

ISSN 1881-6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education



<http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu>

中学生の無限の認識に関する研究

- 直線の連続性に着目して -

日野 治樹 *Haruki Hino*

vol.13, no.7

Mar. 2011

目次

第 1 章	本研究の目的と方法	1
1.1	本研究の動機	2
1.2	本研究の目的	3
1.3	本研究の方法	4
第 2 章	数学における連続性の定義	5
2.1	無限論と連続論の歴史	6
2.2	実数の連続性の基本定理	11
2.3	連続の定義	14
2.4	「直線の連続性」	14
	第 2 章の要約	15
	第 2 章の主要引用・参考文献	16
第 3 章	E.Fischbein の研究の検討	17
3.1	先行研究との関係性	18
3.2	直線の連続性の観点から見た検討	18
3.2.1	無限分割可能性の調査問題及び結果の検討	18
3.2.2	超限基数の調査問題及び結果の検討	21
3.2.3	極限の調査問題及び結果の検討	22
3.3	検討した結果	23
	第 3 章の要約	24
	第 3 章の主要引用・参考文献	25
第 4 章	直線のグラフに対する生徒の認識	26
4.1	離散的表現と連続的表現の統合	27
4.2	直線と点集合の関係とその認識	29
4.3	「直線の連続性」の学習指導の価値	29
第 5 章	本研究の結論	30
5.1	本研究の結論	31
5.2	残された課題	33
	主要引用・参考文献	34
	資料 「THE INTUITION OF INFINITY」(和訳)	35
	謝辞	57

第 1 章

本研究の目的と方法

- 1.1 本研究の動機
- 1.2 本研究の目的
- 1.3 本研究の方法

本章では，研究の目的と方法について述べる．

1.1 では，本研究の動機を述べる．1.2 では本研究の目的とその目的を達成するための課題を述べ，1.3 ではその課題の解決の方法を述べる．

第 1 章 本研究の目的と方法

1.1 本研究の動機

現在の日本の数学教育において、中学校までの算数・数学教育では、無限の概念を直接指導していない。無限の概念は、西欧世界の思想家たちを悩ませてきた概念でもあり、非常に曖昧なものである。そのため、数学教育では、直接授業で無限の概念に触れることはない。むしろ、無限の概念に触れることを今まで避けてきたかのようにも思える。

筆者は、中学校 2 年生の一次関数の授業を観察したときに、表の値を座標平面上にプロットし、グラフを描くという場面で、とある生徒の「どうして点を直線で結ぶの？」という疑問に対して、教師の「たくさん点をプロットしていくと直線が描けそうだよ」という支援のやりとりに興味を持ったのが本研究の主な動機である。中学校の関数の授業では学習指導要領からも無限に触れることはないが、実際、無限の概念に疑問を持つ子どももいるということがいえる。そこで筆者は、無限に対する子どもたちの実態を明らかにした上で、無限の概念を学習指導しなければならない理由を明らかにしたい。

1.2 本研究の目的

本研究では、「直線の連続性」に着目して、中学生の無限に対する認識を把握し、無限の概念を学習指導しなければならない理由を明らかにすることを目的とする。

学校数学で数学における「直線の連続性」を直接指導することは不可能と言える。しかし、学校数学で「直線の連続性」に触れる以上、数学における「連続（性）」とはどのように定義されるものなのかを知る必要がある。したがって、次の研究課題が要請される。

【研究課題 I】

数学において、「連続（性）」とは何であるか

現在の学校数学で避けられている「直線の連続性」の概念を指導するのであれば、子どもたちが現在、「直線の連続性」に対してどのような認識を有しているのかを把握する必要がある。また、関数分野における表からグラフへの移行に対する認識も把握する必要がある。したがって、次の研究課題が要請される。

【研究課題 II】

「直線のグラフ」に関して、生徒は、どのような認識を有しているか

【研究課題 II-a】

表にないグラフ上の点は何を意味し生徒はどう認識しているか

【研究課題 II-b】

直線のグラフを任意の2点で描くことと直線のグラフを点集合と見て描くことにはどのような生徒の認識の違いがあるか

研究課題 I 及び II を踏まえて、次の研究課題が要請される。

【研究課題 III】

「直線の連続性」を学習指導しなければならないのはなぜか

以上の5つの研究課題を解決し、本研究の目的を達成する。

1.3 本研究の方法

本研究は「直線の連続性」に着目して、中学生の無限に対する認識を把握し、無限の概念が介入した問題に対していかなる学習指導をすべきか明らかにすることが目的である。

初めに、研究課題Ⅰを解決するために、第2章ではA.W.Moore(1993)の「THE INFINITE」及び下村寅太郎(1979)の「無限論の形成と構造」から無限、特に連続性における数学史を振り返り、連続の定義をする。また、高木貞治(1983)の「解析概論」を主な参考文献として、実数の連続性の4つの基本定理を論理記号を用いて記述し、それぞれの定理が同値な関係にあることを示すために数学的に証明し、数学における「直線の連続性」を明らかにする。

次に、研究課題Ⅱ及びⅡ-a、Ⅱ-bを解決するために、第3章ではE.Fischbein(1979)の「THE INTUITION OF INFINITY」で議論されている無限に対する直観、特に、線分の無限分割に対する直観による調査結果から「直線の連続性」に対する児童生徒の認識の実態を明らかにする。また、第4章では表からグラフを描く操作の移行における問題点を「直線の連続性」の観点から明らかにする。

最後に、研究課題Ⅲを解決するために、研究課題Ⅰ及びⅡを踏まえて、「直線の連続性」の学習指導の必要性、むしろ学習指導しなければならない理由は何かを明らかにする。

第 2 章

数学における連続（性）の定義

- 2.1 無限論と連続論の歴史
- 2.2 実数の連続性の基本定理
- 2.3 連続の定義
- 2.4 「直線の連続性」

本章では，文献により無限，特に連続性における数学史を学び，数学における「直線の連続性」とはいかなるものかを明らかにすることを目的とする．

2.1 では，「THE INFINITE」(A.W.Moore,1993.)及び「無限論の形成と構造」(下村寅太郎,1979.)から無限論，特に連続性における数学史を大雑把にまとめた．2.2 では，「解析概論」(高木貞治,1983.)を主な参考文献として，実数の連続性の 4 つの基本定理を論理記号を用いて記述し，それぞれの定理が同値な関係にあることを示すために数学的に証明する．2.3 では，数学における「連続（性）」の定義をする．2.4 では，実数の連続性をモデル化したものが「直線の連続性」であることから「直線の連続性」とは何かを明らかにする．

第2章 数学における連続性の定義

2.1 無限論と連続論の歴史

無限の概念は古代ギリシャを中心に多くの思想家や数学者が困難を感じてきた。そして、現代の数学者にとっても大きな課題である。溝口(2010)は、“過去の数学者のつまづきは、今日の子どもたちの算数・数学学習においても困難であり、子どもたちが実際にそのような困難を抱えるところの同じ数学的概念は、何百年も前の数学者をしてその最終的な形式を作り出せた、という励ましとなるものです”¹⁾と述べている。したがって、無限の概念を過去の数学者たちが、どのような困難を感じ、どのように乗り越えてきたかを知ること、算数・数学学習における困難を乗り越える手掛りを掴むことができる。そこで、無限と連続の歴史を知るために、「THE INFINITE」(A.W.Moore,1993.)及び「無限論の形成と構造」(下村寅太郎,1979.)を参考文献とする。ムーアの「THE INFINITE」は、無限を理解するため、すなわち西欧の哲学者たちが、2千5百年ほど前に初めて無限に注意を向けて以来、無限について何を思索してきたかを理解するために最適であると判断した。また、下村寅太郎の「無限論の形成と構造」は、無限論の歴史だけでなく、無限の数学的形成について、特に連続体について多く書かれているため、無限を理解し、無限を知るためにこの2冊を参考文献として選択した。

無限と連続は不離なる関係にあり、古代ギリシャを中心に多くの思想家を悩ませてきた課題であった。彼らの無限論を振り返り連続の歴史を見ていく。初めに、近世と古代ギリシャの正反対の無限の認識について記する。

“近世は無限を有限以上のものとして理解する。実際に近世のわれわれは、実在的にも価値的にも無限を有限以上のものと解することに慣れていく。むしろこれを自明としている。しかしこれは近世的な一つの理解であって、現に古代においては、ギリシャ人は逆に無限を有限以下のものとして理解した。彼らにおいては無限は $\alpha\pi\epsilon\rho\nu$ として、限定されていないもの、限界のないものであり、したがって形態のないもの、「形相」すなわち本質のないものである。一般に非存在であり、存在以下のものである。しかし近世では、逆に、有限なるもの、形のあるものは、限界のあるもの、限定されたものであり、無限者は限定されず、限定するものとして、有限以上、存在以上のものと解される。

文献学者コーンフォードによれば、ギリシャ語において $\alpha\pi\epsilon\rho\nu$ なる概念は必ずしも無限の延長を意味するものでなく、しばしば且つ特に円形または球形に関して用いられている。すなわち円や球の周辺が初めも終わりもなく、また或る部分を他の部分から区分する境界を有しない故に、これを無限と言う。この「無限」の概念が「空虚」($\kappa\epsilon\nu\nu\omicron\nu$)と結合して、無限の延長をもった空間が初めて考えられるようになったのは、デモクリトスにおいてであり、これはギリシ

