ISSN 1881-6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

一般化を志向する教授学習過程への『教師』と『教材』からのアプローチ

−コミュニケーション，ディスコース，生成的な例に着目して−

早田　透　*Toru Hayata*

vol.13, no.5

Jan. 2011

鳥取大学 数学教育学研究室

一般化を志向する教授学習過程への『教師』と『教材』からのアプローチ

-コミュニケーション，ディスコース，生成的な例に着目して-

鳥取大学地域学研究科　　早田　透

1. 本研究の目的と方法

本研究は一般化を志向する教授学習過程について検討し，それがどの様にあるべきかを明らかにし，改善をはかる事が目的である．

目的を達成するため，筆者は3つの研究課題を導出した（早田,2009）．即ち，

- **研究課題1**
  一般化をはかる学習において，どのように概念を構成していくか
- **研究課題2**
  一般化をはかる学習において，どの様に捨象する差異性とその程度を決定していくか
- **研究課題3**
  一般化をはかる学習において，互いに異なる特殊から一般の命題が導かれるということを，どの様に学習機会として取り入れるか．

これらの課題を検討するため，先行研究で検討されていない問いを明らかにし，解決をはかるためのアプローチの方法を明らかにすることが本稿の目的である．

筆者のこれまでの研究においては，一般化を志向する教授学習過程において展開される，一般化以外の思考や様相に着目し，明らかにする事によって研究課題の解決を試みてきた．

しかし，一般化に関する先行研究（例えばDörfler（1991））との関係性については，十分に明らかにならなかった．

本稿ではまず，これまでの一般化に関する研究と本研究の間の関係性を明らかにするため，一般化を志向する典型定期な1つの事例を取り上げ，先行研究で提示された一般化のモデルを使い，その事例を分析した．

次に，教授場面における同じ事例の扱いを観ることで，一般化のモデルにおいて登場しなかった要素を明らかにした．

それらの要素から『子ども』『教師』『教材』という教授学的三角形に対応する3つの問いを明らかにし，Sfard（2001），Sierpinska（2005），宮崎（1991）らの研究を参照して検討することで，研究課題へのアプローチの仕方を明らかにした．

2. 一般化に関する研究

2.1 一般化とは何か？という問い

一般化は数学的認識の本性に直結する重要な過程であり，認識論的に基礎づける事は容易ではない．そこで，一般化とは何かを明らかにすることを通して，算数・数学の一般化を志向する教授学習過程をよりよくしていこうという試みが行われてきている．

本稿はその中でも特に，抽象と一般化を接続し，モデルという形で提示したDörfler（1991）と岩崎（2007）に注目する．

2.2 Dörflerの一般化モデル

Dörfler（1991）は，教室においてともすれば一般を“共通”であると見なす傾向にある事を問題視し，研究の動機の1つとしている．

Dörflerは学習者の一般化過程を詳細に分析し，一般化の特徴を記号の使用とそこに潜む変数性に求めた．Dörflerにとっての記号は2つに分けられており，1つが例えば円周率をπと置くような文字や言葉での表現やそれに類するもの．もう1つは≡のように関係性を表したり，＋や−のように抽象された性質を表すものである．

Dörflerによれば，数学において活動の要素や活動を記述したり，活動の中の不変性を記述するためにこれらの記号が必要となる．また，これらの記号の中でも特に，活動の中の不変性を記述した記号が，活動の要素を置き換えたり，交換したりする可能性を持つことから，これを変数性という言葉でDörflerは捉える．

この様に特徴的な記号を用いて，数学的に不変な状態を記述する構成的抽象を一般化の基盤となる重要なプロセスとして位置づけている．

これらの考察を基にDörflerは抽象と一般化を接続した一般化モデル（図1）を提示した．

Dörfler自身はこのモデルであらゆる一般化を捉えられるとしているが，ではどの様に捉えられるか，Dörflerの一般化モデルを事例に適用して検討を行う．

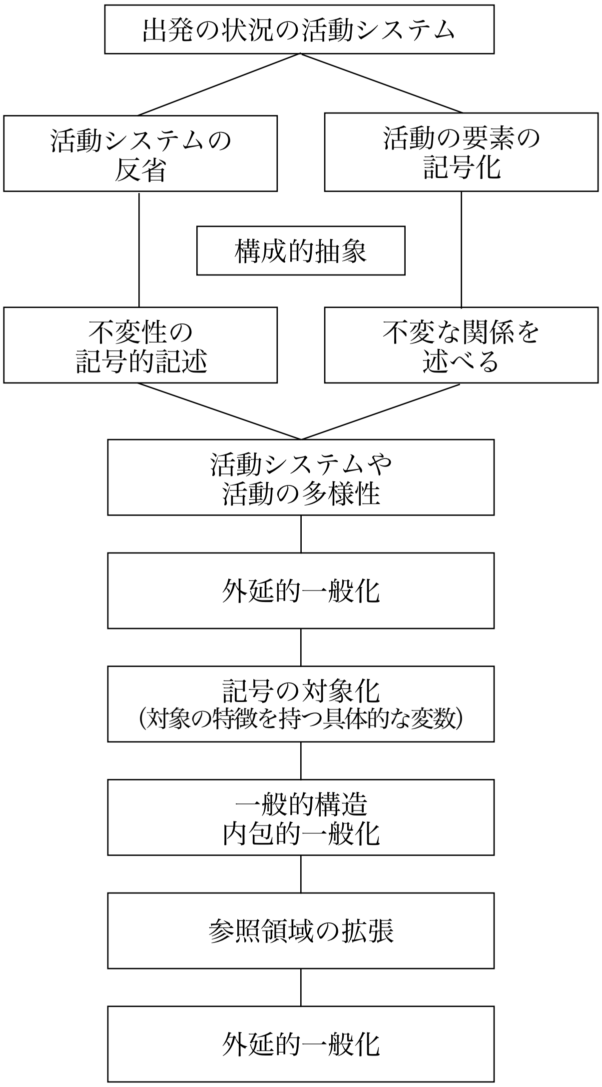
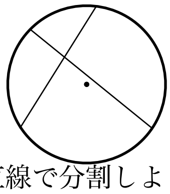


図1：Dörfler（1991,p.74）の一般化モデル

2.2.1 直線による円の分割事例

正規の課程外であるが，次のような問題を中学校1年生程度の学習者が取り組む事を想定し，本稿においては「円の分割事例」と呼称する．

円Oの中に直線を引いていくつかの部分に分けていく．例えば，図に示した状態は2本の直線で4箇所に分割されている．



この円を5本の直線で分割しようとするとき，最大で何箇所に分割することが出来るか．

この場面での【出発の状況の活動システム】の《活動》は直線（弦）による円の分割である．【活動の要素の記号化】にあたるのは，分割という《活動》を記号にして直線として図に描いたり，直線の本数を数（例えば2）でおいたり，分割された領域を数（例えば4）でおくことである．また，分割によって領域が増えるという《活動》を記述するために「＋」や「＝」といった記号が必要になる．

