適用することが可能であるという点であろう．例えば数の石垣であれば，

足し算の問題や引き算の問題を考えることができるだけでなく，数の入れ方を工夫することで様々なパターンを発見することができるのである．

本質的学習環境において，パターンは学習者の思考の中に存在するものである．学習者はパターンを発見するという活動が要請されることで，これまで見過ごしてきたものにも意味を付与しようとする姿が確認されるようになる．学習者にパターンが及ぼす影響は，特に「自分たちが発見する」パターン，「私だけの」パターンと言うように，教科書に載っているような周知の数学的なパターンだけではなく，自らが生み出すことのできるパターンにも価値を見いだせるようになることである．

4.3 本質的学習環境の批判的考察

Wittmann は，デザイン科学として数学教育を捉えている．Teaching Units や本質的学習環境を示すことで Wittmann は，算数・数学の授業が教師によって意味のある学習活動を設計し，実践され，さらにはそれらが分析的に捉えられることをねらっているのではないかと考える．論文中をはじめ，Wittmann らが主催するプロジェクト「math 2000」によって出された『数の本』などでは多様で魅力的な題材が示されている．これらの題材を用いて本質的学習環境が設定され，子どもの学習が行われたとすれば，Wittmann がねらうように学習者のレベルに合わせてパターンを発見し，理由づけたり，推論したり，表現したりするような学習環境を作り出せるものとなるであろう．しかし一方で指摘されることは，それらの題材について Wittmann 自身がある題材から，ある一定のレベルへどのように教材化を図ったのか，また，本質的学習環境を設計するにあたり，教師は今ある題材もしくは，これから独自に開発する教材をどのように捉え，子どもたちの活動へと設定するかなどについての議論については，これまでの参考文献の中では十分に議論されていないと指摘することができる．

本質的学習環境では，必ずしも活動することによってどのような数学的な見方・考え方を育てることになるのか，という議論にまでは及んでいないと考えられる．筆者の主張としては Wittmann の数学をパターンの科学として捉え，教授学習に活かすことについては軌を一にする．一方で，本研究の意義としては Wittmann の本質的学習環境そのものの研究を行うのではなく，あくまで教材をパターンとして見るとはどういうことであるのか，またそうすることで，問題解決学習を教師が設計するための教材分析をどのように行うことができるのかについて明らかにされる必要がある．

パターンは万物を対象とすることができ，個々人が探求することのできるものである．そのため Wittmann らの提案する本質的学習環境には発見

や探求の面白さや興味深さにあふれている.

しかしながら，我が国の算数・数学教育におけるカリキュラム，また問題解決学習を顧みた場合に，本質的学習環境にを基に授業を構成することが望ましいのか, また学習に適しているのかという課題が生じたのである. 結果として, 本研究では, パターンの科学としての数学観に基づいて算数・数学教育を議論するため，本質的学習環境のコンセプトを参考にしても，本質的学習環境自体を採用することは本研究の趣旨とは異なるものである. そうであるならば，本研究を進めるにあたり，本研究が用いるパターンについて定義する必要がある.

第４章の要約

本章では，Wittmann の本質的学習環境を取り上げ，パターンの科学としての数学観を用いた算数・数学教育の可能性について明らかにした.

Wittmann は，学習者にパターンを発見し，理由づけたり，推論したり，表現したりするような学習環境として本質的学習環境をデザインすべきであるとしている. これらの活動はわが国でも一般に言われる，学習者の主体性を誘発することのできる学習環境であると認められる.

しかし一方で，我が国の算数・数学教育という視点で見た場合，本質的学習環境を採用するだけでは，日々の授業にパターンの科学としての数学観を反映させることが困難であるという示唆も得られた.

第５章　我が国の算数・数学教育における
パターンの科学としての数学観の利用

本章では，我が国の算数・数学教育を鑑み，パターンの科学としての数学観の有用性について論述する．5．1 では，2．3 において導出された課題をパターンの科学としての数学観に基づいて再考察する．5．2 で数学的な見方・考え方，問題解決学習についてパターンの科学としての数学観の特性から捉え直す．5．3 では問題解決学習とパターンの科学としての数学観における探求活動の整合性を論述する．

5.1 解決されるべき課題とパターンの科学としての数学観の有用性

2.3 において，3 つの課題を指摘した．それは以下の 3 点である

①数学的な見方・考え方と問題解決学習の根幹となる数学観の欠如

②知的探求が可能な問題解決学習の授業設計の分析的な視点の欠如

③方法面からみた数学的な見方・考え方による学習の繋がりを保証する問題解決学習のあり方についての議論

まず，数学的な見方・考え方と問題解決学習に根幹となる数学観の欠如に対して，これまで考察してきたパターンの科学としての数学観は対象の捉え方として，数学を構成する過程として，また学習者の認識の面からみても，数学的な見方・考え方及び問題解決学習を支える数学観として採用してよいと言える．

知的探求が可能な問題解決学習の授業設計の分析的な視点として，パターンの科学としての数学観を用いることで，我々は数学はすでに存在しているものとしてではなく，自ら創り上げるものとして学習者に示すことができる．その場合には算数・数学教育としてふさわしいパターンの導出が行われる必要があるが，詳細については後述するものとする．

方法面からみた数学的な見方・考え方による学習の繋がりを保証する問題解決学習のあり方についての議論に関して言えば，パターンの科学としての数学観とはもともと学問としての数学をどのように取り扱うことかということに端を発している．本質的学習環境にあったように，学習者が対象を捉え処理していくという過程は学校教育の範囲内にあるように思われるかもしれない．しかし，パターンの科学としての数学観を用いれば，従来いい意味でも悪い意味でも問題を解決するための数学的な見方・考え方や問題解決学習が，数学を創造する行為としての数学的な見方・考え方，問題解決学習として捉え直すことが可能になる．

本研究では，問題解決学習とは算数・数学としてふさわしい創造的な活

動として捉えている．さらに，創造的な活動を行う場である授業は，「あたかも子どもたち自身が，数学的知識・概念等を発見し，構成し，導き出したものであるような場」(溝口, 2007, p. 12)であるべきだと考える．教師にとって，問題解決学習は端的に言えば数学的な見方・考え方を育成する事を目的としていると言えるが，その方法として問題解決学習の授業が用いられると考える．このとき，教師の立場からすると，問題を解決する能力を育成する目的のために，例えば解決に用いさせたいアイディアや概念，知識を何とかして活動の中に盛り込もうとする．しかし学習者にとっては問題を解決する事と，教師がその問題場面において用いて欲しい解決の方法が一致せず，時には教師の意図していたものは不要のものとなる状況が生じることもある．なぜそのような乖離が生じるか，ここに問題点があると考える．

パターンの科学としての数学観においては，何がしかのパターンがあるとみなされた時,それはみなした者によって探求される対象となり得る．どのように探求すべきか，またどうすればそれがパターンであると言い得るのかについての根拠を求められる．さらにそれらのパターンはより洗練されたり，新たな広がりを見せたりするものとなり得る．このとき，数学は探求者によって構成されるのである．

パターンの科学としての数学観に基づく算数・数学教育を考えるという事は，つまり，数学を構成する主体が学習者である環境を設計する事であると換言できる．どのようなパターンであるとみなすかが個々人に委ねられ，それぞれの探求の道筋が保証されるパターンの科学としての数学観は問題解決学習における自力解決や練り上げの場面で新たな視点を投ずるものとなり得ると仮定づけられる．

5.2　パターンの科学としての数学観から見た数学的な見方・考え方と問題解決学習

パターンの科学としての数学観において，3.6 でも述べたように，パターンは様々な場面で認識する主体によってパターンとみなされる．また，パターンとみなしただけでは，数学であるとはいえず，それがどのような構造を持っていて，どう説明づけられるのかについて明らかにする必要がある．また，パターンは単独で存在するのではなく，他のパターンと構造化可能であったり，拡張可能であると言える．

パターンの科学としての数学観の特性を次の 3 点にまとめられる．

Ⅰ：万物が対象となること

Ⅱ：パターンとして捉えるだけでは数学として成立しないこと

Ⅲ：パターンから新しいパターンが生み出されること

これら 3 つの特性は数学的な見方・考え方，問題解決学習においてどのように認められるかを記述する．

5.2.1　万物が対象となること

パターンの科学としての数学の対象は自然界にあったり人間の精神によって作られるものであったり,他のパターンから作られたパターンである．しかしながら，例え同じものを見たとしてもすべての人が全て同じパターンとしてみなすことはできないかもしれない．それはパターンが鋳型のように，すでに法則として存在するものがあり，それを万物に対してあてはめることによって，パターンであると捉えるものではないからである．

算数・数学の学習において，万物が対象となるとはどういうことか．例えば，小学校第 1 学年の子どもたちははじめに，ものの個数を数える活動を行う．子どもたちが「みっつ」と呼んでいるパターンの対象は，リンゴであったり鉛筆であったり，ウサギやゾウであるかもしれない．3 つのリ

ンゴや 3 本の鉛筆，3 匹のウサギ，3 頭のゾウなど様々な集まりに対して「みっつ」と数える行為は集まりに対するパターンを表現したものであり，子どもたちは「みっつ」という意味を表す数として「3」を知るのである．認識していた対象を表現する手段として，3 という数を獲得した子どもたちは，次に整数のパターンへと認識を広げていくであろう．そこでは「ひとつ」「ふたつ」「みっつ」「よっつ」…と数えていたものが，1,2,3,4…という形でかき表され，リンゴのときにも，鉛筆のときにも，その個数が 1 ずつ増え，それを表す数の並びもただ記号が並んでいるのではなく，その意味として 1 ずつ数が大きくなるという規則性のあるものとして，約束されて並んでいるものであることを知るのである．

小学校段階の子どもたちにとって，数を獲得することや演算方法を獲得することは数学を構成するという点から見れば大変重要なことである．自分たちが知覚するもの，精神によって認識するものがどのようなパターンを振る舞い，表現され得るのかということに子どもたち自身が学習者として着目する必要がある．このことは，問題解決学習の目的の一つである創造的な活動と密接に関わりあることである．

以上のことから，算数・数学の学習においても，学習者がある対象の共通性や規則性を知覚することが必要である．そして，その共通性や規則性というのはどのような場面で確認されるものであるのかについて，知覚する主体である学習者によって捉えられることが必要である．また，Kitcher(1984)は人間がパターンを知覚することは人間の原初的な行動であるとしており，数学的な概念や知識を構成し始める小学校段階の子どもたちにとって，こういったパターンを探求する活動を課すことは認識論的な観点からいっても有効であると言える．

5.2.2 パターンとして捉えるだけでは数学として成立しないこと

パターンは確かに万物を対象とするものであったが，パターンとしてみなすことができても，パターンそのものが数学となり得るわけではない．ある種のパターンに気づいたり，ある種のパターンを使っているという段階では，まだパターンを形式化したり，科学的な分析にかけるということと同じではない．数学として扱うためには，世界の中の新しいパターンを発見し，それらのパターンを分析，記述し，公理体系が構築される必要がある．(デブリン, 1995)

学習場面において，ある種のパターンに気付くとき，その多くの対象が具体的なものであろう．例えば，“いくつといくつ”という学習で，おはじき 5 個は何個と何個でできているかという学習を行う．箱の中に赤いおはじきと青いおはじきが入っており，そこから 5 つを無作為に取り出したとき，赤いおはじきがいくつと青いおはじきがいくつで 5 個のおはじきになっているかを考える．赤いおはじきが 3 つと青いおはじきが 2 つの時も，赤いおはじきが 1 つと青いおはじきが 4 つの時もおはじきは全部で 5 つとなるというパターンがそこに存在することが認められる．いくつといくつで 5 つになるのかというときに，それらの組み合わせは幾つ存在し，どうしてそれ以外の組み合わせは認められないのかということを，小学校第 1 学年の子どもたちであっても，探求させたいのである．学習者に「どうしてそうなるのか」ということを探求し「そうなる理由や根拠」についての責任の担い手となれるよう子どもたちの能力を養っていくために，このような探求活動が必要であると考える．そのため，「法則を見つけて終わり」というような学習は決して望ましくなく，それがどのように説明づけられるのか，例えば言葉や式で表現し，他に同じような法則が使われていないかがさらに探求されることが望まれる．

5.2.3 パターンから新しいパターンが生み出されること

パターンは個々に存在しているものではなく，構造化可能であったり，相互作用してはたらいたりするものであること，また拡張・一般化が可能であることを含んでいる．

算数・数学教育では，各領域を統合的に見ること，また既習の事柄を用いて学習を行うこと，その場面で明らかになった事柄を他の場面にもあてはめて考えることができるような子どもを育てることは共通の認識であると考えている．これらの事柄を達成するこれは個々の学習において認められたパターンが独立して存在するのではなく，関連しあって存在することであると換言できる．このとき大変重要なはたらきをするのが 2：パターンとして捉えるだけでは，数学として成立しないことで述べた，パターンの探求活動である．パターンを探求する際には，パターンが構成される仕方や方法について探求する．そのため，場面は異なっていても探求の方法が同じであるときや，同じ構造をもったものであるとみなせる場合に，あるパターンは独立して存在するものではないとみなすきっかけとすることができる．

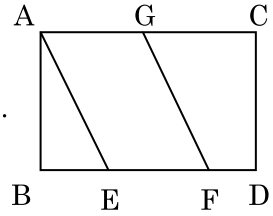
例えば，パターンとしてイメージしやすいものとしては，図形の求積公式があるだろう．三角形の求積公式は(面積)＝(底辺)×(高さ)÷2 であるし，平行四辺形の場合には(面積)＝(底辺)×(高さ)，台形の場合は(面積)＝(上底+過程)×高さ÷2 となる．これらの公式の関係性はどうなっているのであろうか．次のような問題場面のとき，それぞれ公式をパターンとみなすと，パターンが相互に関係しているものとして捉えられる．

問題の提示

長方形を図のように三角形と平行四辺形，台形に分けます．

三角形，平行四辺形，台形の面積の比はどのようになるでしょうか．

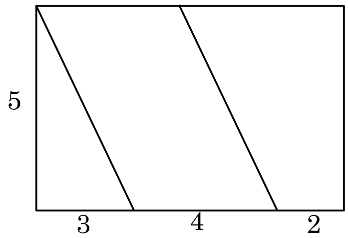
このとき，BE : EF : FD＝3 : 4 : 2 とします．



解決 C-1

高さを具体的な数値で仮定して面積を求めて面積比を求める．

高さを 5 として，三角形をア，平行四辺形をイ，台形をウとすると，



ア＝3×5÷2＝7.5

イ＝4×5＝20

ウ＝(2+5)×5÷2＝17.5

として，ア : イ : ウ＝7.5 : 20 : 17.5

計算していくと，

ア : イ : ウ＝3 : 8 : 7

C-1 と C-2 は

(三角形)＝(一辺)×(高さ)÷2

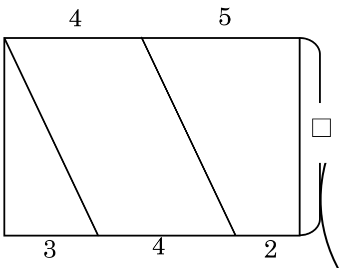
(平行四辺形)＝(底辺)×(高さ)