ヤにおいてはまさしく「革命的な教説」であったと言われる。しかし問題はその場合の無限の意味にある。その無限ははたして単に「甚だ多い」という意味での「無数」に止まり、真に無限なる一有限の超越(transfinit)としての無限を意味するものではない。甚大は未だ無限大ではない。永遠は単に甚だ長き時間ではない。しかしまさにこのことの自覚において初めて積極的な無限の概念が成立し得るのであり、これなくしては積極的な無限概念は確立されない。古代にはかくの如き積極的な無限概念は成立しなかった。むしろ古代においては、無限は単に不定的無限定的な概念の故に、数学者はこれを積極的に排除あるいは回避したというべきであろう。”²⁾

現代においても無限という言葉から無限大、限りなく大きいものなどの言葉が発想されるであろう。連続性については 2.3 で詳しく述べるが無限小の概念から導かれるものである。すなわち、古代ギリシャでは既に連続性の概念が構築され始めていたと考えられる。そして、アリストテレスは無限に関して初めて大きな貢献をした。その無限の定義は、分割による定義すなわち第 3 章で考察する連続性の概念と親密な関係にある無限分割可能性の概念を初めて定義したのものである。次に、アリストテレスの無限論について記する。

“アリストテレスは、無限を、限界や境界を持たないものとしてではなく、通過できないもの(adiexitetos)として定義したのであった。だが、これは、彼自身も自覚していたように、曖昧な定義である。我々は、物理的な何かが通過できないという場合ですら、他のことを意味することができる。その通過を完了できるとは思わないという意味にも(例えば、均整の取れた円形競技場のように)、それを通過するのが難しい、ないし不可能であるという意味にも(当てにならない川筋のように)、永遠に続くがゆえに通過することができないという意味にも(これが、我々の云う数学的無限である)解釈できる。そして、アリストテレスが意図していたのは、本質的には第三の意味合いである。このアリストテレス議論こそ、ギリシアの哲学的意識に、数学的無限が明晰に刻み込まれた瞬間なのである。

アリストテレスはまた、加算による無限と分割による無限との間にも区別を設けた(分割による無限において、通過できると云われるとすれば、後に続く分割が既に完了されていなければならない。したがって、この意味において、分割による無限も通過できない無限である)。

(中略)

究極の限界といったものは存在し得ないという一つの議論を出した。これは、有限物体は常に分割可能すなわち無限分割可能性を問う議論であり、有限物体の連続性を問う議論でもあるといえる。アリストテレスは、無限は、可能的には存在するが、現実的には存在しない。云い換えれば、あるものは可能的には無限でありうるが、

現実的には無限ではありえないとした。”³⁾

さらに、有限と無限の関係、すなわち無限が有限の否定により生成されることがアリストテレス的論理学から明らかにされた。

“無限の論理として本質的なことは、無限は有限と直接に比較し得ぬこと、したがって比較の論理学であった古代のアリストテレス的論理学は無限の論理学となり得ぬこと、むしろ無限の論理学は「比較不可能の論理学」であることである。アリストテレスの論理学は普遍による特殊の限定、包摂関係の論理として成立するが、無限と有限との間にはかくの如き普遍と特殊、類と種の関係は成立し得ない。無限の論理学は、全体は部分と等しく、最大と最小は一致するが如きパラドキシカルな論理学である。パラドキシカルであることが無限の本質である。無限が有限者と直接には比較不可能であること、無限が有限の延長でないことの自覚は、確かに無限の本質の第一の洞察であると言わねばならぬ。無限論はこの認識を地盤として初めて成立し得ることになる。

(中略)

無限は有限の延長ではない。有限の否定、超越において初めて成立する。”⁴⁾

しかし、実際に今日の科学では、無限大も無限小も現実的な事実としては存在しないことが、すなわち自然の中には無限大も無限小も存在しないことが承認されている。しかもそれは、認識能力の制限によるものでなく、事実として存在しないということである。次に、物理学の観点からの議論を記する。

“まず今日の物理学では、自然には無限小は存在しないことが主張される。これは換言すれば、最小者が存在することである。通常、自然現象や物質は連続的と解されている。連続的とは無限に可分的であること、すなわち最小者が存しないことである。しかるに今日の物理学においては、物質は原子の合成として理解される。すなわち物質は無限に可分的でなく分割可能性の限界がある。換言すれば最小者があり、したがって無限小はない。”⁵⁾

この物理学からの議論は、アリストテレスの現実的には有限だが可能的に無限であるという無限の解釈と相当するものである。しかし、この原子論史を否定したのは後で記述する微積分法の創始者の一人でもあるライプニッツである。

“原子論史の当初、原子の存在そのものがまず問題であったが、言うまでもなくこれは無限小の存在と相関的な問題である。およそ物体が延長性を本性とする限り、いかに小なる延長にも常により小な

る延長があり得る，したがって最小の延長はあり得ない．したがって物体の究極的要素としての「原子」（不可分者）なる概念自身矛盾である故にその存在が否定せられた．そこから真の不可分者は延長性をもてる物体界にはなく，内的精神的領にしか存在し得ないとせられ，ライブニッツによって物的な「原子」でなく心的な「单子」（究極的な「一」）が想定された．ここでは未だ必ずしも思惟し得ることと存在することとが区別されていないが，しかし無限の存在の個所を指向している。”⁶⁾

ライブニッツにより「单子」というものが定義され，無限は内的精神にしか存在し得ないとされていた．すなわち，“無限は **Reales** としてでなく，もっぱら **Ideales** としてのみ可能である．経験さるべきものとしてでなく，もっぱら思惟さるべきものとしてのみ存する。”⁷⁾ この無限の存在論は無限における本質的な問題と言える．そして，近代数学において直接に無限を取り扱う部門は言うまでもなく解析論であり，解析論における無限を規定する一般的方法は微積分法である．この微積分法の創始者はニュートンおよびライブニッツであり，二人とも極限の考え方をを用いている．また，アリストテレスによって議論された分割の議論もアナクサゴラスにより再度議論された．

“無限小の問題は存在の無限可分性を中心として成立した．アナクサゴラスの断片「小なるものの中に最小は存在しない，常により小なるものが存在する．何となれば，存在するものが無限に分割することによって存在しなくなることは不可能であるから．しかし大なるものの中にもまた常により大なるものが存在する…」はすでに批判的な無限小の概念を示している．

(中略)

これらの無限小論に対するギリシャ的解決はアリストテレスの「潜勢」・「現勢」の思想に尽きると言ってよいであろう．

アリストテレスにおいては，無限は運動の問題から導入される．運動の連続性，したがってまた無限可分性の問題との関係において取り扱われる．

(中略)

無限は常に存在を越えることを一動性を，その本質とするからである．無限を現実的なものとし，無限を無限性において捉えるには近世の力学的存在論の立場に立たねばならぬ．近世はまず無限を存在においてでなく運動において捉える．その論理的完成が「極限」概念として形成される．「極限」は何よりも生成的性格をもつ概念である．それ故ニュートンはこれを“fluxion”とした．

(中略)

微積分法の原理的問題は無限小の厳密な把握に存することは言うまでもない．無限小はいかに小なる量よりも小，すなわち有限でなくして，しかも零にあらざる性格をもつ．“ghosts of departed

quantities”と称された所以である。これに対するニュートンの「フラクション法」の根本思想はすべての量を無限小の要素の集合とせず、点、直線、平面の連続的運動によって産出されたものと解する。すなわちすべての量を連続的な変化によって生成されたものと解し、この変化の速度を通じて生成された量を考察しようとする。その産出が「フラクション」と呼ばれ、産出されたる量を「フリーエント」と名づけるのである。

(中略)

後にはこれを「根源的究極な比、すなわち極限」として明らかなる自覚をもってこれを極限概念によって基礎づけ、またこれをフラクションなる概念によって捉え、これが単独の量としてでなく常に比において、比の極限において理解されるべきことを主張している。

(中略)

ライプニッツの微分法の原理となっているものは、曲線を無限多边形と認め、いわゆる“*triangulum characteristicum*”，すなわち無限に接近せる二点の横座標と縦座標の差とその間に存する弧とから成る三角形—を考え、この三角形が切線影と縦座標と切線より成る三角形に相似であることから、後者の有限者の間に存する関係と前者の無限小の間に存する関係との間に対応性を認め、無限小を規定する一般的計算法および記号法を確立するにある。”⁸⁾

微積分法の創始者でもあるライプニッツは上記のように曲線を無限多边形と考えることで無限小の解析をしたが、これには現在の学校数学でも用いられるデカルト座標系が使われている。これを産出したのはまぎれもなくデカルトである。また同様に、フェルマも成し遂げていた。

しかし、このライプニッツの函数解析には欠点があった。それは函数を微分するには連続的であることが条件となるが、この議論は成されていなかったことである。この議論をして初めて連続的であっても微分不可能な函数の存在を明らかにしたのはワイヤアシュトラスであった。彼は 2.2 で述べる実数の連続性を確立した一人でもある。また、函数が連続的であることは「算術化」の第一人者コーシーにも成し遂げられた。コーシーにより算術化が成し遂げられたものの、極限の存在が未だ完全に数化されていなかった。これは、無理数の純粹に算術的規定が遂行されるによって初めて実現された。これは、やがてカントール、デデキント、ワイヤアシュトラスにより別々の方法で成し遂げられた。デデキントによる連続性の定理を本研究では連続性公理とするため 2.2 にて詳細を述べることにする。