例えば，図2において矢印で示した順番に分割していくなら「1」，「1＋1＝2」，「2＋2＝4」，「4＋2＝6」といった記号と，それに加えて図中に描いた直線で記述されるだろう．

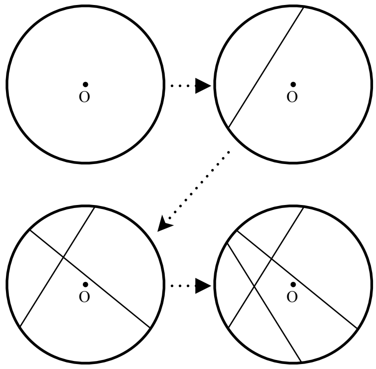


図2：円を直線で分割していく様子

こうした《活動》を繰り返す内に，増える領域の数は，「新しく直線を引いたときに既存の直線と交差する交点の数より1多く領域が増える」という【不変な関係を述べる】ことが出来る．既に引かれている直線が何本であっても，新しく引く直線がどの様なものであっても同様である．

【活動システムや活動の多様性】があり，「新しく直線を引いたときに既存の直線と交差する交点の数より1多く領域が増える」という不変な関係の適用範囲が様々な引き方の場合へと広がる．これが最初の【外延的一般化[1]】である．

ここまで達成された段階で，問題の答えは求められる．即ち，新しく直線を引くとき，それまでに引かれた全ての直線と交点を持つように，かつ複数の線が1つの交点で交わらないように引けばよい．逆に言えば，その様に引けばどの様な直線であってもよい．

この様な状態を記述するには，これまでの記号そのものが対象となる【記号の対象化（対象の特徴を持つ具体的な変数）】が行われる．これによって【構成的抽象】が完了し，この先に一般化が展開される．ここでは「1」や「5」という記号が対象化される．その属性を持つ《変数》として，例えばnという記号を用いて「n本の直線で円Oを分割するとき，最大で1+1+2+3+…+（n-1）+n箇所になる」と記述

される．あるいは，$\frac{1}{2}n(n+1)+1$ と記述してもよい．これが【一般的構造 内包的一般化】である．

従って，問題の答えは1+1+2+3+4+5=16箇所に分割することが出来る．

この「1+1+2+3+…+（n-1）+n」や，図に引かれた直線という記号は，問題場面という《参照領域》—即ち，円Oの直線を引く場合—の性質を持った一種の《変数》である．これらの記号そのものが反省され，《対象化》されることで《参照領域》から切り離される【参照領域の拡張】が行われる．

即ち，《参照領域》は円に留まらず，例えば図3のように，直線によって分割されるのが円ではない場面を考えたり，線と交点の関係だけに注目して直線以外で分割する場面を考える事が出来る．これが【参照領域の拡張】である．

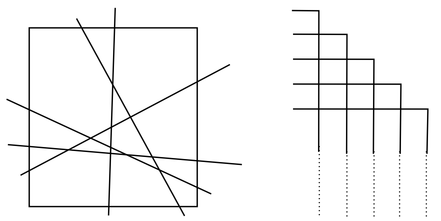


図3：拡張された参照領域

本事例においてはここまでであるが，以降は必要に応じて【外延的一般化】と【参照領域の拡張】を繰り返していく．

これら一連の過程は，かなりの部分が【構成的抽象】に割かれている．この事が象徴するように，Dörflerは一般化において記号や記号化過程を重視する．この様な観点から一般化の過程を捉える事を可能にしたのがDörflerによる成果である．

2.3 岩崎（2007）による批判的考察

一方，岩崎氏はDörflerの一般化モデルについて批判的に考察を行う．

岩崎氏は従来の一般化研究が論理学的に制約されていたのに対し，Dörflerの一般化モデルは一般化が《活動》から始まるという点と，その記号過程である【構成的抽象】を持つ点を特徴に挙げている．

その上で，大きく纏めれば4つの不十分な点（P1~P4）を指摘している．

P1：【外延的一般化】と【内包的一般化】の本質的な相違について言及しない点

P2：記号過程を重視しながら記号の質的相違に言及していない点

P3：【外延的一般化】と【参照領域の拡張】の区別が明確ではない点

P4：Dörflerの一般化モデルが認知モデルでありながらメタ認知的視座を持たない点

それぞれの問題点は関連していることが指摘されるため，円の分割事例を用いてその問題点を明確にしたい．

まずは図3のような，円の分割事例における【参照領域の拡張】を見てみよう．Dörflerは外延的一般化を（後に述べるように）集合の一般化であるとしているが，図3を集合の一般化であると捉える事は可能であり，【外延的一般化】と区別することが非常に困難である．

また，【記号の対象化】に続く一般化が内包的である理由について，Dörfler（1991）はモデルに基づいて導いてはいる．しかし，それが外延的ではない理由の説明にはなっていないことを岩崎氏は指摘する．円の分割事例で見たとき，学習者が【内包的一般化】よりも先に図3の様な【外延的一般化】を達成することは十分に考えられる事である．

更に，記号や構成的抽象という記号化過程を重視しているにも関わらず，【記号の対象化】で対象化された記号の質的相違がモデルに十分反映されているとは言い難い．円の分割事例においても，「3」や「4」という記号が対象化された場合と，円の中に描かれた直線という記号が対象化された場合の違いがあるのか無いのか，あるならばどのような違いかという点は，一般化モデルからは導けない．

更に，一般化モデルの活動をつなぐ線分は何者であるかという点について，Dörfler（1991）は敢えて何も触れていないことが指摘される．岩崎氏によれば，この線分は認知的変容であり，その背後のメタ認知の重要性が指摘される．

以上を踏まえ，岩崎氏は記号・認知に関する議論を踏まえた上で【内包的一般化】と【外延的一般化】を以下の様に再定義した．

<u>内包的一般化</u>：既知の対象を普遍化することによる一般化．対象となっている記号に含まれた意味を，既有の知識に関連づけながら同化し，既有の知識を発展させる認知プロセスとしてとらえられる一般化．（岩崎,2007,p.165）

<u>外延的一般化</u>：記号の内部構造に基づいて，未知の対象を構成するような一般化．記号に内在する意味を既有の知識に同化させることができないので，新たな知識を構成し，その知識の下で，既有の知識を

統合する認知プロセスとしてとらえられる一般化.
（ibid,p.165）

同時に，第1の【外延的一般化】は【参照領域の拡張】へと置き換えられる.