(台形)＝(上底＋下底)×(高さ)÷2

というように，図形と求積公式とを一意に対応するものとして捉えている．

解決 C-2

高さを□で表し，式の操作によって面積比を求める．



高さを□とおいて，

ア : イ : ウ

＝(3×□÷2) : (4×□) : {(2+5)×□÷2}

＝(3×□÷2) : (4×□÷2×2) : {(2+5)×□÷2}

＝(3×~~□÷2~~) : (4×~~□÷2~~×2) : {(2+5)×~~□÷2~~}

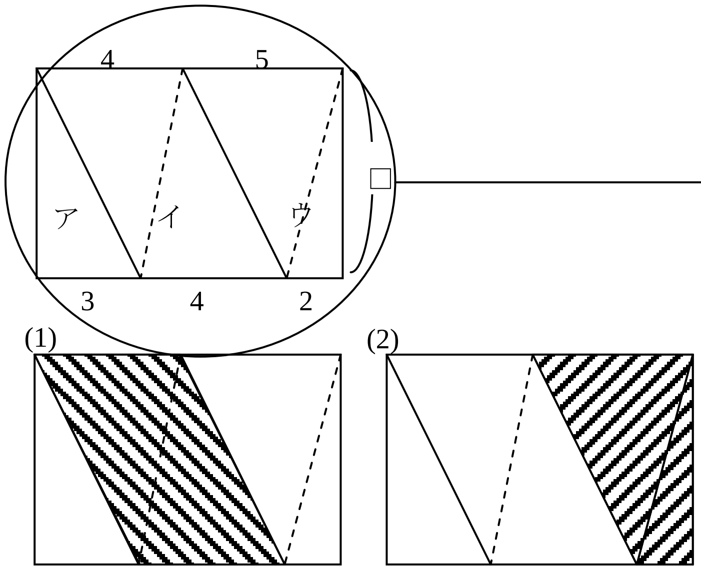
＝3 : (4×2) : (2+5)

＝3 : 8 : 7

演算を行う際に高さに具体的な数値を置くか，□とおくかという違いはあるが，C-1 と C-2 では，図形と求積公式の関係性について捉え方に違いはない．

解決 B

アとイとウをすべて三角形に分割することにより，三角形の求積公式のみを用いて面積比を求める



B は，図形を構成する要素として，三角形を見ている．平行四辺形も台形も三角形 2 つによって構成されるものであるとみなすことによって，式の表現も C-1 や C-2 とは異なった表現となっている．

ア：イ：ウ＝3×□÷2：4×□÷2×2(1)：5×□÷2＋2×□÷2(2)

＝3：4×2：(5+2)

＝3：8：7

B では，平行四辺形の求積公式を三角形の求積公式によって構成できること，また台形においても同様であることが捉えられている．

解決 A

アとイとウを全て台形とみなすことにより，台形の求積公式のみを用いて面積比を求める．

ウ…上底が５，下底が２の台形

イ…上底と下底が共に４の台形

ア…上底が０，下底が３の台形

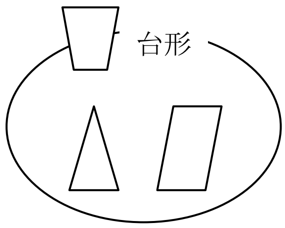
ア：イ：ウ＝(0+3)×□÷2：(4+4)×□÷2：(5+2)×□÷2

□÷2 が全て相殺されるので，

ア：イ：ウ＝0+3：4+4：5+2

＝3：8：7

A では，図形について，



のように，図形の包摂関係と求積公式を結びつけて捉えている．

この事例は面積比についての場面である．活動 C-1，C-2 では図形それぞれの求積公式が用いられている．これは三角形は三角形の求積公式で求めるもの，平行四辺形は平行四辺形の求積公式でと言ったように，一つの対象に対して一つのパターンがあてはめられている．しかし，活動 B にお

いては，平行四辺形や台形を 2 つの三角形によって構成される図形であるとみなすことによって，平行四辺形や台形の求積公式を三角形の求積公式で置き換えて考えることが可能であることに着目している．また活動 C では，図形の特性に着目し，三角形や平行四辺形を特殊な場合の台形とみなすことが行われている．以上のことから，三角形や平行四辺形，台形の求積公式は個々に存在するものではなく，図形の構成や包摂関係を考えた場合に相互に関係しあっている事が分かる．

2.3 において導出された課題について，本事例の内容を中心に検討すると，以下のように捉えることができる．一つ目の課題として，問題解決と数学的な見方・考え方の独立があった．学習者が問題解決学習を通して獲得すべき学習内容は, 自ら数学を構成する活動を通して獲得するのである. これは問題解決の授業を設計する教師と算数・数学的な活動を行う学習者が共に同一の数学観によって関係付けられることによって達成されると考える. 教師にとっては数学的な概念や知識として自明なことであるが故に, 授業でどのような問題として提示するかが大きな問題となるであろう．教師が意図した解決が提示した問題場面では十分に行われない一つの原因としては，それが子どもたちが解決する活動を促すような，まさに「解決したい」「どういうことか解明したい」と思うような問題場面になっていないことにあると考える．もしくは，学習者が探求する余地が残されていないことも問題があるかも知れない．例えば図や表をかくという活動も，かくことが目的となってしまうと，それは探求しているとは言えずやはり，問題解決と言う授業スタイルと数学的な見方・考え方を独立させてしまう原因となり得るであろう．

２つめの課題として，問題解決の授業設計の際，その活動が知的探求可能なものであるか分析する視点の欠如が挙げられた．パターンの科学としての数学観に基づけば，単に答えが導かれることや，単にきまりや変化を

認められることは余り重要なことではない．知的探求が可能であるということは，いいかえれば学習者によって，その答えが妥当であるという説明がなされることが可能かどうかという所にあると言える．その説明の際に自分たちの解決の際に用いた方法を反省的に見たり，整理することが求められるであろう．

３つ目の課題として，数学的な見方・考え方による学習の繋がりを保証する問題解決学習の在り方があった．算数・数学的な活動は数学的な見方・考え方が表出されたものである．本事例では，図形の求積公式と包摂関係を用いて，問題の解決が図られている．これは一つの図形に対して，これまで個々に定められていた求積公式が図形の包摂関係という見方・考え方を用いることで，特殊な場面を考える材料となっている．つまり，「量と測定」において学習した求積公式と「図形」において学習した図形の性質を結びつけることができたのである．よって単に学習で獲得した知識が系統づけられることを基に学習の繋がりを保証するだけではなく，数学的な見方・考え方によっても学習の繋がりを保証することができると言える．

5.3 問題解決学習とパターンの科学としての数学観の整合性

本研究でいう問題解決とは【問題提示】【自力解決】【練り上げ】【評価/振り返り】という展開の授業(図 5)をさし，【自力解決】では，学習者一人ひとりが自ら解決に臨めるよう数学的価値に基づいて個人差に応じた解決が設定されるものである．

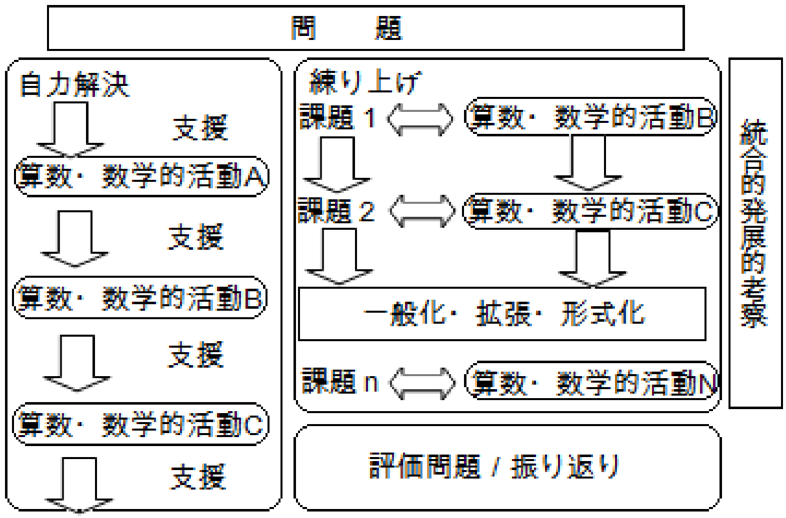


図 5：算数・数学の問題解決授業モデル(溝口,2007,p.21)

そこでの活動は算数・数学としてふさわしい創造的な活動であることが求められる．そのため，自力解決においては 3 段階程度の活動を設定するべきであり，それらの活動は，数学的価値づけのもと，一つの文脈上に構成されるものである．

パターンの科学としての数学観に基づけば，問題解決学習の個々の場面は次のように言いかえることができる．

【問題提示】場面は対象を捉えることに等しいと言える．問題提示が行われると，学習者はその問題を解決しようと取り組むのであるが，その問題が探求や解決に耐え得る問題となっている必要がある．学習者が持つ様々な見方・考え方や解決の手段でもってすれば解決の糸口が見えそうで

はあるが，必ずしも解決に直結するわけでなない．パターンとしてみなすことができるという事は，確かにパターンとみなすことができる見方・考え方が備わっている，もしくは対象を探求することができるからこそ，パターンとみなせるのである．

【自力解決】はパターンの発見や探求に対応するものである．本時の学習において，教師が何を学習者に身につけさせたいか，対象をどのように捉えられるようにさせたいかということが重要になってくる．従来であれば図にかいてみることや表にすること，式に書き表すことなどが挙げられてきたところである．しかし，図や表に表すことを学習者に課すことと，解決のために図や表を用いることは同じものではない．特にパターンを探求するという場合において，結果として何をパターンとみなすのか，どうしてパターンであると言えるのかが問題となる．そのときその根拠となるのが結果として図や表であると言える．その中に見られる特徴や法則性を数学的に意味づけすることで，学習者の探求した事柄はあるパターンとして規定されるのである．しかし，パターンとひとたび名前のついた対象でも，さらに発展して新たなパターンをその中に見いだすことも可能である．また発見されたパターンを拡張することで新たなパターンとすることもできる．その結果得られるものこそが学習内容・教科内容であると言ってよい．

さらに子どもたちの既習の内容と本時において新たに獲得された概念・知識が一般化・拡張・形式化される段階が【練り上げ】や【評価/振り返り】に相当するものである．自力解決において，例えば自力解決が A,B,C というように設定された場合，自力解決 A しかできなかったから駄目だというわけではない．確かに本時では自力解決 C において設定した活動へと，学習者の解決活動が高められることが望ましいことは言うまでもないが，あくまで自力解決はそのあとに行われる練り上げに臨むための活動であると

本研究では捉えている．活動は，数学的価値づけのもと，一つの文脈上に構成されるものといったように，自力解決Aにもきちんと数学的な価値がある．活動がAからCへと移行する過程において価値が高まるが，練り上げにおいて全ての自利解決の段階を紹介しただけでは練り上げとは呼べないであろう．先にも述べたように，個々の自力解決において，解決されたものとして示される事柄は，あるパターンである．しかしながら，そのパターンにはさらなる探求の余地が残っていたり，捉え方を変化させることで，今パターンとみなしているものとは別のパターンともみなしたりすることができる．練り上げをこのように捉えるためには，自力解決の各々の期待される活動は必ず繋がりあるものとなっている必要があるのである．自力解決においては自力解決Aの活動までしか取り組むことのできなかった学習者にとって，自力解決BやCの活動でみなされたパターンは未知のパターンである．しかし練り上げにおいては，結果として得られたパターンを紹介することを目的としているのではなく，自力解決Aで得られたパターン，探求方法がどのように変化することでそれらがより高められていくのかを考える場とすることができるのである．

第5章の要約

本章では，我が国の算数・数学教育におけるパターンの科学としての数学観の有用性，また問題解決学習との整合性について考察を行った．

まず，算数・数学教育が抱える問題として挙げられた，

①数学的な見方・考え方と問題解決学習の根幹となる数学観の欠如

②知的探求が可能な問題解決学習の授業設計の分析的な視点の欠如

③方法面からみた数学的な見方・考え方による学習の繋がりを保証する問題解決学習のあり方についての議論

について，我が国の算数・数学教育に対し，パターンの科学としての数学観が有用であること，また，パターンの科学としての数学観における探求活動の様相から，授業設計の分析的な視点が導出可能であることが明らかになった．また，パターンの科学としての数学観が，学問としての数学を支えるものであるように，学校教育の中だけでなく，長い将来にわたって息づく見方・考え方となり得，その力を育成するための問題解決学習の扱いについて明らかにした．

数学的な認識に立てば，パターンの科学としての特性が実際の学習の場面でどのように出現するかについて検討し，事例の検討から，パターンの科学としての数学観を用いることで，他領域の事柄を統合的に見ることが可能であるという結論が得られた．

さらに，問題解決学習の流れとパターンの科学としての数学観の探求の流れには整合性が認められ，算数・数学教授学の構築に向けた基礎的な要件をそろえることができた．

第６章　パターンとパターンの探求の様相の連関モデルの構築

本章では，算数・数学教育で用いるべきパターンの導出と，パターンとパターンの探求の様相の連関モデルの構築を行う．

6．1では，学習にふさわしいパターンを導出し，6．2でパターンが探求される様相について記述する．6．3では6．1，6．2で明らかになった事柄がどのように連関してるかを示し，6．4でモデル化を行う．6．5では問題解決の授業との整合性を明らかにし，6．6においてモデルの検証を行う．

6.1 パターンの導出

算数・数学教育においてパターンの科学としての数学観を用いる有用性が認められたが，本研究は Wittmann(1995)が提唱する本質的学習環境を採用して研究を行うのではなく，あくまで問題解決学習というスタンスを保持する．パターンは万物を対象とすることができ，個々人が探求することのできるものである．そのため Wittmann らの提案する本質的学習環境は発見や探求の面白さや興味深さにあふれている．

