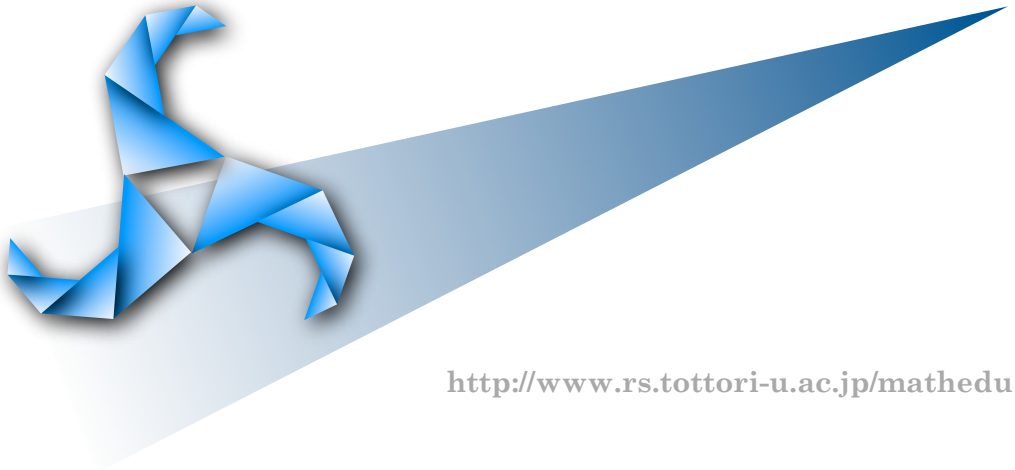
ISSN 1881-6134

鳥取大学数学教育研究
Tottori Journal for Research in Mathematics Education



http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

数学教育における一般化を志向する教授学習に関する研究

早田　透　*Toru Hayata*

vol.13, no.6
Mar. 2011

鳥取大学 数学教育学研究室

目次

第1章：研究の目的・対象・方法

本章では，研究の目的・対象・方法を述べる．

1.1では本研究の目的と，目的設定に至った背景を述べる．1.2では研究の対象として，学習者などの言葉が指す対象を述べる．1.3では目的を実現するための方法を述べ，1.4では論文の構成を述べる．

1.1 研究の目的

学習者は日々展開されている算数・数学の学習において，自ら構成した問題に取り組み，探求し，困難に立ち向かい，それを克服し，新たな数学的概念（技能・知識・考え方など）を発明し，獲得する．こうした学習は年間100時間超，義務教育の期間だけで1000時間以上も展開されており，この時間を知的で，創造的で，実りのある時間にすることは，筆者をはじめ算数・数学教育に携わるものの義務であるといえる．

こうした学習に関わってくる重要なプロセスが一般化であり，私達の誰もが行う数学的認識の本性に直結したプロセスである．その名のとおり，一般化とは特殊から一般へと“はじめにあった概念または形式について，その適用範囲が広くなるようにすることである．”（中島，1981）加えて，特殊と一般は絶対的ではなく相対的な関係である．そのため，ある数学的概念を発明したならば，その適用範囲を広げた新しい数学的概念を発明し，また更にその適用範囲を広げ･･･と，一般化によって次々と新しい数学的概念を発明することが出来る．

学校数学において，ほとんどの数学的概念はこうした一般化によって構成されており，実際の学習場面においては学校種，学年，学習内容を問わずほぼ毎時間志向されている．またそうした学習を通して，進んで一般化しようとする態度が育てられなければならない．こうした一般化の重要性は，数学という学問そのものにおいてもおよそ全ての人によって認められているところである．

従って，一般化が授業においてどのような過程を経て実現されていくかということを明らかにすることが要請されるが，そうした点はこれまであまり指摘されてこなかった．これは3章で詳しく述べるように，一般化というプロセスそのものを説明するのが非常に困難であったことも大きな要因の1つである．

そこで我が国の算数・数学教育において，一般化を志向する教授学習場面がどのように展開されるべきであるかを明らかにすることを本研究の目的とする．目的を達成することで一般化を志向する教授学習

が改善され，ひいては算数・数学の教授学習全般の改善に繋がる事が期待される．

1.2 研究の対象

目的にあるように，本研究の対象は教授学習場面で子ども達が行う一般化である．それに伴い，「授業」「学習者」「学習」「論証」という言葉を以下のように定める．

「授業」とは，教授学習が学校で具体的に実施される場のことを指すが，その中でも本研究は以下のような学習観に立った「授業」を考えていきたい．

“われわれが，当該の教育目標を実現するにあたり，あたかも子どもたち自身が，数学的知識・概念等を発見し，構成し，導き出したものであるかのような場の構成を図ることを通して，子どもたちが《真理に対する責任の担い手》として成長していくことを期待するのである．”（友定・姫田・溝口,2006,p.6）

このような学習観の基で展開される「授業」とは，図1–1で示されるような問題解決授業であり，本研究において「授業」は問題解決授業を指す．

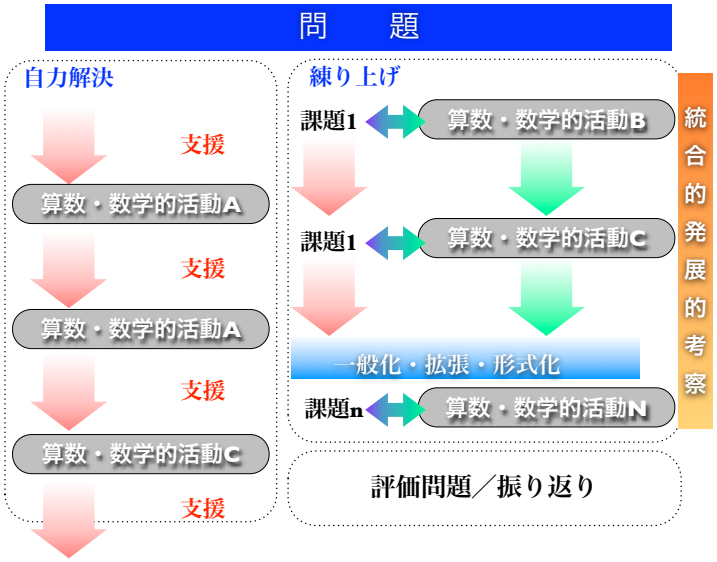


図1–1：算数・数学の問題解決授業モデル（溝口,2007,p.53）

このような「授業」において，算数・数学的活動を行う主体が「学習者」であり，本研究においては特定の学校種や学齢を問わず，小学

校1年生から高等学校3年生までの全ての児童・生徒を指す．従って，本研究の扱う「数学」とは，小学校における算数と中学校以上における数学の両方を指す．

また，「学習者」は「授業」における算数・数学的活動を達成することで，概念が変化することが期待される．概念が変化することは即ち学習である（Sierpinska,2005）ため，これを本研究はこれを「学習」とする．

こうした「授業」において，「学習者」は様々な数学的性質に気付くことが期待されるが，気付いただけで終わる「学習」はそれほど高い質の学習ではない．従って，「学習者」にはその妥当性を示す為の説明，それも，ただそう思ったから，といった類の説明ではなく，妥当な根拠を基にした論理的な説明をする活動を期待したい．こうした活動を本研究では「論証」と呼ぶ．ここでは，学習指導要領等における演繹による推論という意味だけではなく，帰納，アブダクション，図など，それぞれの学習段階から見て妥当な根拠を用いた説明を含めたり，より広い意味で捉える．例えば高等学校の学習段階にある学習者が推測した性質などを帰納的に「論証」する事は適当ではないが，小学校1年生の学習段階にある学習者がそのように「論証」する事は望ましいと言えるだろう．

1.3 研究の方法

本研究は目的を達成するために，一般化を志向する教授学習のモデルを構築するという方法を採ることにする．そのために，少なくとも数学の内容的知識である「一般化とはどのような認識であるか」という視点からの考察が要請される．本研究はこのような視点を，Beth（Beth and Piaget,1966）による数学的認識の本性に求め，我が国の算数・数学の教科書分析を行った．その結果．3つの研究課題が得られた．即ち

・研究課題1

一般化を志向する教授学習において，どのように概念を構成していくか

・研究課題2

一般化を志向する教授学習において，どのように捨象する差異性とその程度を決定していくか

・研究課題3

一般化を志向する教授学習において，互いに異なる特殊から一般の命題が導かれるということを，どのように学習機会として取り入れるか.

である．これらの課題が要請される理由は2章で詳述する．

加えて，一般化のプロセスはそもそもどのようなものであるかを明らかにするため，それを初めてモデルとして提示したDörfler（1991）の一般化モデルと，岩崎（2007）の一般化分岐モデルに着目し，事例を通してその有用性を検証する．

以上のような数学の内容的知識に加え，本研究の研究課題は教授学習に関するものであるため教授学的な知識が必要となる．一般化を志向する教授学習場面として典型的な事例を想定し，『子ども』『教師』『教材』という教授学的三角形に対応した小課題を導出し，それ

らをPolya（1954a&1954b），Sierpinska（2005），宮崎（1995）などの先行研究から検討した．

これらの知見を基に，一般化を志向する教授学習のモデルとしてどのような要素を持ちあわせているべきであるかを検討し，本研究のモデルを構築した上で検証し，モデルによって一般化を志向する教授学習がどのように展開されるかを確かめ，本研究の目的を達成する．

1.4 本論文の構成

本論文においては，まず2章においてBeth（Beth and Piaget,1966）を基に教科書を分析することで3つの研究課題を導出する．

3章においては，一般化を志向する教授学習として典型的な場面を設計し，先行研究であるDörfler（1991）と岩崎（2007）を分析することで，研究課題へアプローチするための3つの小課題を明らかにする．

3章で得られた3つの小課題を基に，4章ではBeth（Beth and Piaget, 1966）とPolya（1945,1954a&1954b）を基に『子ども』の推測や発見を，5章ではSierpinska（2005）を基に『教師』の役割としてのコミュニケーションを，6章ではPolya（1954a,1954b）と宮崎（1991）を基に『教材』の役割を，それぞれ検討する．

これらの検討から得られた知見を基に，7章においてモデルの本性を検討した上で一般化を志向する教授学習モデルを構築し，その有用性と規範性を明らかにすることによって，目的の達成をはかる．

こうした本論文の構成を表現したものが，次ページの図1–2である．

第1章：研究の目的・対象・方法

本研究の目的：一般化を志向する教授学習を改善すること

↓

第2章：数学的認識の本性から観た問題の所在

我が国の教科書において，“特殊から一般へ”推理する学習ではなく，“特殊と一般について”推理する学習が展開されており，それに伴う諸問題が発生していることを明らかにし，3つの研究課題を導出する．

↓

第3章：円の分割事例と“一般化モデル”

一般化に関する先行研究であるDörfler（1991）と岩崎（2007）の「問い」の対象となっていない要素から，教授学的三角形における『子ども』の推測や発見，『教師』と『教材』の役割という観点によって研究課題へアプローチすることができる，ということを明らかにする．

↓

第4章：『子ども』の数学的思考を捉える基本的枠組み

直観主義という観点から，数学的思考を捉える基本的な枠組みを構築する．

第5章：『教師』の支援とコミュニケーション

『教師』の支援が一般化を促進することを，コミュニケーションという観点から検討する．

第6章：一般化を促進する『教材』

一般化を促進する特別な教材とその役割について検討する．

↓

第7章：一般化を志向する教授学習モデルの構築

モデルの本性について明確にした上で，2〜6章の議論を基に一般化を志向する教授学習モデルを構築し，その実際を検証する．

↓

第8章：本研究の結論

（図1–2：本研究の構成）

第2章：数学的認識の本性から観た問題の所在

本章では，我が国の教科書の問題点を基に，研究課題の導出を行う．2.1で問題の所在を指摘した後，中学校2年生の図形と論証に注目し，数学的認識の本性に基づき2.2と2.3で一般化を志向する教授学習の問題点を明らかにする．

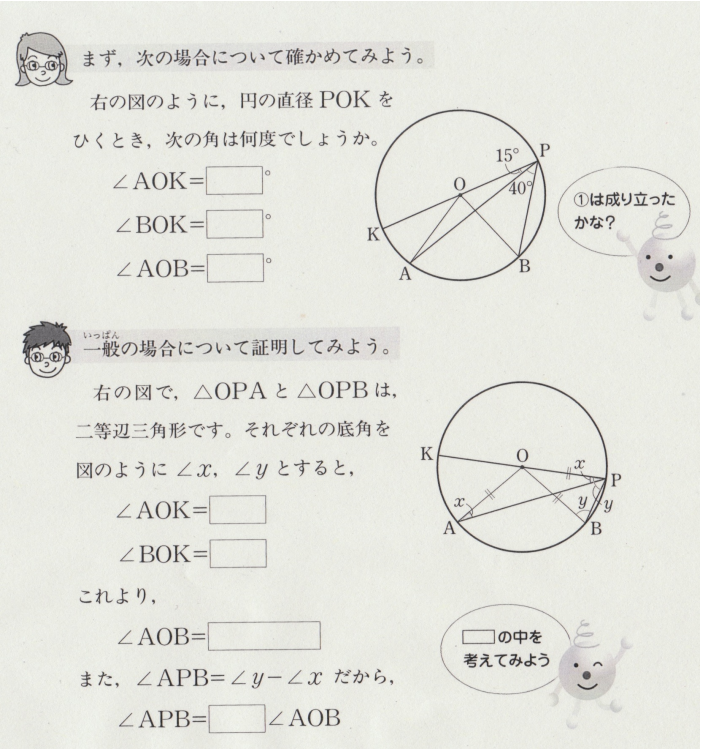
そして，2.4では得られた問題点を基に研究課題を導出する．

2.1 問題の所在

“一般的な命題を特殊なものの認識から形造るということ，それがわれわれの精神の本性であるからです．”（デカルト,1641,p.172）

Descartesのこの言葉に表されているように，“特殊から一般へ”という一般化は私達の数学的認識の本性である．この事を確かめるには，Poincaréの次の言葉に従って数学の本を開いてみればよいだろう．“もし我々が数学の本をどれでも一冊開いてみるならば，…どのページを見ても，著者は前に知られている命題を一般化しようとする意図を示している．”（ポアンカレ,1902,pp.20-21）

Poincaréの言葉に従い，教科書を眺めてみれば，算数・数学の教授場面においても，あらゆる場面の授業においてほぼ毎時間，何らかの一般化がはかられている事は確かであると認められる．しかし，そこでは“特殊から一般へ”という推理が展開されているとは言い難い．その典型が図2-1のような学習場面である．


まず，次の場合について確かめてみよう。

右の図のように，円の直径 POK を ひくとき，次の角は何度でしょうか。

∠AOK=□°

∠BOK=□°

∠AOB=□°

一般の場合について証明してみよう。

右の図で，△OPA と △OPB は，二等辺三角形です。それぞれの底角を図のように ∠x，∠y とすると，

∠AOK=□

∠BOK=□

これより，

∠AOB=□

また，∠APB=∠y−∠x だから，

∠APB=□∠AOB

図2–1：K社教科書における学習場面

ここで行われている学習は，まず特殊な場合について推理した後，次に一般の場合について推理するという学習である．このとき，学習

者は特殊『と』一般の場合について推理しているのであり，特殊『から』一般へ推理している訳ではない．即ち，一般化を志向する学習は，少なくとも教科書においてはその意図にも関わらず“特殊から一般へ”という推理がなされていないことが我が国の算数・数学教育における大きな問題である．

本章はこの問題点から出発し，一般化を志向する教授学習とはどのようなものであるかを検討していくことを通し，我が国の算数・数学教育における一般化を志向する教授学習の問題点と課題を明らかにする事を目的とする．

2.2 論証の対象に関する考察

2.1で指摘したように，我が国の教科書においては一般化が成されているとは言いがたい．こうした状況を改善し，一般化を志向する教授学習がどのように展開されるべきであるかを考察するためには，一般化とはどのようなものであるかについて考察する必要があり，そのためには数学的な認識・推論の本性に迫る必要がある．なぜならば“特殊から一般へ”という一般化の過程は誰もが行う事であり，数学的な認識・推論の本性そのものに直結した過程であるからである．

そのような要請に応える研究として，直観主義の立場から数学的な認識の本性を解き明かそうとしたBeth(Beth and Piaget,1966)を中心に，Bethが取り上げたいくつかの認識に関する研究を参考にする．

実際の教科書を通した学習においては，先にも述べたようにあらゆる場面で一般化（らしきもの）を取り扱うが，本研究ではその中でも特に中学校の教科書における，図形に関する命題を論証する場面について取り上げ，分析していきたい．なぜならば，図形に関する命題の論証は一般化がなされる典型的な場面だと考えられるからである．

2.2.1 “一般の三角形”と論証

我々が，ある数学的命題が一般に成り立つということを認識するに到るために，最も単純に考えられる方法は全ての特殊な場合を調べる事である．しかし，これは不可能であり，もちろん教科書もそのようそのような方法は取っていない．

既に図1-1で示したように，教科書においては一般の場合として1つの図を提示しており，それについて論証を行うような学習がなされている．つまり，一般の場合という論証の対象そのものが数学的命題が一般に成り立つ根拠となっている事が指摘されるだろう．

歴史的に観たとき，このような立場に立って認識の研究を行ったのはDescartes，Lockeである．哲学者として両者の立場はかなり異なるものであるが，しかし，以下の2点において一致している．1つは冒頭にも引用した“一般的な命題を特殊なものの認識から形造るということ，

それがわれわれの精神の本性であるからです．”（デカルト,1641,p.172）というDescartesの言葉に表現されているように，特殊なものから数学的な認識が始まるということである．この立場は確かなものであり，我々は数学的命題について考えるときは具体的に，特殊な対象から考えざるを得ないという事は認められる．そしてもう1つは「論証の対象によって数学的命題の一般性がもたらされる」という立場を取っているという点である．

例えば，もし三角形の性質について推理をする時であれば，その対象をDescartesは“三角形の本質”と置き，Lockeはそれを再定式化して“一般の三角形”という観念として置いた．その三角形は，Lockeの言葉を引用すると，“斜角でも直角でもあってはならず，等辺でも等脚でも不等辺でもあってはならず，それらのすべてであると同時に，どれでもないのでなければならない”（ロック,1689,p.167）三角形のことであり，Descartesの“三角形の本質”も基本的に同じである．両者の違いはその対象が認識主体である特殊な三角形の内にある観念であるか，あるいは外に存在[1]しているかという点である．

しかし，Descartesの立場にせよLockeの立場にせよ，それぞれ矛盾している．もし“一般の三角形”という観念がLockeの言うとおり認識主体の内にあるのであれば，それは特殊な三角形でなくてはならず，一方でもしDescartesの言うとおり認識主体の外に存在する“三角形の本質”について論証をするのであれば，特殊な三角形について考える必要はなく，特殊な三角形が存在しない，という事になる．

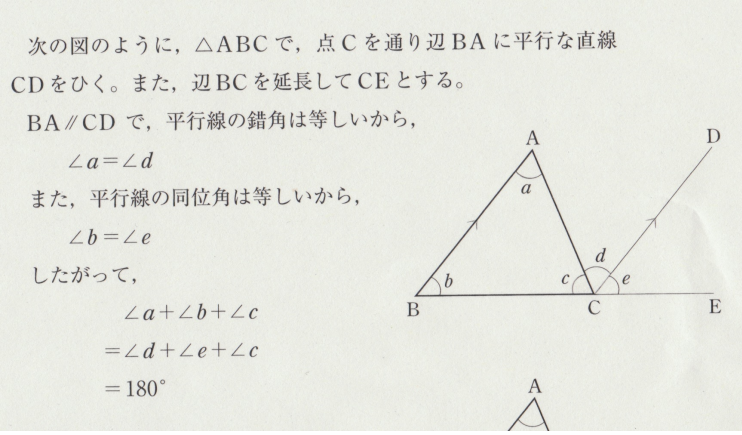
従って，“一般の三角形”という『論証の対象によって数学的命題の一般性がもたらされる』という立場そのものが認められない事は明らかであり，本研究にとってはDescartesとLockeの哲学者としての立場の違いはあまり問題とはならない．そこで，以下ではこのような対象のことを“一般の三角形”と統一して表現する．

2.2.2 教科書の立場と問題点

既に指摘した通り，我が国の教科書においては，出版社・学年を問わず，DescartesやLockeの取った『論証の対象によって数学的命題の一般性がもたらされる』という考え方に基づいていると指摘される．

この立場が受け入れられない事は既に示した通りであるが，仮にこの立場を受け入れるとしても，論証の対象は“一般の三角形”でなくてはならない事は明確である．

しかし，例えばS社の教科書における図2–2の場合がその典型であるように，教科書は明らかに図の右上に描かれている△ABCという特殊な三角形についての論証であるにも関わらず，“一般の三角形”について論証しているかのように捉えており，不適切であると認められる．


次の図のように，△ABC で，点 C を通り辺 BA に平行な直線 CD をひく。また，辺 BC を延長して CE とする。

BA∥CD で，平行線の錯角は等しいから，

$\angle a = \angle d$

また，平行線の同位角は等しいから，

$\angle b = \angle e$

したがって，

$\angle a + \angle b + \angle c$

$= \angle d + \angle e + \angle c$

$= 180^\circ$

図2–2：S社教科書における三角形の内角の和に関する学習場面

ここで更に，他社の教科書と比較を行ってみよう．例えば，図2–3はK社の教科書における，図2-2と同様の場面に描かれている図である．

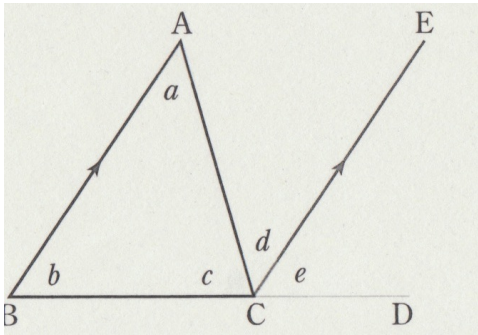


図2–3：K社教科書における図1–2と同様の場面

図2–2と図2–3は明らかに大きさや形の違う，互いに異なる特殊な三角形であるが，S社の論証とK社の論証は点Eと点Dの名前が逆など，多少の表現の相違を除けば，全く同じ論証であるとみなせる．

両者は大きさ・形などの差異がある

にも関わらず同じ論証が可能なのであるが，その差異はなぜ問題とならないのであろうか.