これらの考察を基に，岩崎氏は図4のような一般化分岐モデルを提示する.

この分岐モデルにより，記号の対象化と共に始まる一般化が必ずしも内包的一般化である必要はなく，外延的一般化を志向した学習を設計することが可能になる.

では，一般化分岐モデルを基に円の分割事例を解釈するとどうなるだろうか.

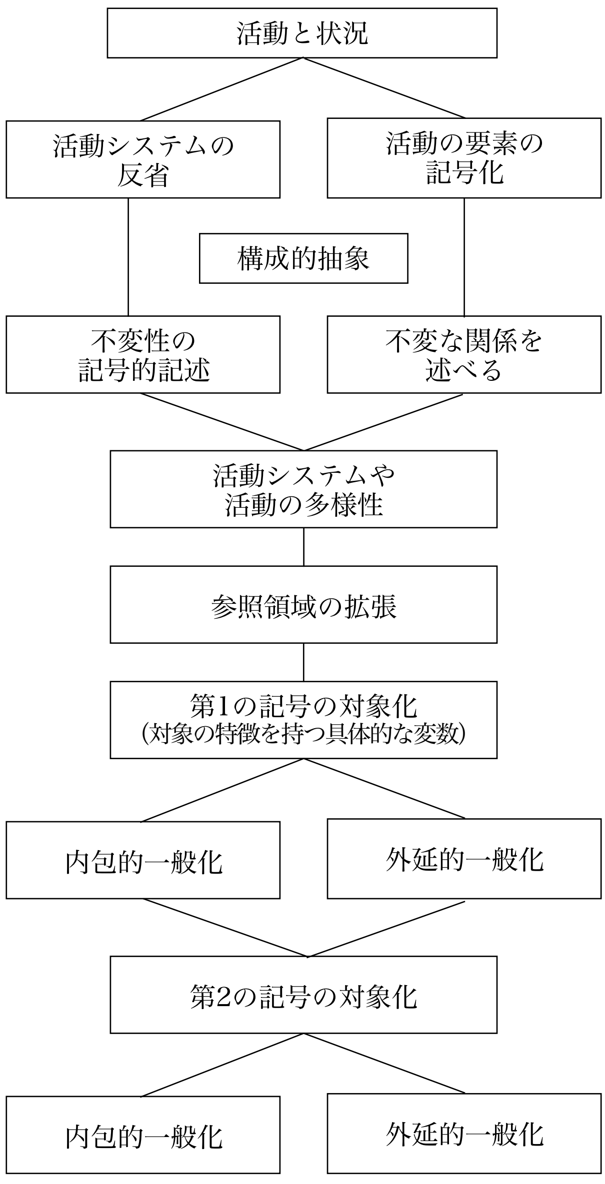


図4：一般化分岐モデル（岩崎,2007,p.166）

2.3.1 一般化分岐モデルと円の分割事例

活動を繰り返す内に，「新しく直線を引いたときに既存の直線と交差する交点の数より1多く領域が増える」という【不変な関係】が明らかになるという点まではDörflerの一般化モデルと同一である.

ここから「新しく直線を引いたときに既存の直線と交差する交点の数より1多い」という不変な関係の適用範囲が様々な引き方の場合へと広がるのも同様である．ただし，Dörflerの一般化モデルにおいては【外延的一般化】と捉えられていたこの過程が【参照領域の拡張】と捉えられる．なぜならば，記号の内部構造に基づいて未知の対象を構成するような一般化ではないからである.

次に【第1の記号の対象化】が行われるが，このとき対象化される記号は「図に描かれている直線」でも「1や5といった数」のどちらでもよい．もし前者が対象化されるなら，図3のような未知の対象を構成する【外延的一般化】が行われる．もし後者が対象化されるなら，例えばnという記号を用いて「n本の直線で円Oを分割するとき，最大で1+1+2+3+…+（n-1）+n箇所になる」と記述される，既知の対象を普遍化する【内包的一般化】が行われる.

それぞれの一般化が達成された後，それまでに対象化されていない記号が対象化され，また【外延的一般化】や【内包的一般化】が達成されていくだろう.

この様に捉える事で，教授学習過程をデザインする規範的枠組みを強化したのが，岩崎氏の捉える一般化分岐モデルによる成果であるといえる.

Dörflerにせよ岩崎氏にせよ，提示された一般化に関するモデルは「一般化とはどうあるべきか」という事を明らかにしており，教授学習過程のデザインにおいて，どの様に一般化を達成させたいかを考える上で非常に重要な役割を果たす事が期待される.

3.問題の所在

3.1 事例の教授学習場面

では，実際に教授学習過程をデザインするにあたって，これらの一般化に関する研究がどの様な役割を果たすのであろうか.

円の分割事例を教授する場面…即ち，一般化を志向した授業を想定して検証する.

本問題を授業で取り扱うにあたり，授業の前半では学習者の自力解決が展開される．そこでは，大きく4つ（S1〜S4）の解決活動が想定される.

S1：試行錯誤を行い，実際に書いた図から5本の直線で分割できる最大の数が16であるという事を推

測する；

S2：交点を増やせば増やすほど領域の数が増える事に気付くと共に，5本の直線で分割できる最大の数が16であるという事を推測する；

S3：分割出来る領域の数が最大になる直線の引き方が，直線の数を問わず常に成り立つことに気付くことが出来る；

S4：S2・S3を基に構造を明らかにした図を描き，最大の数が16であるという事の根拠を明確にし，一般性を示す.

この様な自力解決を想定した授業においては，教師から問題を提示された学習者の何人かはS1の様相を見せると考えられる.

S1の結果，16という答えを出した学習者の何人かは，ここで自分の解決に満足してしまうと考えられる．しかし，この段階での16という答えは，16箇所に分割出来ることを実際の図で示せても，17箇所以上に分割出来ないということは示していない.

そこで教師は，学習者の思考を促進する事を意図して，「17箇所以上に分割することはできないのか？」と問いかけるだろう．この問いかけを受けた学習者は，16という解決の正当性を示そうと努力する.

その結果，学習者はS2の活動に取り組み，直線と交点の関係を基に説明しようと試みていくことが期待される．この活動によって，答えが16箇所であるということの信憑性はかなり高まる.

S2を達成した学習者に対しては，一般化を意図とした教師が思考に介入するため，「その関係は直線が6本や7本の時も成り立つの？」と問いかける．その結果S3の活動に取り組み，そのような関係が成り立つということに気づいた学習者にとっては，その根拠が要請される．その結果として，S4の活動を試みていくだろう． 特にS4の達成にあたっては，この段階の学習者が幾何学的に証明するということは困難であるため（それどころか，大学で数学を先行していたとしても困難である），図5（又はそれに類する図）を描くことが論証[2]の根拠として決定的になる.