2.2 実数の連続性の基本定理

2.1 から極限の数化がカントール、デデキント、ワイヤッシュトラスにより成し遂げられたと述べた。以下に、実数の連続性の基本定理を論理記号を用いて示し、それらの証明を記する。

【I】デデキントの定理

実数の切断は、下組と上組との境界として一つの数を確定する。

仮定： $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ に対して $\mathbb{R} = A \cup B$, $A \cap B = \phi$
 $(A \neq \phi, B \neq \phi)$

かつ

$a \in A, b \in B$ に対して $a < b$ のとき切断 (A, B) が生じる。

ならば

結論： (A, B) に対して $s \in \mathbb{R}$ が存在し, $a \leq s, b \geq s$ ($s = \sup A = \inf B$)
 のとき s がただ一つ定まる。

【II】ワイヤッシュトラスの定理

数の集合 S が上方[または下方]に有界ならば S の上限[または下限]が存在する。

仮定： $S \subset \mathbb{R}$, $a \geq b$ ($\forall b \in S, \exists a \in \mathbb{R}$) [$S \subset \mathbb{R}$, $a \leq b$ ($\forall b \in S, \exists a \in \mathbb{R}$)]

ならば

結論： $\alpha = \sup S$ [$\alpha = \inf S$]

証明：上界の定義 $S_{\uparrow} = \{ \exists a \in \mathbb{R} | a \geq b, \forall b \in S \}$

上限の定義 $\alpha' < b \leq \alpha$ ($\alpha = \sup S$) ($\forall b, \exists \alpha' \in S$) ($\alpha \in S_{\uparrow}$)

$a > b$ ($a \in S_{\uparrow}, b \in S$) よりデデキントの定理から S を A 組, S_{\uparrow} を B 組とすれば一つの切断が生じる。この切断によって確定される数を α とすれば

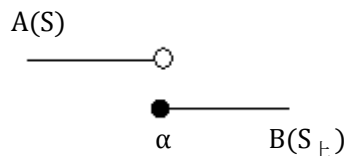


図 1 $\alpha \notin S$ ($\alpha = \min S_{\uparrow}$)

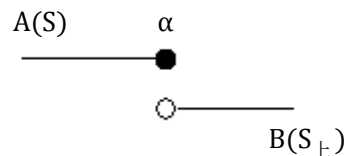


図 2 $\alpha \notin S_{\uparrow}$ ($\alpha = \max S$)

を満たす α が得られる。

ここで、 $b < c < \alpha$ となる中間値 c ($c \in \mathbb{R}$)をとると図 2 の条件において

$b < c$ より $c \in S_{\text{上}}$

$c < \alpha$ より $c \in S$

となり、上の 2 式が矛盾するため

$\alpha \neq \text{Max } S, \alpha = \min S_{\text{上}}$ すなわち $\alpha = \sup S$

下限の存在も同様な証明法で示されるため省略. (証明終)

【Ⅲ】有界な単調数列の収束

有界なる単調数列は収束する.

仮定： $S = \{a_n | \forall n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ ($\exists \alpha \in \mathbb{R}$) ($a_n \leq \alpha$) [$a_n \geq \alpha$]

ワイヤアシュトラスの定理から $\alpha = \sup S \in \mathbb{R}$ [$\alpha = \inf S \in \mathbb{R}$]

が存在する.

ならば

結論： $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n | \forall n \in \mathbb{N}\} = \alpha$ [$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n | \forall n \in \mathbb{N}\} = \alpha$]

証明： $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\alpha - \varepsilon < \alpha$ だから $\alpha - \varepsilon$ は S の上界でない.

そこで $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha - \varepsilon < a_{n_0}$ となる.

このとき単調増加性から $\forall n \geq n_0$ に対して

$\alpha - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq \alpha$ が成り立つ.

ゆえに、 $\alpha - \varepsilon < a_n$ だから $|\alpha - a_n| < \varepsilon$

よって、 $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n | \forall n \in \mathbb{N}\}$

$((\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |\alpha - a_n| < \varepsilon))$

単調減少の収束も同様な証明法で示されるため省略. (証明終)

【Ⅳ】区間縮小法

閉区間 $I_n = [a_n, b_n]$ ($n = 1, 2, \dots$) において、各区間 I_n がその前の区間 I_{n-1} に含まれ、 n が限りなく増すとき、区間 I_n の幅 $b_n - a_n$ が限りなく小さくなるとすれば、これらの各区間に共通なるただ一つの点が存在する.

仮定 1： $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $I_{n-1} \supset I_n$

仮定 2： $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$

ならば

結論：共通なる一点を α とすれば $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\alpha\}$ ($(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x \in I_n)(x = \alpha)$)

証明： $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $I_{n-1} \supset I_n$ なので $I_n = [a_n, b_n]$ から

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$ と書ける.

有界な単調数列の収束から $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ が存在する.

ここで, $\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_m$ だから $n \rightarrow \infty$ のとき $a \leq b_m$

したがって, $m \rightarrow \infty$ のとき $a \leq b$

また, 有界な単調数列の収束から

$$a = \sup\{a_n | \forall n \in \mathbb{N}\}, \quad b = \inf\{b_n | \forall n \in \mathbb{N}\}$$

だから $a_n \leq a \leq b \leq b_n$ すなわち $I_n \supset [a, b]$ を意味するから

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \supset [a, b] \neq \emptyset$$

$\forall c \in \bigcap_{n \rightarrow \infty} I_n$ をとると $a_n \leq c \leq b_n$ となる.

ゆえに, $0 \leq |a - c| \leq b_n - a_n$ となる.

そこで仮定 2 から $b_n - a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ より $a = c$ を得る.

以上から $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{a\} = \{\alpha\}$

(証明終)

【 I 】 デデキントの定理の証明

証明: 仮定から (A, B) を実数の切断とする.

$\forall a \in A, \forall b \in B$ をそれぞれ取り出し $[a, b]$ を I_0 とする.

中間値 $\frac{a+b}{2} \in A$ または $\frac{a+b}{2} \in B$ なので

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = b \text{ または } a_1 = a, \quad b_1 = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{ゆえに } b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b - a)$$

$$\text{同様にして } b_2 - a_2 = \frac{1}{4}(b - a)$$

これから

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots, \quad I_n = [a_n, b_n], \quad b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a)$$

区間縮小法から各区間共通なる一点を α とすれば

$\alpha \in A$ のとき $\alpha < \alpha' (\forall \alpha' \in \mathbb{R})$ をとれば

$b_n \rightarrow \alpha$ から $\alpha < b_n < \alpha'$ なる b_n が存在.

ゆえに $\alpha' \in B, \alpha \in A$

仮に, $\alpha' = \min B$ とするなら $b_n < \alpha'$ の b_n の存在に矛盾.

ゆえに $\alpha = \max A, \phi = \min B$

$\alpha \in B$ のとき $\alpha > \alpha' (\forall \alpha' \in \mathbb{R})$ をとれば

$a_n \rightarrow \alpha$ から $\alpha' < a_n < \alpha$ なる a_n が存在.

ゆえに $\alpha' \in A, \alpha \in B$

仮に, $\alpha' = \max B$ とするなら $\alpha' < a_n$ の a_n の存在に矛盾.

ゆえに $\alpha = \min B, \phi = \max A$

(証明終)

以上の 4 つの実数の連続性における定理を実数の連続性の基本定理と

する．また，デデキントの定理を連続性公理として 2.3 の連続の定義をする．

2.3 連続の定義

ある事物の集合に順序を課するとき，それが「連続」であると言われうるのは，その順序において，単にいかなる二つの要素の間にも第三の要素が見い出されると言うだけでなく，そこに何らの「断絶」も存在しないこと．

2.4 「直線の連続性」

直線は実数から実数への写像であるため，実数の連続性から直線上に実数全体の集合が敷き詰められると考えられる．すなわち，実数の連続性は直線の連続性として表すことができる．言い換えれば，直線は実数全体の集合のモデルである．

第 2 章の要約

第 2 章では、「THE INFINITE」(A.W.Moore,1993.)及び「無限論の形成と構造」(下村寅太郎,1979.)から無限論、特に連続性における数学史を大雑把にまとめた。また、数学における連続性、ここでは実数の連続性がどのように定義されているのかを実数の連続性の 4 つの基本定理より明らかにした。

無限の概念は古代ギリシャから多くの思想家や数学者を悩ませてきた概念であった。その中で、初めて無限論に対する大きな貢献を成し遂げたのは、アリストテレスであった。彼の無限論は以前から考えられていたものとは違い、無限を、限界や境界を持たないものとしてではなく通過できないもの(*adixitatos*)として定義した。また、アリストテレスは加算による無限だけでなく、分割による無限、すなわち無限小の概念も考慮していた。しかし、この無限小の概念は多くのパラドクスを生み出した。物理学の視点から言えば、自然物体における究極の限界は原子であるため、最小者は存在し、無限に分割することは現実的に不可能である。この物理学の視点から見た原子論は、微積分法の創始者でもあるライプニッツにより否定された。ライプニッツは物的な「原子」ではなく心的な「单子」という究極的な「一」を定義し、無限は内的精神にしか存在し得ないと述べた。

そして、この無限小の概念から根源的究極な比、すなわち極限の概念が確立された。また、ライプニッツやニュートンによる函数解析では成し遂げられなかった連続性の概念をデデキント及びカントール、ワイヤアシュトラスらが成し遂げ、連続性公理が生まれた。

第2章 主要引用・参考文献

- 1) 溝口達也(2010). 「算数・数学教育における数学史の活用」.
- 2) 下村寅太郎(1979). 「無限論の形成と構造」, 12.
- 3) A.W.Moore(1993). 「THE INFINITE」石村多門訳, 48-49, 54.
- 4) 下村寅太郎(1979). 「無限論の形成と構造」, 19-20.
- 5) 下村寅太郎(1979). 「無限論の形成と構造」, 23-24.
- 6) 下村寅太郎(1979). 「無限論の形成と構造」, 26-27.
- 7) 下村寅太郎(1979). 「無限論の形成と構造」, 27.
- 8) 下村寅太郎(1979). 「無限論の形成と構造」, 60-63.