しかしながら，我が国の算数・数学教育におけるカリキュラム，また問題解決学習を顧みた場合に，本質的学習環境を基に授業を構成することが望ましいのか，また学習に適しているのかという課題が生じたのである．結果として，本研究では，パターンの科学としての数学観に基づいて算数・数学教育を議論するため，本質的学習環境のコンセプトを参考にしても，本質的学習環境自体を採用することは本研究の趣旨とは異なるものであると結論付けた．そうであるならば，本研究を進めるにあたり，本研究が用いるパターンについて定義する必要があると言える．

我が国の算数・数学教育，とりわけ問題解決という視点から見ると，確かに学習者はパターンを探求し・発見し・説明付け・表現するという活動を行なうが，その活動を経ることによって学習者が数学的な内容の系統性や結び付きを学ぶことができるかという点に不十分さを感じざるを得ない．Wittmann が本質的学習環境においてパターンと表現するものは，例えば数と計算に関するパターンであったり，幾何学的なパターンである．そのため，本研究では対象そのものが有するパターン，換言すれば対象に依存するパターンを明らかにし，規定するのではなく，対象の捉え方としてのパターンを規定することが必要であると主張する．これらのことを踏まえ，本研究で用いるパターンは，以下の条件を満たすものとする．

条件 1：探求対象に依存しないパターンであること．

条件 2：問題の解決に有効な示唆が得られるパターンであること．

条件 3：学習内容を統合的に捉えられるパターンであること．

パターンは対象の規則性や法則性，特徴を抽象することによって認められる．そのため，本研究で扱うパターンと呼ばれるものは，対象の捉え方としての役割を有したものであるべきであると言える．またその捉え方は算数・数学教育においてまさに子どもたちの学習に適したパターンでなければならない．問題を解決するというときに，その方法を知っているか否かで，解決できるかできないかが決定されるような「解法のパターン」を指す言葉ではないことをことわっておく．つまり本研究においてパターンは教えるべき内容という取り扱いではなく，養われるべき数学的なセンスという側面を有していると言える．

学習において，対象をどのように捉えることが望ましいのかについて，「関数の考えの指導」(文部省，1973)，前田(2011)におけるスティーンやデブリンのケーススタディーを元に検討した．まず，対象をパターンとみなすには, 対象となるものの中に共通するものを認識することができるか, 一意対応するものを認識することができるかが必要である．対象となるものの中に共通するものを認識することによって，あるパターンが同定されると考える．例えば，一般に三角形と呼ばれるものは，表象された大きさや色，線の太さや向きに関係なく抽象される特性を持つものに適合する図形を三角形と捉えるのである．表面的には異なる様相であっても，三角形という集まりであると見ることができることで三角形の構成や要素についてさらに探求することができるようになるのである．よって，第一に **[集合のパターン]** を認めることができる．次に，一意対応するものを認識することにより, あるパターンが認められる **[対応のパターン]** である. 例えば,

計算で 5＋3＝8 が行われる場合，5＋3 と対応しているものが 8 であると見ることができる．右辺が 8 となるパターンについて探求するとなると，同様の操作を用いることで他にも 4＋4 や 6＋2 も 5＋3 に等しいものとして認めることができるようになる．また数量の関係を捉える際にも対応することを基に考察することが重要となってくる．

さらに，パターンは対象の変化の様相を捉えて，パターンとしてみなすことができる．対象の変化の様相の捉え方として，本研究では数量の変化と移動に着目した．例えば，直方体の高さと体積の変わり方について見ると言った場合などに，直方体の縦の長さを 3cm，横の長さを 5cm とし，高さを変化させると，それに伴って体積も変化する．この場合の変化の仕方を見るのである．また，数量的な変化は 2－4－ロ－8 のような数列に入る数字を考える場合や，答えが変化しない場合について考察するときにも，重要な考え方となる．これらのことから**[増減のパターン]**が導出される．

合同な図形を作図する場合に，ある三角形を別の位置に動かすという行為と捉えることができる．合同な三角形の作図の仕方には「三辺」「二辺とその間の角」「一辺とその両端の角」の 3 つに着目する方法があるが，どうしてこの 3 つが取り上げられるのか．合同な図形の作図を動的に捉えることで，作図の条件がこの 3 つで十分であることが考察されるであろう．図形やグラフでは特に，対象が動的に変化する様相に着目することで，変化の様子に意味づけを行うことが可能であり，こういった変化を捉えられることは大変重要である．よって 4 つ目のパターンとして**[移動のパターン]**を規定する．

以上のことをまとめると, 本研究で扱われるパターンは次の４つである.

集合のパターン(PS):	様々な種類のものの集まりの中で共通するものを認識することで認められるパターン
対応のパターン(PF) :	一意対応するものを認識することで認められるパターン
増減のパターン(PID) :	対象の数量的変化を認識することで認められるパターン
移動のパターン(PM) :	対象の動的変化を認識することで認められるパターン

6.2 パターンの探求の様相

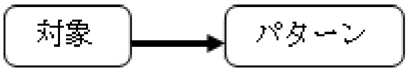
パターンの科学としての数学観の導出の際にも指摘された様に，パターンの科学としての数学観におけるパターン探求が不可欠である．パターンの探求の様相として認められたのは対象を視覚化したり，形式化したり，拡張するといったものである．これまでの研究で導出された探求の様相は対象や問題場面に依存するものであった．

パターンの科学としての数学観においてパターンを探求することは不可欠の活動であり，その必要性は対象と対象から発見されるパターンを結び付けるものである．すなわち，パターンの探求とは，対象から導出されるパターンがなぜパターンとしてみなされるのか，理論負荷的な役割を担うものである．

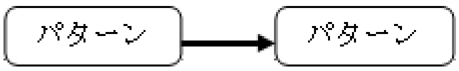
一般的に用いられるパターンは，数のパターンや計算のパターン，形のパターンなど，それぞれ対象に依存するパターンを意味するものである．しかし，本研究では，対象に依存せず，対象の捉え方としてパターンを用いている．そのため，ある α というパターンが発見されたというときに，本研究では[集合のパターン]として見ると，α という特殊な場面を抽出することができるというように解釈するものとする．α という特殊な場面が抽出される過程がパターンの探求が行われている場面である．算数・数学教育においては，結論の根拠や理由に相当するものとしてパターンの探求を捉えることができる．

6.3 パターンとパターンの探求の連関

パターンの科学としての数学観に基づくと，我々は対象に対し，その特徴や規則性・法則性を明らかにしようと探求する．例えば数値を書き出して表にしたり，グラフに表したり，図にしてみたりという行為である．その結果，[対応のパターン]として対象を見たときに，対象を表す一般化された式が得られる．つまり探求の対象とパターンはパターンの探求の様相によって結びつけられるのである．



さらにその得られた式やそこに用いた表について何か他のパターンが隠れていないかというように探求が展開し，また新たなパターンが発見されるかもしれない．



このようにパターンとパターンの探求の様相は，対象を探求することでパターンとして捉えることができ，そこで得られたものが新たな対象となり，さらに探求され新たなパターンとしてみなされるという活動が要請されるのである．このような連関を可能にしているのは，パターンが独立して存在するのではなく，相互に関連して存在するものであるためである．

6.4 パターンとパターンの探求の様相の連関モデル

これまでの検討から，本研究で定めたパターンとパターンの探求の様相の連関は以下のモデル(図 6)によって示される．

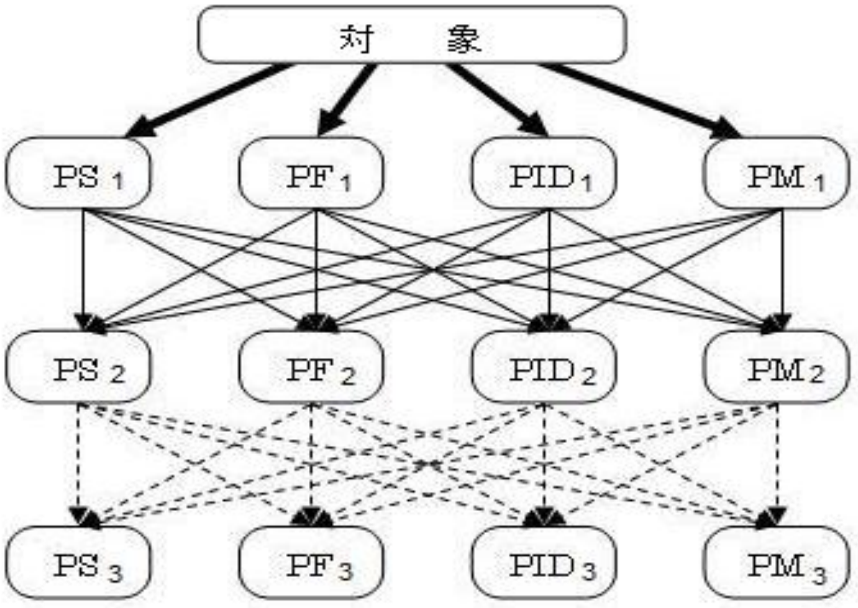


図 6：パターンとパターンの探求の様相の連関モデル

対象は探求されることにより[PS：集合のパターン][PF：対応のパターン][PID：増減のパターン][PM：移動のパターン]とみなすことができる．パターンが階層状になっているのは，3．3 で述べたようにパターンとしてみなされ，得られた結果も，新たな対象となることが明らかになったためである．また対象を探求することで得られたパターンがその本性を厳密に表すとは限らず，得られたパターンをさらに探求することが必要となる場合があるためである．例えば，$PF_1 \rightarrow PS_2$ となるようにはじめは対応のパターンとしてみなし，得られたものが，さらに探求されることで新たに集合のパターンとしてみなすことができるということである．または $PS_1 \rightarrow PS_2$ のように一度集合のパターンとしてみなし得られたものが，他の集合のパターンとして，拡張されたものが発見される可能性があることを示してい

る．このモデルにより，パターンの探求とは対象とパターン，また個々のパターンの関係性を表すものとして意味づけられる．

6.5 問題解決の授業枠組みとの整合性

対象を探求し，パターンを発見する．発見されたパターンが新たな対象となり，探求されることによってさらに新たなパターンが導出されることについて，問題解決学習の特に【問題提示】と【自力解決】に着目すると，図 7 に示されるように整合性が認められる．

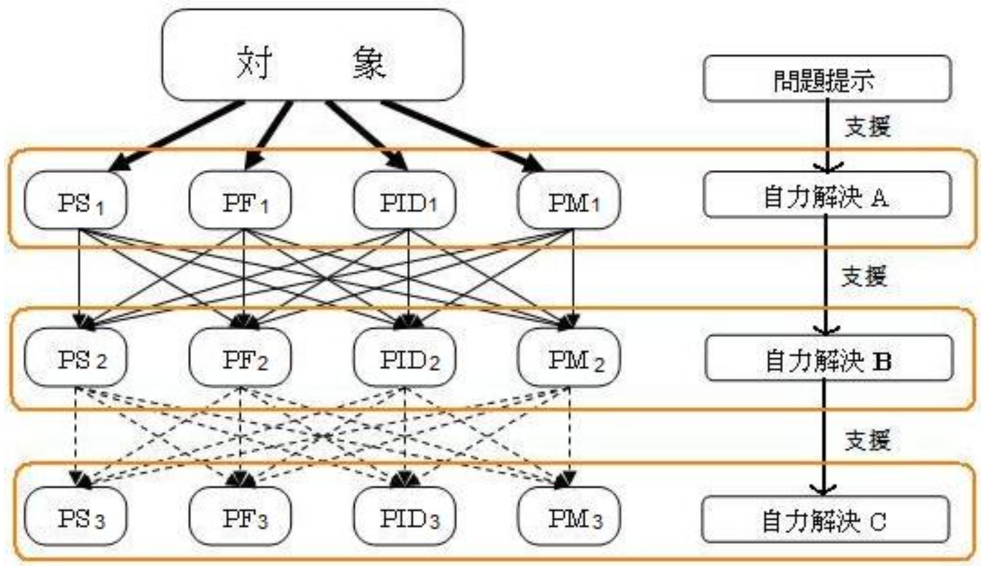


図 7：パターンとパターンの探求の様相の連関モデルと問題解決学習の整合性

まず，パターンの科学としての数学観における探求の対象は，学習場面においては問題場面として捉えられる．問題場面においては学習者に対して探求対象が明確に示される必要がある．

次に，パターンの階層を自力解決 A・B・C とみなすことができる．自力解決での期待される活動は一つの文脈上に数学的価値を伴って設定されるものである．一方，パターンはパターンの探求の様相によってそれぞれのパターンと結びつけられるものであり，発展・深化するのである．学習者にとって，問題場面にある対象を探求し，どのようなパターンとしてみなすことができるかが，図 5 において PS_1～PM_1 の結果として得られるものである．また自力解決 C として，PS_3～PM_3 のいずれかが該当し，それ

らは探求の様相によって PS_2～PM_2 のいずれかを経由することになる．

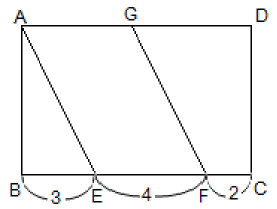
パターンの探求は授業における教師の支援ともリンクしている．問題解決における自力解決の活動内容は，予想される活動の羅列ではなく，期待する活動が数学的側面から，また学習者の実態を反映して配列されるものであった．このとき，どういった支援をすべきか，という課題があるが，自力解決の各活動とパターンの階層を結び付けるパターンの探求を鑑みると，パターンの探求において必要な着眼点が支援を行う上での重要な示唆を含んでいる．つまり，自力解決 A での期待される活動がどうすれば自力解決 B へと高められるかは, 自力解決 A で探求され発見されたパターンが自力解決 B でみなされるべきパターンとなるために，どのようなパターンの探求の過程が必要かを明らかにすることで得られるものである. さらに，パターンとパターンのつながりがパターンの探求によって説明づけられない場合，それら 2 つのパターンは数学的構造が異なるか，2 つのパターンの間に異なるパターンを経由する必要があると分析することも可能である．

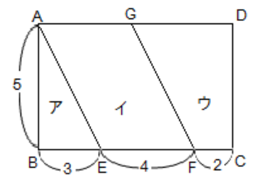
6.6 モデルの検証

パターンとパターンの連関モデルが実際の問題解決学習の授業設計の際，どのように機能するか検証を行う．

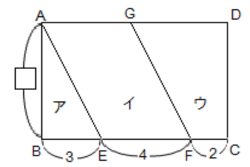
【問題場面】

長方形を図のように三角形と平行四辺形，台形に分けます．BE : EF : FC＝3 : 4 : 2 のとき，3 つの図形の面積比はどのようになるでしょうか．

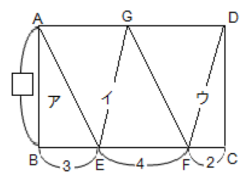




【自力解決 A-1】高さを具体的な数値で仮定して求積公式によりそれぞれの図形の面積を求め，面積比を求める．



【自力解決 A-2】高さを□で仮定し，A-1 と同じ考え方で面積比を求める．



【自力解決 B】平行四辺形や台形が三角形の合成によって構成されている事に着目し，3 つの図形を三角形の求積公式のみを用いて面積比を求める．

【自力解決 C】台形の求積公式に着目する．台形の求積公式(上底+下底)×高さ÷2 において，三角形は上底が 0，平行四辺形は上底と下底が等しい場合としてみることで，面積比を求める．

