

ISSN 1881-6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education



<http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu>

数学的問題解決における〈イメージ〉の機能に関する研究

—〈イメージ〉の“コミュニケーションの機能”に焦点を当てて—

田中 光一 *Koichi Tanaka*

vol.13, no.1

Apr. 2010

数学的問題解決における〈イメージ〉の機能に関する研究 ー 〈イメージ〉の“コミュニケーションの機能”に焦点を当ててー

田中 光一
鳥取城北高等学校

1. 問題の所在

厳密性が求められる数学において、イメージとは曖昧で、不確定なものというネガティブな見方がされるおそれがある。しかし、数学者が問題を解決するにあたってイメージが重要な役割を果たしているという主張もある(Pirie, 1994, 1998)。そうであるならば、学習者がよりよく数学を解決できるようになるための一方策として、学習者がイメージをよりよく使えるようになるような学習指導を授業者が行うということが考えられる。

そのような学習指導を設計、実践するには、イメージとは何かを授業者自身が了解していなければならない。ところが、単にイメージと言っても、その使用は漠然としたことが多く、特に数学におけるイメージとして我々ほどのようなものを意味するか、また、イメージが学習者の問題解決にどのように機能するか、必ずしも十分明確にはなっていない。

これまでのイメージ研究では、Vinner & Tall (1981) をはじめとして、概念の形成過程におけるイメージの役割や、ある概念についてのイメージを研究したものがあつた。しかし、学習者の問題解決中におけるイメージの機能については言及されていない。

2. 研究の経緯

上述のような問題意識から筆者は、学習者がよりよく問題を解決できるようになるために、学習者が〈イメージ〉をよりよく使いこなせるような学習指導を授業者が行えるよう、理論的な示唆を与えることを大きな目的としている。ここで、本

研究における〈イメージ〉とは、通常の static な像としての意味だけでなく、思考の中における像の dynamic な操作としての意味も包括した「解決者の思考の中で形成された心的表象、およびその操作」であり、図はすべて「〈イメージ〉の一部を顕在化した物理的対象」である。また、Vinner & Tall (1981) の先行研究¹⁾から、〈イメージ〉と概念が対応していることが考えられる。したがって、社会的に共有された、すなわち理論的に構成された概念を Concept とし、個人の中に構成された概念を Conception とする²⁾。

筆者は以上のような大きな目的の達成のため、基礎的研究としてまず、学習者は解決に困難が生じたとき〈イメージ〉を用いているということを明らかにした(田中, 2009a)。さらに、問題解決において〈イメージ〉は問題把握の機能、思考を促す機能、コミュニケーションの機能、思考を評価する機能の4つの機能を持ち、多様な角度から問題解決に機能することを明らかにした(田中, 2009b)。

3. なぜコミュニケーションの機能に焦点を当てるのか

上記に挙げた4つの機能それぞれの特徴を考えると、問題把握の機能、思考を促す機能、思考を評価する機能については、いずれも個人内において機能する。それに対し、コミュニケーションの機能とは文字通り、個人間において機能する。他者との間に機能するが故に、様々な不都合が生じることが考えられる。日々の算数・数学の授業において、Concept の構成が図られる(溝口, 1995)。

社会的に共有された Concept が構成されることを考えるとき、個人間での共有という問題を考えざるを得ない。すなわち、教授場面において、授業者と学習者の間で、授業者が学習者の〈イメージ〉をどう扱うかが問題となる。学習者の〈イメージ〉を扱うとはつまり、学習者に〈イメージ〉を用いさせたり、学習者の誤った〈イメージ〉を修正したりすることである。したがって、教授場面を想定したとき、コミュニケーションの機能について焦点を当てた考察が必要となる。

そこで本稿では、授業において授業者が学習者の〈イメージ〉をどう扱うのが望ましいのかを判断するために、授業者による学習者の〈イメージ〉の扱い方について、授業者が授業を解釈する観点を提示することを目的とする。