下村寅太郎(1979). 「無限論の形成と構造」, 12, 19-20, 23-24, 26-27
59-63, 70-73.

高木貞治(1983). 「解析概論」. 2-14.

A.W.Moore(1993). 「THE INFINITE」石村多門訳, 46-49, 54, 83-86.

第 3 章

E.Fischbein の研究の検討

- 3.1 先行研究との関係性
- 3.2 直線の連続性の観点から見た検討
 - 3.2.1 無限分割可能性の調査問題及び結果の検討
 - 3.2.2 超限基数の調査問題及び結果の検討
 - 3.2.3 極限の調査問題及び結果の検討
- 3.3 検討した結果

本章では、E.Fischbein による無限に対する直観の研究，特に線分の無限分割に対する直観の調査結果から「直線の連続性」に対する児童生徒の認識の実態を明らかにすることを目的とする。

3.1 では、本研究の先行研究である E.Fischbein の研究との関係性を第 2 章の実数の連続性の 4 つの基本定理を用いて明らかにする。3.2 では、E.Fischbein が実際に児童生徒に調査した調査問題及び調査結果を「直線の連続性」の観点から見た検討を行う。また、3.2.1 では、無限分割可能性の概念が介入した問題，3.2.2 では、超限基数の概念が介入した問題，3.2.3 では、極限の概念が介入した問題を順に検討していく。3.3 では、E.Fischbein の研究を検討した結果明らかになった児童生徒の無限に対する認識の実態を述べる。

第3章 E.Fischbein の研究の検討

3.1 先行研究との関係性

2.4 から直線の連続性を扱うということは、実数の連続性を扱うということと同値な関係にあることがわかった。実数の連続性をモデル化した数直線を考える。数直線上にはあらゆる実数が隙間なく存在する。数学的に言えば、実数の連続性公理から、数直線を切断すれば一つの実数が確定する。すなわち、何度切断を繰り返しても断面にただ一つの実数が存在するということである。言い換えれば、切断という操作は無限に繰り返すことが可能である。E.Fischbein (1979) は、この切断という操作を無限に繰り返すことが可能か否かを子どもたちがいかに認識しているかを研究した。彼は研究の目的を次のように述べている。

“研究の目的は、無限に対する直観と呼ばれるものに焦点を置いて、無限の概念が介入する問題解決において、さまざまな象徴的な背景が及ぼす影響を究明することである。言い換えれば、年齢や数学的知識、学校の成績などに対する影響への依存を究明することで引き起こされる抵抗を見付け出したい。”¹⁾

E.Fischbein は無限の概念が介入した問題解決にあたって、子どもたちが直観的に無限をいかに捉えるのかを無限分割可能性の概念が介入した問題、超限基数の概念が介入した問題、極限の概念が介入した問題をそれぞれ提案し、イスラエルの小学校5年生から中学校3年生を被験者として調査した。筆者は彼の研究を直線の連続性の観点から見て、子どもたちの無限に対する認識を明らかにしたい。そこで3.2.1では、無限分割可能性の概念が介入した調査問題及び調査結果の検討、3.2.2では、超限基数の概念が介入した調査問題及び調査結果の検討、3.2.3では、極限の概念が介入した調査問題及び調査結果の検討をする。

3.2 直線の連続性の観点から見た検討

直線の連続性、ここでは実数の連続性を考える上で、無限分割はもちろんのこと極限及び超限基数の概念は数学上重要な概念であることが2.1及び2.2から分かる。3.2.1、3.2.2、3.2.3で直線の連続性の観点から見たそれぞれの概念が介入した調査問題及び調査結果の検討をする。

3.2.1 無限分割可能性の調査問題及び結果の検討

筆者が子どもたちに、直線の連続性すなわち実数の連続性を考えさせるのに、直接連続性公理を教えることは不可能と言える。その中で、無限分割可能性の概念が介入した問題を子どもたちに考えさせることは、最も実数の連続性を考えさせることに近いと思われ、E.Fischbein が調査したように、子どもたちは直観で答えることがで

きる. 2.2 でも述べたが, 筆者は実数の連続性は Dedekind の定理, Weierstrass の定理, 有界な単調数列の収束, 区間縮小法の 4 つの定理で構成されるとした. この無限分割可能性はどの定理でも理解され得るが, Dedekind の定理と区間縮小法による連続性の考え方に極めて似ている. Dedekind の定理は, 2 つの相異なる集合を考え, それぞれの元の間値を無限にとっていく区間縮小法によって証明され, この証明方法は E.Fischbein が提示した無限二等分分割の問題と同様な考え方によるものである. すなわち, 無限分割可能性の概念が介入した問題を考えることは直線の連続性の概念が介入した問題を考えることと同値な関係にあるため, E.Fischbein の無限分割可能性の概念が介入した調査問題そして調査結果を用いることで, あたかも直線の連続性の概念が介入した調査結果が得られたと仮定して以下検討していく.

E.Fischbein が提示した無限分割可能性の概念が介入した調査問題は次のようにある.

“線分 AB を二等分する. 点 H はその線分の midpoint である. 今, 線分 AB と HB を二等分する. 点 P と Q は, それぞれ線分 AH と HB の midpoint を表す. 同様に分割していく. 分割するにつれて, 断片はますます小さくなる.

断片がとても小さくなるのでさらに分割することが不可能な状態に辿り着くだろうか. あなたの答えを説明しなさい.”²⁾

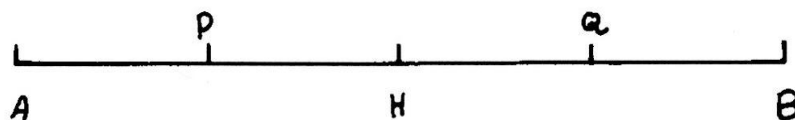


Fig. 1.

分割することが不可能な状態に辿り着くかどうかというのは, 分割した箇所, 断面を点とすれば, 線分 AB が有限の点で構成され得るのかどうかということでもある. 線分 AB を数直線とみるのであれば, 線分 AB 上に存在する実数が有限かどうかということでもある.

この問いに対する E.Fischbein の調査結果は次の表のようにまとめられた. また, この表は資料(「THE INTUITION OF INFINITY」TABLE I)を筆者により書きなおしたものである.

表 1 無限分割可能性の調査結果

カテゴリー	回答	合計 470 人	5 年生 46 人	6 58	7 152	8 104	9 110
1.	実際は，その過程に終わりは来るが，理論上は無限である．	12.2(%)	6.5(%)	8.6	11.2	16.3	13.8
2.	その過程は無限である．	29.0	17.4	44.8	31.6	27.9	22.9
1+2	—	41.2	23.9	53.4	42.8	44.2	36.7
3.	その過程に終わりは来る．	55.4	76.1	44.8	51.3	51.0	62.4
4.	無回答	3.4	-	1.7	5.9	4.8	0.9

表 1 を見ると，回答は 4 つのカテゴリーに分けられている．カテゴリー 1 は，「実際は，その過程に終わりは来るが，理論上は無限である」，カテゴリー 2 は，「その過程は無限である」，カテゴリー 3 は，「その過程に終わりは来る」で，カテゴリー 4 は，「無回答」である．また，E.Fischbein は，「無限」という回答のイメージをより完璧にするためにカテゴリー 1 と 2 を組み合わせた．また，カテゴリー 1+2 とカテゴリー 3 すなわち「無限」と「有限」それぞれの回答の主な理由は次のようにある．

“その過程は無限である．なぜなら：

- [1]あらゆる線分には，無限に点が存在する．(5.5%)
- [2]私たちは，常に線分の分割を続けることができる．(13.2%)
- [3]完璧な方法で常に続けることができる．(5.1%)
- [4]線は面積をもたない．(4.0%)

その過程は有限である．なぜなら：

- [1]線分は有限である．(47.2%)
- [2]私たちの手段は有限である．(4.7%)
- [3]全てのものに終わりはある．(0.6%)”³⁾

無限分割が可能ということは，数学的に言えばデデキントの定理から実数の連続性が成り立つということだが，それは数直線上に有理数以外に無理数が存在するということでもある．しかし，児童生徒は，少なくとも日本の中学校数学科では，中学校 3 年生で初めて無理数を学習するため，この調査でもほとんどの児童生徒が無理数を知らないと仮定する．この仮定で連続性を考えるとき，児童生徒の認識の上で