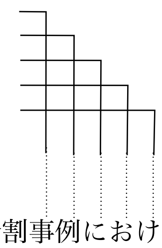


図5：円の分割事例における決定的な図

授業の後半においては，自力解決S1〜S4を基に，教室全体で学習が展開される.

学習者は授業の前半，自力解決の段階で答えが16枚であるだろうということには到達出来るように，教師から思考を促す適切な介入がなされている．その上で単に解決をお互いに披露し合うのではなく，「16箇所」という答えの妥当性についての， 教師が主導する議論が行われる．議論を通して，学習者が主体的に自力解決S1〜S4の活動を順に関連付けていくことで学習が展開されていく.

こうした学習は，子ども達自らが特殊について推理し，試行錯誤をしながら一般化を達成していく典型的な場面である．従って，仮想事例ではあるが本研究が一般化を志向する教授学習場面を考える上で規範としたい事例であると位置付けられる.

3.2 教授学習場面における問題の所在

さて，この様な教授学習場面を想定したとき，解決S3は岩崎氏の一般化分岐モデルにおける【参照領域の拡張】であり，S4は【外延的一般化】である．あるいはこうした過程の中で，本授業では狙っていないものの【内包的一般化】を達成する学習者もいるかもしれないと想定出来る.

このように，岩崎氏の一般化分岐モデルによって，教授学習場面において期待される活動を予測し，デザインする事が可能である.

しかし一般化モデルにおいては，解決を試行錯誤し，推測したり発見したりする円の分割事例の自力解決S1やS2が登場しない．これは一般化モデルの不備なのではなく，この様な試行錯誤がそもそも一般化ではないために，『一般化とはどうあるべきか』を明らかにするという問いの対象外であるからだと考えられる．従って，本研究が一般化を志向する教授学習過程を考察する上で，この点を解決しなくてはならない.

本稿ではこの点をQ1と置く.

Q1：一般化を志向する教授学習過程において，推測や発見に結びつく活動はどう位置付けられるか？

また，本事例においては，16箇所に分割出来ると推測した生徒に対して，教師が『17箇所以上に分割することはできないのか？』と問いかける事を契機として，一般化が展開されはじめた.

この問いかけは直接には一般化を促していないにも関わらず，なぜ一般化の契機となりえるのであろ

うか．この点も検討されなくてはならない．
従って，本稿はこの点をQ2と置く．

Q2：教師からの問いかけが，学習者が一般化へ向かう契機としてはたらくのは，どの様な場合であるか？

通常，授業は『子ども』『教師』『教材』という教授学的三角形から成ると語られる．Dörfler，岩崎氏の一般化モデルは個人の一般化を記述したモデルであり，教授学的三角形からみれば『子ども』に関するモデルであり，『教師』も『教材』も登場しない．また，Q1も同じく『子ども』に関する問いであると捉えられる．

この様な見方をした時，円の分割事例から導かれたQ2は『教師』に関する問いであると位置付ける事が出来る．

更に，本授業が一般化を志向する以上，図5（あるいは類する図）を描くことは極めて重要であり，決定的な役割を果たす．

一般化モデルは，この様な図を活動の中に取り入れられるという点は示唆している．また，【参照領域の拡張】か又は【記号の対象化】を契機に発生するという点も示唆している．しかし，図5のようなある1つの特殊な場合がどの様に構成され，どう位置づけられるかについては不明である．

従って，本稿ではこの点をQ3と置く．

Q3：決定的な役割を果たす特殊はどの様に構成され，どう位置付けられるか？

Q1・Q2と同様に教授学的三角形という観点から見れば，Q3は『教材』に関する問いである．

冒頭に述べた本研究の3つの研究課題

・研究課題1
　一般化をはかる学習において，どのように概念を構成していくか
・研究課題2
　一般化をはかる学習において，どの様に捨象する差異性とその程度を決定していくか
・研究課題3
　一般化をはかる学習において，互いに異なる特殊から一般の命題が導かれるということを，どの様に学習機会として取り入れるか．

を概観したとき，研究課題1は『教師』の役割と『子ども』の思考についての課題であり，Q1・Q2について検討することでアプローチの方法を明らかに出来る．

研究課題2と3は，それぞれ特殊についての課題であるため，Q3について検討することでアプローチの方法を明らかにできる．

4 .課題の検討

4.1 一般化における推測と発見は如何に展開されるか；Q1についての検討

Q1については既に，筆者の先行研究である早田（2010）において検討を行った．

Beth（Beth and Piaget,1966）とPolya（1945,1954a, 1954b）を参考に検討を行った結果，帰納・類比・特殊化という様相が重要であることが明らかになった．更にPolyaに不足する観点から，分類という様相が重要であることも明らかにした．

では円の分割事例においてはどの様な活動が，どのように位置付けられていくのであろうか．

4.1.1 円の分割事例における帰納と類比

円の分割事例で活動S1に取り組む学習者は，そこで帰納や類比を用いて推測すると考えられる．

帰納という活動を考えるなら，例えば以下のような表を書く事で，領域の数の増え方に規則性を見出し，直線の数が5のときに最大で16箇所に分割されると推測することが出来る．

表：直線の数と最大に分割された領域の数

直線の数	1	2	3	4	5
領域の数	2	4	7	11	*16?*

+2　+3　+4　*+5…?*

類比という活動としては，例えば図6の様に，既に引いてある2本の直線に対して異なる引き方をした2つの場合を見ることで，どちらも交点の数＋1個だけ領域の数が増えるという類比な関係にあると見出すことが出来る．

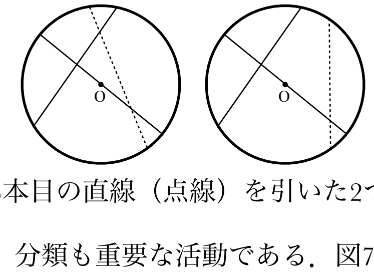


図6：3本目の直線（点線）を引いた2つの場合

同様に，分類も重要な活動である．図7のように，領域の数が最大になるような場合とそうでない場合を分類することで，交点と領域の数について問題の構造を把握することが期待される．

この様に，本事例においても帰納・類比・分類は，推測や発見を行う自力解決S1を捉える為に重要な様相である．

4.2 学習の動機となるコンフリクト；Q2についての検討

一方，筆者のこれまでの先行研究では，『教師』に関係する『Q2：教師からの問いかけが，学習者が一般化へ向かう契機としてはたらくのは，どの様な場合であるか？』について検討をしていない．

円の分割事例から，教師からの働きかけによって，他者に説明しようとすることが一般化に向かう契機となる場合があることが明らかになった．この様な学習者は，教師からの働きかけがなければ，一般化に到達することは困難だろう．