4. コミュニケーションの機能をどのように探究すべきか

学習者は〈イメージ〉を用いて解決へと至り、そしてその解決を他者に伝える際、〈イメージ〉を用いている(田中, 2009b)。したがって、通常行われている算数・数学の授業において、学習者は〈イメージ〉を用い、学習者と授業者との対話が行われている場面で、学習者の〈イメージ〉が授業者に伝達され、授業者の〈イメージ〉もまた学習者に伝達されていると考えられる。学習者および授業者が〈イメージ〉を伝達する際、〈イメージ〉そのものではなく、〈イメージ〉の表出である図や言語などの媒介を用いるだろう³⁾。したがって、授業者および学習者が〈イメージ〉を伝達する際にどのような伝達手段をとったのかについて、本稿の目的を達成する上で重要な解釈項となり得る。

そこで、本稿の目的である、授業者が学習者の〈イメージ〉をどう扱うのが望ましいかを判断する観点を明確にするため、本稿では、実際の授業観察・分析という臨床的方法をとる。授業の中でも特に、学習者と授業者の対話場面を中心に分析することで、本稿の目的の達成を図る。授業観察

にあたり、実施する授業の設計などについては、調査者(筆者)は介入せず、授業者による通常通りの授業を観察対象とする。

本授業観察では授業者と学習者による〈イメージ〉のコミュニケーションの同定が観察の目的となるため、授業全体を通して、授業者と学習者の対話場面が主な分析対象となる。したがって、記録については、授業者の言動を逃さないようにビデオテープに記録する。

対象：鳥取県内中学校の2クラス(中学校2年生、中学校3年生)⁴⁾

日程：2009年10月5日(中学校2年生)、6日(中学校3年生)

5. 授業観察の記録及び考察

(1) エピソード I

エピソード I は中学校2年生における、関数の授業である。本授業のねらいは関数の変域を学習することである。

① エピソード I-A の記録

エピソード I-A は本授業における問題提示場面である。問題場面は以下のとおりである。

四角形 ABCD は1辺 4cm の正方形である。点 P は頂点 A を出発して、毎秒 2cm の速さで A→B→C→D の順で、この正方形の辺上を頂点 D まで動くものとする。点 P が頂点 A を出発してから x 秒後の $\triangle APD$ の面積を ycm^2 とする。

以下、授業者(T)と学習者(S)の発話記録である。T, S の頭にある数字は通し番号である。問いかけには語尾に“?”と表記する。沈黙が数秒続く場合は、“(・・・[〇秒])”と表記する。発話と図が並列している箇所については、右側の写真によって示される現象と左側の発言が同時に起こっていることを表す。“(→)”と表記されている箇所は、次の発言に連続していることを意味する。

01T：「三角形の面積は増える？減る？」

02S: 「増えて減る。」

03T: 「増えることもあるし、減ることもある。増える、減るだけ？」

04S: 「変わらない。」

05T: 「変わらないこともある。そんなイメージ分かる? (・・・[4秒])」

06T: 「Pが」 (→)

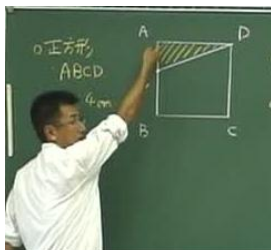


図1-a

07T: 「こう」 (→)



図1-b

08T: 「動くんです。」



図1-c

09T: 「面積が増えるのはPがどこを動く時? または減る時ってどこを動く時? 増えるのは?」

10S: 「AB」

11T: 「減る時は?」

12S: 「CD」

13T: 「減る時ってどうなってるんだ? 例えばPがここだったら APD はどんな図になる? (・・・[4秒])」

14T: 「こんな感じだね。」

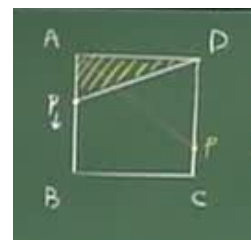


図2

15T: 「どんどん」 (→)