は、有理数の稠密性を知っていれば無限分割が可能である、すなわち直線は連続であると考えられる。すると、表 1 のカテゴリー 1+2 から 4 割の児童生徒が有理数の稠密性を認識している、有理数が無限に存在することを認識しているという実態を仮定できる。また、過程が無限であるとしたうちの数人は、線分には無限に点が存在することを認識しているため、有理数の稠密性もしくは無理数の存在を認識しているという実態を把握することができる。

また、無限分割が不可能であると答える児童生徒は半数以上だが、彼らは有理数の稠密性を認識していないことが上述から言える。彼らの中には、有理数が無限に存在することを認識していないだけでなく、整数の範囲でしか直線を見ることができていない児童生徒もいるかもしれないという実態を把握することができる。

さらに、有限と認識している児童生徒の半数が「線分は有限だから」分割は終わりが来るとしている。この調査結果から、線分が有限ということが、分割は有限と認識している大きな原因ではないかと考えられる。この調査結果からでは判別できないが、この認識は大きく 2 つに分けられると仮定できる。1 つは、線分 AB の分割を物理学的現象として考えた場合、存在し得る物体の最小のものは原子であり、原子はそれ以上分割され得ないという事実から答えるかもしれない。2 つは、無限に分割していけば断片は 0 に限りなく近づくからと答えるかもしれない。すなわち、仮にも第二の認識を有しているのであれば、児童生徒は無限分割を受け入れていると言えるかもしれない。無限分割を受け入れることで、断片が 0 に収束することを認めていると考えられるからである。

3.2.2 超限基数の調査問題及び結果の検討

超限基数は超限集合論の創始者である G.Cantor により、“超限基数とは有限のカルジナル数をもつ集合を有限集合と言い、他のすべての集合を超限集合、そしてこれら後者が与えるカルジナル数を超限カルジナル数”⁴⁾と定義された。ここで、カルジナル数を日本語に訳したものが基数(Kardinalzahl)であり、現代数学で述べられる濃度(Mächtigkeit)である。

3.2.1 で有理数の稠密性を認識している児童生徒がいるかもしれないという実態を得たが、有理数全体の集合は上述の超限集合の一つである。すなわち、超限集合の認識は連続性をいかに認識しているかを明らかにするかもしれない。

E.Fischbein の調査問題で出された以下の問題は、2 つの超限集合の大小関係を問う問題である。

“自然数の集合 N と偶数の集合 D を考えなさい。2 つの集合のうちどちらの集合がより多くの要素を含んでいるか。あなたの答えを説明しなさい。”⁵⁾

G.Cantor は次の定理を示した。“すべての超限集合 T はそれ自身と対等の関係にある真部分 T_1 をもつ”⁶⁾。すなわち、自然数の集合は対等の関係にある偶数の集合をもつということである。この定理は、自然数の集合の要素の方が偶数の集合の要素よりも多いと答える児童生徒の理由の 4 割を占めてしまっている。彼らは、自然数の集合も偶数の集合も有限集合としてしか認識できていないために起こった結果である。E.Fischbein の言葉を借りれば、彼らは「無限を受け入れられない」児童生徒である。また、この問題は一対一対応に着目することで超限集合を受け入れなければならない。G.Cantor の定理にもあるように対等関係をきちんと把握することも超限集合を受け入れる手段になるかもしれない。

3.2.3 極限の調査問題及び結果の検討

極限の概念は、無限を存在において捉えるのではなく運動において捉えた論理的完成である。2.2 から分かるように、実数の連続性の定理を証明する際にも大きく関わる概念である。また、極限の「限りなく小さくなる」という考え方及び表現も連続性を考える上で重要となるのは言うまでもない。E.Fischbein が提示した極限の概念が介入した調査問題は次のようにある。

“正三角形の大きさを小さくしていく過程は最終的に終わるのだろうか。また、最後の図の面積はいくらになるだろうか。”⁷⁾

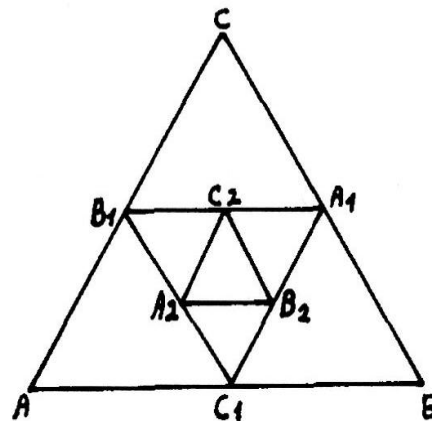


Fig. 9.

この調査結果は、前者の質問に対して、8 割以上の児童生徒が「その過程は無限である」と答えている。また、その理由として、「全ての線分には点が無数に存在する」、「三角形の全ての辺を常に分割できる」などがある。後者の質問に対して、「小さな三角形」、「点」、「微小な

面積」, 「面積が 0 になる」という回答が得られた. 「小さな三角形」, 「点」, 「微小な面積」を組み合わせると, 無限分割可能性の概念が介入した問題の議論に合わせると, 「無限を受け入れられる」児童生徒と「無限を受け入れられない」児童生徒に分類できる. したがって, 8割以上の児童生徒が「無限を受け入れられる」ため, ほとんどの児童生徒は極限の考え方を認識しているという実態を得ることができた. また, 最後の図の面積を問う調査結果では, 面積が 0 である「点」という存在をいかに認識しているかが明らかになった.

3.3 検討した結果

無理数の存在をほとんどの児童生徒が知らないと仮定すると, 児童生徒の認識の上では, 有理数の稠密性を知っていれば「直線の連続性」を認識できていると仮定した. このとき, 無限分割可能性の概念が介入した調査結果から, 無限分割を受け入れる児童生徒が 4 割いるが, 彼らが全員, 有理数の稠密性を認識しているとは言えない. それは, 分割過程が無限であるとした理由のうち, 数人しか「線分には無限に点が存在すること」を認識していなかったため, 無理数の存在を認識している児童生徒はほとんどいないと言える. また, 無限分割を受け入れない児童生徒は, 有理数の稠密性を認識しておらず, 場合によっては整数の範囲でしか直線を見ることができていないという実態も仮定される.

また, 無限を受け入れない児童生徒の半数以上が, 線分が有限であるという事実により無限分割を受け入れることができていない. 彼らは, 線分を物理的にしか視ることができていないと仮定される. すなわち, 実数のモデルである数直線をただの一本の線としてしか視ることができていない. 言い換えれば, 数学的に線分を視ることができていないことになる.

超限基数の概念が介入した調査結果から, 自然数が偶数を含んでいるため自然数の集合の方が大きいと答える児童生徒が多く見られた. この結果は, 自然数の集合も偶数の集合も有限集合としか認識していない上に, 自然数と偶数が一対一対応の関係にあることを認識できていないことにあると言える. 第 4 章で, 取り上げる問題では, 直線の連続性を認識する上で, 一対一対応は重要な関係である.

極限の概念が介入した調査結果からは, ほとんどの児童生徒が極限の考え方ができているのに対して, 「点」という概念は 2 割以下の児童生徒しか認識できていないことが明らかになった.

第3章の要約

第3章では、E.Fischbeinによる無限に対する直観の研究、特に線分の無限分割に対する直観の調査結果から「直線の連続性」に対する児童生徒の認識の実態を明らかにすることを目的とした。

直線の連続性を扱うことは、実数全体をモデル化した数直線上の実数の連続性を扱うことと同値である。実数の連続性とは、数直線を切断すれば一つの実数が存在するということであり、言い換えれば、無限に切断を行うことができるということである。E.Fischbein(1979)は、無限分割可能性、超限基数、極限の概念が介入した問題に対する直観をイスラエルの小学校5年生から中学校3年生を被験者として調査した。

特に、無限分割が可能ということは、数学的に言えばデデキントの定理から実数の連続性が成り立つということだが、それは数直線上に有理数以外に無理数が存在するということでもある。しかし、児童生徒は、少なくとも日本の中学校3年生で初めて無理数を学習するため、この調査でもほとんどの児童生徒が無理数を知らないと仮定する。この仮定で連続性を考えるとき、児童生徒の認識の上では、有理数の稠密性を知っていれば無限分割が可能である。すなわち直線は連続であると考えられる。

調査結果から、4割の児童生徒が有理数の稠密性を認識している上に、数人は無理数の存在を認識しているという実態が得られた。また、有理数の稠密性を認識していない児童生徒は半数以上に上り、有理数が無限に存在していることを認識していないだけでなく、整数の範囲でしか直線を見ることができていない児童生徒もいるかもしれないという実態を把握することができる。

第3章 主要引用・参考文献

- ¹⁾ E.Fischbein(1979),et al. 「THE INTUITION OF INFINITY」, 4.
- ²⁾ E.Fischbein(1979),et al. 「THE INTUITION OF INFINITY」, 7.
- ³⁾ E.Fischbein(1979),et al. 「THE INTUITION OF INFINITY」, 11.
- ⁴⁾ G.Cantor(1897). 「Beitrage zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre」 功力金二郎・村田全訳, 16.
- ⁵⁾ E.Fischbein(1979),et al. 「THE INTUITION OF INFINITY」, 8.
- ⁶⁾ G.Cantor(1897). 「Beitrage zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre」 功力金二郎・村田全訳, 20.
- ⁷⁾ E.Fischbein(1979),et al. 「THE INTUITION OF INFINITY」, 10.