そして，このような互いに異なる特殊な対象から，我々はどのようにして数学的命題が一般に成り立つと認識するのであろうか.

2.3 論証の観察と一般の命題

2.3.1 特殊に依存しない論証

2章においては論証の対象についての検討を行ったので，次に論証の中身そのものに分析の焦点を当てる．

図形に関する命題の論証を眺めてみると，そこには非常に興味深い現象が現れている事をBerkley（1710）は以下のように指摘している．

“論証しているあいだ私の視ている観念は，例えば辺の長さが一定限の二等辺直角三角形であるとはいえ，それにもかかわらず，私は確かにこの論証を，いかなる種類や大きさであれ，全ての他の直角三角形へと及ぼすことができるのである．そして，その理由は，直角も辺の等しさや長さも論証には少しもかかわりがないからである．なるほど，私の視る図はこれらの特殊な点を全て含んでいる．が，さりとて命題の立証には露いささかも言及されていない．”（バークリー,1710,p.30）

例えば前章でも取り上げた図1–2のように，三角形の内角の和が180°であることの論証をするときに，辺の長さや角そのものの大きさは，論証の中に何1つ用いられていないということがそれである．

Berkleyの指摘は論証が特殊に依存していないということを確かに示しており，それ自体は完全に正しい指摘であると認められる．しかし一方で，特殊に依存しない事から“一般に成り立つ”までの間に飛躍があることが指摘される上に，この現象が起こる理由については触れられていない．

本研究の関心から，これらの点についても考察を行う必要がある．

2.3.2 “一般の三角形”と差異性の捨象

このとき，Kantの指摘が本研究に重要な示唆を与えた．Kantは，数学的命題の認識について以下のように述べている．

“数学がその認識を導出するのは，概念からではなく，概念の構成から，言い換えれば，その概念に対応してア・プリオリに与えられうる直観からであるからである．”（カント,1781c,A.734）

この立場は，Descartes，Lockeの『論証の対象によって数学的命題の一般性がもたらされる』立場とは決定的に異なっている．なぜならば，もしKantに従って言い換えるならば，Descartes，Lockeの立場は『数学がその認識を導出するのは，概念からである』と言い換えられるからである．

では，Kantにとって“概念を構成する”とは，どういう事なのであろうか．Kantに従えば，例えば「三角形」という概念を構成するとき，2つの事が考えられる．1つは構想によって純粋直観として描出する場合，もう1つはこの純粋直観に従って紙の上にも経験的直観として描出する場合である．

つまり，我々が個々に紙の上に描く特殊な三角形は経験的ではない純粋直観によって構想された三角形に従って描かれており，それ故に辺の長さや角の大きさといった“三角形という概念を変化させることのないこれらの諸差異性は捨象”（ibid,A.716）している事をKantは指摘する．そして，そのように構想された三角形を直観し，概念を構成することで同じ概念のもとにおける普遍妥当性がその表象において表現される，つまり一般に成り立つと指摘した．

Kantの言う純粋直観によって構想された三角形とは，経験的でないのだから特殊な三角形ではありえず，従って“一般の三角形”である．そして，“一般の三角形”に従い“概念を変化させることの無い諸差異性を捨象する”のはBerkleyの指摘した現象である．つまり，Kantの指摘はある程度のDescartes，Lockeの解決に，Berkleyの現象を組み合わせたものであることが指摘される．

であるならば，“一般の三角形”に関する問題点と同じ問題を含んでいるのではないか，という事が当然考えられる．しかし，Kantは“一般の三角形”を構想する能力を人が有してると仮定した．それは，Kantが

そのような能力を人が有していない限り，数学的な認識は不可能であると考えた為である．

この仮定を認めるかどうかについては，その後の新カント学派の議論などにもあるように，議論の余地がある．しかし，“概念を変化させることのない諸差異性を捨象する”（ibid,A.716）というKantの指摘はBerkleyの現象を説明する考え方として非常に的確である事．そして，何よりもKant自身が述べている“数学がその認識を導出するのは，概念の構成からである”事の例[2]が，「特殊と一般」の場合について推理するような学習をしている現状と比較して，より目指したい“特殊から一般へ”という推理をする学習に似通っていると考えられ，本研究においては仮説として認めた上で先へ進める．

2.3.3 “円周角の定理”事例の問題点

以上のような議論を踏まえ，改めて教科書に注目し論証の中身そのものを分析する．

分析する事例として，本研究では問題点が最も顕著に表れる中学校2年生（新課程では3年生）で学ぶ『円周角の定理』の論証を取り上げる．教科書においては，6社全てで記号の置き方等の細かな差異を除き同じ論証であったので，以下にまとめた論証や記述では会社の違いによる相違は区別していない．

さて，教科書においては「同じ弧に対する円周角は等しい」という性質を証明するために「全ての円周角はその中心角の半分である」事を利用しようとしており，それ自体に問題は認められない．

しかし，既に指摘しているように，この論証も“一般の円と円周角”という対象がいきなり与えられており，“特殊から一般へ”という推理になっていない．即ち，論証の対象となる3つの場面が構成されるのではなく，いきなり図として与えられており，なぜ3つの特殊な場合についての論証が，全ての円と円周角についての論証になり得るかが明確にされていない．従って，本事例の問題点1（以下P1）は［P1：論証の対象が一般の場合として与えられている］という事である．

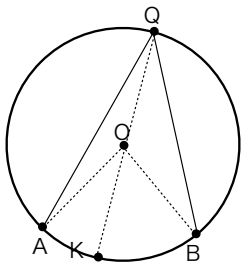


図2-5

（論証1）

∠AOKは△OAQの外角なので,

∠AOK=∠OAQ+∠OQA
△AOQはOA=OQより
二等辺三角形なので,

∠QAO=∠QOA
よって∠AOK=2∠AQO

∠BOKは△OBQの外角なので,

∠BOK=∠OBQ+∠OQB
△OBQはOB=OQより
二等辺三角形なので,

∠OBQ=∠OQB
よって∠BOK=2∠OQBであるから

∠AQB=∠AOK+BOK
=2∠AQO+2∠OQB
=2（∠AQO+∠QOB）

以上より $\angle AQB = \frac{1}{2}\angle AOB$

従って円周角は中心角の半分である

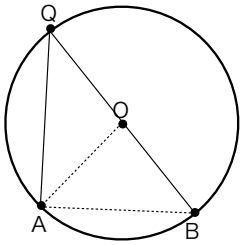


図2-6

（論証2）

△OAQはOA=OQより二等辺三角形

よって，∠OQA=∠OAQ

∠AOBは△OAQの外角なので,

∠AOB=∠OQA+OAQ
=2∠AQB

以上より $\angle AQB = \frac{1}{2}\angle AOB$

従って円周角は中心角の半分である

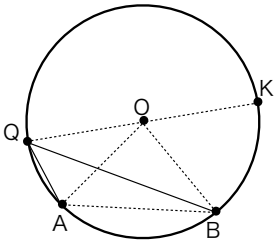


図2-7

（論証3）

△OQBはOB=OQより二等辺三角形

よって，∠OQB=∠OBQ

∠KOBは△OBQの外角なので,

∠KOB=∠OQB+OBQ
=2∠OQB
△OQAはOA=OQより二等辺三角形

よって，∠OQA=∠OAQ

∠AOKは△OQAの外角なので,

∠AOK=∠OQA+∠OAQ
=2∠OQA
また，∠AOB=∠AOK−∠KOBより

∠AOB=2∠OQA−∠QOB
=2（OQA−∠QOB）

∠AQB＝∠OQA−∠QOBなので

∠AOB＝2∠AQB

以上より $\angle AQB = \frac{1}{2}\angle AOB$

従って円周角は中心角の半分である

更に，この論証はいわゆる場合分けがなされているが，その根拠について教科書は“点Oが△ABQの内にある場合，外にある場合，AQ上にある場合で考えましょう”と述べているに留まっており，なぜそのように分けなくてはならないかまでは言及されていない．従って，本事例の問題点2（以下P2）は［P2:場合分けの必然性の欠落］であると指摘される．

また，2.2.3節で明らかにしたとおり，特殊間の差異が問題視されない事について特に触れられていない．もしこの場面を授業で学習しようとするのであれば，教室で1人1人が描く円の大きさや円周角の大きさ，点の位置は異なる筈であり，それにも関わらずなぜ教室全体ではその差異が問題とならならいのであろうか．特に論証1と論証3は点Qの位置が図で示した位置に限らず同じように論証出来ることは非常に興味深いと言える．しかし，教科書においてはこれらの点についてま

で言及されておらず，本事例の問題点3（以下P3）は［P3：互いに異なる特殊間の差異が問題とならないことに言及されない］である．

以上の3つの問題点が明らかになった．

2.4. 問題点の分析と研究課題の導出

2.4.1 P1についての分析

2.3の分析によって，事例の問題点が明らかになった．本研究はこの問題点から一般化を志向する教授学習全般に対する課題を抽出する事が目的である．

このうち，［P1：論証の対象が一般の場合として与えられている］は，本研究が再三指摘している問題点であり，本事例に限らずあらゆる場面において見受けられる問題点である．図形に関する場面以外においては，例えば図2-8がその典型であり，特殊な2次方程式である $3x^2+5x+1=0$ と一般の2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ について推理しているに過ぎない．

3 $3x^2+5x+1=0$ の解き方にならって，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式を導こう。

$$3x^2+5x+1=0$$

両辺を3でわると，

$$x^2+\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}=0$$

$\frac{1}{3}$ を右辺に移項すると，

$$x^2+\frac{5}{3}x=-\frac{1}{3}$$

両辺に，$\left(\frac{5}{6}\right)^2$ を加えると，

$$x^2+\frac{5}{3}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2=-\frac{1}{3}+\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

左辺を因数分解すると，

$$\left(x+\frac{5}{6}\right)^2=\frac{13}{36}$$

$$x+\frac{5}{6}=\pm\frac{\sqrt{13}}{6}$$

$\frac{5}{6}$ を右辺に移項すると，

$$x=-\frac{5}{6}\pm\frac{\sqrt{13}}{6}$$

したがって，$x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}$

$$ax^2+bx+c=0$$

両辺を a でわると，

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$\frac{c}{a}$ を右辺に移項すると，

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

両辺に，$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ を加えると，

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

左辺を因数分解すると，

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\frac{b}{2a}$ を右辺に移項すると，

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

したがって，$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

図2-8：D社教科書における2次方程式の解の公式の学習

これは“特殊から一般へ”という推理になっておらず，異なる学習の様相が展開されなくてはならない．

2.3.2節で示した通り，Kantによれば数学における認識は概念からではなく，概念の構成から導出されるという立場の方が適切であると考えられる．従って［P1：論証の対象が一般の場合として与えられている］を解決するための研究課題1として，

・研究課題1

一般化を志向する教授学習において，どのように概念を構成していくか

が導出された．

2.4.2 P2・P3についての分析

［P2:場合分けの必然性の欠落］と［P3：互いに異なる特殊間の差異が問題とならないことに言及されない］はお互いに関係が深い事が伺える．同じ円周角の定理について考える場合であっても，図2-9と図2-10の特殊間の差異は問題にならないが，一方でこれらと図2-11は場合分けをする必要があるからである．

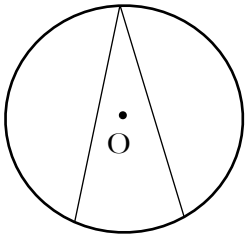


図2-9

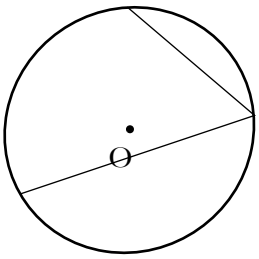


図2-10

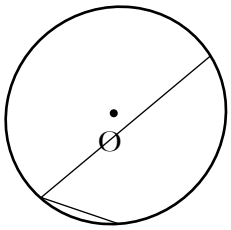


図2-11

この事例において場合分けを決定付ける差異性は何か，論証を観察してみると論証1～3は△ABQに対して中心Oがその内側にあるか，外側にあるか，線分AQ・BQ上にあるか，という位置関係がそれぞれの論証を成立させる決定的な条件となっている．しかし一方である程度の差異性は問題とならず，図2-9と図2-10のように，中心Oが△ABQの内側にありさえすればどこでもよいことも確かである．

この事から，Kantが指摘した“概念を変化させることのない諸差異性の捨象”には捨象の程度が重要である事が推測される．従って，研究課題2として

・研究課題2

一般化を志向する教授学習において，どのように捨象する差異性とその程度を決定していくか

が導かれた．

また，捨象によって互いに事なる特殊同士が統合される現象は，一般化を志向する教授学習場面においてはおよそあらゆる場面で見られる．それは，集団で展開される教授学習において，個々人が構成する特殊が完全に一致する事はあり得ないからである．従って，これを統合するという事は重要な学習機会であると捉えられるため，研究課題3として

・研究課題3

一般化を志向する教授学習において，互いに異なる特殊から一般の命題が導かれるということを，どのように学習機会として取り入れるか．

が導出された

以上の3つの研究課題は，その導出過程より互いに深く関連しあっている事が推測される，これらの研究課題を解決する事で一般化を志向する教授学習が改善されることが期待される．

第2章の要約及び注

本章では，Beth（Beth and Piaget,1966）を基に我が国の教科書を分析することで，一般化を志向するという目的とは裏腹に“特殊から一般へ”推理するという学習が展開されておらず，特殊と一般について推理しているに過ぎない，という問題を明らかにした．

こうした問題のある学習は実際の教授学習場面では展開されていないと考えられるが，それを出発点として教科書における事例を認識論の立場から考察した．その結果，事例から得られた3つの問題点を基に，一般化を志向する教授学習場面において重要と考えられる3つの研究課題を抽出することができた．即ち

・研究課題1

一般化を志向する教授学習において，どのように概念を構成していくか

・研究課題2

一般化を志向する教授学習において，どのように捨象する差異性とその程度を決定していくか

・研究課題3

一般化を志向する教授学習において，互いに異なる特殊から一般の命題が導かれるということを，どのように学習機会として取り入れるか．

である．

これらの研究課題に取り組む事で，一般化を志向する教授学習場面を改善することが出来ると期待される．

---

[1]本章ではプラトン主義の考えであるDescartesにとって，どこか高次元の世界に“一般の三角形”なる非物質的なものがある，という意味で存在という言葉を用いている．

[2] 三角形の内角の和について考えるときの例を以下のように述べている．
“…彼はただちに，1つの三角形を作図することから始める．というのは，彼は，2つの直角の和は，一直線上の一点から引かれうるすべての接角の和とちょうど同じだけのものになることを知っているゆえ，その三角形の一辺を延長して，その和が二直角に等しい2つの接角をうる．そこで彼は，三角形の対辺と平行に一直線を引く事によって，えられた2つの接角のうちの外角を分割すると，一方の内角に等しい1つの外接角を分割すると，一方の内角に等しい1つの外接角が生ずることが解る等々．このような仕方で，彼は，つねに直観によって導かれた推論の連鎖をつうじて，問題を，完全に明白に，また同時に普遍的に解決するにいたるのである．”（カント,1781c,A716）

第3章：円の分割事例と“一般化モデル”

本章は先行研究の検討を行い，一般化の認識過程を明らかにする．3.1では本章で取り上げる先行研究についてその立場と「問い」を述べ，3.2と3.3では円の分割事例を基に先行研究について検証を行う．

3.4では円の分割事例を教授学習する場面を設計することで，先行研究の「問い」の対象となってこなかった要素を明らかにする．それらの要素を基に，3.5では研究課題にアプローチするための小課題を導出する．

3.1 一般化の認識過程

すでに述べた通り，一般化は数学的認識の本性に直結する重要な過程であり，認識論的に基礎づける事は容易ではない．少なくとも“一般化(generalization)も拡張(extention)も，はじめにあった概念または形式について，その適用範囲が広くなるようにすることである．”（中島, 1981）ため，“既知のものを文字通り一般化していくことであり，そこには認識上の方向性が認められる．”（友定･姫田･溝口,2006）事は確かであると認められるが，2章で述べた認識論における議論を振り返っても，その認識過程が十分に明らかになっているとは言えない．

教授学習においては，学習者が一般化を志向するその過程が重要であるため，これを明らかにすることで何らかの示唆が得られると期待される．ひいては，一般化を志向する教授学習の改善に繋がっていくことも期待されるだろう．

そこで本研究は，一般化の認識過程を扱った研究の中でも，認識論的・心理学的な観点から一般化の認識過程を分析し，抽象と一般化を接続してその過程をモデルという形で初めて提示したDörfler（1991）の一般化モデルと，その批判的考察を行った岩崎（2007）の一般化分岐モデルに注目する．

3.2 Dörflerの一般化モデル

Dörfler（1991）は「一般である」あるいは「一般化」という基本的な概念を定義することを目的とした研究であり，認識論的・心理学的な検討から一般化の認識過程をモデルとして提示した，優れた研究である．

Dörfler（1991）によれば，教室においてともすれば一般を“共通”であると見なす傾向にある事を問題視し，研究の動機の1つとしている（ibid,pp.65-66）．こうした見方の問題点を指摘した上で，氏は学習者の一般化過程を詳細に分析し，一般化の特徴を記号の使用とそこに潜む変数性に求めた．Dörfler（1991）にとっての記号は2つに分けられており，1つが例えば円周率をπと置くような文字や言葉での表現やそれに類するもの．もう1つは≡のように関係性を表したり，＋や–のように抽象された性質を表すものである．

氏によれば，数学において活動の要素や活動を記述したり，活動の中の不変性を記述するためにこれらの記号が必要となる．また，これらの記号の中でも特に，活動の中の不変性を記述した記号が，活動の要素を置き換えたり，交換したりする可能性を持つことから，Dörfler（1991）はこれを“変数性”という言葉で捉える．

そしてPiagetの“反省的抽象”という概念を基に，特徴的な記号を用いて数学的に不変な状態を記述する“構成的抽象”こそが一般化の基盤となる重要なプロセスであると位置づけている．

これらの考察を基に，氏は抽象と一般化を接続した一般化モデル（図3–1）を提示した．

Dörfler（1991）によれば，このモデルであらゆる一般化を捉えられるとしているが，では実際にどのように捉えられるのであろうか．Dörflerの一般化モデルを事例に適用することで，その検討を行う．