図3-a

16T: 「Pが増えていく。」

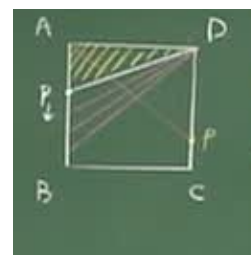


図3-b

17T: 「こんな感じでPがぐるぐる動いたら、Pの場所によって面積は変わってきます。変わらないのはPがどこの時?」

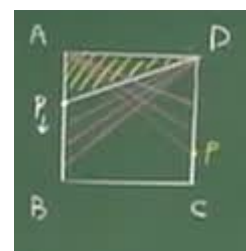


図4

18S: 「BC」

19T: 「BC上。なんで変わらないの?」

20S: 「高さが変わらないから。」

21T: 「そうだね。ここで質問。面積が 7cm^2 になるのはいつか。」

② エピソード I-A の解釈及び考察

授業者は、この問題における動点 P の動き方とそれに伴って変化する三角形 APD の面積の変化の様子を、学習者が正確に把握できるように問題場面を説明している。つまり、P が辺上を動き、三角形 APD が変化する様子の〈イメージ〉を学習者が用いることができるように、授業者は図を用いながら説明していることが分かる。これは以下のことから考えられる。授業者は、06T, 07T, 08T において、図の辺上を指でなぞることで P が動く様子を示している。また、14T, 15T, 16T, 17T において、辺上にいくつか点を取り三角形 APD の図をいくつかかくことで、P の位置の変化による三角形 APD の変化の様子を示そうとしている。これは、点 P の動きは『指さし』の動きで表現することができるが、三角形 APD の形が連続的に変化する一連の様子を表現することは点と比較して困難であるため、いくつかの三角形の図を示すことで一連の変化の様子を表現しようとしていると考えられる。すなわち、映画のように、静止画を何枚か用いて一連の動きを表現するようなものである。ここで言う静止画に当たるのが、各々の P の位置によってかけられる三角形の図である。

このように授業者は、本問題における dynamic な場面の〈イメージ〉を、図、言語、および身体表現という伝達手段を用いて学習者に伝達していることが分かる。本授業において授業者は〈イメージ〉の伝達手段として、図、言語、身体表現という 3 つの手段を用いたが、この後の授業展開で、学習者が問題場面を把握できていないといった混乱は特に見られなかった。したがって本授業では、上記の伝達手段が授業者の〈イメージ〉の伝達に有効であったと考えられる。

しかし、本授業においては上記の伝達手段が有効であったが、上記の 3 つ(すなわち図、言語、身体表現)が他の授業においても常に有効であるとは限らないと考えられる。したがって、〈イメージ〉

の伝達にはその伝達手段が重要な役割を担うと言える。〈イメージ〉の伝達手段として何を、いかに用いるかが問題となる。授業者は授業において、〈イメージ〉の伝達手段についても併せて検討する必要があると言える。

本問題文では点 P の動き方についての記述はなされているが、提示された問題文と static な図だけでは点 P の dynamic な動きそのものは示されていない。したがって、授業者は問題文と図を補足するように、身体表現を用いて、点 P が動く〈イメージ〉を伝達しようとしていると考えられる。ここで仮に授業者が、点 P が動く〈イメージ〉を伝達しようとしなければ、学習者は授業者が意図した〈イメージ〉とは別の〈イメージ〉を用いる可能性がある。授業者は学習者が他の〈イメージ〉を用いないよう、授業者が意図した〈イメージ〉を用いさせるため伝達したとも解釈することができる。すなわち、授業者は学習者の〈イメージ〉を制限したと考えられる。5.1 で述べたように、本授業のねらいは、関数の変域を学習することである。そのためにまず、本問題の面積の変わり方を表す式や図、表、グラフといった、変域を考察するためのデータが必要となる。授業者は変域の学習という本授業のねらいを達成するため、学習者が本問題場面の把握でつまづくことを避けたと推測できる。そうであるならば、本授業の問題提示において、授業者が意図する〈イメージ〉を伝達し、学習者の〈イメージ〉を制限したことは、本授業のねらいの達成という視点から見れば、妥当な判断であると考えられる。

③ エピソード I-B の記録

エピソード I-B は本授業における評価問題の場面である。評価問題は以下の通りである。

下の図は、AB が 4cm、BC が 6cm の長方形である。点 P が A を出発して長方形の周上を B、C の順に D まで動くものとし、点 P が x cm 動いた時の $\triangle APD$ の面積を y cm² とする。