本事例は，一般化を志向した事例であった．結果として，面積比は 3 : 8 : 7 になるのだが，この数値が表すものは一体何であるかという所まで本時では探求されたい．

まず問題となった分割された長方形には，高さが定められていなかった．

問題提示のときに面積比を予想させれば，おそらく辺 BC の分割に用いた比を答えるであろうが，おおよその大きさを考えたときにはそれが適当ではないことが分かる．そうであれば何が必要であり，どうすれば面積の比を求めることができるか，という対象をパターンとみなすための探求の方法が示される必要がある．そのため自力解決 C では，学習者が具体的な数値で高さを定めるか，□などを高さとして置いて解決が図られると期待された．自力解決 C では，様々な高さで検証されたが，高さには関係なく，面積比がいつも一定になるという増減のパターン[PID_1]が確認された．そして面積比は常に 3：8：7 であった．このときに用いた探求の方法は，それぞれの図形に対応する求積公式が用いられている．高さが面積比に関係しないのであれば，3 と 8 と 7 という 3 つの数は何に依拠しているのかという点が課題となる．

自力解決 B では，それぞれの図形が三角形により構成されている事に着目し，三角形の求積公式のみで面積比を簡潔に表すことができる．これは，図形を三角形による構成物として集合のパターン[PS_2]としてみなすことができるためである．　自力解決 C で高さが変化しても面積比は変化しないことが明らかになったが，3 つの求積公式をそれぞれの図形に適用しなければならなかった．自力解決 B へ高める支援として，図形の構成に着目し，用いる求積公式を減らせないかという探求が行われる必要がある．

さらに活動 C では，それぞれの図形を台形とみなして，面積比 3：8：7 は(上底+下底)によって説明づけられるものであるという結論が得られる．用いたパターンは集合のパターン[PS_3]であり，図形の包摂関係に着目させている．

つまり，本事例は図 8 のようなパターンとパターンの探求の様相であると分析される．

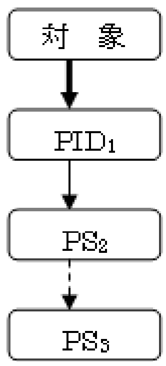


図 8

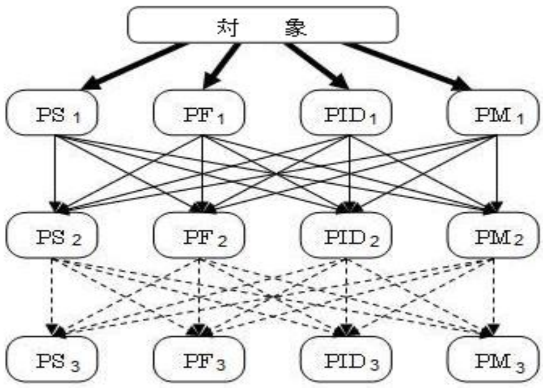
第 6 章の要約

本章では，パターンとパターンの探求の様相の連関モデルが構築され，問題解決の授業枠組みとの整合性が認められた．

まず，本研究で対象となるパターンの導出では，学習内容，備えるべき数学の捉え方という観点から，以下の 4 つのパターンが導出された．

集合のパターン(PS):	様々な種類のものの集まりの中で共通するものを認識することで認められるパターン
対応のパターン(PF)：	一意対応するものを認識することで認められるパターン
増減のパターン(PID)：	対象の数量的変化を認識することで認められるパターン
移動のパターン(PM)：	対象の動的変化を認識することで認められるパターン

さらにこれらのパターンは探求されることによって，深化，展開されることが明らかになり，パターンとパターンの探求の様相の連関モデルが得られた．



本モデルは問題解決学習の授業枠組みとの整合性もあることがら，問題解決学習における，自力解決の設定にも有効なモデルであることが明らかとなった．

第 7 章　パターンの科学としての
数学観に基づく授業設計

本章では，パターンの科学としての数学観に基づいて，授業設計を行う．

7.1 より大きな数のたし算

本事例は Wittmann(2009)によるものであり，様々なパターンを発見することが可能である．

１から 9 までの数字のカードがあります. 1 から 9 までの数字を 1 回ずつ使って，3 つの 3 桁の数字を作ります．3 桁の数字を足し合わせて，1000 以下の合計になるものをつくりましょう．

Wittmann はこの問題について, 次のような活動をするよう助言している．「まず，与えられたルールに従って，間違えた答えも含めたくさんの結果を得ること．次に，得られた結果を集めて比較を行う．生徒の見つけたパターンについて，教師からのヒントや問題文から間違った結果に気づき，教師の支援を受けながら，今得られている結果のパターンにしたがって，結果で欠けているものを埋めることですべての可能な結果に辿りつく．さらに得られた結果について，すべてが 9 の倍数になっているというパターンにも気づく事ができる．」(Wittmann, 2009, p. 253)

本事例での探求活動を行う最低条件は(3 桁)＋(3 桁)＋(3 桁)のたし算ができることである．手当たり次第に演算を行うことではなく，条件をつけて演算を行い，求められる答えをコントロールすることが可能であること，また計算式や筆算を比較，検討することでこの問題場面がもつ構造を明らかにすることが可能である．

7.1.1 小学校第 3 学年：計算のしくみ

本事例では，53+26 と 23+56 の答えが等しくなることつまり，

$$(10a+b)+(10c+d)=(10c+b)+(10a+d)$$

であることを利用した授業を設計する．本事例では筆算の表現形式を用いるため，位に着目しやすい．また文字式での証明を課すことが妥当ではない小学校第 3 学年の学習者にとって，十進位取り記数法と〇図を用いた

説明へと展開することが可能である.

無作為に選んだ数を足し合わせると結果が同じになる理由を探求することが望まれる. 加えて桁数の多い筆算の練習も可能である.

7.1.1.1 自力解決期待される活動の設定に向けた注意点

複雑な筆算の形式であることから演算に時間がかかることが予想される. 自力解決においては幾つかの筆算を計算した結果から推測が始められるようにしたい.

また, 計算間違いをしている場合には, 他の筆算も作ってみる様声かけをし, 間違ったもの以外が全て一定の答えになることに注意を向けさせることで確かめの必要性を示すことも考えられる.

●いくつかの筆算を計算することで, 答えが一定になると仮定できる.

百の位, 十の位, 一の位にそれぞれ使える数値を入れ替えながら, 実験することで, 答えが一定の値になるとを予測する.

●答えが一つになることについて説明する.

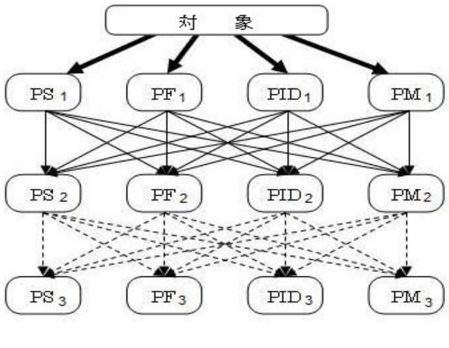
・百の位, 十の位, 一の位 3 つともを変化させるのではなく, 一部だけを抽出して考える.

・図を使って, 各位の数を入れ替えても答えが常に一定になることを説明する.

7.1.1.2 自力解決の設計

7.1.1.1 の考察をふまえ, モデルに基づいて授業を設計する.

まず, 様々な筆算を作り, 計算結果を比べることで, 答えが一定になるという増減のパターン[PID_1]とみなすことができる.



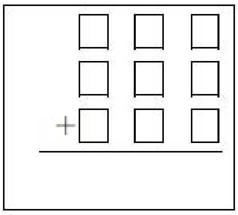
しかし，$[PID_1]$とみなした根拠は作られた筆算がどれも 900 になりそうだというものであったため，より明確な根拠を探求していくことが必要である．そこで 900 以外の答えが作れないことを一の位，十の位，百の位に用いる数と，答えの一の位，十の位，百の位に入る数を対応させて考えることが求められる$[PF_2]$．

さらに，筆算全体を対象に，各位に用いることのできる数の限界，つまり繰り上がりの仕組みに着目し，位取り記数表を用いての説明活動が行われる必要がある．そして$[PID_1]$で得られたパターンの意味づけを行うものとして，$[PID_3]$の表現活動が必要となる．

7.1.1.3 学習指導案【計算のしくみ】

問題の提示

1から9までの9枚のカードを1回ずつ使って，
いろいろな計算を作ります．
百の位に1・2・4，十の位に3・6・9，一の位に5・7・8を
使ったときの答えは何個できますか．



自力解決 C　組み合わせを変えて筆算を作り，答えがいつも900になることを明らかにする．

$$\begin{array}{rrrr} & 1 & 3 & 5 \\ & 2 & 6 & 7 \\ + & 4 & 9 & 8 \\ \hline & 9 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & 2 & 3 & 8 \\ & 1 & 9 & 7 \\ + & 4 & 6 & 5 \\ \hline & 9 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & 4 & 6 & 5 \\ & 2 & 3 & 7 \\ + & 1 & 9 & 8 \\ \hline & 9 & 0 & 0 \end{array}$$

支　どうしていつも900になるのかな．他の答えは作れないのかな．

自力解決 B　作った筆算をもとに，筆算の位取り記数法に着目して，1つの位のみに着目して数の位置を変え，答えの規則性を見つける．

支　すべての場合を調べなくても，900になることを説明できないかな．

自力解決 A　位取り記数表を用いて，どのように数を組み合わせても，答えが等しくなり，900以外の答えにはならないことを説明する．

百	十	一
○	○○○	○○○○○
○○	○○○ ○○○	○○○○○ ○○
○○○○	○○○ ○○○ ○○○	○○○○○ ○○○

7.1.2 小学校高学年～中学校第1学年：隠された暗号

本事例では，計算の結果得られる答えが全て 9 の倍数になっていることを用いて，教材化を行う．

例えば次の例で考える．

百の位	十の位	一の位
○	○○	○○○
○○○○	○○○○○	○○○○○○
○○○○○○○	○○○○○○○○	○○○○○○○○○

この 3 桁 3 数のたし算では，1～9 までの数が使われる．

123+456+789 を図を使って表すと，各位の位どり記数表には作業的に右図のような状態が考えられる．このとき○の数は 45 個存在する．1 の位では繰り上がりがある．

1 の位の○が 10 個減り, 十の位の○が 1 増え, 結果として○の数は 45-10+1＝36(個)となる．同様に繰り上がりが 2 回ある場合には○が 27 個，3 回ある場合には○が 18 個というように 9 の倍数となる．

代数的に説明すれば，1～9 が a~i のいずれかに該当するとすると，

(100a+10b+c)+(100d+10e+f)+(100g+10h+i)

=(99+1)a+(9+1)b+c+(99+1)d+(9+1)e+f+(99+1)g+(9+1)h+i

=99(a+d+g)+(a+d+g)+9(b+e+h)+(b+e+h)+(c+f+i)

=99(a+d+g)+9(b+e+h)+(a+b+c+d+e+f+g+h+i)

このとき，

a+b+c+d+e+f+g+h+i＝1+2+3+4+5+6+7+8+9＝45

つまり 9×5 なので, この問題を解決した結果得られる答えは常に 9 の倍数である．

7.1.2.1 自力解決における期待される活動の設定に向けた注意点

無作為に筆算を作って計算を行っても，それらの答えが 9 の倍数になっていると気

付くことはまずないと考えられる．数の組み合わせを変化させることでつくることのできる数がどのような性質を持っているのか探求するきっかけのつかめる活動を設定すべきである．

①基準となる最小の答えになる数の組み合わせ，最大の数の組み合わせを考える．

例えば，百の位に入る数が1・5・6のとき，それら3つは上段・中段・下段どれに入っても答えに影響しないことを確認する．

さらに，各位の組み合わせを変化することで，結果にどのような影響が生じるかを探求する必要がある．

②作ることのできない数の存在から，答えの取り得る範囲を考える．

まず，本事例では，774～2556の範囲の数で，かつ9の倍数であることを，明らかにする必要がある．

→ある一つの数の組み合わせを基準に，次に大きな答えとなる数の組み合わせを考えるためにはどういう方法をとるべきなのか.

→次に大きな答えとなる数の組み合わせはどのような手順でつくられたのかを反省的に考察する．

7.1.2.2 自力解決の設計

まず，基準となる筆算を設定する．筆算の 9 つある数を入れるところに毎回数字を入れなくても，答えが決まることを，各位の数の組み合わせとして捉える[PF_1]．次に[PF_1]で組み合わせた数を変化させることで，答えを自由に変化させることができるものであると捉える[PID_2]．さらに，それらが 9 ずつ変化すること，即ち，得られる答えが全て 9 の倍数であることを用いて，解決を行う[PID_3]．

7.1.2.3 学習指導案【かくれた暗号】

問題の提示

とある遺跡から，謎の箱が発掘された．そこには 11 個の数字をあてはめるスペースがあり，数字盤をはめ込むことで箱の鍵をあけることができるようだ．しかし，数字盤をはめ込む部分は劣化しており，間違った数字盤をはめ込むと壊れてしまう可能性がある．暗号を正確に解き明かし，箱の鍵を開けてほしい．

＜鍵をあける暗号のヒント＞

1～9 までの数字を 1 度ずつ使い 3 桁の数字を 3 つ作る．それを足し合わせてできる数字のうち，783 より大きく 1575 より小さいもののうち，12 番目，6□番目，79 番目の数字を順に並べよ．

支　3 桁の数字を 3 つ作ると，どのくらいの組み合わせが考えられるか．

支　答が一番小さくなる 3 桁の数の組み合わせと，一番大きくなる数の組み合わせは何だろうか．

⇩

自力解決 C　各位に用いる数を決定することで，答を決めることができることを説明する．(筆算の位取り記数法に着目して，各位に用いる数の組み合わせを考える)

$$\begin{array}{r} 147 \\ 258 \\ +369 \\ \hline 774 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \{1.2.3\}=6 \\ \{4.5.6\}=15 \\ \{7.8.9\}= 24 \\ \hline \qquad 774 \end{array}$$

支　数字の組み合わせと答えの関係が複数の答の場合でも見れないか．

支　その答えより 5 答を大きくすることは可能か．

⇩

自力解決 B　答えが一番小さくなる組み合わせと答えが 783 になる組み合わせに着目し，数の入れ替えと答えの関係を明らかにする．(十の位が 1 増えて，一の位が 1 減ると答えが 9 増える)

$$\begin{array}{l} \{1.2.3\}=6 \\ \{4.5.6\}=15 \\ \{7.8.9\}= 24 \\ \hline \qquad 774 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \{1.2.3\}=6 \\ \{4.5.7\}=16 \\ \{6.8.9\}= 23 \\ \hline \qquad 783 \end{array}$$

支　筆算を作らなくても，答えを求めることはできないか．

支　ここまで得られた答えを整理して，その間の欠けている答えを予測することができないか．

⇩

自力解決 A

3 桁 3 つの数の合計で最小のものは 774 で，最大のものは 2556 で，その間 198 個の答えがある．それらはすべて 9 の倍数であることを代数的に明らかにする．

・答えは 9 ずつ増えており，774 の次(一番目)の答え 783 は 774+9，2 番目の答えは 792 で 774+9+9 である．

つまり，774＝774+(9×0)，783＝774+(9×1)，792＝774+(9×2)…

と考えることができ，

12 番目の答えは 774＋(9×12)＝882，同様に，67 番目は 1377，79 番目は 1485.