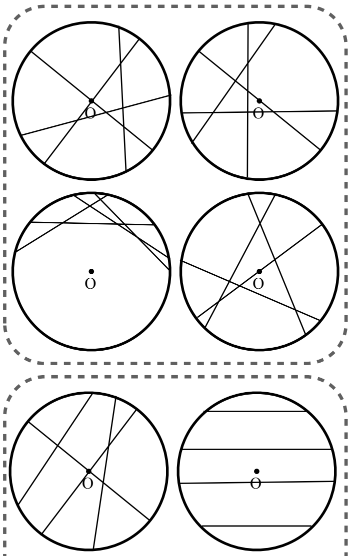


図7：4本で11箇所に分割出来る場合（上）と出来ない場合（下）の分類

この様な場合，いわゆるコミュニケーションが学習者に対して影響を与えたと考えられる．この様なコミュニケーションと学習者の思考の関係について明らかにするために，Sfard（2001）Sierpinska（2005）らの提案に注目する．

学習とコミュニケーションの関係について検討を行ったSfard（2001）によれば，この場面において学習を駆り立てる動機は主として“他の人に対してディスコース的（ディスコース的[3]）に言葉遣いを調整すること”であるディスコース的コンフリクトであると解釈される．同時に，従来学習を駆り立てる動機とされてきた認知的コンフリクトをディスコース的コンフリクトで置き換えることをSfardは提案する．

学習の動機という言葉は様々な捉え方が可能であるが，Sfardや本稿の文脈においては，学習者が自発的に何らかの数学的活動を行おうと思い立つような動機のことを指す．この様な活動は教師によって意図して設計されたものであり，そのような活動を通し学習者はそうとは意識せずに概念を変化させる．

これらの点を踏まえ，認知的コンフリクトあるいはディスコース的コンフリクトについて，Sfardの提案と共に検討する．

4.2.1 認知的コンフリクト

通常，コンフリクト（葛藤）という言葉は“二つ以上の対立する傾向（衝動，要求等）が，ほぼ等しい強さで同時に存在し，行動の決定が困難な状態”（藤井,1986a,p.24）を指す．

認知的コンフリクトという考え方はその起源をPiagetの矛盾観（Piaget,1974）に見る事が出来る．

数学の理解過程における認知的コンフリクトの役割について研究している藤井氏によれば，Piagetにとっての認知的コンフリクトとは認知的システムの不均衡の表現であり，ここでの不均衡とは“子どもがいま認知対象とする経験的データを既存の心的シェマに同化させる時に生起し，心的シェマがその経験的データを調整する為に変容する時，均衡が回復される”（藤井,1986b,p.65）ということを意味する．

では，具体的にどの様なものを認知的コンフリクトと呼ぶことが出来るか，藤井氏の挙げる例（藤井,1986a,p.25）を見てみよう．

4.2.2 認知的コンフリクトの例

不等式$x-2>5$ の解決を試みる授業において

$$x-2+2>5+2$$
$$x>7$$

と解決した生徒がおり，この生徒は以下の様に記述していた．（下線部は藤井氏による）

> 不等式で2<3の時，両辺に1をたしても100を足しても，3.3を足しても<u>かわらない</u>.
>
> 2+1<3+1
>
> 3<4
>
> だから，両辺に2を足すと
>
> $x-2+2>5+2$
>
> $x>7$

これに対して，かわらないという意味が「不等号の向きが変わらない」ということを確認した上で，教師から以下の様な発問を行う．
「大きい方に大きい数，小さい方に小さい数を足しても不等号の向きは変わらないはずです．例えば大きい方に2，小さい方に1を足しても･･･とすると，この場合で先程と異なっているが，どう思いますか？」
この場面で，氏は少なくとも3つの認知的コンフリクト（C1〜C3）が発生していると指摘する．

C1：不等式$x-2>5$ の解は$x>7$ と$x>6$ のどちらであるか？

C2：解を得るための手段について，「両辺 に同じ数をたす」か「大きい方に大きい数，小さい方に小さい数を足す」のどちらが正しいか．

C3：手順の妥当性を示す根拠について，不等号の向きが変わらない点は同じだが，どちらが正しいのか．あるいは，どちらも誤り（根拠として不十分）なのか．

これらは学習者（生徒）の内に生起したものであり，不等式について発生しているコンフリクトであると指摘される．

同様のコンフリクトは円の分割事例でも確認することが出来る．問題の答えが16箇所であると推測した学習者に対して教師が「17箇所以上に分割することは出来ないのか？」と問いかけたとする．このとき，学習者には『17箇所以上に分割することは出来るか否か？』という認知的コンフリクトが発生していると捉える事が出来る．

こうしたコンフリクトを解消しようと学習者が試みることで学習が進行していくと考えられる．

4.2.3 ディスコース的コンフリクト

一方，Sfard（2001）は図8に示した「一番大きい数」の事例（ibid,p.19）は認知的コンフリクトという考え方で捉える事が出来ないという点を根拠に，認知的コンフリクトをディスコース的コンフリクトで置き換えることを提案する．

[1]教師（Rada）：10を数えられますか？
[2]Noa：はい，1,2,3,4,5,6,7,8,9,10
[3]教師：10より大きい数（number）を知っていますか？
[4]Noa：はい，1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20
[5]教師：あなたが考えられる一番大きい数（the biggest number）は何ですか？
[6]Noa：ミリオンです
[7]教師：では，ミリオンに1を加えるとどうなるのですか？
[8]Noa：ミリオンと1です
[9]教師：それはミリオンより大きいの？
[10]Noa：はい
[11]教師：では一番大きい数は何？
[12]Noa：200万（Two million）です
[13]教師：では200万に1を足したら？
[14]Noa：200万より大きくなります
[15]教師：では，一番大きい数に辿り着くことができると思いますか？
[16]Noa：はい
[17]教師：じゃあもし一番大きい数をグーゴルであるとしましょう．
1をグーゴルに足す事は出来ますか？
[18]Noa：ええ，グーゴルより大きい数です．
[19]教師：じゃあ一番大きい数は？
[20]Noa：そんな数は無いわ！
[21]教師：どうして無いの？
[22]Noa：どんな数もいつもそれより大きい数があるからかな？

（図8：教育実習生と7歳のNoa（小学校1年生女子）の会話）
（Sfard（2001）,p.19）

「一番大きい数」の事例は教師と小学校1年生のNoaの会話である．最初に教師が「あなたが考えられる一番大きい数は何ですか？」と聞いたとき，Noaは「ミリオンです」と答える．教師とNoaは2人とも数（number）・一番大きい数（the biggest number）という言葉を用いて会話しているが，それらの言葉が指す対象が異なっており，Noaにとって数という言葉はこの場合数詞を指している．