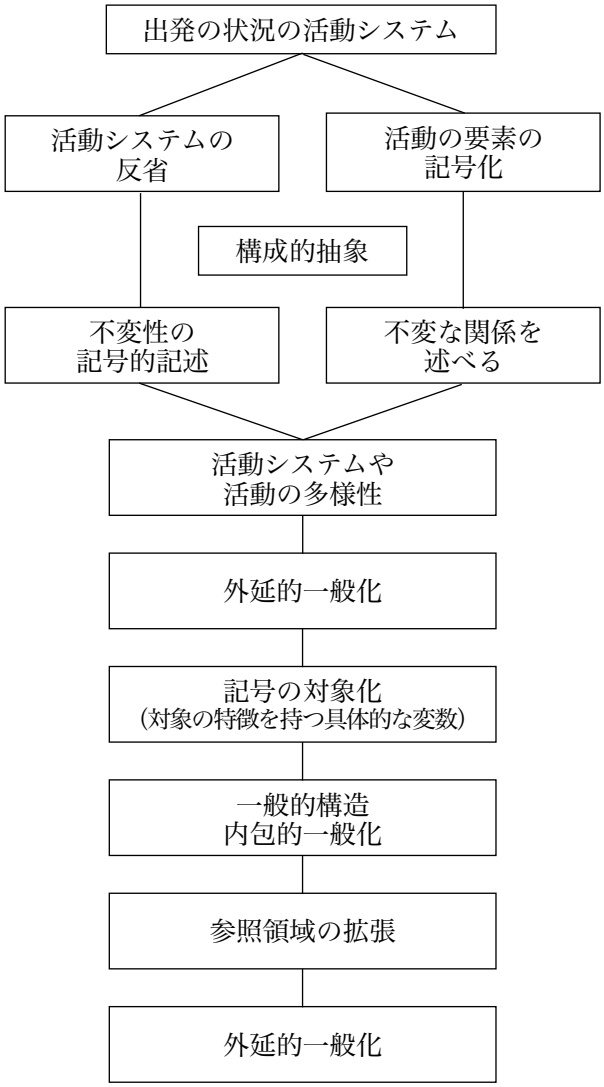
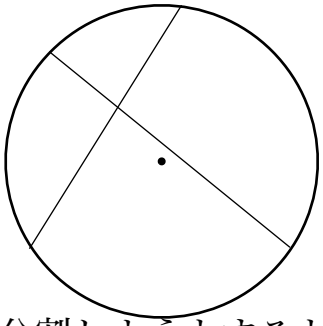


図3–1：Dörflerの一般化モデル（1991,p.74）

3.2.1 直線による円の分割事例

一般化モデルを検討するにあたって，次のような問題を中学校1年生程度の学習者が取り組む事を想定し，「円の分割事例」と呼称する．この場面は3.4節に詳しく述べるように，一般化を志向する教授学習場面で取り上げる問題場面として，極めて典型的な場面である．従って，本研究の立場から一般化モデルを検討するための事例として取り上げることに妥当性が認められる．

円Oの中に直線を引いていくつかの部分に分けていく．例えば，図に示した状態は2本の直線で4箇所に分割されている．



この円を5本の直線で分割しようとするとき，最大で何箇所に分割することが出来るか．

この場面での【出発の状況の活動システム】の《活動》は直線（弦）による円の分割である．【活動の要素の記号化】にあたるのは，分割という《活動》を記号にして直線として図に描いたり，直線の本数を数（例えば2）でおいたり，分割された領域を数（例えば4）でおくことである．また，分割によって領域が増えるという《活動》を記述するために「＋」や「＝」といった記号が必要になる．

具体的には，図3–2において矢印で示した順番に直線で分割する場合ならば，「1」「1＋1＝2」「2＋2＝4」「4＋2＝6」といった記号と，それに加えて図3–2中に描いた直線で記述される．

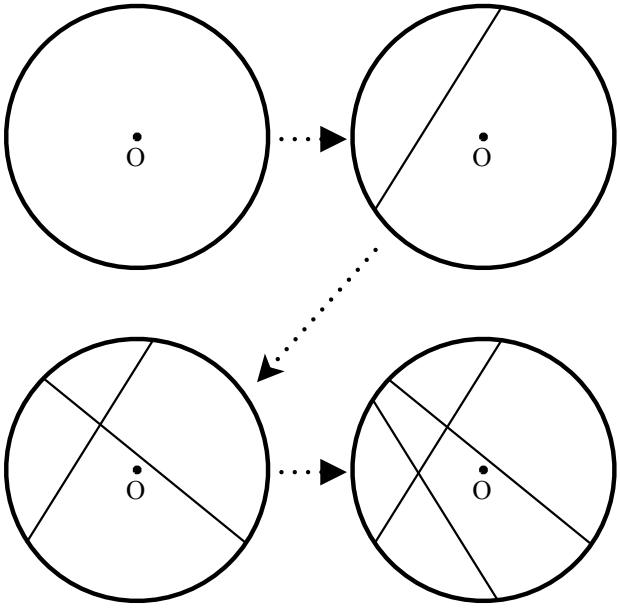


図3–2：円を直線で分割していく様子

こうした《活動》を繰り返す内に，増える領域の数は，「新しく直線を引いたときに既存の直線と交差する交点の数より1多く領域が増える」という【不変な関係を述べる】ことが出来る．既に引かれている直線が何本であっても，新しく引く直線がどのようなものであっても同様である．

【活動システムや活動の多様性】があり，「新しく直線を引いたときに既存の直線と交差する交点の数より1多く領域が増える」という《不変な関係》の適用範囲が様々な引き方の場合へと広がる．これが最初の【外延的一般化】である．

ここまで達成された段階で，問題の答えは求められる．即ち，新しく直線を引くとき，それまでに引かれた全ての直線と交点を持つように，かつ複数の線が1つの交点で交わらないように引けばよい．逆に言えば，そのように引けばどのような直線であってもよい．

このような状態を記述するには，これまでの記号そのものが対象となる【記号の対象化（対象の特徴を持つ具体的な変数）】が行われる．これによって【構成的抽象】が完了し，この先に一般化が展開される．ここでは「1」や「5」という記号が対象化され，その属性を持つ《変数》として，例えばnという記号を用いて「n本の直線で円Oを分割するとき，最大で1+1+2+3+…+（n-1）+n箇所になる」と記述される（あるいはΣ記号を用いて記述してもよい）．これが【一般的構造内包的一般化】である．

従って，問題の答えは1+1+2+3+4+5=16箇所に分割することが出来ると明らかになる．

この「1+1+2+3+…+（n-1）+n」や，図に引かれた直線という記号は，問題場面という《参照領域》—即ち，円Oの直線を引く場合—の性質を持った一種の《変数》である．これらの記号そのものが反省され，《対象化》されることで《参照領域》から切り離される【参照領域の拡張】が行われる．

即ち，《参照領域》は円に留まらず，例えば図3–3のように，直線によって分割されるのが円ではない場面を考えたり，線と交点の関係だ

けに注目して直線以外で分割する場面を考える事が出来る．これが【参照領域の拡張】である．

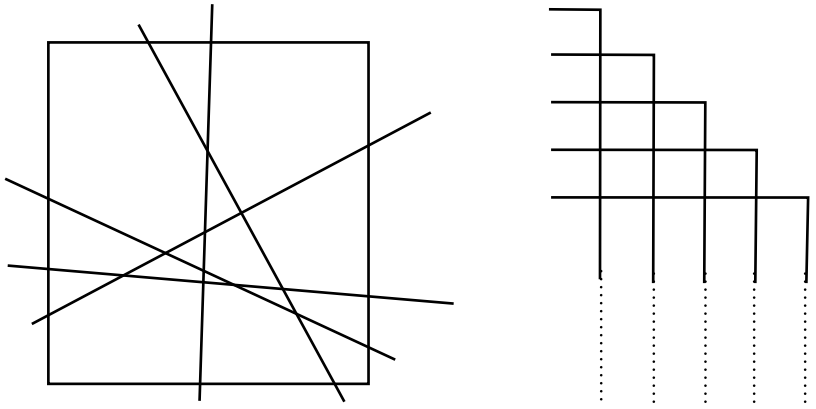


図3–3：拡張された参照領域

本事例においてはここまでであるが，以降は必要に応じて【外延的一般化】と【参照領域の拡張】を繰り返していく．

これら一連の過程は，かなりの部分が【構成的抽象】に割かれており，一般化とは記号使用による【構成的抽象】とその反省のことであると定義される．このような観点から一般化の過程を捉える事を可能にしたのがDörfler（1991）による成果である．

3.3 岩崎（2007）による批判的考察

一方，岩崎（2007）はDörflerの一般化モデルについて批判的に考察を行う．

岩崎氏は従来の一般化研究が論理学的に制約されていたのに対し，Dörfler（1991）の一般化モデルは一般化が《活動》から始まるという点と，その記号過程である【構成的抽象】を持つ点を特徴に挙げ，その成果を認めている．

その上で，大きく纏めれば，以下に示すC1〜C4の不十分な点を指摘している．

C1：【外延的一般化】と【参照領域の拡張】の区別が明確ではない点
C2：【外延的一般化】と【内包的一般化】の本質的な相違について言及していない点
C3：記号過程を重視しながら記号の質的相違に言及していない点
C4：一般化モデルが認知モデルでありながらメタ認知的視座を持たない点

それぞれの問題点は関連していることが指摘されるため，円の分割事例を用いてその問題点を明確にしたい．

まずは図3–3のような，円の分割事例における【参照領域の拡張】を見てみよう．Dörflerは【外延的一般化】を（後に述べるように）集合の一般化であるとしているが，図3–3を集合の一般化であると捉える事は可能であり，【外延的一般化】と区別することが非常に困難である．

また，【記号の対象化】に続く一般化が内包的である理由について，Dörfler（1991）はモデルに基づいて導いてはいる．しかし，それが外延的ではない理由の説明にはなっていないことを岩崎氏は指摘する．円の分割事例で見たとき，学習者が【内包的一般化】よりも先に図3–3のような【外延的一般化】を達成することは十分に考えられる事である．

更に，記号や【構成的抽象】という記号化過程を重視しているにも関わらず，【記号の対象化】で対象化された記号の質的相違がモデルに十分反映されているとは言い難い．円の分割事例においても，「3」や「4」という記号が対象化された場合と，円の中に描かれた直線という記号が対象化された場合の違いがあるのか無いのか，あるならばどのような違いかという点は，一般化モデルからは導けない．

更に，一般化モデルの活動をつなぐ線分は何者であるかという点について，Dörfler（1991）は敢えて何も触れていないことが指摘される．岩崎氏によれば，この線分は認知的変容であり，その背後のメタ認知の重要性が指摘される．

以上を踏まえ，岩崎氏は記号・認知に関する議論を踏まえた上で【内包的一般化】と【外延的一般化】を以下の様に再定義した．

“内包的一般化：既知の対象を普遍化することによる一般化．対象となっている記号に含まれた意味を，既有の知識に関連づけながら同化し，既有の知識を発展させる認知プロセスとしてとらえられる一般化．”（岩崎,2007,p.165）

“外延的一般化：記号の内部構造に基づいて，未知の対象を構成するような一般化．記号に内在する意味を既有の知識に同化させることができないので，新たな知識を構成し，その知識の下で，既有の知識を統合する認知プロセスとしてとらえられる一般化．（ibid,p.165）”

同時に，第1の【外延的一般化】は【参照領域の拡張】へと置き換え，岩崎氏は図3–4のような一般化分岐モデルを提示する．

この分岐モデルにより，【記号の対象化】と共に始まる一般化が必ずしも【内包的一般化】である必要はなく，【外延的一般化】を志向した学習を設計することが可能になる．

では，一般化分岐モデルを基に，円の分割事例を解釈するとどうなるだろうか．

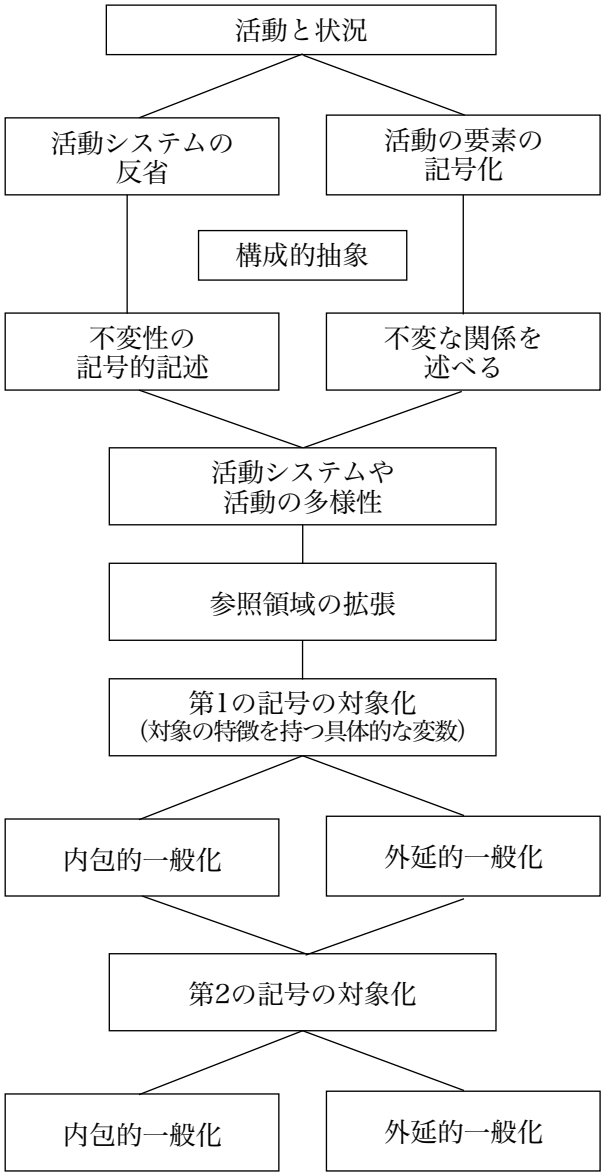


図3–4：一般化分岐モデル（岩崎,2007,p.166）

3.3.1 一般化分岐モデルと円の分割事例

一般化分岐モデルにおいても，活動を繰り返す内に「新しく直線を引いたときに既存の直線と交差する交点の数より1多く領域が増える」という【不変な関係】が明らかになるという点までは一般化モデルと同一である．

ここから「新しく直線を引いたときに既存の直線と交差する交点の数より1多い」という【不変な関係】の適用範囲が様々な引き方の場合へと広がるのも同様である．ただし，Dörflerの一般化モデルにおいては【外延的一般化】と捉えられていたこの過程が【参照領域の拡張】

と捉えられる．なぜならば，記号の内部構造に基づいて未知の対象を構成するような一般化ではないからである．

次に【第1の記号の対象化】が行われるが，このとき対象化される記号は「図に描かれている直線」でも「1や5といった数」のどちらでもよい．もし前者が対象化されるなら，図3–3のような未知の対象を構成する【外延的一般化】が行われる．もし後者が対象化されるなら，例えばnという記号を用いて「n本の直線で円Oを分割するとき，最大で1+1+2+3+…+（n-1）+n箇所になる」と記述される，既知の対象を普遍化する【内包的一般化】が行われる．

それぞれの一般化が達成された後，それまでに対象化されていない記号が対象化され，また【外延的一般化】や【内包的一般化】が達成されていくだろう．

このように捉える事で，教授学習過程をデザインする規範的枠組みを強化したのが，岩崎（2007）による一般化分岐モデルによる成果であるといえる．

Dörfler（1991）によって提示された一般化モデルも，岩崎（2007）によって提示された一般化分岐モデルも，「一般化とはどうあるべきか」という事を明らかにしており，教授学習過程のデザインにおいて，どのように一般化を達成させたいかを考える上で非常に重要な役割を果たす事が期待される．

3.4 円の分割事例の教授学習場面

では，実際の教授学習をデザインするにあたって，これらの一般化に関する研究が具体的にどのような役割を果たすのであろうか．円の分割事例を実際に教授する場面…即ち，一般化を志向した授業を想定して検証する．

本問題を授業で取り扱うにあたり，授業の前半では学習者の自力解決が展開される．そこでは，問題解決学習のモデルに基づき4つの数学的活動（S1〜S4）が想定される．

S1：試行錯誤を行い，実際に書いた図から5本の直線で分割できる最大の数が16であるという事を推測する；

S2：交点を増やせば増やすほど領域の数が増える事に気付くと共に，5本の直線で分割できる最大の数が16であるという事を推測する；

S3：分割出来る領域の数が最大になる直線の引き方が，直線の数を問わず常に成り立つことに気付くことが出来る；

S4：S2・S3を基に構造を明らかにした図を描き，最大の数が16であるという事の根拠を明確にし，一般性を示す．

このような自力解決を想定した実際の授業においては，教師から問題を提示された学習者の何人かはS1の様相を見せると考えられる．

S1の結果，16という答えを出した学習者の何人かは，ここで自分の解決に満足してしまうことが予想される．

この段階での16という答えは，16箇所に分割出来ることを実際の図で示せても，17箇所以上に分割出来ないということは示していない．そのため，教師は学習者の思考を促進する事を意図して，「17箇所以上に分割することはできないのか？」と支援を行う．この問いかけを受けた学習者は，16という解決の正当性を示そうと努力する．

その結果，学習者はS2の活動に取り組み，直線と交点の関係を基に説明しようと試みていくことが期待される．この活動によって，答えが16箇所であるということの信憑性はかなり高まる．

S2を達成した学習者に対しては，一般化の達成を意図している教師が思考に介入するため，「その関係は直線が6本や7本の時も成り立つの？」と支援を行う．その結果学習者はS3の活動に取り組むことが期待される．

一方そのような関係が成り立つということに気づいた，あるいは恐らく成り立つだろう，で学習が終わるのであれば，1.2で述べたように学習の程度としてあまり高いものではない．学習者に対しては，それが常に成り立つという根拠を基にした論証を要請したい．勿論，この段階の学習者が幾何学的に証明するということはほぼ不可能であるため（それどころか，大学で数学を専攻している人にとっても困難である）図3–5（又はそれに類する図）を描くことが論証の根拠として決定的になる．

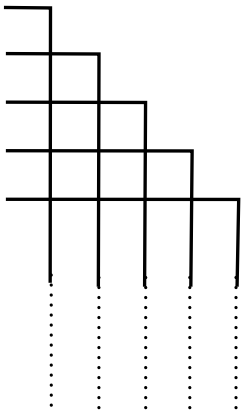


図3–5：円の分割事例における決定的な図

授業の後半においては，自力解決S1～S4を基に，教室全体で練り上げと呼ばれる学習が展開される．

学習者は授業の前半，自力解決の段階で答えが16枚であるだろうということには到達出来るように，教師から思考を促す適切な介入がなされている．従って，練り上げにおいては「16箇所」という答えの妥当性が問題になり，そこでは単に解決をお互いに披露し合うのではなく，教師が主導する議論が行われる．議論を通して，学習者が主体的

に自力解決S1〜S4の活動を順に関連付けていくことで学習が展開されていくと期待される．

こうした学習は，子ども達自らが特殊について推理し，試行錯誤をしながら一般化を達成していく典型的な場面であり，本研究が一般化を志向する教授学習場面を考える上で規範としたい事例であると位置付けられる．

3.5 “一般化モデル”と教授学的三角形

さて，このような教授学習場面を想定したとき，解決S3は一般化分岐モデルにおける【参照領域の拡張】であり，S4は【外延的一般化】である．あるいはこうした過程の中で，本授業では狙っていないものの【内包的一般化】を達成する学習者もいるかもしれない．

しかし“一般化モデル[1]”においては，解決を試行錯誤し，推測したり発見したりする円の分割事例の自力解決S1やS2が登場しない．これは“一般化モデル”の不備なのではなく，このような試行錯誤がそもそも一般化ではないために，「一般化とはどうあるべきかを明らかにする」という問いの対象外であるからだと考えられる．従って，本研究が一般化を志向する教授学習過程を考察する上では，この点が解決されなくてはならないため，この点を小課題1と置く．

小課題1：一般化を志向する教授学習過程において，推測や発見に結びつく活動はどう位置付けられるか？

また，本事例においては，16箇所に分割出来ると推測した生徒に対して，教師が『17箇所以上に分割することはできないのか？』と問いかける事を契機として，一般化が展開されはじめた．

この問いかけは直接には一般化を促していないにも関わらず，なぜ一般化の契機となりえるのであろうか．この点も検討されなくてはならないため，この点を小課題2と置く．

小課題2：教師からの問いかけが，学習者が一般化へ向かう契機としてはたらくのは，どのような場合であるか？

通常，授業は図3–6に示した『子ども』『教師』『教材』という教授学的三角形から成ると語られる（溝口,2004,p.2）．

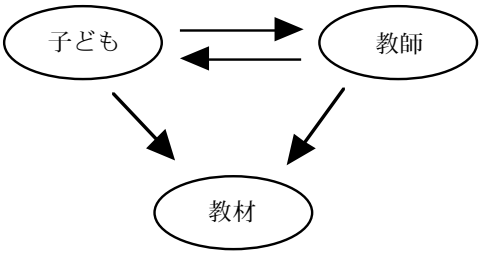


図3–6：教授学的三角形（溝口,2004,p.2）

“一般化モデル”は個人の一般化を記述したモデルである．従って，教授学的三角形からみれば『子ども』に関するモデルであると位置付けられる一方，『教師』と『教材』は登場しない．また，小課題1も同じく『子ども』に関する問いであると捉えられる．同時に，円の分割事例から導かれた小課題2は『教師』に関する問いであると位置付ける事が出来る．

更に，本授業が一般化を志向する以上，図3–5（あるいは類する図）を描くことは極めて重要であり，決定的な役割を果たす．

“一般化モデル”はこのような図を活動の中に取り入れられるという点は示唆している．また，【参照領域の拡張】か又は【記号の対象化】を契機に発生するという点も示唆している．しかし，図3–5のような，ある1つの特殊な場合がどのように構成され，どう位置づけられるかについては不明であるため，この点を小課題3と置く．

小課題3：決定的な役割を果たす特殊はどのように構成され，どう位置付けられるか？

小課題1・小課題2と同様に教授学的三角形という観点から見れば，小課題3は『教材』に関する問いである．

ここで，冒頭に述べた本研究の3つの研究課題を概観してみよう．

・研究課題1

一般化を志向する教授学習において，どのように概念を構成していくか

・研究課題2

一般化を志向する教授学習において，どのように捨象する差異性とその程度を決定していくか

・研究課題3

一般化を志向する教授学習において，互いに異なる特殊から一般の命題が導かれるということを，どのように学習機会として取り入れるか.