点 P が次の辺上を動く時について、 y を x の式で表せ。また、 x の変域も示せ。

①辺 AB 上 ②辺 BC 上 ③辺 CD 上

以下、③を確認する場面からの記録である。

22T: 「CD 上の式はどうなる? 底辺は 6, 高さはどう表わす?」

23S: 「 $y = -3x$ (・・・[3 秒])」

24T: 「どうして -3 だと分かる?」

25S: 「傾きが、なんかこうなる。(指を左上から右下に斜めに動かす)」⁵⁾

26T: 「これの逆だ
っていう考
えか。」(→)



図 5-a

27T: 「なるほど
な。」

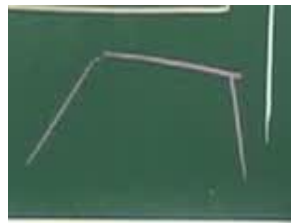


図 5-b

28T: 「辺の長さで考えたらどう?」

29T: 「ここまで
がいくつ?
 x でしょ。」

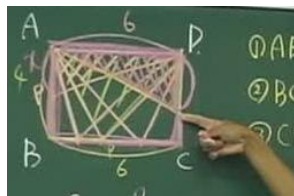


図 6

30S: 「引く。」

31T: 「そう。何から?(・・・[3 秒])」

32T: 「ここまでが
14 でしょ。」

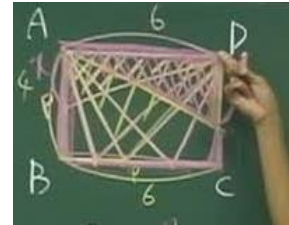


図 7

33T: 「だから、 $6(14-x)$ 。 $(14-x)$ が高さなんだよね。これ(“ $y = 6(14-x)\frac{1}{2}$ ” とすでに板書済)を計算すると $y = -3x + 42$ 。」

④ エピソード I-B の解釈及び考察

エピソード I-B の中で、学習者 25S は、傾きが -3 になる理由を、『指さし』の動作を用いて説明していた。これは、面積を表すグラフが下がっていくという **dynamic** である〈イメージ〉を伝達するため、身体表現という伝達手段を用いたのだと解釈することができる。前述のエピソード I-A においても、授業者が用いた〈イメージ〉の伝達手段の一つに身体表現が含まれていた。ここで、エピソード I-A, I-B で得られた解釈を併せて考察すると、以下のような仮説が立てられる。

〈イメージ〉は非物理的であり、受け手が送り手の〈イメージ〉を直接観察することは不可能である。言い換えれば、〈イメージ〉を直接伝達することは不可能である。そこで、送り手は〈イメージ〉を観察可能なメッセージとして表現し、受け手へ発信する。メッセージが〈イメージ〉の表現であるということはつまり、メッセージは〈イメージ〉によってその内容が決定される。発信されたメッセージは受け手に受け取られ、受け手の思考の中に〈イメージ〉を再構成すると考えられる。このような〈イメージ〉の伝達という現象は、〈イメージ〉が持つコミュニケーションの機能によるものであり、このような伝達を〈イメージ〉のコミュニケーションと呼ぶ。さらに、〈イメージ〉は

dynamic であるという性質を持っている。これらのことから、〈イメージ〉を伝達するために図というメッセージが伝達手段として用いられた場合、図のような static なメッセージでは受け手が読み取るのは static な像であり、dynamic である〈イメージ〉は伝達されないと考えられる。しかし、本事例で用いられた身体表現のような dynamic なメッセージならば、受け手の思考の中に dynamic である〈イメージ〉を再構成すると考えられる。

このように考えると、〈イメージ〉のコミュニケーションにおいて、dynamic なメッセージが及ぼす影響は非常に大きいと言える。

一方、dynamic なメッセージが、受け手の思考の中に dynamic である〈イメージ〉を再構成するということは、言い換えれば受け手の〈イメージ〉を制限するということでもある。5.1.2 で述べたエピソード I-A における〈イメージ〉の制限も、授業者の dynamic なメッセージ(06T, 07T, 08T)によるものであると考えられる。エピソード I-B では、辺 PD の長さを考えるために、29T において『指さし』の動きで点 P の動きを示し、点 P の軌跡の長さが x であることを説明している。エピソード I-A と同じ『指さし』という手段を用いて、点 P の動きの〈イメージ〉を用いさせている、つまり学習者の〈イメージ〉を制限している。この〈イメージ〉の制限によって授業者は、学習者が点 P の軌跡の長さに着目することを意図したと考えられる。したがってエピソード I-B においても、授業者による学習者の〈イメージ〉の制限は妥当であったと言える。