E.Fischbein(1979),et al. 「THE INTUITION OF INFINITY」

第 4 章

直線のグラフに対する生徒の認識

- 4.1 離散的表現と連続的表現の統合
- 4.2 直線と点集合の関係とその認識
- 4.3 「直線の連続性」の学習指導の価値

本章では、直線のグラフに対する生徒の認識を第 3 章の児童生徒の実態を基に把握し、直線のグラフを学習するに当たって「直線の連続性」を学習指導しなければならない理由を明らかにすることが目的である。

4.1 では、表からグラフへの移行の際に生じる問題や子どもたちの認識について明らかにする。4.2 では、直線を点集合で見ることにはどのような意味があるのかを明らかにする。4.3 では、「直線の連続性」を学習指導しなければならない理由を明らかにする。

第 4 章 直線のグラフに対する生徒の認識

4.1 離散的表現と連続的表現の統合

第 4 章では,子どもたちの無限に対する認識の実態を把握した上で,具体的に比例の問題を提示し,「直線の連続性」を学習指導しなければならない理由,無限を受け入れなければならない理由を検討していく.

以下に離散量と連続量の問題から得られた表を記す. また,問題自体は省略するものとする.

《離散量の問題》

ある釘の本数と重さには下の表 2 のような関係がある.

表 2 釘の本数と重さの関係

x[本]	0	1	2	3	4	5
y[g]	0	2	4	6	8	10

《連続量の問題》

ある釘の長さや重さには下の表 3 のような関係がある.

表 3 釘の長さや重さの関係

x[cm]	0	1	2	3	4	5
y[g]	0	2	4	6	8	10

表 2 と表 3 のデータをそれぞれ座標平面上にプロットしていくと, 図 3 のようなグラフを描くことができ, どちらのグラフも一致することが分かる. 図 3 には, 釘の本数または長さの数が 0, 1, 2, 3, 4, 5 のときの x と y の対応点がそれぞれプロットされている. ここで, 表とグラフはそれぞれ表現形式が違うが, どちらの表現形式でも同じ関数関係を表しているのは事実である. 表は取り得る値が離散的であるのに対して, グラフは連続的である. 以下, 関数関係を表す表現形式である表とグラフで関数関係を表現することをそれぞれ「離散的表現」と「連続的表現」と名付けることにする. 表が離散的であるのに対してグラフは連続的であるが, これらは同じ関数関係を表している. 子どもたちは, 関数をグラフ化するとき, 表を描いてから座標平面上に対応点をプロットしてグラフを描く. しかし, 離散的表現と連続的表現は表現形式が違うが, 問題なく表現形式の移行が行えるのか. 連続的表現は, その名の通り連続的であるため, 2.3 の連続の定義から何らの「断絶」も存在しないと言える. すなわち, グラフは無限の点で構成されていると見ることができる. すると, 前述のように離散的表現から連続的表現への移行が行われるためには, 取り得る値が一対一対応しなければならない. すなわち, グラフ上にある全ての点が表に表されるはずである. しかし, 表は離散的にしか表せないため, 全て

の点を表に描き表すのは現実的に不可能である．そのため、ライプニッツが定義したように、無限は内的精神の上でのみ認識される．すなわち、子どもたちは表をあたかも連続的であるとみなして表に表さなければならない．しかし、第3章の児童生徒の実態からも言えるように、多くの子どもたちは、数を離散的にしか扱えていないのである．中には、変数が連続量である問題でさえも表3のように、離散量だけで、整数の範囲だけでグラフを描こうとしてしまう児童生徒もいると考えられる．

また、表3における釘の長さや重さの関係を考えれば、長さも重さも連続量であるのに対して、表2における釘の本数と重さは本数が離散量で、重さが連続量である．重さが連続量ということは、重さの取り得る値は無限に存在するということであり、それに対応する本数が与えられなければ関数関係が成り立たない．しかし、離散量は0, 1, 2, 3, …と数え上げる数だけで、それだけでは連続量の取り得る全ての値と対応する値が得られないのはグラフから明らかである．これから言えるのは、子どもたちは表にないグラフ上の点は何を意味していて、離散量と連続量のグラフが一致する理由を考えずに無意識に離散的表現から連続的表現への移行を行ってしまっているという実態があるということである．

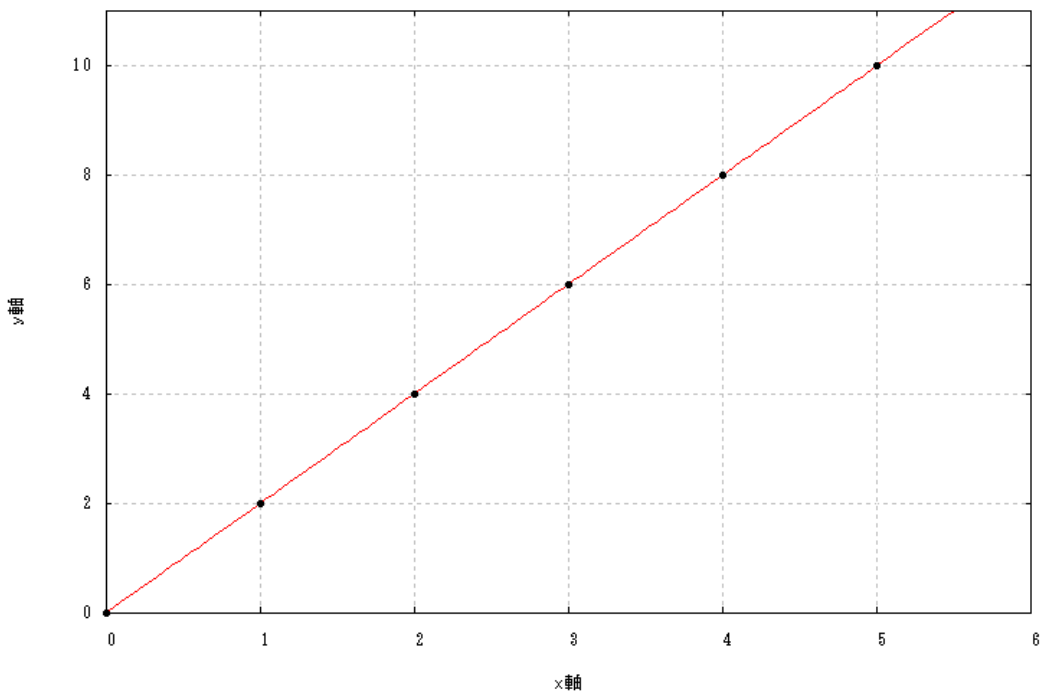


図 3 釘の本数または長さや重さの関係

4.2 直線と点集合の関係とその認識

第3章から分かるように、ほとんどの児童生徒が離散的にしか表を観ることができていない。そのため、各々の点を結ぶとき、彼らの中では、直線はユークリッド幾何学による「任意の2点で定まるもの」という認識であると考えられる。すなわち幾何学的にしか直線を観ることができていない。そこで、連続的に表を観るためには、実数全体と直線上の点の全体とは一体一の対応が付けられることを認識するために、直観的に数の間関係を理解できる数直線を用いて、数を直線上に点で表す、点を座標として認識することを学ばなければならないと言える。

4.3 「直線の連続性」の学習指導の価値

グラフ上の点と表の数値が一对一の対応の関係にあることを認識していない上に、点を座標として認識できていないため、現在の関数分野の指導では、「直線のグラフ」を関数として扱うことができていないと言える。そのため、直観的に数の間関係を認識することができる数直線と実数全体もしくは有理数全体の対応を学習指導することで「直線の連続性」を学習指導しなければならないと考える。

第 5 章

本研究の結論

- 5.1 本研究の結論
- 5.2 残された課題

1.2 では，要請された 5 点の研究課題に対する結果を明らかにする．
また，5.2 では，本研究の残された課題を明らかにする．

第 5 章 本研究の結論

5.1 本研究の結論

本研究では、5 点の研究課題が要請された。この 5 点の研究課題が解決されることによって、本研究の目的が達成される。

【研究課題 I】

数学において、「連続（性）」とは何であるか

研究課題 I に対して、数学における「連続（性）」とは、ある事物の集合に順序を課するとき、その順序において、単にいかなる二つの要素の間にも第三の要素が見い出されると言うだけでなく、そこに何らの「断絶」も存在しないことであるということが明らかになった。また、「直線の連続性」は実数の連続性公理によって構成されることが明らかになった。

【研究課題 II-a】

表にないグラフ上の点は何を意味し生徒はどう認識しているか

研究課題 II-a に対して、離散的表現と連続的表現の統合を図るには、離散的表現を連続的に観ることが求められる。そのためには、無理数の存在の認識及び表にある点とない点は何を意味するのかを認識している必要がある。無理数の存在に対しては、無限分割可能性の調査結果から有理数の稠密性を認識している児童生徒は少なく、有限の有理数もしくは整数の範囲でしかグラフ上の点を認識できていないことが明らかになった。また、表の点に対しては、表にある点をグラフ上の代表点として認識する、すなわち他の各々の点が存在することを受け入れた上で、代表点だけをグラフから取り出していると認識する必要があると言える。