すると，研究課題1は概念を構成していく『教師』の役割と『子ども』の思考についての課題であることが認められる．従って小課題1・小課題2について検討することでアプローチ出来ることが認められた.

また，研究課題2は捨象の程度を決定する『子ども』の思考についての課題であることが認められる．従って，小課題1について検討することでアプローチ出来ることが認められた.

更に，研究課題3は互いに異なる特殊という『教材』を学習機会として取り入れていかなければならない．従って，小課題1と小課題3について検討することでアプローチ出来ると認められる.

第3章の要約及び注

本章においては，一般化を志向する教授学習場面として典型的な事例である“円の分割事例”を想定し，一般化の認識過程に関する先行研究であるDörfler（1991）と岩崎（2007）について考察した．

Dörfler（1991）あるいは岩崎（2007）は，「一般化とは何か？」という問いに答えようと試みた研究であり，実際の教授学習場面を捉える事を可能にした，示唆に富む研究であることが認められた．

一方，本研究の目的に即して“円の分割事例”の教授学習を想定したところ，先行研究の問いの対象にならなかった要素があることが認められた．それは，教授学的三角形における『子ども』の一般化以外の数学的志向である推測や発見と，『教師』や『教材』の役割である．

その結果，3つの解決されなければならない小課題が導出された．即ち，

小課題1：一般化を志向する教授学習過程において，推測や発見に結びつく活動はどう位置付けられるか？

小課題2：教師からの問いかけが，学習者が一般化へ向かう契機としてはたらくのは，どのような場合であるか？

小課題3：決定的な役割を果たす特殊はどのように構成され，どう位置付けられるか？

であり，小課題1は『子ども』に，小課題2は『教師』に，小課題3は『教材』にそれぞれ対応している．これらについて検討することで，3つの研究課題にアプローチ出来ることが認められた．

---

[1] 以下，Dörfler（1991）の一般化モデルと岩崎（2007）の一般化分岐モデルを纏めて表記する場合，“一般化モデル”と記述する．

第4章：『子ども』の数学的思考を捉える基本的枠組み

本章では，一般化を志向する教授学習場面で展開される『子ども』の数学的思考を捉えることが目的である．

4.1では認識論，それも直観主義という立場から数学的思考を捉える基本的枠組みを得る．4.2では先行研究の観点から，4.3では不足していた分類という観点から，枠組みを一般化に対して特徴付ける．

構築された枠組みによって，4.4で研究課題に対してアプローチする．

4.1 直観主義とBethの数学的思考の相；小課題1の検討

4.1.1 直観主義

さて，一般化という過程は誰もが行う数学的認識の本性に深く関わっており，従って本研究は数学的認識の本性に迫らなくてはならず，認識論がそれに応えるということは既に2章で述べた．

認識論の中にも様々な立場があるが，本研究はその中でも，直観主義という立場に注目し，その立場から数学的認識の本性を明らかにしようとしたBeth（Beth and Piaget,1966）とBethが引用した文献のうちいくらかの文献を参考にする．

直観主義という考え方は，現代数学を完全に再構成することには成功しておらず，故に多くの数学者から余り積極的に支持されていないという事は事実である．そのため，なぜ直観主義なのかという指摘もあろう．しかし“直観主義は数学的推理をできる限り，古典的形式論理学から借用したスキーマよりも実際の思考過程に適応させる試みとして定義される”（ibid,p.21）ので，“実際の数学的思考と，一般にディスコース的な思考全般のメカニズムについての価値ある情報を与える”（ibid,p.21）事が期待されるため，本研究にとっても，直観主義の研究が有益な情報を与えることが期待される．なぜならば，本研究の対象は一般化を志向する教授学習という場であり，実際の『子ども』の思考だからである．

また，伊藤（1993）によれば，19世紀後半から20世紀初頭に起こった素朴な（Brouwer以前の）直観主義の主張の1つが“証明は構成的でなければならない”（ibid,p.21）事であるが，この事の1つの側面こそが“証明における推論は「特殊から一般へ」と進めることが可能であること”（ibid,p.24）であり，直観主義という考えそのものに一般化が深く根付いてることも重要な点である．

4.1.2 Bethの数学的思考の相

3章で指摘したように，一般化を志向する教授学習場面で『子ども』は一般化を行っているのだが，一般化は複合的な心的活動における数

学的思考の内の一種でしかなく，それ以外の数学的思考も行われていることが指摘される．従って，数学的思考とはそもそもどのようなものであるかを捉えなくてはならない．

Bethによれば，私達が数学的思考を捉えようとするのであれば，以下に記す3つの連続的な相を区別しなくてはならない．

《探求》の相（The phase of “enquiry”）

“探求の相においては，思考には全く制限が課されない．全ての方法には価値があり，目標のより近くに導かれていく．この相は自発的で，根源で，数学的で，真に発明的であり，そして本当に創造的な思考である．”；

《配列》の相（The phase of “arrangement”）

“この相は正しいアーギュメントの形式で見つかる時，解決をもたらす傾向がある．この相はある種の発明性を必要とするが，しかし実際の創造ではない．”；

《検証》の相（The phase of “verification”）

“この相は確実で正しく，本当に定められた問題の解決に至るためのアーギュメントの再考から成っている．”（ibid,p.22;翻訳，括弧は筆者）．

通常，教科書を含めた数学的な出版物に再現されるのは《検証》の相のみである．この事は，何かしら数学の本を開いてみたとき，そこに紹介されている定理や性質がなぜ成り立つかについて描かれてはいても，それをどのように発見したか，あるいはどのように試行錯誤したか，といった事についてほとんどの場合触れられていないことが好例である．これは，読者が提案された解決の科学的な価値を十分に判断できるようにするためであると考えられる．

我々がアーギュメントを再考するにあたっては，《配列》の相はそれ自身の内に独立な興味を持たない．もしアーギュメントにおける試

みが成功しないのであれば，それは得られた解決が正しくないか，不完全であるか，又は混乱しているからであり，この時は《探求》の相へと戻らなくてはならないからである．

しかし，《探求》の相は，通常不規則であるため，理解できる形式で再現することは困難である．

このことから，一見すると直観主義の数学から受け継いだとしても，このような分析が価値のある情報を与えないように見える．その原因は，主として不規則である《探求》の相にあると言える．

しかし，「異なる方法[1]」と協力することで価値のある情報を与え得る事をBethは示唆しており，こうした分析が無駄という訳ではない．

従って，Bethが提示した3つの相を纏めて本研究はBethの数学的思考の相と呼ぶことにする．このような考え方は，実際の学習場面においても大切にしていきたい，重要な考えである．

一般化は数学的思考の一種であることは認められるため，Bethの数学的思考の相を枠組みとする事で，一般化を志向する教授学習についてある程度捉える事が出来ると期待される．

一方で，Bethの数学的思考の相は一般化について特別に記述されていないため，一般化を志向する教授学習について捉えるためには，この枠組みを一般化という観点から特徴付ける必要があるだろう．

4.2 Polyaの一般化とBethの数学的思考の相

4.2.1 Polyaの精神と一般化

Bethの数学的思考の相を用いて一般化を志向する教授学習について分析しようとした時，その困難さは，主として不規則な《探求》の相に起因することは既に指摘したとおりである．

《探求》の相の最大の特徴は，まず“真に発明的であり，そして本当に創造的な思考”（ibid,P22）ということである．従って，一般化という観点から数学における発明・創造を検討することで，Bethの数学的思考の相が，一般化を志向する教授学習を捉える為の，より適切な枠組みになることが期待される．

そこで，本研究はPolyaの研究に注目したい．氏はその著作で知られるように，数学における発見[2]学を再構成しようとした優れた研究であり，本研究は氏の主要な著作であるPolya（1945,1954a&1954b）を参照した．

これらの著作を一貫するPolyaの基本的な精神は，以下の二カ所に集約されてると言える．“数学的事実はまず推測されしかる後証明される，そして本書のほとんどあらゆる箇所は，そのことが正常な手続きであることを示そうと努めている．”（Polya,1953b,P.187）

“数学者の創造的仕事の結果は論証的推論であり，証明であるが，しかしその証明は蓋然的推論によって，推測によって，発見されるのである．”（Polya,1953b,P.184）

Polyaのこの精神は，《探求》の相という不規則な相を真に創造的な思考と位置付け，数学的推理を実際の思考過程に適応させようとするBethの精神と一致している．Polya自身はBethのような数理哲学者ほど厳密な意味で様々な用語を用いている訳ではないが，«特殊から一般へ»とどのように推理がなされるという事を，特に一般の命題を発見する事，推測を立てることについて注目し，様々な事例と共に具体的に記述している．

そこで，Bethの数学的思考の相に対してPolyaの主張，特に思考の具体的な様相を位置付けることで，一般化を志向する教授学習を捉えるために適した枠組みを構築する．

4.2.2 帰納と類比：ゴールドバッハの予想

一般化についてPolyaが取り上げた事例として，ゴールドバッハの予想がある．

何かの拍子に『3+7=10』『3+17=20』『13+17=30』なる三つの関係の類比に気付くとする．3,7,13,17は全て素数であり，10,20,30は全て偶数である．他の偶数の場合をいくつか調べてみると，例えば『6=3+3』『8=3+5』となる．従って『偶数=素数+素数』という推測が成り立つ．

しかし，これは偶数として2と4を選択した場合うまく行かないので，より正しくは「素数でもなく素数の平方でもない任意の偶数は二つの奇数の素数の和である」という推測が成り立つ．

ここで，一般の関係を推測することができたが，あくまで経験から導き出された推測の範疇を出ず，この後に証明する手順が必要となる．しかし，帰納によって他の特殊な場合を試すことによって，推測の信憑性は高まっていくだろう．

このようにしてゴールドバッハの予想が発見される，というPolyaのこの事例は，3つの特殊な式で成り立つ性質を，より広い素数や偶数というった一般の場合へ適用しようとする認識であるから，一般化であると捉えられる．

本事例においては，『3+7=10』『3+17=20』『13+17=30』という3つの式が特殊であり，そこから一般化されている．しかし，最初からこれらの式をゴールドバッハの予想という一般に成り立つ（であろう）概念の特殊な場合であると認識していたわけではない．では，3つの式が特殊だということはいつ認識されたのであろうか．

3つの式を類比することで，3,7,13,17は全て素数であり，10,20,30は全て偶数であるということにまず気がついた事に注目する．即ち，こ

こでは与えられた3つの計算の中に素数・偶数という一般を類比によって見出している事が指摘される．この過程を経ることで，初めて3つの式が特殊であると認識したと認められる．

このように，類比を用いて所与のものに一般を見出し，所与のものを特殊と見なす過程が一般化を達成する上で重要であると言える．この過程は，発見的である《探求》の相に位置付けられる．

その上で，更に類比から偶数全般という一般の場合について成り立つ性質が推測された．この推測を創造するために用いた類比がその大きな役割を果たしたといえる．従って，真に発見的である《探求》の相における1つの様相として類比による命題の推測を位置付けることができる．

次に，発見された推測の信憑性を確かめるために，特殊化が行われ，いくつかの特殊な場合について帰納的に確かめた．ここでは帰納によってアーギュメントを再考しており，帰納を《検証》の相に位置付ける事ができるだろう．更に，帰納の結果，偶数から2と4を取り除かなくてはならない事が見出された．従って，帰納は同時に発見的な《探求》の相にも位置付ける事ができるだろう．また，そのような帰納に必要な特殊を生み出すための特殊化も，併せて位置付けられるだろう．

4.2.3 《配列》の相

以上が一般化に関するPolyaの主張の内『子ども』に関する主張であり，Bethの数学的思考の相の内，《探求》の相と《検証》の相にいくつかの様相を位置付ける事ができた．

ところで，不規則な《探求》の相においては，帰納・類比といった様相が，整然と順番通りに見られるとは限らない．その過程においては，“いろいろな観察を組合せ，類比をたどらなければなりません；あなた方は何回も何回もやってみなければわからないのです．”(Polya, 1954a,p.4)とあるように，様々な試行錯誤が順不同に行われるだろう．

しかし，Polya（あるいは本研究）が記述している様相は明らかに順序を持って整然としている．これは，上述の試行錯誤によって得られた推測が，後から見直され《配列》された結果を記述せざるを得ないからであると捉えられる．

従って，一見するとPolyaは《配列》の相について特別に記述しているようには見えないが，その精神をBethの数学的思考の相に照らし合わせれば，Polyaは試行錯誤によって得られたアーギュメントが《配列》された結果を記述せざるを得なかったと認められる．

4.3 分類

Polyaの主張から，一般化についてある程度明らかになった．ここで2章で取り上げた，円周角の定理が一般に成り立つ事を論証しようと試みる場面に再度注目しよう．

通常，我々が円周角の定理を証明するに際しては図3のような3つの場合について推理する．

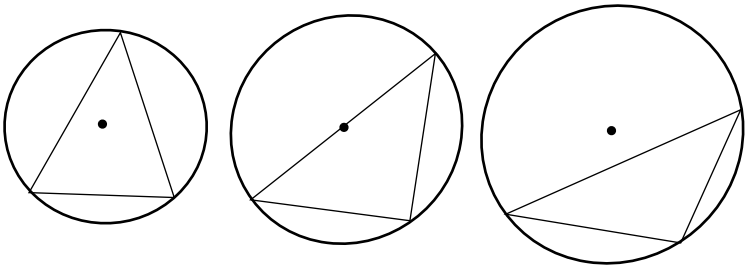


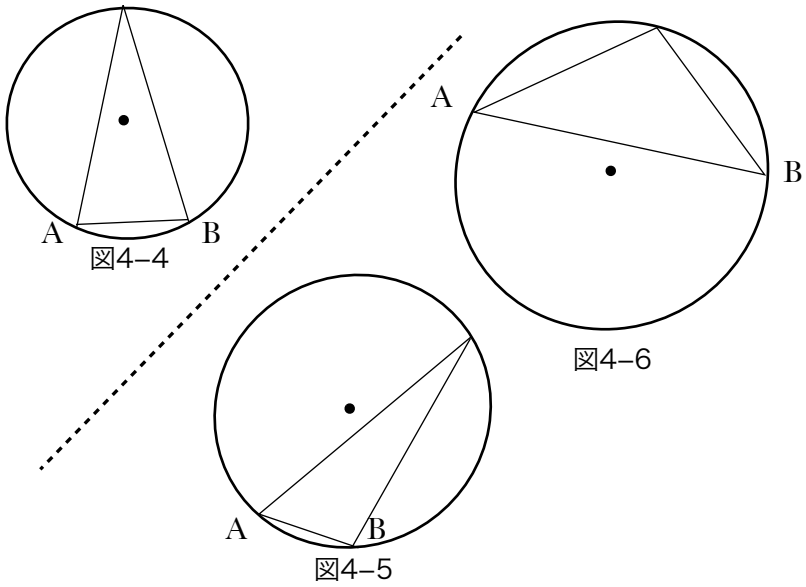
図4–3：円周角の定理を論証する対象

しかし，なぜこの3つの場面について論証すればよいのか，という事について，少なくとも教科書では何も述べていない．また，Polyaから得られた帰納・類比といった様相でも十分に説明できない．

そこで，本研究は我々が数学的な問題を解決しようとする時に行う「分類」が重要な様相であり，この場面に位置付けられるのではないかと考えた．

もし私達が円周角の定理を証明しようと試みている時に，1つの弧に対する円周角が中心角の半分であり常に一定であるという推測が成り立ったとする．当然，次にそのような推測を論証しなくてはならない．

その際に以下の様にそれぞれ異なる特殊な場合において，図4–5と図4–6を同じものであると，一方で図4–4は異なるものであると分類する事が（下記の点線のように）行われたと仮定してみよう．

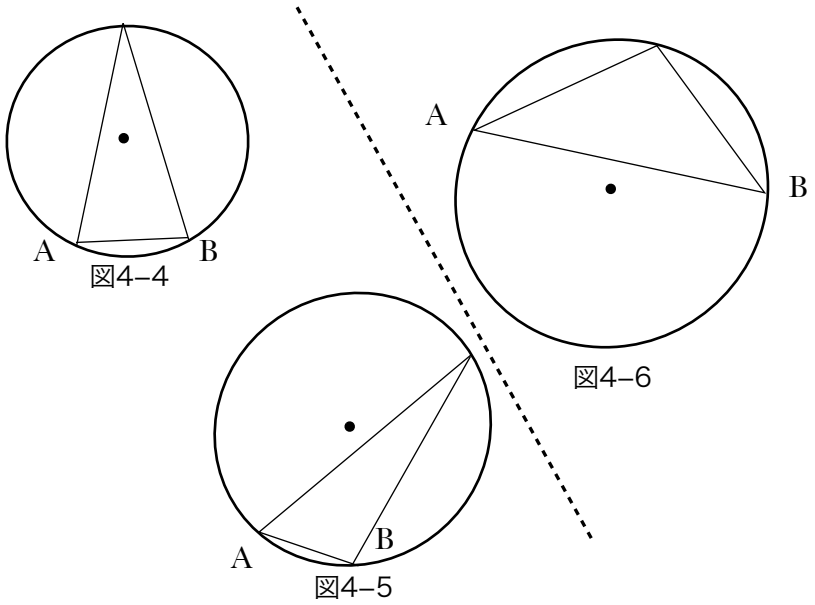


図：成功的な分類の様相

ここでは，『三角形の外接円の中心がどこにあるか』という観点からの分類が行われている．分類をする際には，このように設定されたある一定の観点からなされるものである．

もしこの分類が何らかの根拠を基に達成されたのであれば，外接円の中心の位置が論証に対して何かしら関与してくるという指針を得ることができると期待される．従って，一般化を達成するにあたって分類することが決定的な役割を果たす場合があると認められる．

ただし，分類は必ずしも一般化を達成するために決定的な役割ばかりを果たすわけではない．それは，分類のための観点が目的に対して常に妥当であるとは限らないからである．例えば，同じ図4–4・図4–5・図4–6を以下のように分類したとしよう．



図：成功的ではない分類

ここでは，分類のための観点を『弧に対する円周角が中心よりも上にあるか，下にあるか』に設定している．

このような分類は，一般化に大してそれほど決定的であるとは言えない．しかし『弧に対する円周角が中心よりも上にあるか，下にあるか』が一般化の達成に関係なさそうだ，という事は明らかになるため，一般化を達成するにあたってある程度寄与する事が認められる．

以上のような「分類」においては様々な試行錯誤が繰り返されると考えられるため，《探求》の相に位置付ける事ができる．

以上の“帰納”・“類比”・“分類”をBethの数学的思考の相に位置付けることで，一般化を志向する教授学習において『子ども』が推測したり発見したり，論証したりする活動の具体的様相が明らかになり，Bethの数学的思考の相を特徴付ける活動であると認められる．

4.4 『子ども』の推測・発見と研究課題

3章で述べたように，『子ども』という観点からは本研究の研究課題1へアプローチすることが出来ると期待された．Bethの数学的思考の相によって捉えられる『子ども』の活動から捉えることで，

小課題1：一般化を志向する教授学習過程において，推測や発見に結びつく活動はどう位置付けられるか？

に対しては，Beth（Beth and Piaget,1966）に基づき数学的認識における《探求》の相に推測や発見が位置付けることが出来ると明らかになった．更に，

・研究課題1

一般化を志向する教授学習において，どのように概念を構成していくか

に対しては，帰納・類比・分類によって特殊の中に一般を見出す過程が重要であることが解った．特に分類は概念の構成に大きな役割を果たしていると同時に

・研究課題2

一般化を志向する教授学習において，どのように捨象する差異性とその程度を決定していくか

に対して重要であることが認められる．4.5において示したように，円周角の定理を論証しようとする際の分類について，決定的な役割を果たす場合と，そうでない場合があることが認められた．分類が決定的な役割を果たす場合，円内部に出来る三角形と外接円の中心の位置関係が重要であることが見出されると述べたが，位置関係のなかでも外接円の中心の位置が三角形の「内」「外」「三角形の辺上」であるという事以外は捨象してもよいということが同時に明らかになってい