よって，暗号は 88213771485 である．

7.2 多角形の内角の和

多角形の内角の和は$180 \times (n-1)$である．多角形を三角形や既習の図形に分割することで求められる知識であるが，本事例はその活用にあたるものである．

複雑な凸多角形のうち，3 つだけが鈍角です． そのような多角形は最大何角形でしょう．

n 角形の内角の和は一般に一定であることに対し，内角の和とそれを構成している内角のそれぞれの角度の関係性について考察することがねらいである．

7.2.1 小学校第 5 学年：内角の和

n 角形の内角の和が$180 \times (n-1)$で求められる学習をした児童に対して，n 角形の内角がどのような特徴をもっているか, 角度に着目して探求する．

内角の和が一定であることに対し，それぞれの内角の角度の変化を観察することによって，n 角形が成立する場合とそうでない場合に角度がどのように関わっているのかを考えさせる．

7.2.1.1 自力解決における期待される活動の設定に向けた注意点

本事例では，様々な図形を作る実験的な操作を行うことが目的となってしまってはいけない．図形を作るのは，あくまでそこに潜むパターンを垣間見るためであり，作業に終始していては，「真にその答えが最大値なのか」という問いに答えることはできないためである．

①角度を考えながら作図する．3 つ以上鈍角がなければかけない図形を探す．

・正多角形の角度を変化させながら観察を行う．(このとき，凹多角形にならないように気をつける)

②角度を仮定して，実際に作図を行うのではなく，仮想で処理する．

③特殊な場合を仮定して，作ることのできる図形を考える．

7.2.1.2 自力解決の設計

まず，鈍角という条件に対して，自力解決に入る前に，問題の提示でより単純な状態での実験を行わせることで，自力解決に取り組めるようになると考える．つまり，探求対象としての問題の糸口をあらかじめ示しておく．

次に，正多角形をもとにして，頂点の位置を移動させ[PM_1]，角度の変化を捉える [PID_1]．[PID_1]で得られたものを理想化し，内角の和全体と，3 つの鈍角として捉え直す[PS_2]．さらに，[PS_2]の成立条件を説明する活動が想定され，図形の成立条件と角度の関係を捉える[PS_3]．

7.2.1.3 **学習指導案【内角の和】**

問題場面

○多角形の内角の和の学習をしました．今日は少し難しくしてみようと思います．
一つだけ鈍角になるような三角形がかけますか？四角形がかけますか？
では2つが鈍角だとどうですか？三角形はかけますか？四角形ではどうですか？
では3つが鈍角の四角形はできるでしょうか？

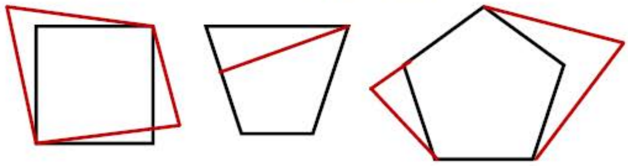
支　分度器を使って角度を調べながらかこう．

3つだけが鈍角になっている多角形を作りましょう．何角形を作ることができますか．

支　(ワークシートを用意し)角度を大きくしたり，小さくしたりできないか．

支　どうすれば簡単に作図できるだろう．

自力解決C　鈍角を3つ作るためには，内角がそれぞれどのようになればよいかを観察し，理由を考える．（ワークシートの図形：正方形，等脚台形，正五・六・七・八・九角形）



支　本当にこれ以上の多角形を作ることはできないか．もしそうだとしたら，その理由を説明できないか．

支　内角の内訳を作図をしなくても予想できないか．

自力解決B　六角形，七角形，八角形に着目して，内角の内訳を考える．

例）

									計
六角形	175	170	170	70	70	65			720
七角形	179	179	179	93	90	90	90		900
八角形									

七角形はどんなに工夫しても4つの鈍角が必要そうだ．

支　どんな場合でも言えるようにするには，どうしたらいいだろう．

自力解決A　鈍角以外を直角90°として考え，説明する．

鈍角にならない一番大きな角は90°．

①七角形では，4つが鈍角ではないので，90×4＝360
　(900－360)÷3＝180　　つまり，七角形をかくことができない．

②七角形では，4つが鈍角ではないので，90×4＝360
　4つの角が90になると，長方形か正方形になり，七角形にはできない．

答．六角形

7.2.2 中学校第1学年：不等式(内角の和)

ここでは，内角の和そのものではなく，そこから見えてくる関係性を不等式の題材として採用する．

中学校第 1 学年の段階では不等式の変形によって解を導くことはできないが, 角度が取り得る範囲について不等式を用いて表現することができる. また文字に数値を代入することで答えと予想した数値が適当なものであるかを判断することができる.

ここでは解を求めることを目的とするのではなく，あくまで問題の構造としての内角や外角に着目して角度の取り得る範囲を明らかにする手段としての不等式を扱う.

7.2.2.1 自力解決のおける期待される活動の設定に向けた注意点

7.2.1.1 で挙げたものに加え，文字式により一般化を行う.

7.2.2.3 学習指導案【不等式(内角の和)】

問題の提示
複雑な凸多角形の内角のうち，3つだけが鈍角である．そのような多角形は最大何角形で鈍角の大きさは何度になるでしょう．

自力解決 B　内角の和をもとに，数を操作して考える

	三角形	四角形	五角形	六角形	七角形	八角形
内角の和	180°	360°	540°	720°	900°	1080°
1つの角	60°	90°	108°	120°	128.571…	135°
3つ以外の角が90°	×	(360-90)/3 ＝90°	(540-180)/3 ＝120°	(720-270)/3 ＝150°	(900-360)/3 ＝180°	

支　文字式を用いて，この表の内容を表現できないか．

支　3つの鈍角のうち，1つが90° より大きく，180° より小さい範囲の中にあることを式で表して処理できないか．

自力解決 A-1　3つの鈍角の和が取り得る範囲に着目し，不等式に表して考える．

$$90 < \frac{1}{3}\{180 \times (n-2) - 90(n-3)\} < 180$$

$$270 < 180 \times (n-2) - 90(n-3) < 540$$
$$270 < 180n - 360 - 90n + 270 < 540$$
$$270 < 90n - 90 < 540$$

支　外角の和が360° であることは解決に使えないか．

自力解決 A-2　外角の和に着目し，不等式に表して考える．

$$180n - 180(n-2) > 90(n-3)$$
$$n > 7$$

7.3 ひき算の性質

ひき算の性質として，被減数と減数から同数を引いても答えは変わらない[a-b=(a-c)-(b-c)=d]という性質がある. この性質は学習指導要領では扱う事にはなっていないが，ひき算のたしかめなどにも用いられる考え方である. この性質の導入場面では, 例えばかっこを使った計算を学習した後で，計算の手続き上この性質が認められるとしたり，ひき算の場面で 63-48 をする場合にどちらか一方を何十という形にする場合に用いられるものであるだろう.

7.3.1 対象となる問題場面と学習のねらい

本事例は第一に 1 桁もしくは 2 桁のひき算の学習において行われることを想定している．ただし，数値や問題を焦点化することで高学年での説明や推論を志向した授業や中学校での絶対値を用いた計算場面での応用を行うことも可能である.

問題　赤いおはじきが 9 個，青いおはじきが 5 個あります．おはじきは全部で 14 個です．おはじきを全部箱の中に入れます．ここから 8 個取り出します．取り出した赤いおはじきは袋の中にある青いおはじきより何個多いでしょう.

学習内容は，ひき算の性質[a-b=(a-c)-(b-c)=d]である.

具体的におはじきを取り出す操作の結果，どのような取り出し方をしても答えが 3 になる．この現象に対して操作を客観的に分析することを通して，ひき算の性質を明らかにさせたい.

7.3.2 自力解決の設定に向けた活動予測に向けた注意点

おそらく，自力解決を行って早い段階で答えが 3 となることが学習者に了解されると予想される. 本時は低学年の学習者を対象として設計される.

そのため問題場面の把握のために，実際に学習者がおはじきを使った操作を行うことが必要になってくると考えられる．おはじきの操作に着目して現象を説明する活動も取り入れたい．また，表に結果を書き込むことで，数がどのように変化しているかを観察させ，操作によって得られた「３」が適当であるかを表にかき出すことで検証させたい．

よって，本時の自力解決は答えの「３」が何を表すものであるかの探求するものとして，大きく 3 つの活動が想定される．

①おはじきを使った具体的な操作

②結果を数学的に説明する

③表を用いて結果を記録する

①～③は実際どのような活動として観察されるであろうか．

問題　赤いおはじきが 9 個，青いおはじきが 5 個あります．おはじきは全部で 14 個です．おはじきを全部箱の中に入れます．ここから 8 個取り出します. 取り出した赤いおはじきは袋の中にある青いおはじきより何個多いでしょう．

①おはじきを使った具体的な操作

実際におはじきを取り出して，結果を記録する．

取り出したおはじき　　○○○○○●●●　　(赤…5，青…3)

箱の中のおはじき　　○○○○●●　　(赤…4，青…2)

(式)　5-2＝3

取り出したおはじき　　○○○○●●●●　　(赤…4，青…4)

箱の中のおはじき　　○○○○○●　　(赤…5，青…1)

(式)　4-1＝3

ここでは，答えが変化しないという【増減のパターン】が認められる．

②結果を数学的に説明する

①における操作を式として記録すること．

結果が 3 になることを操作の変化の様子を分析し，具体的に記述してから，一般化すること．

③表を用いて結果を記録する

ワークシートとして項目を準備しておき，操作の結果を書き込む．表を作る事が目的ではなく，数の変化に着目させたい．

7.3.4 自力解決の設定

まず，おはじきを取り出したことを記録することで，行われた操作の結果得られた答えが変化しないものとして捉える[PID_1]．

次に，操作の結果得られる玉の組み合わせを加不足なく調べ，表に表す．その表を分析することで，数の増減と答えが 3 となることを関係づけて捉える[PF_2]．さらに，その関係を図で表すことで，変化している部分とそうでない部分を比較し，ひき算の性質を導出する[PID_3]．

7.3.5 学習指導案【ひき算の性質】

問題の提示　○ここに赤いおはじきが9個、青いおはじきが5個あります。おはじきを全部この袋の中に全部入れます。
○ここから8個取り出すと、赤いおはじきと青いおはじきは
それぞれ何個になるだろう。
・例）赤…5こ　　青…3こ
○取り出した赤いおはじきは袋の中にある青いおはじきより
何個多いでしょう。
・袋の中の青いおはじきは2こだから、3こ多い。・5-3=2

取り出した赤いおはじきの数は、袋の中にある青いおはじきより何個多くなるでしょう。
いくつ多くなるか理由を考えてみよう。

自力解決C
取り出したおはじきと袋の中のおはじきを図などにかいて、差の数に着目する。
取り出したおはじき
○○○○○●●●　(赤…5、青…3)
袋の中のおはじき
○○○○●●　(赤…4、青…2)
(式)　5-2=3

取り出したおはじき
○○○○●●●●　(赤…4、青…4)
袋の中のおはじき
○○○○○●　(赤…5、青…1)
(式)　4-1=3
・いつも3つ多くなりそうだ
支1 他にどんな取り出し方があるのか手際よく整理できないかな。
支2 いつも3こ多くなるのか、一目でわかる方法はないかな。

自力解決B
表に数をかいてきまりを見つける。

取り出したおはじき	赤	8	7	6	5	4	3	2
	青	0	1	2	3	4	5	×
袋の中のおはじき	赤	1	2	3	4	5	6	
	青	5	4	3	2	1	0	
差		3	3	3	3	3	3	

・たしかにいつでも3つ多くなりそう。
支1 どうしてそうなるか、きまりを説明できないかな。
支2 どうして差が2や4にはならないのだろう。理由があるのかな

自力解決A
差が3となる理由を図と式で説明する。

取り出したおはじき　○○○○○○○○
袋の中のおはじき　●●●●●

取り出したおはじき　●○○○○○○○
袋の中のおはじき　○●●●●

取り出したおはじき　●●○○○○○○
袋の中のおはじき　○○●●●

取り出した赤いおはじきが1個減ると、袋の青いおはじきも1個減る。それでも差は変わらない。

取り出した赤いおはじきが2個減ると、袋の青いおはじきも2個減る。それでも差は変わらない。

支2 答えはいつも同じだけど、どこが変わっているのかを式に表して表現できるかな。
式にまとめると、
8-5=(8-1)-(5-1)
　=(8-2)-(8-2)
　…
　=3
支1 ひき算についてどんなきまりが隠れていたか、まとめてみよう。

第 7 章の要約

第7章では，パターンの科学としての数学観，パターンとパターンの探求の様相の連関モデルを利用して，5 つの指導案を作成した.

活動の予測として示された個々の活動が，どのように結びついているかをモデルを用いて検討することが可能であった.