(2) エピソード II

エピソード II は中学校 3 年生における 2 次関数 (2 乗に比例する関数) の授業である。本授業のねらいは関数 $y=ax^2$ のグラフを学習することである。

① エピソード II の記録

エピソード II は上記の授業において、2 次関数のグラフの特徴として放物線であることをまとめた後、授業者が作った教具を用いて放物線の軌跡を見せる場面である。

34T: 「さっき、“物を放り投げる線” と言ったので、ちょっと確認してみましょう。」

[教具の準備にかかる。一部省略]

35T: 「いくぞ。」

(→)

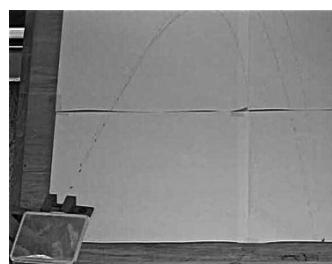


図 8-a

36T: (→)

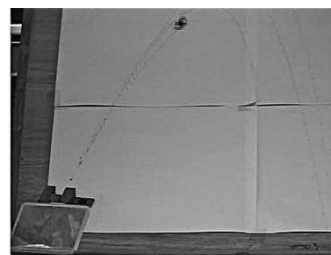


図 8-b

37T: 「どうだ。」

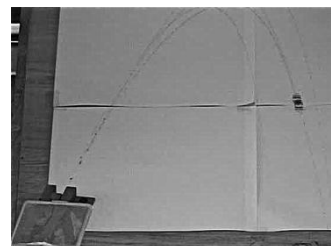


図 8-c

38T: 「こんな感じです。」

② エピソード II の解釈及び考察

エピソード II で用いられた教具は、感熱紙を貼ったベニヤ板を斜めに持ち、その斜面にライターで熱したパチンコ玉を転がすことで、感熱紙がパ

チンコ玉の熱に反応して玉の軌跡が黒いラインとして残るというものである。35T, 36T, 37Tにおいて、この教具を用いて授業者は、放物線の滑らかなカーブの軌跡を学習者に見せようとした。これは授業者が持つ放物線の〈イメージ〉を、教具というメッセージを用いて伝達しようとしたと解釈することができる。

エピソードIでは身体表現、エピソードIIでは教具というように、伝達手段そのものは異なっているが、dynamicなメッセージであることは両エピソードともに共通している。つまり、エピソードIIにおいてもエピソードIと同様に、〈イメージ〉のdynamic性を伝達するために、dynamicなメッセージが用いられていることが分かる。

一方、35T, 36T, 37Tにおいて授業者は、教具を用いて学習者の放物線の〈イメージ〉を制限したとも言える。これまでに1次関数のグラフを学習している学習者は、初めて学習する2次関数(2乗に比例する関数)のグラフについて、例えば図1, 図2で示されるような〈イメージ〉を用いてしまう可能性もあると推測できる。そのような、誤った〈イメージ〉の使用を避けることを意図して、授業者は学習者の〈イメージ〉を制限したと解釈できる。

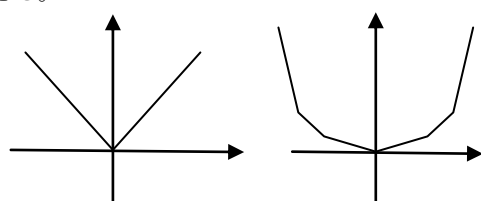


図9

図10

6. 結論

本稿では〈イメージ〉のコミュニケーションの機能について、以下の2点が明らかとなった。

- ・〈イメージ〉のコミュニケーションにおいて、〈イメージ〉のdynamic性を伝達し、〈イメージ〉を制限するためには、dynamicなメッセージが必要不可欠であること。