【研究課題 II-b】

直線のグラフを任意の 2 点で描くことと直線のグラフを点集合と見 て描くことにはどのような生徒の認識の違いがあるか

研究課題 II-b に対して、研究課題 II-a から言えるように、ほとんどの児童生徒が離散的にしか表を観ることができていない。そのため、各々の点を結ぶとき、彼らの中では、直線はユークリッド幾何学による「任意の 2 点で定まるもの」という認識であると考えられる。すなわち幾何学的にしか直線を観ることができていない。そこで、連続的に表を観るためには、実数全体と直線上の点の全体とは一体一の対応が付けられることを認識するために、直観的に数の間を関係理解できる数直線を用いて、数を直線上に点で表す、点を座標として認識することを学ばなければならないと言える。

【研究課題Ⅱ】

「直線のグラフ」に関して、生徒は、どのような認識を有しているか

研究課題Ⅱに対して、研究課題Ⅱ-a 及びⅡ-b から言えるように、「直線のグラフ」は彼らにとってはただの「直線」であり座標平面上に点集合として構成されるグラフとして認識されていない。

【研究課題Ⅲ】

「直線の連続性」を学習指導しなければならないのはなぜか

研究課題Ⅲに対して、グラフ上の点と表の数値が一对一の対応の関係にあることを認識していない上に、点を座標として認識できていないため、現在の関数分野の指導では、「直線のグラフ」を関数として扱うことができていないと言える。

また、直観的に数の間の関係を認識することができる数直線と実数全体の対応を学習指導することで「直線の連続性」を学習指導すべきである。

5.2 残された課題

- *直線の連続性に対する認識の実態を調査するための調査問題を提案し、調査研究を実施したい.
- *筆者は直線の概念認識を構造主義者として研究しようとしたが、構造主義で考えることは、児童生徒にとっていかなる価値があるのか、達成水準を設定しなければ数学者の認識を児童生徒に求めることになってしまうため、構造主義と機能主義について文献調査を行う.
- *現在の算数・数学教育に具体的にどのようなアプローチをかけるかを考える.

主要参考文献

- G.Cantor(1897).「Beitrage zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre」功力金二郎・村田全訳.
能代清(1970).「極限論と集合論」.
E.Fischbein(1979),et al.「THE INTUITION OF INFINITY」.
下村寅太郎(1979).「無限論の形成と構造」.
高木貞治(1983).「解析概論」.
A.W.Moore(1993).「THE INFINITE」石村多門訳.
溝口達也(2010).「算数・数学教育における数学史の活用」.

資料「THE INTUITION OF INFINITY」(筆者による和訳)

問題

心理学は、科学、数学そして、哲学にとって紛れもなく大切な無限の魅力的な概念をほとんど探求してこなかったということに驚く。ピアジェは基礎的な科学の概念の多様体に関して無限の源である新しいアイデアや見方をし、この方向に極めて限られた貢献をした。

この概念の本当の心理学の背景は何なのか？それはもちろん、純粋な構成概念である。間接的経験は、それを助けるために思い起こさせるかもしれない。それは、仮説でさえない。想像できない問題【test】は、無限を認めることができるか否かである。

他方で、私たちは、無限が大きな数学的理想値であるという概念に同意しなければならない。もし、私たちが、例えばカントールなどがした、無限が、矛盾しない概念で、他の数学的な概念全体と矛盾しないことを証明できるなら、私たちは、無限の数学的な実在を受け入れるかもしれない。

しかし、ここに常に数学的思想を考慮されなければならない2つの根本的に異なる解釈がある。理想、純粋、最後に、論理的な概念として確かである数学的構造がある。そして、複雑で矛盾した無限と強く関連した問題が残るかもしれない、現実と同じような心理学の概念がある。

それは、無限の概念ということに関して正確である。自明な定義、定理そして、論理的な証拠が一つである。多様に実在し、思考過程と解釈で心理学的背景にある、無限の概念を使うことがもう一つである。

付随して起こる無限の概念は、この概念と私たちの知的な構想の間に深い矛盾があるという問題の主な源ということをも前提とする。実にしっかりした私たちの能力、実際の生活、経験、これらの構想は、自然に有限物体と有限事象に構成される。

アリストテレスが無限は実際、純粋な潜在能力すなわち、区間の増大もしくは区間の分割という無限は起こり得るものだと表現したように、その矛盾の第一の解決法は認めることである。それは、カントールの大改革まで数学を支配していた実現的な無限の解釈である。

その大改革の最初の特徴【aspect】は、実在の無限の概念の数学的有意味性を証明することである。この事実は、まず、精巧さを私たちのいつもの精神的構想と部分的に矛盾した新しい論理的な構想に求める。例えば、実存する無限を認めることで、私たちはいくつか相当するかもしれない奇妙な命題を認めなければならない。

カントの二律背反（空間における無限と無限の分割可能性の問題との関係）は、私たちの見解では、純粋でない哲学的概念ではなく、むしろ現実の心理学的表現、深い葛藤は、無限の直観に典型的である。

その葛藤は、おそらくとても深いので、実際、私たちは洗練された数学的方法と同等で、それを完全に避けることはできない。そして、

私たちはカントールの大改革の2つ目の特徴【aspect】に辿り着いた。私たちの無限に対する直観的理解に直接的な葛藤を再び及ぼし、無限が存在する以上のことをカントールは証明した。例えば、線分の点の濃度は、自然数の濃度よりも大きいということは証明されたかもしれない。私たちの無限の直観的理解に相当する無限の濃度の概念の代わりに、カントールは無限の世界、そして、階層的に組織化された超限基数の世界で、無限の存在の可能性を証明した。

今、超限基数の一組の無限を考慮するとき、卓越した事実に気付かされるかもしれない。実在する無限から成るアレフの世界は、実在する無限の形式でなく、可能性を表している。無限の性質の可能性は、カントール理論を高いレベルで再現した結果として完全に断念されたようにみえた、とオスカー・ベッカーは書いた。矛盾した無限の性質は、高いレベルに押し上げることはできるが、完全に削除することはできない。

私たちの現在の研究の主な目標は、思考過程に実在する力学を考慮した、無限の性質の矛盾を研究することだった。私たちの目的は、無限の概念が介入する問題解決において、様々な象徴的な背景が及ぼす影響を究明することであった。もっと正確に言えば、私たちは、年齢や数学的知識、一般学校の功績と同じような変量に対する影響への依存を究明したかった。前述のように、心理学は、これらの問題を解明することにほんの少し貢献した。

ピアジェとインヘルダーは子どもたちの空間の表現をテーマにしている本で、点と連続体の概念を研究した。彼らの質問は、次の解釈に付託した。(1): 被験者は、一枚の紙の上に最小と最大の正方形を描く必要がある。(2): 幾何学的な図の連続する分割（例えば、二つに分割）。もし、分割の過程が規則的に続くのなら、何が起こると予測する必要があるだろうか。(3): そのような分割の最後の構成要素の形。(4): 最後の構成要素から成る新たな図の復元。ピアジェとインヘルダーの成果は、次のことを示した。8歳になる子どもは、最後の構成要素として小さいいくつかの点だけを考慮する。さらに、新たな図の形を保障する。具体的操作期の中に、子どもは、連続する分割の結果として多数の構成要素を示す。しかし、子どもは、無限の性質の過程を理解することはできない。これらの最後の構成要素は、必ずしも同一構造の新たな図ではないけれども、とは言っても、若干の大きさや形は保障する。形式的操作期で、子どもたちは、数が無限に続くことに着想することができ、形や次元を問わずに、点として最後の構成要素を考慮することができる。

フィッシュバインはピアジェとインヘルダーによって得られ、事実上確認されたピアジェの技術と成果の一部を再現した。例えば、線分で構成され得る点の関係は、次の成果が得られる（有限数の点を示す児童生徒の割合）。(ローマ数字は、学校の学年を表す) 2年は42.0%、3年は28.5%、4年は23.5%、5年は26.3%、そして6年は0.8%であった。2年と3年の被験者は、無限数の点を考慮する。無回答は、4

年が 3.8%、5 年が 8.8%、6 年が 39.5%であった。「私たちは置きたいだけたくさんの点を置くことができる」など別の回答形式もあった。全体で、その過程は終わりが無いという特別なアイデアの回答は 6 年で 49.5%だった。私たちの以前の研究結果を考慮に入れて、ピアジェとインヘルダーの研究結果を分析し、その後、解釈が言及される必要がある。初めに、ピアジェとインヘルダーは、関連していて頻繁に起こる異なる回答形式の詳細は伝えなかった。ちなみに、私たちの研究結果では、11 歳から 12 歳の被験者の半分は無限の過程を考慮している。高学年では何が起こるだろうか。その質問は、ピアジェとインヘルダーの研究でも、私たちの以前の研究でもない答えを提示する。二つ目に、ピアジェとインヘルダーは、連続体の概念に付託したが、操作上、構成要素の可算無限集合の濃度（連続分割の結果として得られる点の集合など）と連続体の濃度を識別しなかった。したがって、無限の非特異性が考慮されている。ピアジェとインヘルダーが指摘した「連続体の完全な概念は無理数の概念であるとするには、何が不足しているのか」ということは真実である。とは言っても、彼らの研究は形成されていて、あたかもアレフ・ゼロとアレフ・ワンの存在の違いは必要ないかのように、主な結論は出されている。