る．また，そうで無い場合は円の中心と円周角の位置関係は一般化を達成するにあたって無関係であること，いいかえれば捨象してよいことが認められる．

このどちらの場合にせよ，研究課題2には《探求》の相における分類が大きく関係している事が認められる．

更に，帰納・類比・分類においては互いに異なる特殊について推理せざるを得ない上に，一般化が達成された際にはそれらを一般の概念に基いて統合するべきである．従って

・研究課題3

一般化を志向する教授学習において，互いに異なる特殊から一般の命題が導かれるということを，どのように学習機会として取り入れるか．

に対しては，帰納・類比・分類によって推測し，後にそれらを一般の概念に基づき統合するための学習機会として取り入れるべきであることが認められる．

第4章の要約及び注

本章においては，3章で導出した小課題1を検討するため，Beth（Beth and Piaget,1966）から数学における直観主義という考え方に注目した．その結果，我々の数学的思考は《探求》の相・《配列》の相・《検証》の相という連続的な3つの相に区別されなくてはならないことが明らかになった．

この“Bethの数学的思考の相”を特徴付けるのは，真に発見的で創造的であるが不規則である《配列》の相であるため，数学における発見学を再構成しようとしたPolya（1945,1954a&1954b）の主張を位置付ける事で，一般化に対して特徴付けを行った．

その結果，帰納・類比という様相が一般化に対して重要であることが明らかになった．一方，帰納・類比という考えでは2章で取り上げた円周角の定理の事例を考えたとき，「場合分け」を説明できないことが認められた．その結果，Polyaに不足していた観点として分類という様相が重要であることが認められた．こうした分類には成功的なものとそうでないものがあるが，そのどちらも重要である．

これによって小課題1にこたえると共に，研究課題1には帰納・類比・分類が，研究課題2と3には分類が重要であることが認められた．

---

[1] ここでの「異なる方法」は心理学的な側面である．この事は，Beth(1966)でも随所に述べられており，共著者であるPiaget氏もまた講演でこの事を述べている（ピアジェ,1970,p.16）

[2] Polyaの“発見”という言葉とBethの“発明”という言葉を本研究は同一に扱っている．これは，Hadamard（1945）が述べるよう発明は同時に発見でもあり，両者の心的作用が同一であることが理由である．『子ども』が学習場面で自ら構成した概念や知識は，社会においては既に知られているものであり，教師からみれば“発見”であるが，子ども自身にとっては未知なるものの“発明”だと捉えられるべきであり，そのような場を設計するべきである．

第5章：『教師』の支援とコミュニケーション

本章では，教授学習における『教師』の「支援」が果たす役割を，コミュニケーションという観点から明らかにすることが目的である．

先行研究の知見を基に，コミュニケーションによって発生する社会的状況について5.1で，コミュニケーションそのものの機能について5.2でそれぞれ検討する．

そして5.3において研究課題にアプローチを行う．

5.1 学習の動機となるコンフリクト；小課題2の検討

本章では，3章における『小課題2：教師からの問いかけが，学習者が一般化へ向かう契機としてはたらくのは，どのような場合であるか？』について検討する．

円の分割事例から，教師からの働きかけによって，他者に説明しようとすることが一般化に向かう契機となる場合があること認められた．このような学習者は，教師からの働きかけがなければ，一般化に到達することは困難であるかもしれない．

このような場合，いわゆるコミュニケーションが学習者に対して影響を与えたと考えられるため，コミュニケーションと学習者の思考の関係について明らかにするために，Sfard（2001）とSierpinska（2005）の提案に注目する．

学習とコミュニケーションの関係について検討を行ったSfard（2001）によれば，この場面において学習を駆り立てる動機は主として“他の人に対してディスコース的に言葉遣いを調整すること”（Sfard, 2001,p.48）であるディスコース的コンフリクトであると解釈される．同時に，従来学習を駆り立てる動機とされてきた認知的コンフリクトをディスコース的コンフリクトで置き換えることをSfard（2001）は提案する．

学習の動機という言葉は様々な捉え方が可能であるがSfard（2001）や本研究の文脈においては，学習者が自発的に何らかの数学的活動を行おうと思い立つような動機のことを指す．このような活動は教師によって意図して設計されたものであり，そのような活動を通し学習者はそうとは意識せずに概念を変化させる（すなわち，学習する）ことが期待される．

これらの点を踏まえ，認知的コンフリクトあるいはディスコース的コンフリクトについて，Sfardの提案と共に検討する．

5.1.1 認知的コンフリクト

通常，コンフリクト（葛藤）という言葉は“二つ以上の対立する傾向（衝動，要求等）が，ほぼ等しい強さで同時に存在し，行動の決定が困難な状態”（藤井,1986a,p.24）を指す.

認知的コンフリクトという考え方はその起源をPiagetの矛盾観（Piaget,1974）に見る事が出来る.

数学の理解過程における認知的コンフリクトの役割について研究している藤井氏によれば，Piagetにとっての認知的コンフリクトとは認知的システムの不均衡の表現であり，ここでの不均衡とは“子どもがいま認知対象とする経験的データを既存の心的シェマに同化させる時に生起し，心的シェマがその経験的データを調整する為に変容する時，均衡が回復される”（藤井,1986b,p.65）ということを意味する.

では，具体的にどのようなものを認知的コンフリクトと呼ぶことが出来るか，藤井氏の挙げる例（藤井, 1986a,p.25）を見てみよう.

5.1.2 認知的コンフリクトの例

不等式$x-2>5$の解決を試みる授業において

$$x-2+2>5+2$$
$$x>7$$

と解決した生徒がおり，この生徒は以下の様に記述していた.

不等式で2<3の時，両辺に1をたしても100を足しても，3.3を足しても<u>かわらない</u>.
2+1<3+1
3<4
だから，両辺に2を足すと
$x-2+2>5+2$
$x>7$

（下線部は藤井氏による）

これに対して，かわらないという意味が「不等号の向きが変わらない」ということを確認した上で，教師から以下のような発問を行う.

「大きい方に大きい数，小さい方に小さい数を足しても不等号の向きは変わらないはずです．例えば大きい方に2，小さい方に1を足しても･･･とすると，この場合で先程と異なっているが，どう思いますか？」

このような教師の問いかけにおいては解が$x>6$となり得るため，この場面で，藤井氏は少なくとも3つの認知的コンフリクト（C1〜C3）が発生していると指摘する．

C1：不等式$x>7$の解はと$x>6$のどちらであるか？

C2：解を得るための手段について，「両辺 に同じ数をたす」か「大きい方に大きい数，小さい方に小さい数を足す」のどちらが正しいか．

C3：手順の妥当性を示す根拠について，不等号の向きが変わらない点は同じだが，どちらが正しいのか．あるいは，どちらも誤り（根拠として不十分）なのか．

これらは学習者の内に生起したものであり，不等式について発生しているコンフリクトであると指摘される．

同様のコンフリクトは円の分割事例でも確認することが出来る．問題の答えが16箇所であると推測した学習者に対して教師が「17箇所以上に分割することは出来ないのか？」と問いかけたとする．このとき，学習者には『17箇所以上に分割することは出来るか否か？』という認知的コンフリクトが発生していると捉える事が出来る．

こうしたコンフリクトを解消しようと学習者が試みることで学習が進行していくと考えられる．

5.1.3 ディスコース的コンフリクト

一方，Sfard（2001）は図5-1に示した「一番大きい数」の事例（ibid,p.19）は認知的コンフリクトという考え方で捉える事が出来ないという点を根拠に，認知的コンフリクトをディスコース的コンフリクトで置き換えることを提案する．

「一番大きい数」の事例は教師と小学校1年生のNoaの会話である．最初に教師が「あなたが考えられる一番大きい数は何ですか？」と聞いたとき，Noaは「ミリオンです」と答える．教師とNoaは2人とも数（number）・一番大きい数（the biggest number）という言葉を用いて会話しているが，それらの言葉が指す対象が異なっており，Noaにとって数という言葉はこの場合数詞を指している．

[1]教師（Rada）：10を数えられますか？
[2]Noa：はい，1,2,3,4,5,6,7,8,9,10
[3]教師：10より大きい数（number）を知っていますか？
[4]Noa：はい，1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20
[5]教師：あなたが考えられる一番大きい数（the biggest number）は何ですか？
[6]Noa：ミリオンです
[7]教師：では，ミリオンに1を加えるとどうなるのですか？
[8]Noa：ミリオンと1です
[9]教師：それはミリオンより大きいの？
[10]Noa：はい
[11]教師：では一番大きい数は何？
[12]Noa：200万（Two million）です
[13]教師：では200万に1を足したら？
[14]Noa：200万より大きくなります
[15]教師：では，一番大きい数に辿り着くことができると思いますか？
[16]Noa：はい
[17]教師：じゃあもし一番大きい数をグーゴルであるとしましょう．1をグーゴルに足す事は出来ますか？
[18]Noa：ええ，グーゴルより大きい数です.
[19]教師：じゃあ一番大きい数は？
[20]Noa：そんな数は無いわ！
[21]教師：どうして無いの？
[22]Noa：どんな数もいつもそれより大きい数があるからかな？

図5-1：教育実習生と7歳のNoa（小学校1年生女子）の会話
(Sfard,2001,p.19)

更に教師とNoaの会話は続き，最終的にはNoaの“数”と教師の“数”は一致する．更に，この過程を通してNoaは自然数について学習したと捉えられる．

“認知的コンフリクトという考え方が世界についての主張同士を「合理的に」正統だとする能力を含む一方で，ディスコース的コンフリクトという考え方は習慣的な言葉遣いの対立を強調する”（Sfard,2001,p.48）と考えたとき，この事例では世界についての主張同士が問題になっている訳ではないと解釈する事ができる．

即ち，認知的コンフリクトとはある対象について個人内に生起するコンフリクトであり，ディスコース的コンフリクトとはある言葉が指し示す対象そのものについての個人間のコンフリクトである．

Sfard（2001）は学習のための主たる動機を認知的コンフリクトからディスコース的コンフリクトに置き換える事を主張し，それによって我々の認知的行動を主として駆り立てるコミュニケーションの必要性を強調している．（ibid,p.49）

同様のコンフリクトは円の分割事例における認知的コンフリクトが生起している場面でも観察可能である．教師が「17箇所以上に分割することはできないか？」と問いかけた場面において，学習者にとって「最大」という言葉は実際に分割してみた結果として最大の場合を指しており，一方で教師にとっての「最大」は，これ以上多く分割することが出来ない保証が与えられた場合を指していると捉える事が出来る．

従って，Sfard（2001）が主張するようにディスコース的コンフリクトを解消しようとすることで一般化を志向する学習が進行していると捉える事も可能である．

5.1.4 社会認知的コンフリクト

一方Sierpinska（2005）は社会心理学において認知的コンフリクトという観念を限定するためにDoise&Mugny（1981）らが提唱した“社会認知的コンフリクト”にディスコース的コンフリクトを近接させている．それは“どちらも社会的相互作用の状況における矛盾する主張の相互発生として理解される”（ibid,p.9）からである．

Sierpinskaによれば，社会認知的コンフリクトはこれまでに研究されてきておりMugny,Doise&Perret-Clermont（1975-1976）などにより，問題点が指摘されているとする．即ち“社会認知的コンフリクトを通して学習が進行するという事の前提条件が明確でなく，複雑であり，“モデル効果”に還元不可能である”（Sierpinska,2005,p.10）点や，“個人間のコンフリクトが個人内のコンフリクトより有効であることを実験によって確かにするということは不可能である”（ibid,p.10）点である．

円の分割事例においても，認知的コンフリクトとディスコース的コンフリクトのどちらによって学習が進行しているかを判断するのは非常に困難であるといえる．

しかし，本章が「教師」の役割としての支援を扱っており，それが主として言語によるコミュニケーションで行われるという点を考慮すれば，社会認知的コンフリクトという考え方によって学習が進行していると見なすことに一定の意義が認められる．

5.2 コミュニケーションの社交的な機能

さて，そもそもSfard（2001）はその理論の背景において，思考を（自分との）コミュニケーションとして概念化している．

この概念化において，我々の思考は本質的に全てディスコース的であり，思考，ディスコースは全てコミュニケーションすることの実例であるという点をSfard（2001）は指摘する．

しかし，Sierpinska（2005）は数学的思考における非コミュニケーション的な思考である無意識の思考[1]などを踏まえていないSfard（2001）による思考の概念化は，正しくない上に数学教育にとってまったく役に立たないことを指摘している．加えて，コミュニケーションの全ての実例はディスコース的ではない点を指摘する．

Sierpinska（2005）は両者の相違として，言語とコミュニケーションが持つ社交的な機能を指摘している．ここでいう社交的な機能とは，例えば会話の合間に「うーん･･･」と言ったり，「そうじゃないの？」と言ったりするような事を指す.

少なくともSfard（2001）にとってのディスコースとは何か世界について（about the world）書いたり発話したりすることであるが，「うーん・・」といったような会話においては，何かについて発話している訳ではない．むしろ，何を言ったかよりもそこにコミュニケーションがあるということが重要になることが指摘される．その結果，社交的な機能は相互のコミュニケーションを維持しようとする力として作用する．一見するとこれは数学の学習と関係ないように見えるが，Sierpinska（2005）はこの点を重要視する．

“コミュニケーションを維持する力のある社会的な状況においては…対話者はその社交的な機能として主に言語を使うでしょう．彼等が何か言ったときそれは彼等の思考とは関係ないかもしれません，もし話す事へのプレッシャーが無いならばそうする方法を考える事が出来ないかもしれません．何人かの生徒が考えるのと同時に単にコミュニケーションできないのは，視覚，触覚，またはその他の非記号的なものが

彼等の思考であるからかもしれません．…言葉で考える必要性が無い間，彼等は間違った表現を自分の思考に使っているかもしれません．”（ibid,p.18）

“一般化モデル”によれば，一般化とは記号使用による【構成的抽象】とその反省のことであった．従って，非記号的なものを自らの思考に用いている学習者は一般化を達成出来ないと考えられる．従って，こうした学習者には『教師』とのコミュニケーションを維持しようとする社交的な機能が有用であることが認められる．

5.3 『教師』の役割と研究課題

以上の議論より，Sfard（2001）が主張するように，コミュニケーションが学習者の思考に大きな影響を与えていることは認められた．Sierpinska（2005）の指摘を考えればSfard（2001）の主張は全面的に受け入れられるものではないが，

小課題2：教師からの問いかけが，学習者が一般化へ向かう契機としてはたらくのは，どのような場合であるか？

に対して「社会認知的コンフリクトが発生する場合である」ことと，「コミュニケーションを維持しようとする社交的な機能が働く場合である」ことが認められた．ただし，後者は思考に記号を用いていない学習者についての話である．

同時に，小課題2への答えから研究課題である

・研究課題1

一般化を志向する教授学習において，どのように概念を構成していくか

に対して，コミュニケーションを通して概念を構成していくべきであるということが認められるだろう．

第5章の要約及び注

本章では，一般化を志向する教授学習場面における『教師』の支援について考察した．支援は学習者の思考を促進することを意図した『教師』による思考への介入であり，主として言語によるコミュニケーションによって行われる．

こうしたコミュニケーションについてSierpinska（2005）を基に検討した結果，同じ言葉が異なる対象を指すことによって発生する“社会認知的コンフリクト”が発生する場合と，コミュニケーションを維持しようとする社交的な機能が働く場合において，学習者の一般化を促進することが認められた．

これにより，研究課題1と3に対して『教師』の役割としてのコミュニケーションが重要であることが認められた．

---

[1] ここではイメージなどを指し，無自覚とは限らない．

第6章：一般化を促進する『教材』

本章では，一般化を促進する『教材』の役割を明らかにすることが目的である．

3章に述べた円の分割事例と，先行研究から得られた知見を基に，6.1ではPolyaの，6.2では宮崎氏の先行研究を基に，一般化を促進する特別な教材について検討する．

6.3においては，そこから研究課題にアプローチを行う．

6.1 特別な特殊を通した学習；小課題3の検討

教授学習において『教材』が大きな役割を果たすということは疑い無く認められるが，『教材』は学習の内容によって固有の性質を持つという側面があり，それらについて一律に述べる事は非常に困難である．しかし，本研究が『子ども』の学習を捉えるために用いているPolya（1945,1954a&1954b）によれば，こうした固有の性質とは関係なく，特別な場合について考察することで一般化が促進される．

異なる事例において，Polyaは少なくとも2つの特殊について考察する事が一般化を達成する上で，それも特に一般の命題を論証する上で重要な手がかりとなる事を主張しているため，事例と共に検討する．

6.1.1 極端に特別な特殊

3章で提示した円の分割事例において，「交点を増やせば領域の数が増える」という一般に成り立つ関係を中々見いだせない学習者がいたとする．この場合，図6–1のような場合を考えることが手がかりとなり得る．

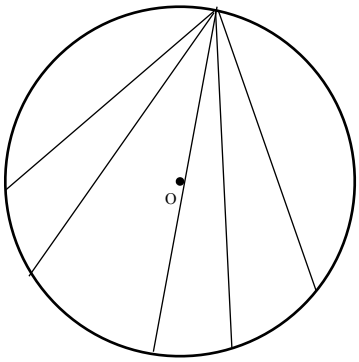


図6–1：分割される数が最も少ないという極端に特別な特殊

図6–1は，5本の線分で分割される領域が最も少ない場合という意味で“極端な”場合である．こうした場面を作図出来たならば，ここから分割された領域の数を増やしていくことで直線と交点の関係に気付くことが出来ると期待される．

このような場合をPolyaは“極端に特別な場合”（extreme special case）と呼んでおり，一般の命題を推測するために有用な場合として位置づ

けている．本研究においては，一般化という観点からこれを呼び変え，“極端に特別な特殊”と捉える．円の分割事例においては，こうした特殊を創造し，推理することが一般化を達成するために重要な役割を担っていることが認められる．

6.1.2 有力な特別な特殊

Polyaによれば更に，一般の場合の解決を含む有力に特別な場合（leading special case）について考察することが，一般化を達成するための手がかりとなることが指摘されている．6.1.1と同様に，本研究の立場からはこれを“有力に特別な特殊”と呼ぶ．

例として，2章で取り上げた円周角の定理の場合を考えてみよう．一般化にはその論証がその有力に特別な特殊として中心角が180°の場合（Thalesの定理）を考える事が，大きな手がかりとなる．

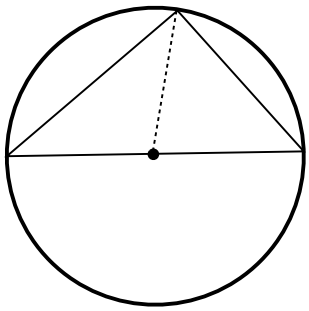


図6–2：円周角の定理における有力に特別な特殊

この場合の証明は，図6-2のように弧に対する円周上の点から中心にむけて線を引く事で比較的容易に達成可能である．そして，この解決は円周角の定理そのものの証明の手順を相当含んでいる．

このように，有力な特別な特殊を構成し，推理することが，一般化を達成するために重要な役割を担っているといえる．

6.2 生成的な例

3章で述べた通り，円の分割事例において成り立つ一般の関係を証明することは，中学校1年生程度を想定している本事例の学習者には不可能である．しかし，図6–3は一種のモデルとして図的な論証を可能にする働きが期待される．線の数が6本，7本･･･と増えていったとしても．既に引かれている直線全てと交点を持つようにすれば領域の数が最も多くなるという関係を常に見出せるだろう．更に，こうした働きから特殊の中に一般を見つける事の手助けになることも期待される．

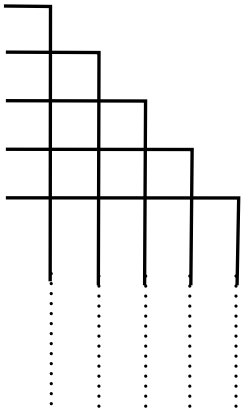


図6–3：円の分割事例における決定的な図

こうした特別な特殊についてPolyaは特別に言及していないが，宮崎（1991）は“生成的な例”（ibid,p.192）と捉えている．

6.2.1 説明から証明への展開；生成的な例を基準にして

宮崎（1991）は以下の条件を満たすものを“生成的な例”と呼んでいる．

“生徒が，例を用いて，対象に対する解釈や操作を系列として示している．…生成的な例は，次の条件を満たす．

条件1：推測したことに一致する事実を得るとき，生徒はその例を手がかりとした．

条件2：その例を用いて，推測したことに 一致する事実を得るまでに，生徒が行った解釈や操作の系列を一般化すると，それはどのような場合にも適用できる．”（ibid,p.92）