第８章　終章：研究の結論と残された課題

8.1　本研究の結論と意義

本研究は我が国の算数・数学教育において，パターンの科学としての数学観に基づく算数・数学教授学を構築するため，算数・数学教育における数学的な見方・考え方，問題解決学習の考察と今日的な課題の検討より，以下の 4 点の研究課題が抽出された．

・研究課題 A

数学的認識の本性として，パターンの科学としての数学観が認められるか

・研究課題 B

パターンの科学としての数学観に基づけば，我が国の算数・数学教育がどのように捉えなおされるか

・研究課題 C

算数・数学教育におけるパターンはどのように定義され，パターンの探求ではどのような様相が認められるか

・研究課題 D

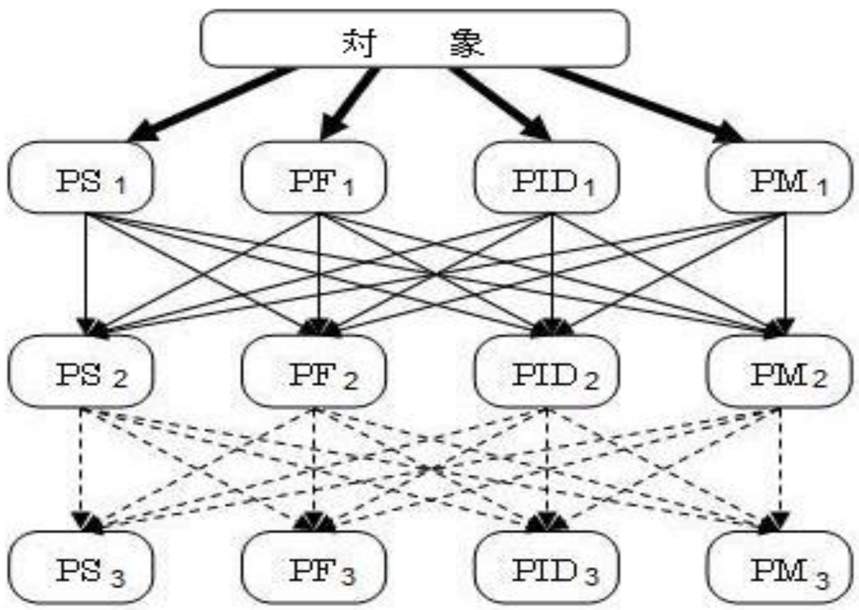
パターンの科学としての数学観に基づく算数・数学教授学の構築に向けて，パターンとパターンの探求の様相はどのような連関モデルとして示されるか

研究課題 A に対し，P.キッチャーの認識論にもとづいて，パターンの科学としての数学観を検証した．その結果，我々が様々な対象に対してパターンを認めること，またパターンとみなしたものを数学として構成することが可能であることが明らかになった．研究課題 B に対し，パターンの科学としての数学観によって，学習者はもちろん，教師にとっても数学は自ら作り出すことのできるものとして捉えられることが明らかとなった．またパターンの科学として算数・数学の内容を俯瞰することで，横断的に内容を捉えることが可能であり，また学習を長期的な視点で保証することが

可能である．研究課題 C に対し，本研究では我が国の算数・数学教育においてパターンの科学としての数学観を採用する場合，対象に依存するものではなく，対象の捉え方としてパターンの定義が行われる必要があることが明らかとなった．結果として，本研究では 4 つのパターンを定義した．

集合のパターン(PS):	様々な種類のものの集まりの中で共通するものを認識することで認められるパターン
対応のパターン(PF)：	一意対応するものを認識することで認められるパターン
増減のパターン(PID)：	対象の数量的変化を認識することで認められるパターン
移動のパターン(PM)：	対象の動的変化を認識することで認められるパターン

そして，本研究の理論をもとに構築されたモデルとして，パターンとパターンの探求の様相の連関モデルが得られた．このモデルこそが本研究の結論である．



本研究のモデルは教師が授業を設計する際，自力解決の設定や，教材を研究する際の手がかりとなるだけでなく，支援を行う場や内容についても分析することができるモデルである．

算数･数学教育が価値ある教育となるためには,質の高い授業が行われ，学習者の豊かな思考が育まれていく必要がある．しかしながら，これまでの算数・数学教育においてその様な授業を実践することが可能であった教師はほんの一握りであったのではないだろうか．その背景には，実践において教師が算数・数学教育に関する研究をもとに十分に授業を設計することができなかった事にある．先行研究にて主張されてきたことを理解し，教材を分析する力のある教師のみがなし得てきた問題解決学習を，新たにパターンの科学としての数学観として提起することで，すべての教師が教材を分析すること,授業を設計することに取り組むことができると考える．本研究の成果は教材に対する捉え方，授業設計の際の分析的な視点の提案を行った点にあり，本研究が我が国の算数・数学教育のさらなる発展の一助となることができれば幸いである．

8.2 今後に残された課題

本研究において導出された，算数・数学教育における 4 つのパターンと構築されたモデルについて，理論的な分析は行っているが，実証的な検証はなされていない．今後実証的な検証が行われることで，理論的な分析では明らかにならなかった問題点が生じることが予想される．

引用・参考文献

・Kitcher．P．(1984)．*The Nature of Mathematical Knowledge*． OXFORD UNIVERSITY PRESS.

・Steen. L. A. (1988). The Science of Patterns. Science 240. pp.611-616

・Wittmann，E. Ch. (1984). Teaching units as the integrating core of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics. Vol. 15*. pp. 25-36

・Wittmann，E. Ch. (1995). Mathematics Education as a 'Design Science'. *Educational Studies in Mathematics. Vol. 29*. pp. 355-374

・Wittmann，E. Ch. (2001). Developing Mathematics Education as a Systemic Process. *Educational Studies in Mathematics. Vol. 48*. pp. 1-20

・Wittmann，E. Ch. (2005). Mathematics as the Science of patterns: A guideline for Developing Mathematics Education from Early Childhood to Adulthood. *The paper presented at the International Colloquium"mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood"*July7-9.

・秋山仁・中村義作共著(1998)．ゲームにひそむ数理　ゲームでみがこう!!数学的センス．北森出版株式会社.

・秋山仁(2000)．数学は生きている　身近に潜む数学の不思議．東海大学出版会

・アルフレッド・レイニー[好田順治訳](1975)．数学についての三つの対話　数学の本質とその応用．株式会社講談社

・イアン・スチュアート. (2010.03). 数学の秘密の本棚. ソフトバンククリエイティブ株式会社

・イアン・スチュアート. (2010.08). 数学の魔法の宝箱. ソフトバンククリエイティブ株式会社

・伊藤説朗(1993)．数学教育における構成的方法に関する研究[上・下]．明治図書

・ギブソン. J. J. [古崎敬他共訳](1985)．生態学的視覚論：ヒトの知覚世界を探る．サイエンス社

・細水保宏編著；ガウスの会執筆(2007).ガウス先生の不思議な算数授業録Ⅰ.東洋館出版社.

・細水保宏編著；ガウスの会執筆(2008).ガウス先生の不思議な算数授業録Ⅱ.東洋館出版社

・スティーン．L．A．(2000)．世界は数理でできている（三輪辰郎訳)．丸善株式会社

・ソーヤー[中原勲平訳](1960).数学へのプレリュード.みすず書房

・デブリン．K[山下純一訳](1995)．数学：パターンの科学．日経サイエンス社

・デブリン．K[富永星訳](2006)．数学する本能．日本評論社

・デブリン. K[山下篤子訳](2007). 数学する遺伝子. 早川書房

・中島健三(1981).算数・数学教育と数学的な考え方　その進展のための考察第二版.
金子書房

・ヴィットマン，ミューラー，シュタインブリング(2004)．算数・数学　授業改善から教育改革へ（國本景亀・山本信也訳)．東洋館出版社

・前田静香(2010). 算数教育における小中接続に関する研究. 鳥取大学数学教育研究. 12(8). pp. 1-97

・前田静香(2011). パターンの科学に基づく算数・数学教授学を志向した基礎的研究. 鳥取大学数学教育研究．13(4)．pp．1-16

・溝口達也(2007)．算数・数学学習指導論．鳥取大学数学教育学研究室

・文部省(1973)．関数の考えの指導．東京書籍株式会社

・文部科学省(2008). 小学校学習指導要領解説　算数編. 東洋館出版社

・山本信也(2009)．生命論的デザイン科学としての数学教育学の課題と展望．熊本：米田印刷

資料1　Master　Plan の提案

九九表のひみつ【虫食い表】

数字カードを使った【使われないカード】

【六角形の敷き詰め】

【2 つのサイコロ】

九九表のひみつ【虫食い表】　マスタープラン

対象学年：小学校第２・３学年

１．学習の題材

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	①		12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	②		45
6	6	12	18	③	30	36	42	48	54
7	7	14	21		35	④	49	56	63
8	8	16	24	32	40		56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

授業コンセプト

九九表を用いて，かけ算のきまりについての理解を深める．隠された部分の数の和について分析することで，かけ算を構成することやかけ算の性質

$(a \times b + a \times c = a \times (b + c))$

について探求する．

隠された部分の数の和は，その両端の和に等しい．

例）①=3+12　　③=20+32

　　=15　　　　=52

２．学習のねらい

隠された部分の数の和とその和を推理することに用いた数の間にある関係に着目し，あるかけ算をすでに分かっているかけ算から構成したり（２位数×１位数），かけ算の結合法則について探求する．

３．学習活動の計画と意図

（1）カードの下に隠れている数字の和をあてましょう．

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	①		4	5	6	7	8	9
2	2	4	②		10	12	14	16	18
3	3	6	9	③		18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	④		30	35	40	45
6	6	12	⑤		30	36	42	48	54
7	7	⑥		28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	10	27	36	45	54	63	72	81

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	㋐	6	㋑	10	㋒	14	16	18
3	3		㋓		㋔		㋕	24	27
4	4	8		16		24		32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	10	27	36	45	54	63	72	81

（2）九九表の秘密を見つけましょう．（（1）で見つけた法則を左図で拡張する．右図③・④のタイプから①や②のタイプを推測する）

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	①		12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	②		45
6	6	12	18	③	30	36	42	48	54
7	7	14	21		35	④	49	56	63
8	8	16	24	32	40		56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	①	3	4	5	6	7	8	9
2	①	4	①	8	10	12	14	16	④
3	3	①	9	12	③	18	③	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	④
5	5	10	②	20	25	30	35	40	45
6	6	②	18	②	30	36	42	48	54
7	7	14	②	28	35	⑤			63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	10	27	36	45	54	63	72	81

数字カードを使った【使われないカード】マスタープラン

対象学年：低学年～(第５学年偶数と奇数の学習用に開発)

１．学習の題材

$\boxed{1}$～$\boxed{10}$までのカードを１回ずつ使って，足し算を３つ作ります．たし算に使わないカードはどれでしょう．

$$\square + \square = \square$$
$$\square + \square = \square$$
$$\square + \square = \square$$

授業コンセプト

ここでは，偶数と奇数のたし算の性質について探求する．３つのたし算を作るためには９枚のカードを使う．残るカードは1,3,5,7,9 のカードで，偶数のカードが残らない理由について探求する．

低学年では計算の練習に，中学年ではおはじきを使った説明の題材に用いることも可能である．

２．学習のねらい

たし算に用いられる数に着目して，奇数と偶数のたし算の性質について探求・活用する．

３．学習活動の計画と意図

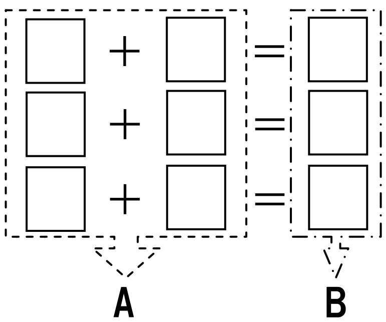
(１)たし算の組み合わせを考えよう．

1+9=10	1+6=7	1+4=5	1+8=9	6+4=10	1+4=5
2+6=8	4+5=9	2+8=10	2+4=6	2+7=9	2+6=8
3+4=7	8+2=10	3+6=9	3+7=10	3+5=8	3+7=10
使わない５	使わない３	使わない７	使わない５	使わない１	使わない９

残る数はいつも奇数．どうして偶数のカードがのこらないのか？偶数のカードが残るような組み合わせがないのか調べよう．

(２) 偶数と奇数の計算を使って，奇数のカードが残ることを説明しよう．

(３)カード 10 枚の合計と使ったカード９枚の合計から奇数のカードが残ることを説明しよう．



カード 10 枚の合計は 55 である．

たし算について,左辺の合計Ａと右辺の合計Ｂの答えは等しいため，ＡとＢの合計は必ず２の倍数となる．

よって，カード９枚の選び方は多種類存在するが，必ず，９枚のカードの合計は偶数になる．

カード 10 枚の合計が 55 であったことから，足し算に用いられないカードは必ず奇数のカードである．

【六角形の敷き詰め】　マスタープラン

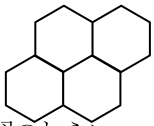
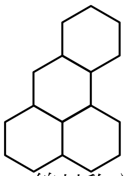
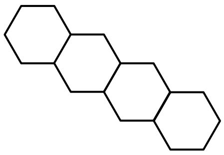
対象学年：低学年～

授業コンセプト

ここでは正六角形の組み合わせ方とその敷き詰めについて探求を行います．正六角形は３方向への移動や 60°，120°回転を行うことができる図形である．またいくつかの正六角形を組み合わせ平面の敷き詰めを行うことで，組み合わせ方が違っても敷き詰める手順が同じになっているものなどを発見することができる．

1.学習の題材

正六角形はすきまなく敷き詰めることができる正多角形です．１つの正六角形を敷き詰めるだけでなく，いくつかの正六角形を合わせてできる形(例：下図)を組み合わせても同様に平面を覆い尽くすことができるでしょうか．

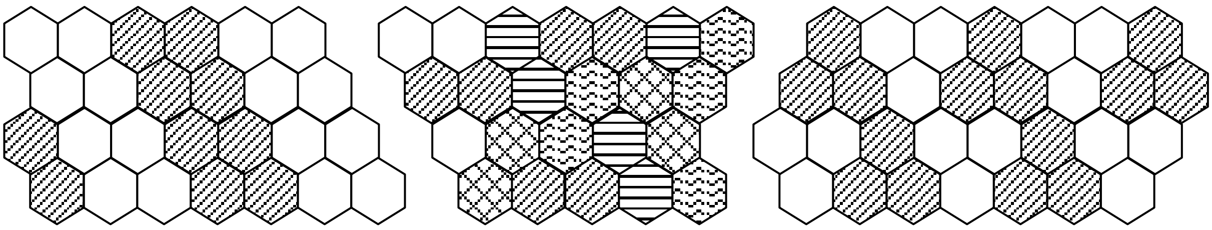
2.学習のねらい

敷き詰める活動を通して線対称や点対称について移動の考えを用いて図形を見ること．

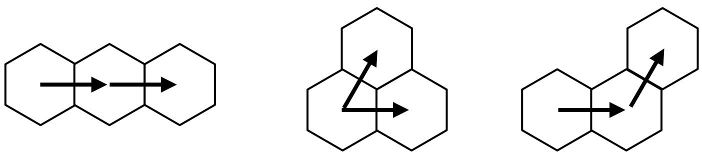
正六角形４つを組み合わせてできる形を,並べ方の手順に着目して,落ちなく７つ明らかにできること．