- ・〈イメージ〉のdynamic性を伝達する際に、授業者はdynamicなメッセージを意図的に選択する必要があるということ。

以上のことから、授業者が学習者の〈イメージ〉を扱うには、メッセージとしてstaticなもの、つまり図などだけでなく、dynamicなもの(例えば身体表現など)についても併せて用いることを検討しなければならないということが言える。それと同時に、自身が用いたメッセージが、学習者の〈イメージ〉を制限するという事に留意しなければならない。本稿におけるエピソードI, IIにおいては、授業のねらいという視点から見れば、授業者が学習者の〈イメージ〉を制限した意図は妥当であるとみなされたが、一般に授業者が学習者の〈イメージ〉を制限することのよしあしは単純に議論できるものではない。例えば、授業において学習者の〈イメージ〉を制限することにより、多様な解決を促しにくくなる場合もあるだろう。一方、〈イメージ〉を制限することにより、学習者の活動が円滑になったり、誤った概念を修正したりすることが例として考えられる。

本稿の結論として、授業者は、用いたメッセージが学習者の〈イメージ〉を制限することを十分に了解し、その上で、メッセージを意図的に選択することが必要であるということが示唆される。

注

- 1) S. Vinner & D. Tall(1981)は数学的概念の形成過程について、概念イメージと概念定義という枠組みによって説明しており、「個人的な概念定義は公的な(formal)概念定義と区別できる」と述べている。
- 2) 田中(2009a)において、〈イメージ〉と概念との関連を考察している。
- 3) なぜならば〈イメージ〉は思考の中の心的表象やその操作であり、直接観察することは不可能だからである。また、コミュニケーションのSMRモデルにならうと、〈イメージ〉の表出で

ある図や言語がメッセージ(M)に当たる。

- 4) 実際には8クラス(小学校3年生, 5年生, 6年生, 中学校1年生, 2年生×2クラス, 3年生×2クラス)の授業観察を行ったが, 本稿の分析では中学校2年生, 3年生の1クラスずつを対象とする。
- 5) 授業観察で用いたビデオカメラの画面外でのできごとであるので, 写真はない。したがって25Sに限り, 筆者による記述を用いる。

引用・参考文献

江森英世(1992). 「コミュニケーションの分析モデル—数学学習場面のコミュニケーションに焦点を当てて—」. 筑波数学教育研究, 11A, 53-64.

溝口達也(1995). 「数学学習における認識論的障害の克服の意義—子どもの認識論的障害との関わり方に焦点を当てて—」. 筑波大学教育学系論集, 20(1), 37-52.

Pirie, S. E. B. (1998). Crossing the Gulf between Thought and Symbol: Language as (Slippery) Stepping-Stones. *Language and Communication in the Mathematics Classroom*, NCTM, 7-29.

Pirie, S. E. B., & Kieren. T. E. (1994). Growth in Mathematical Understanding: How Can We Characterise It and How Can We Represent It? *Learning Mathematics: Constructivist and Interactionist Theories of Mathematical Development*, Kluwer Academic Press, 61-86.

Vinner. S. & Tall. D. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *ESM*, 12(2), 151-169.

田中光一(2009a). 「数学的問題解決における〈イメージ〉とその機能に関する調査研究」. 鳥取大学数学教育研究, 12(1), 1-14.

田中光一(2009b). 「数学的問題解決における〈イ

メージ〉の機能の様相に関する研究—コインの回転問題を事例として—」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 16(1).

鳥取大学数学教育研究 ISSN 1881-6134

Site URL : <http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu>

編集委員

矢部敏昭 鳥取大学数学教育学研究室 tsyabe@rstu.jp

溝口達也 鳥取大学数学教育学研究室 mizoguci@rstu.jp

(投稿原稿の内容に応じて、外部編集委員を招聘することがあります)

投稿規定

- ❖ 本誌は、次の稿を対象とします。
 - ・ 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文、またはその抜粋・要約・抄録
 - ・ 算数・数学教育に係わる、理論的、実践的研究論文／報告
 - ・ 鳥取大学、および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
 - ・ その他、算数・数学教育に係わる各種の情報提供
- ❖ 投稿は、どなたでもできます。投稿された原稿は、編集委員による審査を経て、採択が決定された後、随時オンライン上に公開されます。
- ❖ 投稿は、編集委員まで、e-mailの添付書類として下さい。その際、ファイル形式は、PDFとします。
- ❖ 投稿書式は、バックナンバー（vol.9以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551 鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX 0857-31-5101 (溝口)

<http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/>