宮崎（1995）は，こうした“生成的な例”によって，子どもの説明の水準を記述している．それによれば，「3つの連続する数を加えるならば，その和は真ん中の数の三倍である」という命題の説明に，二人の子どもが想定される．（ibid,p.95）

子どもA	**子どもB**
1＋2＋3＝6，6＝2×3 4＋5＋6＝15，15＝5×3 15＋16＋17＝48，48＝16×3 158＋159＋160＝477，477＝159×3 だから，真ん中の数の3倍になる。	3つの連続する数で，真ん中の数をXとすると，一番小さい数は， X–1，一番大きな数はX+1となる。 （X–1）＋X＋（X＋1） ＝X+X+X–1＋1 ＝3X ゆえに，3つの連続する数を加えると，真ん中の数の3倍になる。

この事例では，子どもAは数式を用いて帰納的に推論しており，子どもBは代数の言語を用いて演繹的に推論している．“学校数学における証明において，その内容は，子どもにとって普遍妥当な前提から当該の命題を演繹的に推論することであり，その表現は，数や図形に関する命題の連鎖を表すための言語による．それゆえ，子どもBによる説明は子どもAによる説明よりも望ましい．”（ibid,p.95）ため，教師は子どもAが子どもBのような説明を達成することを期待する

しかし，子どもAにとって子どもBと同じ説明をすぐに行う事は容易ではないと考えられる．そこで，以下のような図6–4を用いた説明を宮崎氏は想定する．

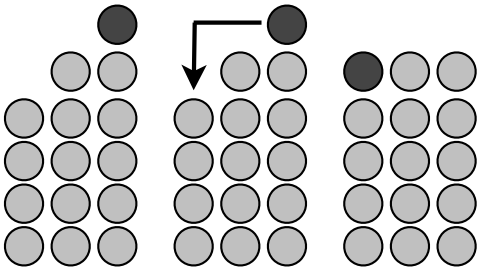


図6–4：4＋5＋6に関する図を用いた説明

図6–4は一見すると，4＋5＋6という個別な命題の妥当性を確かめているように見える．しかし，図6–5のように後は丸を下に付け足して，どのような場合でも3つの連続した数の和が3の倍数になることを説明出来る，とみることもできる．

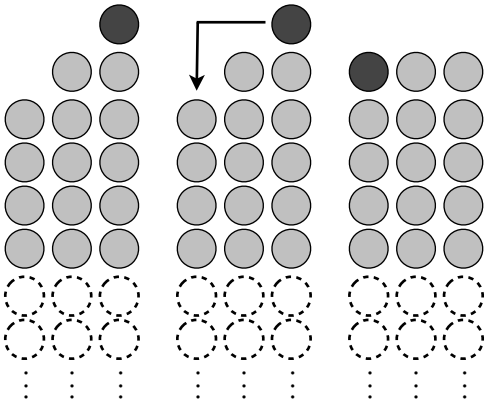
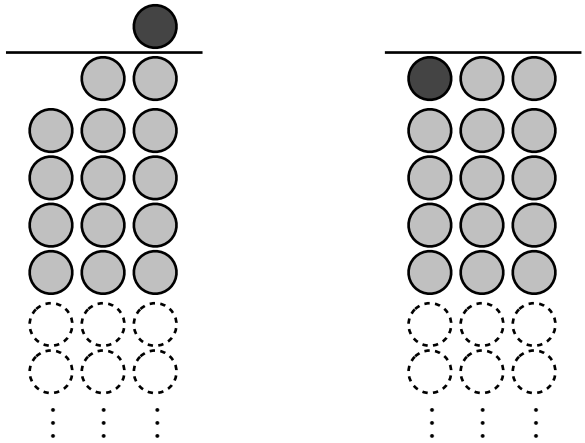


図6–5：“生成的な例”としての見方

更に，このような配列や操作には，図6–6に示したように子どもBの説明と同じ内容が表されていると見ることもできる．



（X−1）+X+（X+1）　　3X

図6–6：“生成的な例”と子どもBの説明

従って，“生成的な例”を用いた説明を代数の言語で表現していくことで，子どもAがより望ましい子どもBの説明へと高まることが期待される．その際，“生成的な例”を用いた説明が，子供による説明をより望ましい方向に展開するための基準になる．即ち，生成的な例を基準に，個別の説明から普遍妥当な証明へと展開されると言えることを宮崎（1995）は指摘している．

6.2.3 特殊から一般への展開；生成的な例を基準にして

宮崎氏の関心は証明の普遍妥当性であるが，本研究の関心からは“生成的な例”を基準とした一連の過程は，“円の分割事例”で見たような，“特殊から一般へ”と向かう過程に近接させることが出来る．

即ち，宮崎氏の述べる子どもAが特殊について個別に述べた説明から，生成的な例を基準に，一般の場合について子どもBのような説明を試みていると捉える事が出来るだろう．

このような働きを，円の分割事例においては図6–3が果たしており，“生成的な例”を基準とする宮崎氏の説明・証明に関する研究を取り入れる事で，一般化を志向する教授学習過程が『教材』という観点から改善されていくことが期待される．

また，このような“生成的な例”は解決や手がかりを含むという意味で“有力に特別な特殊”であると捉えることもできるため，本研究の“有力に特別な特殊”の中に“生成的な例”を加える事とする．

6.3『教材』を通した学習と研究課題

以上の議論から，一般化を志向する教授学習場面においては“極端に特別な特殊”，“生成的な例”を加えた“有力に特別な特殊”を通した学習が展開されるべきであることが明らかになった．

これによって，

小課題3：決定的な役割を果たす特殊はどのように構成され，どう位置付けられるか？

に対して，“極端に特別な特殊”が一般の命題を論証する過程に対して位置付けられ，“生成的な例”を加えた“有力に特別な特殊”が特殊の中に一般を見つけたり，図を用いた論証として位置付けられる事が明らかになった．

この結果，

・研究課題1

一般化を志向する教授学習において，どのように概念を構成していくか

に対して，“極端に特別な特殊”と“有力に特別な特殊”を通して概念を構成していくべきであるということが認められる[1]．更に，

・研究課題3

一般化を志向する教授学習において，互いに異なる特殊から一般の命題が導かれるということを，どのように学習機会として取り入れるか．

に対して，図6–3のような様々な特殊を生成する“生成的な例”によって一般を見出すことが出来るため，“生成的な例”によって学習機会として取り入れられるべきであると認められる．

第6章の要約及び注

本章においては，いくつかの特別な特殊が一般化を促進することを明らかにした．Polya（1945，1954a&1954b）によれば，非常に極端な“極端に特別な特殊”や，一般の場合の解決を含む“有力に特別な特殊”について推理することが，学習者の一般化を促進することが認められた．

それに加えて，円の分割事例において決定的な役割を果たす図（3章図3–5）である“生成的な例”が，一般の命題を論証したり，特殊の中に一般を見つける手助けとなることが明らかになったため，これを“有力に特別な特殊”の中に位置付けることとした．

これによって，研究課題1と3に対して特別な『教材』の果たす役割が重要であることが認められた．

---

[1] ただし，6.1.1と6.2では円の分割事例を用いて“極端に特別な特殊”や“生成的な例”の働きを説明したが，6.1.2では円周角の定理事例を用いて“有力に特別な特殊”の事例を説明したように，必ずしも全ての場面でこれらの特別な特殊が構成できるとは限らない．

第7章：一般化を志向する教授学習モデルの構築

本章では，2〜6章の議論を基に，一般化を志向する教授学習モデルを構築することが目的である．

7.1でそもそもモデルとは何かについて，先行研究を基にその本性を明らかにする．それによって，7.2と7.3では先行研究である“一般化モデル”の目的と，その特性について考察を行い，本研究のモデルが要請される理由を明らかにする．7.4でこれまでの議論を総括したモデルを構築し，7.5でその有用性や規範性を明らかにし，7.6では実際に運用を行い，それを確かめる．

7.1 モデルの本性

2章から6章の議論を通して，“一般化モデル”は一般化を志向する教授学習場面のモデルとして有効に機能する面もある一方，モデルに「教師」や「教材」が登場しないなどの問題も含まれることを明らかにしてきた．

その上で教授学的な視点から一般化について様々な検討を行って来たが，これらを総括するための方法として，一般化を志向する教授学習場面のモデルを構築することが考えられる．モデル化する事によって，教授学習という文脈の中でどのように一般化が達成されるべきであるかを明白にすることが，通常期待される．

そのためには，一般化を志向する教授学習場面をモデル化するにあたってどのような特性を持つモデルが要請されるかが明らかにされなければならず，その為にはモデルの本性に迫る必要がある．

そもそも「モデル」という言葉は日常生活から自然科学や数学にまで広く用いられており，その意味は極めて多様である．

しかし，形式的な記号系をモデル化する論理的・数学的なモデルと，内容的な対象系をモデル化する非形式的な諸科学で用いられるモデルとでは，その役割や本性が決定的に異なっており，これらは区別されなければならない．

7.1.1 公理系を満足させるモデル

論理学，あるいは数学で用いられる論理的・数学的なモデルは以下のように定義される．

“述語論理における文（命題）は，数学的構造についての記述である．文の集合を理論（theory）もしくは公理系と呼び，理論Tのすべての文を成り立たせる構造をTのモデル（model）と呼ぶ．”（田中,2006,p.61）

特にある理論が少なくとも1つのモデルを持つということは，その理論が無矛盾であるということに同値であることが知られている．

具体的な例を挙げてみよう．例えばHilbertによって明らかにされたユークリッドの公理系に対する1つのモデルは，ユークリッド原論に見られるような平面の幾何図形である．これに加えて，前述の定義から以下のようなものもユークリッドの公理系に対するモデルとして認められる．

“Sを，あるモデルのすべての点の集合Eからそれ自身の上への，あるいは別な集合Rの上への1対1写像としよう．集合Rの要素を点と呼び，直線（平面）の像からなるRの部分集合を直線（平面）と名づける．Eにおける原像の対応関係を通して，属する，順序，運動の関係を定める．点としてのRの要素，直線や平面からなるRの部分集合がすべての公理をみたすことは容易にわかる．”（パガレロフ,1968,p.52）

Pogorelov（1968）にはユークリッドの公理系を満たす他のモデルとしてDescartesによるモデルが紹介されているように，ユークリッドの公理系に対するモデルは無数に存在する．

加えて，理論Tにおけるモデルの個数が，同型な（全く同じ構造である）ものを除き1つしかない場合，理論Tは範疇的（categorical）であるといわれ，自然数論に代表されるように完全[1]な理論は範疇的ではない．

このことを印象的に述べたエピソードが田中氏の著書に書かれているので，引用して紹介しておきたい．

“…ロジックを専門としていない学生の一人が「完全性定理はどうして完全性定理というのですか」と先生に質問した．すると，ヘンキン先生は，「論理が完全であるというのはドイツ語でvollständigといって，モデルがいっぱいあるという意味なんだ」と，道の真ん中で両手をひろげ何かたくさん沸き上がってくるような大げさなジェスチャーをされた．「不完全性定理」の「（不）完全」との意味の違いを強調されたのである．”（田中,2006,p.4）

7.1.2 同型性に基づくモデル

以上のような論理学・数学におけるモデルに対して，その他の文脈で用いられるモデルとは，通常“あるものMがあるものPのモデルであると言われるのは，それらの間のある種の同型性に基づいて，Pにおける事柄がMにおける事柄に反映されるとき，また，その逆も言えるときである”[2]（小山,1989,p.56）と言われる．平易に言い換えれば，ある対象となる事柄と1対1に対応しているものがモデルであるといえる．

ここでの同型性は普通，2つの場合がある．1つはいわゆるプラモデルのような相似の関係による同型性で，もう1つはアナロジー[3]の関係による同型性である．

自然科学をはじめとして，非形式的科学におけるモデルもこうした同型性，特にアナロジーによる同型性に基いて構築されているが，実際には対象の論理的・数学的な明細が複雑である場合に使用されるため，論理的・数学的なモデルの特性も同時に持つのがその特徴である．数学教育学の理論で用いられるモデル—Dörfler(1991)の一般化モデルや，Skemp(1982)のマトリックスモデルなど—は，このような同型性に基づきながら，論理的な特性も同時に持つモデルであるといえる．

このような科学で用いられるモデルの典型例としてHesse（1966）が挙げているのは，物理学者N.R.Campbell氏が好んで使ったといわれる分子運動論[4]のモデルに関する例である．

バラバラに動いているビリヤード玉のモデルを気体分子のモデルとして採用したとする．この時，気体分子はビリヤードの玉と同じものだと言っているわけではなく，両者はアナロジーの関係にある．

アナロジーの関係ということは，言い換えれば気体分子の持っていない性質をビリヤード玉が保有していることになる．例えばビリヤードの玉が赤いといった性質を気体分子が持たない事は明らかであるため，これを“否定的アナロジー”（Hesse,1966,p.8）と呼ぶ．一方，ビリヤードの玉の運動や衝突といった性質はまさしくモデルによって分子に与えようとする性質であり，これらを“肯定的アナロジー”（ibid,p.8）と呼ぶが，気体分子のふるまいがビリヤードの玉について知られて

いる諸力学的性質と一致するかどうかは不明であるため，検証されなければならない．これを“中立的アナロジー”（ibid,p.8）と呼ぶことができる．

既に述べたように，科学におけるモデルはその理論を全て成り立たせなければならないという本性に基づき，ある理論を主張する際のモデルには，肯定的アナロジーと中立的アナロジーのみが用いられる．

そのため，気体分子運動論に対するビリヤード球のモデルを例に取るならば，図7–1のように修正が加えられるべきである．

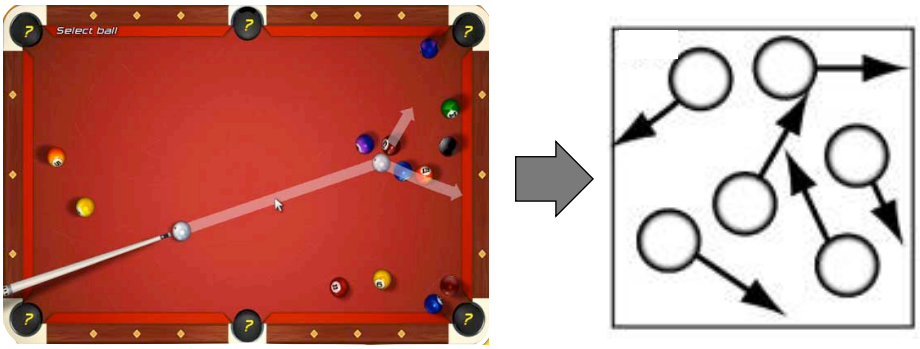


図7–1：ビリヤード球のモデルから否定的アナロジーを排除する様子

同様に，否定される可能性のある中立的アナロジーに対しては，理論を全て成立させなければならないというモデルの本性から検証が要請される．検証の結果，それが肯定されるならばモデルの信頼性や妥当性が増す一方，否定されるならばモデルの再構成が要請されると言える．

こうした働きが，次節で述べるモデルの役割に繋がっていく．

7.1.3 モデルの役割

論理学・数学におけるモデルについては，その役割についての論争は見られず，モデル理論という分野が確立しているといえる．

一方，諸科学，とりわけ自然科学においてはモデルが果たす役割について様々な議論が展開されている．その中でも特に，フランスの物理学者でもあり哲学者でもあるDuhemとその学派がモデルは科学に必要不可欠なものではなく，単に補助的なものであると主張したのに対

して，英国の物理学者Cambellとその学派がこのような見方を攻撃した論争[5]が有名である．

両者の詳細な見解をここで挙げ，検討するのは本研究の目的を逸脱するため取りあげないが，しかし両者がモデルの役割に関して少なくとも以下の点では合意している事には触れておきたい．

R1：モデルは理論を説明するための，少なくとも心理的な助けになる
R2：理論を拡張するに際しては，モデルは少なくとも補助的な役割を果たす
R3：モデルは新しい理論を発見・形成するための，少なくとも心理的な助けになる

「少なくとも」の部分がデュエム学派とキャンベル学派の対立軸になり，例えばR2に関して言えば，キャンベル学派はモデルこそが理論を拡張するための中心的役割を担っていると主張している．

R2とR3の役割は2.2で述べた中立的アナロジーに関する検証に依るところが大きく，中立的アナロジーの検証を通して理論が拡張されたり，新しい理論が発見されたりすることは広く認められている．

従って，必要不可欠であるかどうかは議論の余地があるにせよ，モデルを構築することが理論を説明し，拡張し，発見していくための手助けとなることが認められる．

よって，本研究の関心である一般化を志向する教授学習場面の改善のため．そのモデル構築をすることには意義があると認められる．

7.2 モデルの対応

7.1のようなモデルの役割と定義を考えれば，モデルは必ずしも事柄の全ての要素と対応する必要はなく，目的に応じて様々な対応のさせ方が考えられる．例えば，理解研究における“様相モデル”と“過程モデル”は，理解という事柄に対する，目的に応じた異なる要素への対応のさせ方の1つの例である．（小山,2010）

そして目的や対応のさせ方を変えるのであれば，それに相応しい特性を持つモデルが要請される．例として前述した理解の“様相モデル”と“過程モデル”を比較してみよう．小山氏が“様相モデル”として挙げているSkemp（1982）のマトリックスモデルと，“過程モデル”として挙げているHerscovics & Bergeron(1989)の2層モデルを比較してみれば，後者は「過程」という動的なものをモデル化するために矢印を導入しているが，前者は「様相」という静的なものをモデル化するという目的から矢印は導入されていない．

		理解の種類			
		道具的	関係的	論理的	記号的
心的活動様式	直観的	I_1	R_1	L_1	S_1
	反省的	I_2	R_2	L_2	S_2

図7-2：理解のマトリックスモデル（Skemp,1982）

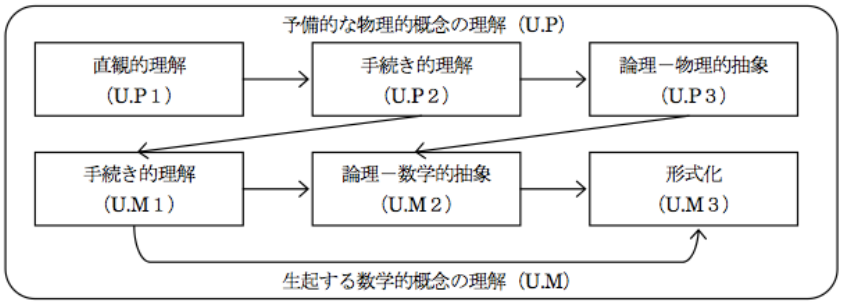


図7-3：理解の2層モデル（Herscovics & Bergeronm,1989）

他方，同じ“過程モデル”でもPirie&Kieren（1994）の超越的再帰モデルは理解は直線的なものではなく再帰的なものであるという考えの基，一方向的な矢印を敢えて取り込んでいないことが指摘される．

図7-4：超越的再起モデル（Pirie&Kieren,1994）

従って，本研究の目的である一般化を志向する教授学習のモデルにはどのような特性が要請されるかを明らかにすることが要請される．

7.3 “一般化モデル”における流れとその目的

Dörfler（1991）の一般化モデルも，そこに修正を加えた岩崎（2007）の一般化分岐モデルも，どちらも様相を切れ目の無い線分で結んだモデルになっている．Dörfler（1991）はこれらの線分を中立的アナロジーとして扱い，特別に言及していないが，岩崎氏はこの点を問題にし，メタ認知の働きによって説明している．

一方，両モデルはどちらも上から下へと流れていく，流れ図のようなモデルになっていることが指摘される．流れ図という名の通り，流れを表現する特性を持つモデルであり，両氏のモデルは分岐こそあるものの，上から下へと流れるモデルである．

この流れには2つの可能性が考えられる．1つは論理的なつながりによる流れであり，もう1つは時間の流れ（時系列）である．例えばDörfler（1991）の一般化モデルにおける【記号の対象化】と【内包的一般化】が線分で結ばれているのは，【記号の対象化】と【内包的一般化】の理論的不可分性と，【記号の対象化】の後に【内包的一般化】が来るという時系列を表現していると捉えられるだろう．

従って一般化モデルとは，一般化という認識の過程を論理的に示していると同時に，ある種理想的な学習者が一般化をどのように達成するかという活動の時系列でもあると解釈出来る．

そもそも“Dörflerのねらいは，言語的に明示可能な一般化の過程をモデル化することにあったといえる．”（岩崎,2007,p.149）事を考えれば，流れを表現する特性をもつ流れ図こそがDörfler（1991）の目的と合致していると認められる．

同様に，岩崎（2007）にとっての一般化は考察の対象または方法のどちらであっても一般化のプロセスであった．（岩崎,2007,p.10）そのため，流れ図という特性が岩崎（2007）の目的とも合致していたと認められる．