3.学習活動の計画と意図

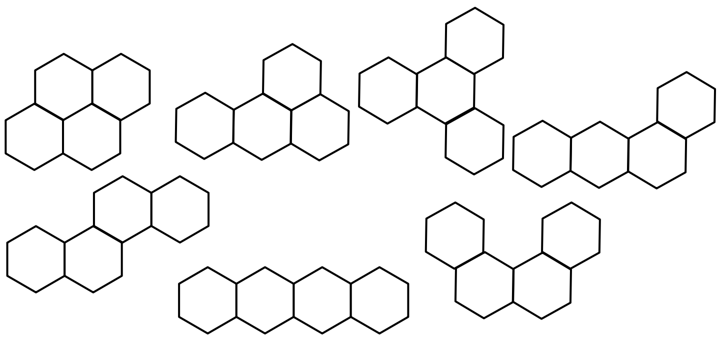
(１)正六角形が１つのとき，２つのとき，３つのとき，その組み合わせ方と敷き詰め方を考える．



正六角形３つの組み合わせは，次の３つである．これをひっくり返したり，回転させたりして平面を敷き詰めることで，様々なパターンの敷き詰め方ができる．



(２)正六角形が４つのとき，組み合わせ方は幾つあって，どんな模様を作ることができるだろう．



たとえば，４つ横並びの組み合わせを基準に，一つ動かしてできる図形にはどんな形があるか，二つ動かしてできる図形はというように考えたり，(1)で行ったように，組み合わせるときに，どういう手順でくっつけていったのかを→で表現することで組み合わせの作り方を考える．

すきまなく敷き詰める方法が組み合わせが違っても構造がおなじであること(平行移動や回転のさせ方など)を探求させたい．

【２つのサイコロ】　マスタープラン

対象学年：第６学年～

1.学習の題材

サイコロ２つを投げて出た目の和をワークシートに記録していく.

2	
3	○
4	○
5	
6	○○
7	○○○
8	○
9	○○
10	○
11	
12	○

授業コンセプト

２つのサイコロを投げて出た目を記録していくと，回数を追うごとに，だんだんと山形の記録が出来上がる．なぜ６，７，８の辺りが多くなり，２や３，11や12の辺りが少なくなるのかをサイコロの目の出方によって分析する．サイコロが３つになった場合や出た目をかけ合わせることによってワークシートに現れる形がどのように変化するのかも組み合わせから予想させたい．

2.学習のねらい

資料を読み取ることで，起こり得る場合の数との関係を考察する.

3.学習活動の計画と意図

(１)サイコロを２つ投げて出た目の合計をワークシートに記録しましょう.

→25回程度投げて記録を行うと，たいていの場合山形が出現し，いくつかのグループで行っても同様の形になることを捉えさせたい.

(２)どうしてこんな形になるのか，理由を考えてみましょう.

2	○
3	○○
4	○
5	○○
6	○○○○
7	○○○○○
8	○○○
9	○○○
10	○○
11	○
12	○

⇔

＋	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

山形になる原因として，こどもたちはいろいろな仮説を出すだろう．例えば，サイコロを振ってどの目が出るかは分からないので，山形になったのもたまたまではないか．もっと回数を増やせば，今は少ないところももっと多くなるのではないか．また，２つのサイコロの目の出方とその和がどのようになっているかを見ることで，７になる組み合わせが一番多く，２と12になる組み合わせは１組しかないことが結果が山形になる可能性を高めていることを考察させたい．

資料2　パターンによる学習指導要領の分析

A　数と計算領域

学習指導要領解説では，A 数と計算の領域における内容を“数”と“計算”とに分類しており，本研究でも分類された学習内容についてパターンの適用を行う．

A-1　数と計算領域における集合のパターン

原初的な活動としては，対象の数を数えることが挙げられる．数を数えると言ったときに，数える対象は様々であるが，それがいくつ存在するかについては対象に依存しない．

教科書に書かれたチューリップの絵や風船の絵の個数をおはじきで置き換えた時，そこで認められるのは，例えば「よっつ」と数えられるものである．そこに 4 と言う共通性を見いだし「よっつ」という意味を表すパターンを数の 4 として捉えるのである．数字 4 はどこかに転がっているものではなく，「よっつ」と数えられた対象から抽象されたものとして捉えられるのである．

また，抽象されて得られた数は一つ一つ存在するのではなく，1,2,3,4……という様に数の集まりとして認識される．学習の内容からいえば，整数と呼ばれる集合として捉えることができる．12 の次には 1 大きい 13 が来るというように整数全体を集合と捉えると数を構成することができる．また，表現形式の違いから分数や小数を集合と捉えることも考えられるが，数という集合で捉える場合には，概念の拡張が必要である．

計算の意味についても集合として捉えることができる．加法の合併や増加，割算の包含除や等分除などは場面としては互いに区別できるものとして教授されるが，そこで行われる演算を見たときには，一つの集合として捉えられる．

A-2　数と計算領域における対応のパターン

対象となるものの集まりをより数えやすい他のものの集まりとして置き換えて考えることや，ものに数を対応させることは対応のパターンとしてみなすことができる．

計算において，5+3＝8 が行われる場合，5+3 と対応しているものが 8 であるとみることができる．他にも 4+4 や 6+2 も 8 と対応しており，集合のパターンから見れば，□+△という集合と 8 という集合の間にある対応のパターンとみなすことができるともいえる．

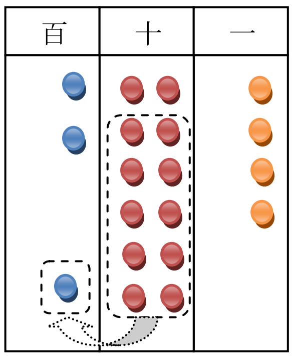
乗法では，一方の定数が 1 ずつ増えるとき，他方はどのように変化していくかと見たり，一方の変数が２倍３倍となると他方はどのように変化するパターンとして捉えることができる．

A-3　数と計算領域における増減のパターン

数と計算領域では，最も捉えやすいパターンであると考える．増減のパターンは第 1 学年の初めから知覚されるパターンである．2―4―□―8―と続く数列の□には 6 が入る．隣り合う項の差が 2 であることに着目することによって，6 が入るとみなすことができる．

また演算は数の増減に関して，その様相を記述するものと見れば，計算式も増減のパターンを表すものとして捉えられる．

A-4　数と計算領域における移動のパターン



十進位取り記数法を○図で表現する場合に移動のパターンとしてみなすことができる．例えば，「ここに 100 枚の折り紙の束が２組，10 枚の折り紙の束が 12 組，ばらの折り紙が 4 枚あります．全部で何枚ありますか.」という場合，十の位には 12 個の○があるが，十進位取り記数法では一つの位の中で 0 から 9 までの数しか扱うことができない．十の位にある 10 個の○はなくなってしまうわけではなく，100 の位に一つの○として移動していく．100 は 10 が 10 個集まったものとして対応のパターンがあることから，十進位取り記数法において，このように位間で数を移動させることが

できるのである．より複雑な場面では，繰り上がりや繰り下がりのある筆算などでも同様のパターンがみられる．

B　量と測定領域

学習指導要領解説では，B 量と測定領域における内容を"量の単位"と"量の比較や測定"とに分類しており，本研究でも分類された学習内容についてパターンの適用を行う．

B-1　　量と測定領域における集合のパターン

長さや体積，重さなどを単位を用いて表現できることは，それらを同一の基準で測りとれるものとして認識されるためである．

B-2　量と測定領域における対応のパターン

A さん，B さん，C さんがそれぞれ持っている水筒は誰の水筒が一番多く水が入るのかと言うとき，同じコップで測り取れば，A さん，B さん，C さんの水筒はそれぞれ同じコップという定数でもって，何杯分かと捉えることができる．

また長方形の面積の学習では，周りの長さが 20cm の長方形を与えて，面積と縦と横の関係に着目させることで，縦と横の組み合わせに対応して面積が表されるというパターンをみなすことができる．

B-3　量と測定領域における増減のパターン

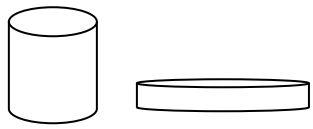
長さや体積，重さなどは数値で表されることで演算が可能となり，例えば複数のものの大きさを比較することが可能になる．

同じ底辺の長さをもつ三角形が，高さが変化することで，どのように面積が変化するのかについて捉えることによって，この場面での高さと面積間で振舞われる増減のパターンとみなすことができる．

B-4　量と測定領域における移動のパターン

右図のように，(ア)の容器いっぱいに入った水を移し替えると，ちょうど(イ)の容器いっぱいとなるとき，形は変化しても，容積は等しいことが分かる．

また，単位の仕組みは十進位取り記数法場合と同様に捉えることができる．



(ア)　　　(イ)

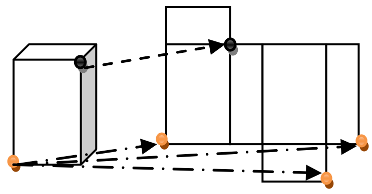
C　図形領域

学習指導要領解説では，C 図形領域における内容を“図形についての理解”と“図形を構成する要素”，“図形の見方や調べ方”とに分類しており，本研究でも分類された学習内容についてパターンの適用を行う．

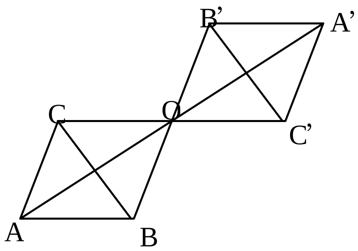
C-1　図形領域における集合のパターン

たとえば，一般に三角形と呼ばれるものについて，表象された大きさや色，線の太さや向きには関係なく抽象される特性をもつものに適合する図形を，三角形として捉えることはそこに集合のパターンを認めることである．

C-2　図形領域における対応のパターン

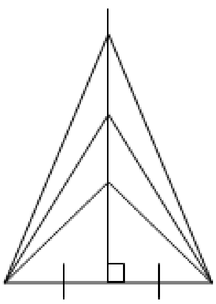


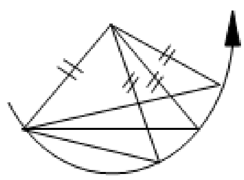
展開図では，図のようにある１点が展開図において１点として対応することもあれば，１点が展開図においては３点に分散されることもある．しかしこれら３つの点は直方体の一点と対応しているものとして捉えることができる．



点対称の位置にある二つの図形において，対応する点を結ぶ直線はすべて１点で交わる．つまり図で言えば，点 O であり，対称の中心である．対応する点を結ぶことで，必ず対称の中心をとおることから，このような対応のパターンの中で，例えば点 B と点 C’を結んだ場合には中心点を通らない．つまり，点 B と点 C’は点対称の関係においては対応する点ではないことが明らかとなる．

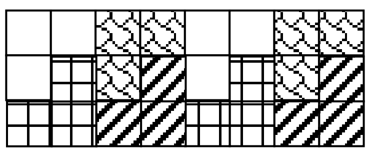
C-3　図形領域における増減のパターン



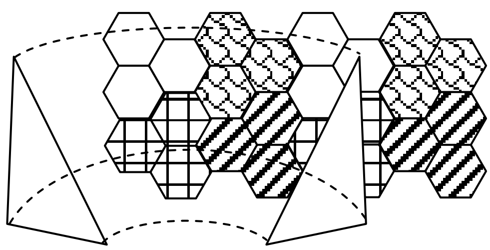


二等辺三角形について，底辺を固定して高さを変化させるとき，また等しい２辺の長さを固定し，底辺の長さを変化させると，面積が変化することが分かる．しかしながら面積が大きくなったり，小さくなったりしたとしても，二等辺三角形としての特性は失われることはない．また特別な場合に二等辺三角形は正三角形となることも確認されるだろう．

C-4　図形領域における移動のパターン



敷き詰めの学習では，単に図形が平面上にすきまなく敷き詰められることだけでなく，一つを基準にした時に，回転させたり，平行移動させたりするなど移動の手続きによって振舞われるパターンであるとみなすことができる．



合同な図形を作図する場合に，ある三角形を別の位置に移動すると捉えると，形や大きさを保持したまま移動するには，何を移動させなければならないかと捉える．作図の方法は「３辺」「２辺とその間の角」「１辺とその両端の角」の３つに着目するものであるが，どうしてその３つだけと言ってよいのか．移動のパターンとして捉えれば，なぜその３つのかき方となるのかが明らかにされるだろう．
また，対称な図形についても，図形を構成する要素の移動のパターンとみなすことができる．

D　数量関係領域

学習指導要領解説では，D 数量関係領域における内容を“関数の考え”と“式の表現と読み”，“資料の整理と読み”とに分類しており，本研究でも分類された学習内容についてパターンの適用を行う．

D-1　　数量関係領域における集合のパターン

数量関係領域では数量の関係が何と何によって決定されるかという点が重要となる．

50 ページの本を読んでいくときの，読んだページ数と残りのページ数の関係を考えるとき，読んだページ数という集合と残りのページ数という集合について捉える必要がある．これらの集合が取り得る値の範囲は 0 から 50 であり，これら 2 つの集合は一対一で関係付けられる対応のパターンであるという側面も持つ．

D-2　　数量関係領域における対応のパターン

数量の関係を捉える方法として，広く表が用いられる．例えば，周りの長さが 18cm の長方形のたての長さと横の長さについて表にまとめてみると，

縦の長さ(cm)	1	2	3	4	…
横の長さ(cm)	8	7	6	5	…

となり，たての長さと横の長さは，たして 9 になる．たての長さと横の長さを対応付けるものは，長方形の周りの長さの出し方によって，捉えられる．対応のパターンは表を用いる場合には，表を縦に見ることでみなせるパターンである．

D-3　　数量関係領域における増減のパターン

直方体の高さと体積の変わり方について見るとき，直方体のたて 3cm と横 5cm は変えずに高さを変えると，それに伴って体積も変わる．このときの変化の仕方を見る．体積を∆，高さを○とすると，3×5×○＝∆となる．

○に 2 を入れると∆は 30，○に 4 を入れると∆は 60，○に 1 を入れると∆は 15 となる．

表にまとめてみると，

高さ○	1	2	3	4
体積∆	15	30	45	60

○が 2 倍になった時，∆も 2 倍になっている事や，○が 1/4 倍になった時，体積も 1/4 倍になっている事が分かる．

D-4　　数量関係領域における移動のパターン

数量関係領域では，数量の変化を観察可能な状態にするため，グラフを用いる．比例や反比例とはプロットされる点がどのように変化するものなのか，その動きを観察するために用いられる．観察された動きを対応のパターンで見られたように式で表現されたり，変化の様子の意味づけを行うことが可能である．

また，折れ線グラフなどでは，A から B までの範囲の傾きとして見られる点の移動パターンと B から C までの範囲の点の移動のパターンの違いから，2 つの移動のパターンの違いを捉えることができる．またそれらは，増減のパターンとしてもみなすことができる．

各領域の分類

各領域の内容について，4つのパターンで捉えると，表のように分類される.