更に教師とNoaの会話は続き，最終的にはNoaの“数”と教師の“数”は一致する．更に，この過程を通してNoaは自然数について学習したと捉えられる．

“認知的コンフリクトという考え方が世界についての主張同士を「合理的に」正統だとする能力を含む一方で，ディスコース的コンフリクトという考え方は習慣的な言葉遣いの対立を強調する”（Sfard, 2001,p.48）と考えたとき，この事例では世界についての主張同士が問題になっている訳ではない．

即ち，認知的コンフリクトとはある対象について個人内に生起するコンフリクトであり，ディスコース的コンフリクトとはある言葉が指し示す対象そのものについての個人間のコンフリクトである．

Sfardは学習のための主たる動機を認知的コンフリクトからディスコース的コンフリクトに置き換える事を主張し，それによって我々の認知的行動を主として駆り立てるコミュニケーションの必要性を強調する．（ibid,p.49）

同様のコンフリクトは円の分割事例における認知的コンフリクトが生起している場面でも観察可能である．教師が「17箇所以上に分割することはできないか？」と問いかけた場面において，学習者にとって「最大」という言葉は実際に分割してみた結果として最大の場合を指しており，一方で教師にとっての「最大」は，これ以上多く分割することが出来ない保証が与えられた場合を指していると捉える事が出来る．

従って，Sfardが主張するようにディスコース的コンフリクトという考え方で，この場面を捉える事も可能である．

4.2.4 言語とコミュニケーションの社交的な機能

Sfard（2001）はこれらの理論の背景として，思考をコミュニケーションとして概念化している．（自分とのコミュニケーションとも呼ばれる）

この概念化において，我々の思考は本質的に全てディスコース的であり，思考，ディスコースは全てコミュニケーションすることの実例であるという点をSfardは指摘する．

しかし，Sierpinska（2005）は数学的思考における非コミュニケーション的な思考である無意識の思考などを踏まえないSfardによる思考の概念化は，正しくない上に数学教育にとってまったく役に立たないと指摘する．その上で，コミュニケーションの全ての実例はディスコース的ではない点を指摘する．

Sierpinskaは両者の相違として，言語とコミュニケーションが持つ[4]社交的な機能を指摘している． ここでいう社交的な機能とは，例えば会話の合間に「うーん･･･」と言ったり，「そうじゃないの？」と言ったりするような事を指す．少なくともSfardにとってのディスコースとは何かについて書いたり発話したりすることであるが，このような会話は何かについて発話している訳ではない．

社交的な機能が用いられる場面においては，何を言ったかよりもそこにコミュニケーションがあるということが重要になる．その結果，社交的な機能はコミュニケーションを維持する力として作用する．一見するとこれは数学の学習と関係ないように見えるかもしれない．しかし，Sierpinskaはこの点を重要視する．

“コミュニケーションを維持する力のある社会的な状況においては...対話者はその社交的な機能として主に言語を使うでしょう．彼等が何か言ったときそれは彼等の思考とは関係ないかもしれません，もし話す事へのプレッシャーが無いならばそうする方法を考える事が出来ないかもしれません．何人かの生徒が考えるのと同時に単にコミュニケーションできないのは，視覚，触覚，またはその他の非記号的なものが彼等の思考であるからかもしれません．...言葉で考える必要性が無い間，彼等は間違った表現を自分の思考に使っているかもしれません．”（Sierpinska,2005,p.18）

この点を踏まえSierpinska（2005）は社会心理学において Doise&Mugny（1981）らが提唱する “社会認知的コンフリクト”に“ディスコース的コンフリクト”を近接させている．“どちらも社会的相互作用の状況における矛盾する主張の相互発生として理解される”（Sierpinska,2005,p.9）からである．

Sierpinskaによれば社会認知的コンフリクトはこれまでに研究されてきておりMugny,Doise&Perret-Clermont（1975-1976）などにより，問題点が指摘されているとする．即ち“社会認知的コンフリクトを通して学習が進行するという事の前提条件が明確でなく，複雑であり，“モデル効果”に還元不可能であ

る”（Sierpinska,2005,p.10）点や，“個人間のコンフリクトが個人内のコンフリクトより有効であることを実験によって確かにするということは不可能である”（ibid,p.10）点である．

円の分割事例においても，本稿が提示した認知的コンフリクトとディスコース的コンフリクトのどちらが先行しているか判断するのは，非常に困難である．

この様な指摘から，Sfardの主張は全面的に受け入れられるものではないが，『 Q2：教師からの問いかけが，学習者が一般化へ向かう契機としてはたらくのは，どの様な場合であるか？』に対して「社会認知的コンフリクトが発生する場合である」とこたえるられると明らかになった．

更に，Sierpinskaによるコミュニケーションの社交的な機能がなければ，非記号的なものを自らの思考に用いている学習者はそのままであるかもしれないという指摘は重要である．一般化モデルによれば，一般化には活動を記号へ置き換える【構成的抽象】が必要不可欠である．従って，非記号的なものを自らの思考に用いている生徒は十分に一般化を達成出来ないと考えられる．同時に，そのような生徒にはコミュニケーションが必要不可欠であると明らかになった．

4.3 生成的な例を基準に展開される学習；Q3についての検討

『 Q3：決定的な役割を果たす特殊はどの様に構成され，どう位置付けられるか』を考えたとき，特殊が一般化に対してどの様な役割を果すかについての考察が必要不可欠となる．

早田（2010）は一般化に寄与する特殊を，Polya（1954a）の主張から“極端に特別な特殊”・“有力に特別な特殊”として位置づけた．

“極端に特別な特殊”は，非常に極端な場合を考える事で，推理に貢献するような場合を指す．

例えば，円の分割事例において“極端に特別な特殊”としては図9のような状況が考えられる．

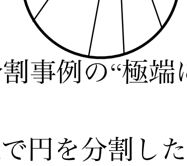


図9：円の分割事例の“極端に特別な特殊”

図9は5本の直線で円を分割したとき，分割される領域の数が最も少なくなるという意味で“極端な”場合である．この様な場合から領域の数を増やす事を考えたとき，交点を増やせば領域の数が増えるという関係に気付く活動が期待される．

一方， “有力に特別な特殊”とは，その様な特殊について推理することが，一般の場合についての解決を含む様な特殊のことを指す．例えば，円周角の定理を証明しようと試みるときに，“有力に特別な特殊”として円周角が90度の場合（ターレスの定理）の証明を考えれば，その証明の手順が（より一般である）円周角の定理の証明の手順とほぼ一致している様な場合を指す．

円の分割事例において図5は，事例に対して非常に“有力”であることは確かである．しかし，これまで本研究が捉えていた“有力に特別な特殊”とは異なる働きをしていると捉えられる．