7.3.1 事例：Star Patterns

岩崎（2007）の主要な目的の1つは，一般化モデルを批判的に考察し，再構成した一般化分岐モデルを提示することで，その規範性と記述性を高める事であった．それに加えて，岩崎（2007）の関心は授業に対しても向けられている．

Dörflerは授業という文脈では一般化モデルを検証していないが[6]，岩崎氏は一般化分岐モデルを用いて実際の授業を設計し，考察を行っている．それが「Star Patterns」事例である．

岩崎氏はこの事例を一般化分岐モデルに基づき設計しており，5つの小問題を設定し5〜6人のグループ学習の形態で進行させている．即ち

(1)円周上の2等分点，3等分点，4等分点を一筆書きの要領で線分で結ぶと，どんな図形ができるだろう．
(2)円周上の5等分点を結んでできる図形をかき，それぞれに名前を付けてみよう．
(3)（②でかいた図形のうち）星形に注目してみよう，どのようなかき方をしたときにその図形ができましたか．
(4)他にも星形をかいてみよう，円周上の6等分点，7等分点・・・を線分で結び，星型をかいてみよう．
(5)星形はどんなときにかける（またはかけない）のだろう．また，なぜそうなるのか，理由もあわせて考えてみよう．（岩崎,2007,P.190）

一般化分岐モデルに照らし合わせれば，5つの小問題は(1)と(2)が【状況と活動】に，(3)が【不変性の記号的記述】に，(4)は【参照領域の拡張】と表裏の関係にある【活動システムや活動の多様性】に，そして(5)は【記号の対象化】に，それぞれ対応して設定されている．学習者がこれら5つの小問題に段階的に取り組んでいくことで学習が展開され，課題と価値を達成することが意図されている．

学習が展開された後，学習の間に生徒が書き込んだメモやワークシートを通じて一般化の進捗状況を分析し，水準や限界点を明らかにしている．

岩崎氏はStar Patterns事例がいわば予備調査的な調査であり十分ではないと断りを入れた上で，一般化分岐モデルが規範と記述の両面で実践にも有効であると主張する．

即ち，流れ図というモデルの特性を活かすことで生徒の予想される活動，又は実際に行われた活動を流れのいずれかに位置付けられる．そこに上下の位置関係が発生する（あるいは発生しない）ことで，学習の水準を明らかにする事が出来ると言える．

結果として，Star Patterns事例のように，流れに沿った活動設計とその水準の同定が可能になるのが岩崎氏の目的であると言える．このような意味で，一般化分岐モデルは実際の授業の設計に対して有効に働くといえるだろう．

7.4一般化を志向する教授学習場面のモデル

7.4.1 本研究の目的とモデル

1章でのべたように，本研究の学習観の基で展開される問題解決学習をモデル化したものが図7–5で示すモデルであり，一般化を志向する教授学習場面をモデル化したいという本研究の目的に対しても非常に参考になる．

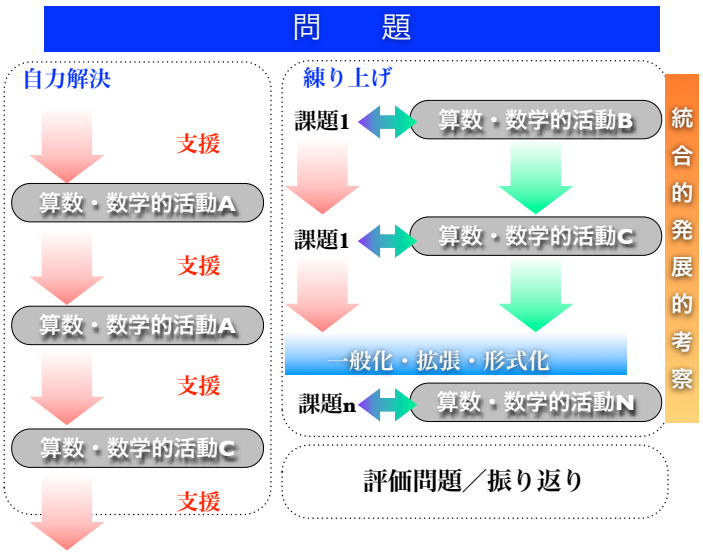


図7–5：算数・数学の問題解決授業モデル（溝口,2007,p.53）

しかし，一般化を志向する教授学習に焦点を当ててモデル化されているわけではないため，例えば一般化を志向する教授学習場面において，どのような活動を期待するべきであるかといったことはモデルから直ちに明らかになるとはいえない．

本研究の目的に照らし合わせれば，一般化を志向する教授学習における数学的活動において，一般化を達成するために推測や発見を含めどのような活動が期待されるべきであるか，不規則にあらわれるそれらの数学的活動に対して，教師や教材がどのような役割を果たすべきであるか，といった事を明らかにするモデルが要請される．

このような目的は，達成するべき活動を設計するという意味ではDörfler（1991）や岩崎（2007）の目的と重なっている部分もある．しかし，そのような活動に推測や発見を含めたり多ような方向性を認めたり，教師や教材の役割を明らかにしたいという，いわば教授学的な

知識という観点を取り入れたモデルを構築したいという目的はDörfler（1991）や岩崎（2007）の目的とは異なっている．

7.4.2 活動の系列と支援

以上の議論を踏まえて，改めて円の分割事例の教授学習場面を振り返る．3.4節で示した通り，円の分割事例は本研究が一般化を志向する教授学習場面の典型的な例として位置付ける仮想事例であった．

従って，ここで展開されている活動を基に4章・5章・6章で議論されてきた『子ども』『教師』『教材』の役割を図示したものが，図7–6である．

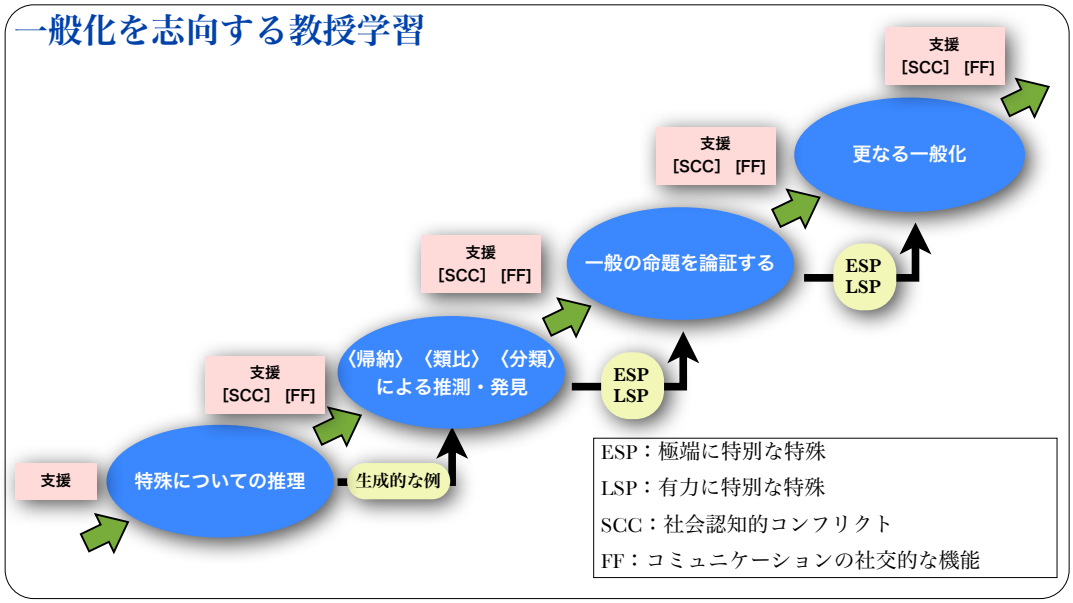


図7–6：一般化を志向する教授学習モデル

ここに図示されている活動の系列はDörfler（1991）や岩崎（2007）によって提示された心理学的・認識論的な系列とは異なっている．これは教授学的な立場から考えたとき，必要となるのは“個人差に応じた指導(解決予想)の根拠は,学習者の可能な解決パターンにあるの ではなく，教授上いかなる指導(支援)が要請されるかにある．”（友定他, 2006,p.5）ことを踏まえた活動の系列である．このような観点に基づけば，例えば一般化分岐モデルにおける【活動の多様性】と【参照領域の拡張】の間に支援が要請されるか否か，ということが重要になるた

め，支援が要請される活動の系列と，そこに要請される『教師』と『教材』の役割が図7–6に表現されている．

7.4.3 モデルの本性からの検証

提示された図7–6を本研究のモデルと見なしてよいかどうかについては，7.2で明らかにされたモデルの本性から検証されなければならないだろう．

図7–6は教室で展開される『子ども』の活動を，教授上いかなる支援が必要であるかという観点に基づいて系列化している．従って，それぞれの活動は教師が意図した（主として言語による）コミュニケーションにおいて実施される［支援］によって高められていく．展開されるコミュニケーションによって発生する社会認知的コンフリクトと，その社交的な機能（Sierpinska,2001）が活動を促進するという同型性に基づいて表現されている．

同時に，実際の授業において［極端に特別な特殊］，［有力に特別な特殊］，［生成的な例］に取り組むことで，『教材』を通して学習者の活動が高められていくということが，矢印を用いた同型性に基づいて表現されている．

以上のような観点から，図7–6は一般化を志向する教授学習場面における学習者の活動と，教師と教材の役割を同型性に基づいて表現したものであることが認められる．

同時に，2章の議論と円の分割事例に基いて3章〜6章で展開された議論の全てが成り立っている．同型性に基づいて表現され，本研究の理論のすべてを成り立たせるものであると認められるため，モデルの本性を満たしており，図7–6は一般化を志向する教授学習のモデルであることが認められる．

7.5 モデルの実際

7.5.1 モデルの有用性

例えば，以下のような問題場面を基に学習を展開しようと教師が意図したとしよう．

単位正方形が縦にm枚，横にn枚並んでいる． この図形の中に正方形はいくつあるか？ただしn≧mである．

一般化分岐モデルによれば，このような問題場面に直面した学習者は【活動と状況】から始まり，まずは【活動の要素の記号化】と【不変な関係を述べる】か，【活動システムの反省】と【不変性の記号的記述】の活動が行われ，【活動の多様性】と【参照領域の拡張】まで達成されなければならない．ところが，具体的にどのような算数・数学的活動と支援を設計すればこれらが達成されるかは一般化分岐モデルからは必ずしも明確ではない．

本研究のモデルによれば，問題場面は特殊についての場面ではないため［〈帰納〉〈類比〉〈分類〉による推測・発見］の活動から取り組むべきであり，支援によって［一般の命題を論証する］活動の達成が期待されるよう，授業を設計すればよいことが明らかになる．このように，活動の設計の方向性や手がかりが本モデルよりある程度明らかになる．更に，活動を高めるにあたっては，コミュニケーションによる支援だけでなく［有力に特別な特殊］などの「教材」も，場合によっては有効に働くため，教師は教材研究の方向性や手がかりを得ることができる．

しかも，円の分割事例で明らかにしたように，こうした活動を通して，一般化分岐モデルで明らかにされた活動を達成されることが期待されるため，本モデルは一般化分岐モデルに対して整合性を有している．

このような観点から観れば，岩崎（2007）の一般化分岐モデルが子どもの活動の記述性と規範性を有しているのに対して，本研究のモデ

ルは教師の授業設計に用いられることで有用なモデルであると位置付けられる．勿論，一般化分岐モデル単体での授業設計も可能ではあるが，そこから直ちに「教師」と「教材」の役割が明らかになるとは限らない．本研究のモデルはいわば，教師が実際の授業を設計しようとするとき，一般化分岐モデルと実際の授業設計との橋渡しをする役割を果たしていると認められる．

7.5.2 モデルの規範性

7.6.1で明らかにしたような設計を試みるに際して，本モデルは規範的に機能することが期待される．ここでの規範とは，一般化を志向する学習において学習者はモデルで示した全ての活動を経験するべきであるということを指す．

例えば先程の事例を再度見てみよう．

単位正方形が縦にm枚，横にn枚並んでいる． この図形の中に正方形はいくつあるか？ただしn≧mである．

このような問題は，問題場面が一般化可能である（もしくは可能であろう）ということを前提にした問題であり，学習者はまず［〈帰納〉〈類比〉〈分類〉による推測・発見］活動に取り組むことが期待される．ところが，一般化とは“特殊から一般へ”という方向性を持った認識であるため，このような問題場面のみに取り組むのであれば一般の場合について推理するだけであり一般化とは認められないことは2章で述べた．

従って，問題場面が一般化可能である（もしくは可能であろう）ということを前提にするために，学習者が[特殊について推理する]活動を経験するべきであることがモデルより示唆される．そのような活動は問題提示の場面か，前時までの学習で経験されているように教師が授業を設計しなければならないだろう．

別の可能性として，授業中にある学習者が［特殊についての推理］活動から直観などによっていきなり［一般の命題を論証する］活動を達成することも考えられる．こうした学習者が［〈帰納〉〈類比〉〈分類〉による推測・発見］活動を経験しないことは望ましくないことがモデルより示唆される．これは，一般の命題を論証してそれで終わりなのではなく，その妥当性を検証したり，一般化のプロセスにおいて保存された数学的アイデアがどのような特殊を統合したか，という点を反省的に振り返りることが要請されるためである．

従って，こうした学習者には教師の方から支援を行ない，［〈帰納〉〈類比〉〈分類〉による推測・発見］活動へと（モデルからみれば戻るように）促すべきであると示唆される．

このようにモデルが規範的に働くことによって，一般化を志向する教授学習過程がより改善されることが期待される．更に，こうした授業を日々行うことで，教師の支援がなくとも子ども自らが一般化を志向するような，いわば契約のようなものが成立することが期待される．

7.6 モデルによる授業設計

本研究のモデルによってどのような授業設計が可能になるのであろうか．典型的な例として，高等学校で（パップスの）中線定理を学習する場面と，小学校1年生で繰り上がりのある足し算を初めて学習する場面の2つを想定する．

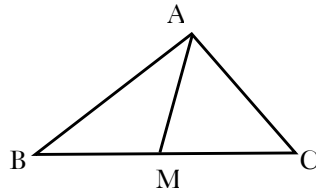
7.6.1 高等学校：中線定理

モデルを用いて，教師が高等学校で中線定理の教授学習を設計しようとする場面を想定してみよう．ただし，学習者は既に余弦定理を学習しているものとする．

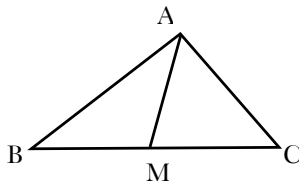
教師がモデルを用いて授業設計を行おうとしたとき，まず［特殊について推理する］ことが要請される．そのため，『△ABCにおいてBCの中点をMとおくとき$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$を証明してみましょう．』といったように，いきなり一般の場合について推理するべきではない．

授業設計にあたっては当然，子ども自らが中線と辺の間に成り立つ関係に気付くような場を仕組まねばならず，モデルによれば［〈帰納〉〈類比〉〈分類〉による推測・発見］の活動を期待するべきである．もし〈帰納〉又は〈分類〉によって関係を推測するのであれば，いくつかの特殊な場面が出てくるような活動を期待するべきであるが，〈類比〉によって関係を推測するのであればこの限りではない．従って，教師としては例えば以下のような場面を設定することが考えられる．

下の図で，MはBCの中点になっています．
AB=8，AC＝6，BC=12のとき，AMの長さはいくらになるでしょうか．



このような問題に学習者が取り組むとき，余弦定理が既習事項であるため，以下のように解決することが期待される．



△ABCにおいて余弦定理より

$$\cos\angle B = \frac{12^2+8^2-6^2}{2\cdot 12\cdot 8} = \frac{43}{48}$$

より，△ABMにおいて余弦定理より

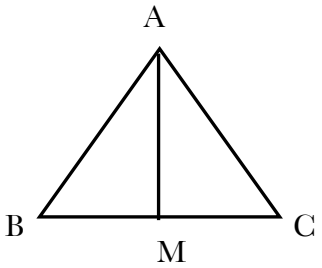
$$AM^2 = 8^2+6^2-2\cdot 8\cdot 6\cdot\frac{43}{48} = 14$$

$$AM = \sqrt{14}$$

教師の数値設定によって「AB＝8，AC＝6，BM＝6，AM＝$\sqrt{14}$」という長さの関係に着目するよう[支援]し，$8^2+6^2=100$，$6^2+\sqrt{14}^2=50$ という数の間に成り立つ〈類比〉の関係に気付きやすくすし，中線定理 $AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$ を推測する場を設計することが考えられる．

一度推測してしまいさえすれば，自らでいくつかの場面を構成し，〈帰納〉によっていくつかの場面でそれを確かめる活動も期待できるだろう．

さて，問題場面を設定した後に教師は教材研究を行うわけであるが，モデルより《有力に特別な特殊》，《極端に特別な特殊》，《生成的な例》を考えられないだろうか，という観点で教材研究を行うことが出来る．その結果教師は，△ABCがAB=ACである二等辺三角形の場面を《有力に特別な特殊》として見なす事が考えられる[7]．なぜなら，AB=ACである二等辺三角形において $AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$ を論証しようとするのであれば，



△ABMとACMにおいて，AM⊥BCより三平方の定理から

$AB^2 = BM^2 + AM^2$

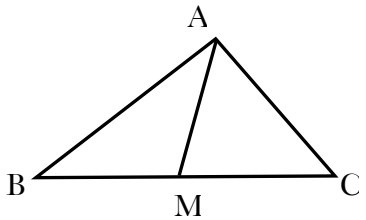
$AC^2 = CM^2 + AM^2$

より，BM=CMであることから

$AB^2 + AC^2 = 2BM^2 + 2AM^2$

$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

という解決になり，この一連の手順は比較的容易に論証可能だからである．この手順は，以下に示す中線定理を論証する手順とほぼ一致しており，三平方の定理（という余弦定理の特殊な場合）を，（より一般である）余弦定理に置き換えればよい．



△ABMにおいて，∠AMB＝θとおくと余弦定理より

$AB^2 = BM^2 + AM^2 - 2BM \cdot AM \cdot \cos\theta$ ・・・①

△AMCにおいて同様に

$AC^2 = CM^2 + AM^2 - 2CM \cdot AM \cdot \cos(180 - \theta)$

ここで，BM=CM，$\cos\theta = \cos(180 - \theta)$ より

$AC^2 = BM^2 + AM^2 - 2BM \cdot AM \cdot \cos\theta$ ・・・②

以上より①＋②から

$AB^2 + AC^2 = 2BM^2 + 2AM^2$

$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

その結果，［一般の命題を論証する］活動を設計するべきであることがモデルより示唆されているが，論証の手順で迷っている学習者には二等辺三角形という《有力に特別な特殊》を構成するよう《支援》し，論証が達成されるよう学習を設計することが出来る．

以上によって“特殊から一般へ”という一般化が達成されたわけであるが，ここでモデルより［更なる一般化］を行うべきであることが示唆される．そのため，教師は教材研究によって例えばMがBCの中点ではない場合（スチュワートの定理）へと一般化するような事が考えられるだろう．

このような場面が教師によって運用された本研究のモデルによる授業設計の典型的な場面であり，“特殊から一般へ”と志向する学習がどのようにあるべきかを示す，1つの場合でもある．

7.6.2 小学校1年生：くりあがりのあるたしざん

小学校1年生の学習者が繰り上がりのある足し算を初めて学習する場面として，「7＋8＝」という計算に取り組む場面を想定する．こうした場面は通常，一般化を志向する教授学習であると捉えられる事はあまり無いが，学習者が加数又は被加数分解によって「7＋8＝15」という解決を達成したならば，「8＋9＝」などの他の繰り上がりのある足し算も解決できるようになることを教師は期待する．従って，このような場面も一般化を志向する教授学習として捉えられるべきである．

実際の教授学習において，［特殊についての推理］では様々な活動が期待される．おはじき等を基に具体的操作で解決したり，そこから加数分解・被加数分解による解決を導く活動が期待され，モデルを用いた設計を行ったとしても，こうした設計は大きく変わらないと考えられる．

しかしモデルによれば，次に［〈帰納〉〈類比〉〈分類〉による推測・発見］の活動を行うことが要請される．従って，教師からは「他の計算だとどうなるだろう？」といった［支援］を設計しなければならないことがモデルより示唆される．［支援］を受けた学習者は「8＋9＝

17」などの計算も加数分解・被加数分解を用いて解決出来る事を発見することが期待される．

モデルからは更に，［一般の命題を論証する］ことが要請される．この段階の学習者に対しては，帰納によって他の計算でも使えそうだ（使える）という説明であっても十分な論証であるため，他の様々な計算に取り組むことで論証する活動が期待される．加えて，［更なる一般化］を志向することで，繰り上がりのある20以上の足し算などへ一般化することも期待されるだろう．

こうした活動は勿論これまでも行われてきていると考えられるが，一般化という観点からそれを特徴付けることで，他の場合で確かめるという事を重視したり，［更なる一般化］によってどんどん新しい概念を構成していくようになることが期待される．