PS：様々な種類のものの集まりの中で共通するものを認識することで認められるパターン[集合のパターン]
PF：一意対応するものを認識することで認められるパターン[対応のパターン]
PID：対象の数量的変化を認識することで認められるパターン[増減のパターン]
PM：対象の動的変化を認識することで認められるパターン[移動のパターン]

【 A 数と計算 】

学年	数	計算
第1学年	・2位数〔PS.PF.PID〕 ・簡単な3位数〔PF.PID〕	・1位数の加法及びその逆の減法〔PS.PF.PID〕 ・簡単な2位数などの加法及び減法〔PS.PF.PID〕
第2学年	・3位数，4位数(1万までの数)〔PS.PF.PID〕 ・十進位取り記数法〔2.3.4〕 ・簡単な分数(1/2，1/4など)など〔PS.PF.PID〕	・2位数の加法及びその逆の減法〔PS.PF.PID〕 ・簡単な3位数の加法及び減法〔PS.PF.PID〕 ・乗法九九〔PS.PF.PID〕 ・簡単な2位数と1位数の乗法〔PS.PF.PID〕
第3学年	・万の単位(1億までの数)〔PS.PF.PID〕 ・小数(1/10の位)〔PS.PF.PID〕 ・分数〔PS.PF.PID〕 ・そろばん〔PF.PID〕	・整数の加法及び減法(3位数や4位数)〔PS.PF.PID〕 ・整数の乗法(2位数や3位数など)〔PS.PF.PID〕 ・整数の除法(除数と商が1位数)〔PS.PF.PID〕 ・簡単な整数の除法(除数が1位数で商が2位数)〔PS.PF.PID〕 ・そろばんによる計算〔PF.PID〕 ・簡単な小数，分数の加法及び減法〔PS.PF.PID〕
第4学年	・億，兆の単位〔PS.PF.PID〕 ・概数〔PS.PF〕 ・小数〔PS.PF.PID〕 ・分数(真分数，仮分数，帯分数)〔PS.PF.PID〕	・整数の除法(除数が1位数や2位数で被除数が2位数や3位数)〔PS.PF.PID〕 ・計算の結果の見積もり〔PS.PID〕 ・そろばんによる計算〔PS.PID.PM〕 ・小数の加法及び減法〔PS.PF.PID〕 ・乗数や除数が整数の場合の小数の乗法及び除法〔PS.PF.PID〕 ・同分母分数の加法及び減法〔PS.PF.PID〕
第5学年	・偶数と奇数〔PS.PF.PID〕 ・約数と倍数(最大公約数，最小公倍数)〔PS.PF.PID〕 ・素数〔PS.PF.PID〕 ・整数と小数の記数法〔PF.PID.PM〕	・乗数や除数が小数の場合の乗法及び除法〔PS.PF.PID〕 ・異分母の分数の加法及び減法〔PS.PF.PID〕 ・乗数や除数が整数の場合の分数の乗法及び除法〔PS.PF.PID〕
第6学年	・逆数〔PS.PF〕	・乗数や除数が分数の場合の乗法及び除法〔PS.PF.PID〕

【 B 量と測定 】

	量の単位	量の比較や測定など
第1学年		・長さ，面積，体積の直接比較など〔PS.PID〕 ・時刻の読み方〔PS.PF〕

第 2 学年	・長さの単位(mm，cm，m)〔PS.PID〕 ・体積の単位(ml，dl，l)〔PS.PID〕 ・時間の単位(日，時，分)〔PS.PID〕	・長さと体積の測定〔PS.PID〕
第 3 学年	・長さの単位(km)〔PS.PID〕 ・重さの単位(g，kg)((t))〔PS.PID〕 ・時間の単位(秒)〔PS.PID〕	・長さと重さの測定〔PS.PID〕 ・単位や計器を適切に選んでの測定など〔PS.PF〕 ・時刻や時間の計算〔PS.PF.PID〕
第 4 学年	・面積の単位(㎠，㎡，㎢)((a，ha))〔PS.PID〕 ・核の大きさの単位(度(°))〔PS.PID〕	・面積の求め方(正方形，長方形)〔PS.PF.PID〕 ・角の大きさの測定〔PS.PID〕
第 5 学年	・体積の単位(㎤，㎥)〔PS.PID〕	・面積の求め方(三角形，平行四辺形，ひし形，台形)〔PS.PF.PID〕 ・体積の求め方(立方体，直方体)〔PS.PF.PID〕 ・測定値の平均〔PS.PF.PID〕 ・単位量当たりの大きさの求め方〔PS.PF.PID〕
第 6 学年		・概形とおよその面積〔PS.PM〕 ・面積の求め方(円)〔PS.PF.PID〕 ・体積の求め方(角柱，円柱)〔PS.PF.PID〕 ・速さの求め方〔PS.PF.PID〕 ・メートル法の単位の仕組み〔PF.PID.PM〕

【 C　図形　】

	図形についての理解	図形を構成する要素	図形の見方や調べ方
第 1 学年	・身の回りにあるものの形〔PS.PF〕		・観察や構成などの活動〔PS.PM〕 ・前後，左右，上下などの言葉〔PS〕
第 2 学年	・三角形，四角形〔PS.PF〕 ・正方形，長方形，著角三角形〔PS.PF〕 ・箱の形をしたもの〔PS.PF〕	・直線，直角，頂点，辺，面〔PS〕	・観察や構成などの活動〔PS.PM〕 ・構成要素の着目する〔PS〕 ・辺の長さを調べる〔PS.PF〕 ・直角に着目する〔PS.PF〕
第 3 学年	・二等辺三角形，正三角形〔PS.PF〕 ・円，球〔PS.PF〕	・角，中心，半径，直径〔PS〕	・観察や構成などの活動〔PS.PM〕 ・構成要素に着目する〔PS〕 ・辺の長さを比べる〔PID〕 ・角の形に着目する〔PF.PID〕
第 4 学年	・平行四辺形，ひし形，台形〔PS.PF〕 ・立方体，直方体〔PS.PF〕	・対角線，平面〔PS〕	・観察や構成などの活動〔PS.PM〕 ・直線などの平行や垂直の関係〔PS.PF.PM〕 ・見取り図や展開図をかく〔PF.PM〕 ・ものの位置を表す〔PS.PF〕
第 5 学年	・多角形や正多角形〔PS.PF〕 ・角柱や円柱〔PS.PF〕	・底面，側面〔PS〕	・観察や構成などの活動〔PS.PM〕 ・図形の合同〔PS.PF.PM〕 ・図形の性質を見いだす〔PS.PF〕 ・直径と円周の関係(円周率)〔PS.PF.PID〕 ・見取図や展開図をかく〔PF.PM〕
第 6 学年			・観察や構成などの活動〔PS.PM〕 ・縮図や拡大図〔PF.PM〕

			・対称な図形(線対称，点対称)〔PF.PM〕

【 D 数量関係 】

	関数の考え	式の表現と読み	資料の整理と読み
第 1 学年	・ものとものとの対応〔PS.PF〕 ・数の大小や順序〔PS.PID〕 ・一つの数をほかの数の和や差としてみること〔PS.PF〕	・加法及び減法の式の表現とその読み〔PF.PID〕	・ものの個数を絵や図などを用いて表したり読み取ったりすること〔PS.PF〕
第 2 学年	・数の大小や順序〔PS.PID〕 ・一つの数をほかの数の積としてみること〔PS.PF〕 ・乗法が 1 ずつ増えるときの積の増え方〔PF.PID〕	・加法と減法の相互関係〔PS.PID〕 ・乗法の式の表現とその読み〔PS.PF〕 ・(　)や□などを用いた式〔PF.PID〕	・身の回りにある数量を分類整理し，簡単な表やグラフを用いて表したり読み取ったりすること〔PS.PF〕
第 3 学年	・乗数又は被除数が 0 の場合を含めての，乗数が 1 ずつ増減したときの積の変化〔PF.PID〕	・除法の式の表現とその読み〔PS〕 ・数量の関数を式に表し式と図を関連付けること〔PF.PID〕 ・□などを用いた式〔PF.PID〕	・資料を分類整理し，表やグラフを用いて分かりやすく表したり読み取ったりすること〔PF.PID〕 ・棒グラフの読み方やかき方〔PS.PF.PID〕
第 4 学年	・二つの数量の関係と折れ線グラフ〔PF.PID〕	・四則の混合した式や(　)を用いた式〔PS.PID〕 ・公式についての考え方と公式の活用〔PS.PF〕 ・□，△などを用いた式〔PF.PID〕 ・四則に加に手成り立つ性質のまとめ〔PS.PF〕	・資料を二つの観点から分類整理して特徴を調べること〔PF.PID〕 ・折れ線グラフの読み方やかき方〔PF.PID.PM〕
第 5 学年	・簡単な場合についての比例の関係〔PF.PID〕	・数量の関係を表す式〔PF.PID〕	・百分率〔PS.PF〕 ・資料の分類整理と円グラフや帯グラフ〔PS.PF〕
第 6 学年	・比〔PS.PF〕 ・比例の関係を式，表，グラフを用いて調べること〔PS.PM.PID.PM〕 ・比例の関係を用いて，問題を解決すること〔PS.PM.PID.PM〕 ・反比例の関係〔PS.PM.PID.PM〕	・文字 a，x などを用いた式〔PS.PID〕	・資料の平均〔PS.PID〕 ・度数分布を表す表やグラフ〔PS.PID〕 ・起こり得る場合を調べること〔PS.PID〕

分類された表を見ても分かるように，一つの内容に対して，複数のパターンが適用されていることが分かる．少なくともこの 4 つのパターンについては相互独立ではないということである．対応のパターンは A という集合のパ

ターンからBという集合のパターンへの一意対応であるとみた時に，相互独立の関係ではない．また，集合のパターンを規定する場合にどの点に着目する事で共通とみなすのかと言う場合には，増減のパターンや移動のパターンが集合のパターンとしてみなす視点ともなり得る．さらに，増減のパターンや移動のパターンを分析的に見ようとすれば，集合のパターンや対応のパターンが必要となる．よって，一つの対象を捉えるときに，ただ一つのパターンしか認められないのではなく，様々なパターンとしてみなされる．

謝辞

多くの方の支えを受け，こうして２年間の研究成果をまとめられたことに深く感謝いたします.

思えば，算数や数学の時間が憂鬱で仕方がなかった私に，もう少し面白みのあるものだと教えてくれた高校の数学の先生に出会えたことが，算数教育の道に進むきっかけになりました. しかし当時はどうしてこれまで何の魅力も感じなかった数学が「面白そうだ」と思えたのか，不思議で仕方ありませんでした. その疑問に答えるきっかけとなったのが，大学２年生の時に受けた溝口先生の数学学習指導論での講義でした.

ゼミに入った当初は，毎回のゼミが緊張の連続でした. 周囲の先輩方の研究を見るたびに焦りを感じたり，読み込みの浅いまま量をこなす発表をしてしまっていました. そんな私を見て，当時院生だった塩見さんが「たくさんやることが研究の価値ではない. たった一つのたわいない言葉でも，その背景にあるものをどれだけ調べることができて，自分の者にできるのかが重要だ. あせらずに，着実に研究を進めた方がいい」と指摘してくださった事をきっかけに，何かを研究するということの大変さを痛感しました.

３年生でゼミに入った当初は大学院に進学することは微塵もないと大見えを切りましたが，気付けば魅力的な研究テーマに出会い，こうして大学院生として研究を続ける機会をいただきました. それもひとえに，溝口達也先生のご指導があったからこそだと思います. 研究がなかなか思うように進まない私に，根気よく指導してくださったり，算数・数学教育の素晴らしい実践に触れる機会を作ってくださいました. 溝口先生のもとで研究できたこと，その日々はこれからの私の人生にとって大きな転機となったことは言うまでもありません.

また，矢部敏昭先生には，折につけ研究に対して指導いただき，数学教育の魅力，奥深さを教えていただきました. 矢部先生とお話をさせていただくたびに，日々の研究よりよいものにしていこうと思えました.

さらに，熊本大学の山本信也先生には，大学院1年の夏の集中講義でお会いしてから，学会などで大変お世話になりました. パターンの科学の魅力を真に教えてくださったのは山本先生です. 「パターンの科学としての数学観」という捉え方ができるようになったきっかけも山本先生で，深く感謝しています.

溝口研究室では多くの素晴らしい先輩方と，ひたむきに研究に励む後輩に恵まれ，有意義な日々を過ごすことができました. 皆様に深くお礼申し上げると共に，多々ご迷惑をおかけしたことをお許しください.

最後に，2010年6月26日，母が他界いたしました.

私が教師になりたいという夢を，そして，溝口研究室で研究を続けたいという思いを誰よりも応援してくれていました. 突然の事に，戸惑い，長い期間研究を離れることとなりました. そして，一時は大学院での研究をあきらめることも考えました. 大きな心の支えを失って，日々だた時間だけが過ぎるのを待ちました. そんな日々を送る私にもう一度頑張ろうと立ち上がる勇気をくれたのは，2010年11月の学会発表への参加を尋ねる溝口先生のメールでした. 毎日を過ごすことが苦しくて何もかもから逃れてしまいたい思いとは裏腹に，「参加します」と思わず動いた指に，研究を続ける覚悟ができました. 溝口研究室の院生がこれまで普通に通ってきた道を，私も同じように普通に通っていけるのだということが何よりもうれしいことであると感じずにはいられませんでした.

それからの日々は，たくさんの方に迷惑をかけながら，必死に研究にしがみついてきた日々でありました.

こうして研究を再開でき，１つの形として残せることになったのは，そんな私を温かく見守ってくださった溝口先生をはじめ，支えてくれた家族，そして周囲の皆さまのおかげです. 本当にお世話になりました.

2012年1月

院生室にて

鳥取大学数学教育研究　ISSN 1881–6134

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。

- 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
- 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
- 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
- その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/