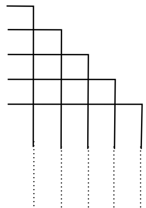


図5：円の分割事例における決定的な図

既に述べた通り，円の分割事例において成り立つ一般の関係を証明することは，中学校1年生程度を想定している本事例の学習者には不可能である．しかし，図5は一種のモデルとして図的な論証を可能にする上に，特殊の中に一般を見つける事が出来る．線の数が6本，7本･･･と増えていったとしても．既に引かれている直線全てと交点を持つようにすれば領域の数が最も多くなるという関係を常に見出せるだろう．

こうした例を，宮崎（1991）は“生成的な例”（ibid,p.192）と捉えている．

4.3.1 説明から証明への展開；生成的な例を基準にして

宮崎氏は以下の条件を満たすものを“生成的な例”と呼んでいる．

“生徒が，例を用いて，対象に対する解釈や操作を系列として示している．...生成的な例は，次の条件を満たす．

条件1：推測したことに一致する事実を得るとき，生徒はその例を手がかりとした．

条件2：その例を用いて，推測したことに 一致する事実を得るまでに，生徒 が行った解釈や操作の系列を一般化すると，それはどの様な場合にも適用できる．”（ibid,p.92）

宮崎氏はこの様な“生成的な例”によって，学習者

の説明の水準を記述している．宮崎（1995）によれば，「3つの連続する数を加えるならば，その和は真ん中の数の三倍である」という命題の説明に，二人の子どもが想定される．（ibid,p.95）

子どもAは

1＋2＋3＝6，6＝2×3 4＋5＋6＝15，15＝5×3 15＋16＋17＝48，48＝16×3 158＋159＋160＝477，477＝159×3 だから，真ん中の数の3倍になる。

子どもBは

3つの連続する数で，真ん中の数をXとすると，一番小さい数は， X−1，一番大きな数はX+1となる。 （X−1）＋X＋（X＋1） ＝X+X+X−1＋1 ＝3X ゆえに，3つの連続する数を加えると，真ん中の数の3倍になる。

宮崎氏の想定するこの事例では，子どもAは数式を用いて帰納的に推論しており，子どもBは代数の言語を用いて演繹的に推論している．“学校数学における証明において，その内容は，子どもにとって普遍妥当な前提から当該の命題を演繹的に推論することであり，その表現は，数や図形に関する命題の連鎖を表すための言語による．それゆえ，子どもBによる説明は子どもAによる説明よりも望ましい．”（ibid,p.95）

しかし，子どもAにとって子どもBと同じ説明をすぐに行う事は容易ではないと考えらる．そこで，以下のような図10を用いた説明を宮崎氏は想定する．

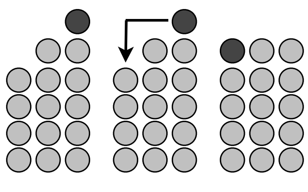


図10：4＋5＋6に関する図を用いた説明

図10を一見すると，4＋5＋6という個別な命題の妥当性を確かめているように見える．

しかし，図11の様に見れば，後は丸を下に付け足して，どの様な場合でも3つの連続した数の和が3の倍数になることを説明出来る．

更に，この様な配列や操作には，図12に示したように子どもBの説明と同じ内容が表されていると見ることもできる．

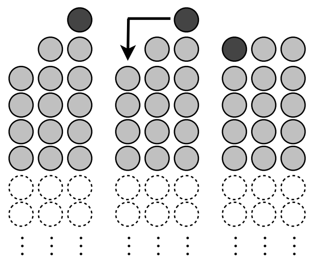


図11：“生成的な例”としての見方

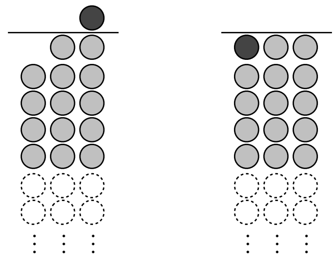


図12：“生成的な例”と子どもBの説明

従って，“生成的な例”を用いた説明を代数の言語で表現していくことで，子どもAがより望ましい子どもBの説明へと高まることが期待される．その際，“生成的な例”を用いた説明が，子供による説明をより望ましい方向に展開するための基準になる．即ち，生成的な例を基準に，個別の説明から普遍妥当な証明へと展開されると言える．

4.3.2 特殊から一般への展開；生成的な例を基準にして

宮崎氏の関心は証明の普遍妥当性ではあるものの，“生成的な例”を基準とした一連の過程は“円の分割事例”で見たような，“特殊から一般へ”と向かう過程に近接させることが出来る．

即ち，宮崎氏の述べる子どもAが特殊について個別に述べた説明から，生成的な例を基準に，一般の場合について子どもBのような証明を試みていると捉える事が出来るだろう．

この様な“生成的な例”を基準とする宮崎氏の説明・証明に関する研究を取り入れる事で，一般化を志向する教授学習過程が『教材』という観点から改善されていくと期待される．

従って，本研究の“有力に特別な特殊”の中に“生成的な例”を加える事とする．

5. 本稿の結論

以上の議論で，一般化を志向した教授学習過程を考察したとき，『子ども』『教師』『教材』という教授学的三角形にそれぞれ対応した問いが明らかになった．

Sierpinska（2005），Doise&Magny（1981）らによる社会認知的コンフリクトについての研究と，宮崎（1991）による生成的な例についての研究が，これらの問いへの有力な手がかりである．

これらの研究は，Dörfler（1991）あるいは岩崎（2007）のように，一般化について特別な関心を持って研究しているわけではい．

しかし，これらの研究を一般化に関する研究へと取り込む事で，一般化を志向する教授学習過程を改善していく．本稿の冒頭に挙げた，目的達成のための研究課題にこたえていく道筋が明らかになった．

5.1 社会認知的コンフリクトと研究課題

円の分割事例から，『 Q2：教師からの問いかけが，学習者が一般化へ向かう契機としてはたらくのは，どの様な場合であるか？』に対して「社会認知的コンフリクトが発生する場合である」と応える事が出来ると明らかになった．

更に，Sierpinskaが指摘するコミュニケーションの社交的な機能と学習者の非記号的な思考の関係から，一部の生徒が【構成的抽象】を達成するためにはコミュニケーションが必要不可欠であると明らかになった．

Sierpinskaは一般化に対して特別に論じている訳ではないが，社会認知的コンフリクト・コミュニケーションとディスコースという観点から一般化を志向する教授学習過程を捉える事で，