このように，一般化を志向する教授学習であるとあまり見なされない場面は本事例に限らず多く見られるが，それらは特殊と見なす事で一般化可能である．従って，モデルを用いて授業設計をすることで授業が改善され，子どもたちが“《真理に対する責任の担い手》”（友定他,2006,p.6）として成長していくと期待される．

第7章の要約及び注

本章では，これまでの議論を基に一般化を志向する教授学習のモデルを構築した．

そのために，モデルの本性についてHesse（1966）と小山（1989）を中心に考察した結果，モデルとはある種の同型性に基いて表現されていて，且つ理論の全てを成り立たせるものであるということが明らかになった．従って，これらの条件を満たしていれば1つの事象に対するモデルが複数存在してもよく，その代表例が理解研究における理解の過程モデルと様相モデル（小山,2010）である．こうしたモデルの違いは，モデルの特性の違いとなって表れる事が認められた．

こうした観点を基にDörfler（1991）と岩崎（2007）の“一般化モデル”を検討すると，どちらも活動が上から下へと流れる流れ図の特性を持っており，これは両者の基本的な関心が一般化の認識過程にあるからだということが認められた．

一方，本研究の目的は一般化を志向する教授学習の改善であるため，教授学的に見たときに必要なのは “個人差に応じた指導(解決予想)の根拠は,学習者の可能な解決パターンにあるの ではなく，教授上いかなる指導(支援)が要請されるかにある．”（友定他,2006,p.5）ことを踏まえた活動の系列が要請される．従って“一般化モデル”とは異なるモデルが要請されるため，一般化を志向する教授学習場面として典型的な円の分割事例と，2〜6章の議論を基に本研究のモデルを提示した．

本研究のモデルの実際を検証した結果，“一般化モデル”と整合性を有していることが認められ，教師が授業を設計し，教材研究をする際の指針となる役割を果すことが認められた．これにより，本研究のモデルはいわば，一般化分岐モデルと実際の授業を橋渡しするような役割を果すことが期待される．

[1] ここでの“完全”はGödelの完全性定理の意味での“完全”，即ち恒真な命題がすべてその理論から形式的に導出出来るという意味（田中,2006,p.9）であり，同じGödelの理論でも不完全性定理の意味での“完全”とは異なる．尚，後者の場合は，“完全”な理論にそこから導出できない論理式を1つでも加えると矛盾するという意味．（ibid,p.9）これらはHilbertによる定義である．

[2] 小山氏はGentner氏のモデルの定義（Gentner,1983）を基にこの定義を述べている．

[3] analogyという言葉は“類比”と訳すべきであるが，本研究において“類比”はPolyaに従い異なる文脈で用いていること，Hesse（1966）を翻訳した高田紀世志氏がアナロジーという訳語を割り振っている点を考慮し，本研究はモデルの対応関係の意味でanalogyという言葉が用いられているならば，アナロジーと訳す

[4] 気体分子は常温で乱雑に飛び回っているという理論

[5] この論争は既にデュエム学派の勝利に終わったという見方もあるが，本研究が参考にするHesse氏はまだ終わっていないという見解に立っている

[6] Dörflerの課題意識には実際の授業での問題点が含まれているが，自身のモデルを多くの事例で検証する際，授業ではなくある（理想的な）個人の学習を事例としている．これは氏の目的意識の他に，“…Dörflerのおかれた研究環境が理論を容易に実践・実証できない教育風土であることを考え合わせれば，氏の考察は理論的にならざるをえない．”（岩崎，2007，p.10）ということも理由の1つだと考えられる．

[7] ⟨極端に特別な特殊⟩として位置付けることも可能であるが，ここでは最初に設定した問題との兼ね合い上，そのような位置付けを教師が行わないという前提に立つ．

第8章：研究の結論

8.1　本研究の結論と意義

8.2　今後に残された課題

本章では，本研究の結論を述べる．8.1においてはこれまでの議論を振り返りながら本研究の結論を述べ，その意義について述べる．8.2においては，今後に残された課題を述べる．

8.1 本研究の結論と意義

本研究は問題解決学習において一般化を志向する教授学習の問題点は何かを明らかにするため，教科書の事例を検討し，そこから3つの研究課題を抽出した.

・研究課題1

一般化を志向する教授学習において，どのように概念を構成していくか

・研究課題2

一般化を志向する教授学習において，どのように捨象する差異性とその程度を決定していくか

・研究課題3

一般化を志向する教授学習において，互いに異なる特殊から一般の命題が導かれるということを，どのように学習機会として取り入れるか.

また，「円の分割事例」という一般化を志向する教授学習のモデルケースを事例とし，先行研究の検討を行った結果，教授学的三角形における『子ども』の推測や発見，『教師』と『教材』の役割がこれまでの研究の問いの対象となっていないことが認められた．そこで，事例から研究課題にアプローチするための小課題として，

小課題1：一般化を志向する教授学習過程において，推測や発見に結びつく活動はどう位置付けられるか？

小課題2：教師からの問いかけが，学習者が一般化へ向かう契機としてはたらくのは，どのような場合であるか？

小課題3：決定的な役割を果たす特殊はどのように構成され，どう位置付けられるか？

を導いた.

小課題1をBeth（Beth and Piaget,1966）とPolya（1945,1954a&1954b）から検討を行い，帰納・類比・分類という活動による《探求》が一般

化にとって重要であることが認められた．小課題2についてはSierpinska（2005）から検討を行い，教師が「支援」の手段として用いるコミュニケーションによって発生する社会認知的コンフリクトと，その社交的な機能によって一般化が促進されることが認められた．小課題3についてはPolya（1945,1954a&1954b）と宮崎（1991）から検討を行い，“生成的な例”を含めた“有力に特別な特殊”と“極端に特別な特殊”が一般化を促進することが認められた．

これにより，研究課題1に対して帰納・類比・分類を通して構成するべきであり，コミュニケーションを通して構成したり，特別な教材について推理することで構成すべきであると結論付けられた．研究課題2に対しては，分類を通して捨象する差異性とその程度を決定していくべきであると結論づけられた．研究課題3に対しては，帰納・類比・分類によって推測し，後にそれらを一般の概念に基づき統合するための学習機会として取り入れるべきであり，“生成的な例”がそれを助けることも出来ると結論付けられた．

そして，こうした本研究の理論を全て成立させるモデルとして，図8–1で示した一般化を志向する教授学習モデルを構築した．このモデルこそが本研究の結論である．

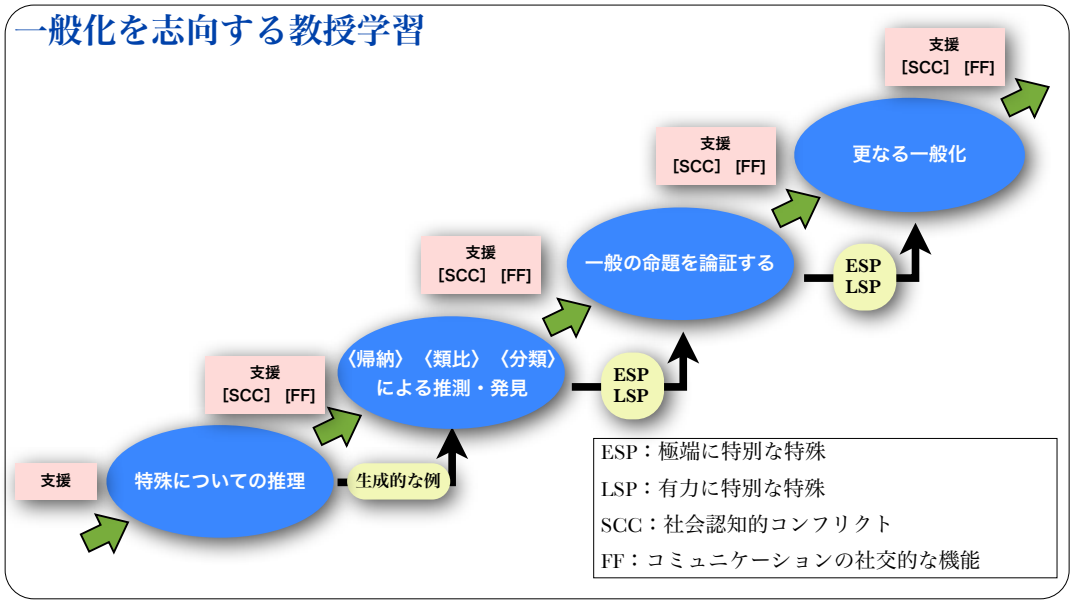


図8–1：一般化を志向する教授学習モデル

本研究のモデルは，教師が授業を設計していくに際して，その活動の設計や，教材研究の手がかりとすることが出来るモデルであり，岩崎（2007）の一般化分岐モデルと整合性を有している．そのため， 本研究のモデルはいわば，教師が実際の授業を設計しようとするとき，一般化分岐モデルと実際の授業設計との橋渡しをする役割を果たしていることが認められたが，これによる意義を次に述べる．

算数・数学教育の理論研究は非常に重要であり，その発展のために必要不可欠であるが，何らかの形で実際の教授学習の改善へと繋がらなくてはその意味が無い．勿論，このことは即時に教授学習の場へと成果が発揮される（と思われる）研究をするべきであると主張している訳ではないが，優れた理論をどのように実際の授業へと接続するかについては，未だそれが不十分であることが指摘されている．

顕著な例の1つが，本研究の2章・3章で検討したように，Dörfler（1991）が一般化という認識の過程を明らかにしたという優れた成果をあげ，それからおよそ20年が経過しているにも関わらず，我が国の教科書がその意図と裏腹に一般化を扱っていなかったことであろう．

こうした現状を改善するため，様々な取り組みが研究者と現場の教職員によって試みられているが，本研究の成果はその一助となることで，一般化を志向する教授学習場面を改善していく事が出来るという意義がある．

7.6.3で示したように，通常一般化を志向しているとあまり捉えられないような学習であっても，実際には一般化を志向しているか又は一般化を志向する事が可能な学習が非常に多い．そのため，本研究によってほとんど全ての教授学習場面を改善するということにつながると期待される．

8.2 今後に残された課題

本研究において重要な役割を果たすと考えられる特別な特殊について，それをどのように構成するかということについては，検討が十分に行われていない．学習中に教師が投げ入れることも考えられない訳ではないが，学習として質の高いものを目指すためには，やはり子ども達が自らこれらの特殊を構成できるようになることが望ましい．しかし，そのような子どもばかりであるとは限らないため，そこにどのような支援が要請されるのか，そこに至るための障害は何か，といった点が今後検討されなくてはならないだろう．

また，一般化の質や対象が異なる場合に学習者に与える影響について，本研究自身は殆ど何も触れていない．そのため，今後検討されなくてはならないといえる．

参考・引用文献

Berkley.G,（1710）,人知原理論（大槻晴彦 訳）,岩波書店

Beth.E and Piaget,J（1966）[W.Mays,Trans.] , *Mathematical Epistemology and Psychology* , D.Reidelpublishing company

Doise.W & Mugny.G,（1981）, Le développement social de l'intelligence, Paris: Inter ditions

Dörfler.W, （1991）, "Forms and means of generalization in Mathematics", In Bishop.A（ed.） *Mathematical Knowledge : Its Growth Through Teaching*,pp. 63-85 , Kluwer Academic Publishers

Descartes.R,（1628）, 精神指導の規則（大出晁･有働勤吉 共訳）, デカルト著作集4, 白水社

Descartes.R,（1641）, 省察（所雄章 訳）, デカルト著作集2, 白水社

Hadamard,J,（1945）, 数学における発明の心理, （伏見康治, 大塚益比古, 尾崎辰之助訳）, みすず書房

Hesse.M,（1966）,科学・モデル・アナロジー,（高田紀代志訳）,培風館

Kant.I,（1781a）, 純粋理性批判（上）（原佑訳）, カント全集4, 理想社

Kant.I,（1781b）, 純粋理性批判（中）（原佑訳）, カント全集5, 理想社

Kant.I,（1781c）, 純粋理性批判（下）（原佑訳）, カント全集6, 理想社

Kant.I,（1783）, プロレゴメナ（湯本和男訳）, カント全集6, 理想社

Locke,J,（1689）, 人間知性論（大槻晴彦訳）,中央公論社

Poincaré.H, （1902）, 科学と仮説（河野伊三郎訳）, 岩波書店

Pogorelov.A,（1968）, 幾何学の基礎, （塚田高夫・本庄昭三訳）, 内田老鶴圃

Piaget,J, （1970）, 発生的認識論 科学的知識の発達心理学（芳賀純訳）, 評論社

Piaget,J, （1974）, 矛盾の研究（芳賀純他訳）, 三和書房

Polya.G, （1945）, いかにして問題をとくか, （垣内賢信訳）, 丸善株式会社

Polya.G, （1954a）, 数学における発見はいかになされるか1「帰納と類比」（柴垣和三訳）, 丸善株式会社

Polya.G, （1954b）, 数学における発見はいかになされるか2「発見的推論 そのパターン」,（柴垣和三訳）, 丸善株式会社

Sfard.A, （2001）,"There is More to Discourse than Meets the Ears:Learning from mathematical communication things that we have not known before.",*Educational Studies in Mathematics*, 46（1/3）, 13-57

Sierpinska.A（2005）,"Discoursing Mathematics Away", in J. Kilpatrick, C. Hoyles, & O.Skovsmose （Eds.）,*Mathematics education library: Vol. 37. Meaning in mathematics education*, （pp. 205–230）, New York NY:Springer.

伊藤説朗, （1993）, 数学教育における構成的方法に関する研究（上）, 明治図書出版

岩崎秀樹, （2007）, 数学教育学の成立と展望, ミネルヴァ書房

小山正孝,（1989）,数学教育におけるモデル論(I) —モデルの類型と役割を中心にして—,西日本数学教育学会誌『数学教育学研究紀要』,Vol. 15,pp.55-60

小山正孝,（1990）,数学教育におけるモデル論(II) —モデル構成・使用の視座からの思考過程の分析—,西日本数学教育学会誌『数学教育学研究紀要』,Vol.16, pp.11-18

小山正孝, （2010）, 算数教育における数学的理解の過程モデルの研究, 聖文新社

田中一之,（2006）, ゲーデルと20世紀の論理学② 完全性定理とモデル理論, 培風館

友定章子・姫田恭江・溝口達也,（2006）,授業設計における一般化と拡張を志向した算数的活動の構成の様相, 鳥取大学数学教育研究, Vol.9 ,

No1, pp.1-10

中島健三(1981)，算数･数学教育と数学的な考え方その進展のための考察，金子書房

早田透，（2009）, 数学教育における一般化に関する研究, 鳥取大学数学教育研究,Vol.12 , No3,pp.1-8

早田透，（2010）, 一般化をはかる数学学習を捉える基本的枠組みの構築 –Bethの数学的思考の相と，Polyaの一般化に注目して–, 鳥取大学数学教育研究, Vol.13,No2, pp1-8

藤井斉亮,（1986a）, 理解と認知的コンフリクトについての一考察, 数学教育学論究, Vol45･46,pp.24-28

藤井斉亮,（1986b）,数学の理解過程における認知的コンフリクトの役割, 数学教育論文発表会発表要項, Vol.19,pp.65-68

溝口達也,（2004）,学習指導における子どものコンセプションの変容に関する研究,鳥取大学教育地域科学部教育実践総合センター研究年報, 第13号, pp.31-41,

溝口達也,（2007）,算数・数学学習指導論,鳥取大学数学教育学研究室

溝口達也・松本寿子,（2008）,小学校2年生の図的代数における一般化を志向した授業の設計：大学と附属小学校の連携による協同的授業設計とその実践, 鳥取大学地域学部紀要 地域学論集, 第5巻, 第2号, pp. 129-139

宮崎樹夫,（1991）,推測したことの妥当性を示すための説明における水準の移行：生成的な例による説明から推論による特定な説明への移行, 数学教育論文発表解論文集, Vol.24, pp.191-196

宮崎樹夫,（1995）,学校数学における証明に関する研究—証明に至る段階に説明の水準を設定することを通して—,筑波大学学位論文

謝辞

筆者が学校という場から離れて4年が経過し，大した理由もなく数学の教師になろうと思い立ったのは，もう7年前の事になります．自らの意識がはっきり変わったのは大学2年生のとき，指導教官である溝口達也先生の授業で，鳥取大学附属中学校で数学の授業見学をしたときでした．そこで展開されていた筆者の先入観とは全く異なる素晴らしい授業，自由で豊かな発想をする子ども達･･･その光景が，心象風景が，修士論文を書くに到るまでの原動力になったことは疑いようもありません．

そうした機会を作ってくださったのみならず，6年間に渡り手厚く御指導を頂いた溝口達也先生には心より感謝を述べたいと思います．溝口先生におかれましては，修士論文に直接関わる御指導ー論文の読み方，英語論文の読み方，数学・数学教育・認識論の基礎などーを頂いたのみならず，社会に出て行く1個人としての人間性に関する御指導を頂きました．未熟な筆者を見捨てず，常により上を目指して全力で御指導頂いた日々のは，教育者とはかくあるべきということをいかなる本よりも鮮明に筆者に伝えて頂いた日々でもあったと思います．

また，日々数学教育について学ぶ中で矢部敏昭先生に頂いた御指導は，その1つ1つが筆者の最も克服するべき課題を明確にするものであり，そこから頂いた学びは測り知ることが出来ません．子どもの力と可能性を信じ，1つ1つの活動を価値付ける･･･これを薄っぺらなものではなく，真に迫るものとして筆者自らの信念として抱くことができたのは，ひとえに矢部先生のお陰に他なりません．

こうした心より尊敬出来る素晴らしい先生方に直接御指導を頂き，学ぶ事が出来たのは，筆者の人生において最も幸福なことでした．

更にこうした環境を支えてくれた先輩方，そして後輩の皆さんにはこの場を借りてお礼を申し上げたいと思います．尾崎正和さんには，数学教育研究室学部生が筆者1人であった時代特に，折りにつけ気にかけて頂きました．そのことで頂いた情報や安堵感に支えられました．

田中光一さんには研究室の1つ上として，時に筆者の論文に御指摘を頂くと共に，筆者個人の未熟な言動を戒めていただきました．前田静香さん，山中法子さんは2年間に渡り筆者への厚い気遣いを頂き，直接的・間接的に支えて頂きました．池田和彌さんは1年間を通して迷惑をおかけしていたにも関わらず，よくして頂きました．学部生である小村亮さん，柏木美穂さん，日野治樹さん，安井沙笑さん，尾崎いづみさん，玉川奈緒さん，朝岡卓也さん，谷秋沙さんには，合宿等で尽力して頂くなど，度々筆者を支えて下さりました．不出来な先輩（後輩）であったかと思いますが，誠にありがとうございました．

また，鳥取大学附属中学校の神波徹先生，徳高雄一郎先生，山本靖先生，そして多くの生徒達には大変お世話になりました．神波徹先生におかれましては特に教育実習で，徳高雄一郎先生と山本靖先生におかれましては特に筆者の非常勤講師としての日々で厚いご支援と，時に厳しい御指導を頂きました．先生方が日々熱心に授業に取り組んでおられるお姿と，そこで育った素晴らしい生徒達の姿無しには，本論文を書くことは不可能でした．

そして，筆者を経済的・心的に支えてくれた家族，友人といった身近な人々にこの場を借りてお礼を述べたいと思います．こうした「身近な人々」には，残念ながら亡くなってしまった叔母・叔父・友人・祖父・2匹の愛犬も含まれています．筆者が一番どん底であった時期にいきなり訪ねてきて「がんばれよ」と気楽に言ってくれた友人，感情を表に出さないまでも常に気にかけてくれていた祖父，様々な事を教えてくれた叔母・叔父，帰りの遅い筆者を常に出迎えてくれた愛犬達･･･．彼等の残してくれた精神がこの論文に息づいている事を思えば，ただ感謝の意を示す他にありません．

最後になりますが，進路の安定しない筆者に対し，この時世にも関わらず経済的な面を含めて一切合切を自由にさせてくれた両親には特に，この場を借りて厚く感謝を述べたいと思います．

本論文は筆者の初めての論文であり，非常に拙いものでは御座いますが，ここに書ききれない方を含め，多くの方々の支えと温かいご支援があって，ようやく形になった論文です．本当にありがとうございました．

2011年1月
地域教育専攻院生室にて

鳥取大学数学教育研究　　**ISSN 1881–6134**

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

編集委員

矢部敏昭　鳥取大学数学教育学研究室　tsyabe@rstu.jp

溝口達也　鳥取大学数学教育学研究室　mizoguci@rstu.jp

（投稿原稿の内容に応じて，外部編集委員を招聘することがあります）

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。

- 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
- 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
- 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
- その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/