・研究課題1
　一般化をはかる学習において，どのように概念を構成していくか

に『教師』いう観点からアプローチしていくことが出来ると明らかになった．

5.2 生成的な例と研究課題

“生成的な例”は円の分割事例において， 説明のためのモデルとしての役割と同時に，特殊の中に一般を見つけるという様相に対して重要な役割を果たしていた．

宮崎（1995）は，個別の場合についての推測が，“生成的な例”を通して普遍妥当性を示す証明へと展開されることを示しており，一連の手順は本研究が展開したい一般化を志向した教授学習過程に近接させることができる．

従って，“生成的な例”を本研究の“有力に特別な特殊”の中に取り込んで考える事で，一般化を志向する教授学習過程をよりよいものにすることが出来ると共に，教授学的三角形の『教材』について明らかになっていくことが期待される．

従って，

・研究課題2
　一般化をはかる学習において，どの様に捨象する差異性とその程度を決定していくか
・研究課題3
　一般化をはかる学習において，互いに異なる特殊から一般の命題が導かれるということを，どの様に学習機会として取り入れるか．

という『教材』に関わる2つの研究課題に対して，宮崎氏の“生成的な例”と説明・証明に関する研究からアプローチしていくことが出来ると明らかになった．

5.3 今後の課題

本研究においてはSierpinska（2005）などの研究を岩崎（2007）らの一般化に関する研究に位置づけていく事が有力であると期待される．しかし，一般化モデルに対してどの様な関係で，どの様に位置付けられるかはまだ明らかになっていないため，今後明らかにされなくてはならない．そのため，Q1とQ3についての検討は不十分である．

更に，一般化を志向する学習において社会認知的コンフリクトが学習者の認知的行動を駆り立てることは明らかになった．しかし，どの様なものを社会認知的コンフリクトとして同定し得るか，詳細な議論が今後不可欠であるといえる．

参考・引用文献

Beth.E and Piaget,J（1966）[W.Mays,Trans.] , Mathematical Epistemology and Psychology , D.Reidelpublishing company

Doise.W & Mugny.G,（1981）, Le développement social de l'intelligence, Paris: Inter ditions

Dörfler.W, （1991）, "Forms and means of generalization in Mathematics", In Bishop.A（ed.）*Mathematical Knowledge : Its Growth Through Teaching*,pp. 63-85 , Kluwer Academic Publishers

Piaget,J, （1974）, *Recherches sur la Contradiction"*, 矛盾の研究（芳賀純他訳）, 三和書房

Polya.G, （1945）, いかにして問題をとくか, （垣内賢信訳）, 丸善株式会社

Polya.G, （1954a）, 数学における発見はいかになされるか1「帰納と類比」,（柴垣和三訳）, 丸善株式会社

Polya.G, （1954b）, 数学における発見はいかになされるか2「発見的推論 そのパターン」,（柴垣和三訳）, 丸善株式会社

Sfard.A, （2001）,"There is More to Discourse than Meets the Ears:Learning from mathematical communication things that we have not known before.",*Educational Studies in Mathematics*, 46（1/3）, 13-57

Sierpinska.A（2005）,"Discoursing Mathematics Away", in J. Kilpatrick, C. Hoyles, & O.Skovsmose（Eds.）,*Mathematics education library: Vol. 37. Meaning in mathematics education*, （pp. 205–230）, New York NY:Springer.

岩崎秀樹,（2007）, 数学教育学の成立と展望, ミネルヴァ書房

早田 透,（2009）, 数学教育における一般化に関する研究, 鳥取大学数学教育研究, Vol.12 , No3,pp.1-8

早田 透,（2010）, 一般化をはかる数学学習を捉える基本的枠組みの構築 –Bethの数学的思考の相と，Polyaの一般化に注目して–, 鳥取大学数学教育研究, Vol.13,No2, pp1-8

藤井斉亮,（1986a）, 理解と認知的コンフリクトについての一考察, 数学教育学論究, Vol45・46,pp.24-28

藤井斉亮,（1986b）,数学の理解過程における認知的コンフリクトの役割, 数学教育論文発表会発表要項, Vol.19,pp.65-68

溝口達也・松本寿子,（2008）,小学校2年生の図的代数における一般化を志向した授業の設計：大学と附属小学校の連携による協同的授業設計とその実践, 鳥取大学地域学部紀要 地域学論集, 第5巻, 第2号, pp.129-139

宮崎樹夫,（1991）,推測したことの妥当性を示すための説明における水準の移行：生成的な例による説明から推論による特定な説明への移行, 数学教育論文発表解論文集, Vol.24, pp.191-196

宮崎樹夫, （1995）, 学校数学における証明に関する研究—証明に至る段階に説明の水準を設定することを通して—

---

[1] ただし，Dörfler（1991）は【外延的一般化】と【内包的一般化】を明確に規定しておらず，論理学的な意味を超えるものではないと岩崎（2007）は指摘する．ここでは岩崎氏の解釈に倣い，【外延的一般化】を対象（集合）の一般化，【内包的一般化】を命題の一般化としている．

[2] 本稿での「論証」という言葉は，妥当な根拠を基にした論理的な説明をする活動全般を指す．ここでは，学習指導要領等における演繹による推論という意味だけではなく，帰納，アブダクション，図など，それぞれの学習段階から見て妥当な根拠を用いた説明を含めたり，より広い意味で捉える．例えば高等学校の学習段階にある学習者が推測した性質などを帰納的に「論証」する事は適当ではないが，小学校1年生の学習段階にある学習者がそのように「論証」する事は望ましいと言えるだろう．

[3] 言説・言説的と訳されることもあるが，背景に持つ哲学的な議論をはじめとする様々な議論を踏まえ，敢えて訳していない．

[4] Sierpinskaによれば，言語の社交的な機能は人間の言語に特有ではないが，コミュニケーションに特有の機能である．

An approach to student's process of generalization in the didactical situation by "teacher" and "pedagogical content" : Focus on communication, discourse, and generic example

Toru Hayata
Graduate School of Regional Sciences, Tottori University

Abstract

The purpose of this paper is to clarify how to approach my three research problems.

This paper firstly assume a concrete case of generalization in the didactical situation and investigate previous study on generalization: that is the model of generalization exposed by Dörfler(1991) and by Iwasaki(2007). Secondly, it focuses on that mathematical heuristic, conjecture and the "teacher" and "pedagogical content" in the didactical triangle are not on the model and abstract three questions corresponding to "student", "teacher", and "pedagogical content". Thirdly, it is investigated those questions by using some study.

As a result, it's a conclusion that it's clarified to approach to research problemI by using socio-cognitive conflict, discourse, communication, and communication's phatic function exposed by Sierpinska(2005) and to approach to research problemII and III by using generic example and study on explanation and proof by Miyazaki(1995).

鳥取大学数学教育研究　　ISSN 1881–6134

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

投稿規定

- 本誌は，次の稿を対象とします。
  - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
  - 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
  - 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
  - その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供
- 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。
- 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。
- 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/