私たちの現在の研究は、無限の直観と呼ばれるかもしれない何かに焦点を置いている。私たちは、全世界で直接自明な知識の形式のために直観という用語を使う。命題「もし $A > B$ かつ $B > C$ ならば $A > C$ 」は直観的に真と受け入れられる一例である。もちろんすべての命題を直観的に受け入れられるわけではないことは自明であり、正しい。

私たちの現在の研究では、ピアジェとインヘルダー、フィッシュバインによって研究された学年よりも高学年を調査している。さらに、可算無限集合の濃度と連続体の濃度とが対応する無限を二つの段階に分けようとしている。また、学年と指導方法の影響を通して、無限の直観の抵抗を見つけ出したい。教育上の学校の影響があるにもかかわらず、いかにも直観の一連の解釈は不変のままである。最後に、私たちは、この被験者の無限の直観的解釈と学校の達成水準の関係を見つけ出したい。

仮定

前述のように、無限（特に無限分割）の概念は直観に矛盾していると仮定する。よって、答えは二つの正反対の分野に入ると仮定される。一つは、区間における無限の直観的アイデアを受け入れ、他方は、受け入れない。

次に、学年でも指導過程でもないものが純粹に直観的な答えの性質に著しく影響すると仮定する。よって、頻繁に起こる答えの主な分野は、年齢と学年を通して相対的に不変のままである。

私たちは、直観的な解釈で被験者の知的水準の影響に関して確かな予想をもっていない。

たとえば、私たちは極限の概念に関して不確かな仮定をもっているが、私たちはこの解釈と検討中の解釈を連結して、無限の概念の直観的な理解をより一層明らかにする研究をしようと考えている。

方法

被験者

470人の小学校、中学校の児童生徒にテストを行った。最初のカテゴリーには、46人の5年生と58人の6年生がいる。そして、二つ目のカテゴリーには、152人の7年生、104人の8年生、110人の9年生が含まれる。児童生徒数の代表サンプルを相対的に得るために、二つ目のカテゴリーの児童生徒には、それぞれ学年レベルでテストをし、一つ目のカテゴリーはより高いSESに属し、二つ目のカテゴリーは低いSESに属す。まず、中学校から始め、イスラエルの学年が3段階で、一般に学校の成績を高、中、低で表している。したがって、その3つの学年の一般的な達成水準が別個に独立変数として考慮される。この研究は進行中で、私たちは、6年生の何人かが現代数学の補助的学習を経験した事実、さらに、学校で通常何を指導されているかを学んだということ述べられなければならない。全クラスのうちひとクラスは、28人のうち6人の子どもたちが天才児のためのコースで学習していると同時に、他のクラスでは、30人のうち13人の子どもたちがテル・アビブ大学のコースで学習している。後者のクラスは全体的に数学が得意になるとみなされているという重要な情報を私たちに学校が提供してくれた。

手段

一人の女性の実験者が全ての被験者にテストを施行した。そのテストは、10項目の質問形式で構成され、それぞれのクラスは会議で受け取る。その項目は、線分の分割、超限基数、極限に属している。

項目

(1): 線分 AB を二等分する。点 H はその線分の中点である。今、線分 AB と HB を二等分する。点 P と Q は、それぞれ線分 AH と HB の中点を表す。同様に、分割していく。分割するにつれて、断片はますます小さくなる。質問: 断片がとて小さくなるのでさらに分割することが不可能な状態に辿り着くだろうか。あなたの答えを説明しなさい。

(2) : 質問 1 の線分 AB をもう一度考察する。今回は、線分を二等分する代わりに三等分する。断片がとて小くなるのでさらに分割することが不可能な状態に辿り着くだろうか。あなたの答えを説明しなさい。

(3a) : もし質問 2 の答えが「はい」なら、最初の質問（線分を二等分）よりもこの状態に早く辿り着くことになるのだろうか。あなたの答えを説明しなさい。

(3b) : AB と CD は異なる長さの線分で、 AB は CD よりも長い。線分 AB を分割し、その中点を H_1 と呼ぶ。線分 CD を分割し、その中点を H_2 と呼ぶ。 H_1 と H_2 が対応する。その後も線分を分割し続けてみよう。 AH_1 と H_1B の中点をそれぞれ P_1 、 P_3 として CH_2 と H_2D の中点をそれぞれ P_2 、 P_4 と呼ぶ。 P_1 が P_2 と対応し、 P_3 が P_4 と対応する。この過程を実行し続けてみよう。質問：線分 AB 上の分点に対して、線分 CD 上に対応する点がない状態に辿り着くだろうか。あなたの答えを説明しなさい。

(4) : 自然数の集合 N と偶数の集合 D を考えなさい。質問：二つの集合のうちどちらの集合がより多くの要素を含んでいるか。あなたの答えを説明しなさい。

(5) : C は線分 AB 上の任意の点である。質問 1 で行ったように線分 AB を分割し、さらに分割する。質問：このとき、分点の一点は点 C と一致するだろうか。あなたの答えを説明しなさい。

(6) : 長さが 1 cm の線分 AB を考えなさい。そして、辺が 1 cm の正方形を考える。質問：正方形上の点に対応する線分上の点を見つけることは可能だろうか。あなたの答えを説明しなさい。

(7) : 正方形と立方体を考えなさい。質問：立方体上の点に対応する正方形上の点を見つけることは可能だろうか。あなたの答えを説明しなさい。質問 6 と 7 は何の関係しているかをいくつかの口頭と図解で、障害を取り除くために補足する。この質問は、二つの集合の一対一対応を言っている。

(8a) : 線分 AB が直径の半円を作図しなさい。 AB を二等分した部分、 AC と CB に図 7 のように二つの半円を作図しなさい。等分割と半円の作図を繰り返しなさい。質問：補助線の長さを短くしていくと、波線の長さはどうなるだろうか。あなたの答えを説明しなさい。

(8b) : 補助線の長さを短くしていくと、半円によって決められる面

積の和はどうなるだろうか。

(9) : 長方形 ABCD を考えなさい。周の長さが一定のままになるように長さを増やし、幅を減らすことで新しい長方形を作図しなさい。この過程を続けると長方形の面積はどうなるだろうか。

(10a) : ABC は正三角形である。辺を二等分し、中点を A_1 と B_1 、 C_1 とする。三角形 $A_1B_1C_1$ を考え、中点 A_2 と B_2 、そして C_2 をとる。同じ操作を繰り返し続ける。質問 : この操作に終わりはあるのだろうか。

(10b) : 最後の図の面積はいくらになるだろうか。Note 1 を見なさい。

結果

それぞれの答えを 5 つの独立変数を用いて個々に表にする。

(1) 学年 (5 年生から 9 年生)、(2) 校種 (小学校か中学校)、(3) 中学校の中の 3 学年、(4) 中学校の中の 3 つの達成水準、(5) 性別。上述のそれぞれに独立 χ^2 乗法が実行される。答えが分類できる関連したいくつかのカテゴリーを全ての表が含む (全回答は 470 件 (=N))。しかし、 χ^2 乗判定法は一般にすべてのカテゴリーに実行できない。なぜなら、これが有意義だとは限らないからである。それぞれの場合において、実際のカテゴリーの分析は、明確に述べられる。

簡潔さのために、今は性別が χ^2 乗法の答えには重大ではないということ述べる。よって、私たちは、それぞれの質問の結果を述べる時、これを繰り返さなくてよい。

無限分割可能性。まず、初めに質問 1 の回答を考察する。表 I は、回答を 4 つのカテゴリーに分けられている。: (1) 実際は、その過程に終わりは来るが、理論上は無限である。; (2) その過程は無限である。; (3) その過程に終わりは来る。; (4) 無回答。「無限」という回答のイメージをより完璧にするためにタイプ 1 とタイプ 2 を組み合わせる。表 I を見ると、回答は 2 つの主なカテゴリーに分けられる。すなわち、「その過程は無限である」と「その過程には終わりが来る」である。6 年生を除いて (現代数学で補習を受ける被験者)、それぞれの学年のレベルのほとんど回答者が、その過程には終わりが来るという考えを支持している。(もし、私たちが「無限」と「有限」に属する回答 (すなわち、カテゴリー 1 と 2 対カテゴリー 3) になると二分するのなら、全てのテスト被験者のほとんど (55.3%) が、その過程は有限であると考えている)。この二分は学年に渡って χ^2 乗判定法を課すと、2 段

階【.02 level】で重要である 12.25 (df=4) という値を得た。

表 I の最後の 3 列は、中学生の被験者の 3 段階の達成水準の回答者の割合を示している。最も高い達成水準の被験者は「有限」の 2 倍も「無限」で、真ん中の達成水準の被験者は、平等に分かれ、最も低い達成水準の被験者は、かなり「有限」の方が多いと理解している。

回答の両タイプ（「無限」と「有限」）を「抽象的」と「具体的」という形の説明で述べるのは重要である。

次に関連したカテゴリーの説明が見られた。:

その過程は無限である、なぜなら：(1)あらゆる線分には、無数の点が存在する (5.5%)。(2)私たちは、常に線分の分割を続けることができる (13.2%)。(3)完璧な方法で常に続けることができる (5.1%)。(4)線は面積を持たない (4.0%)。

その過程は有限である、なぜなら：(1)線分は有限である (47.2%)。(2)私たちの手段は有限である (4.7%)。(3)全てのものに終わりはある (0.6%)。

全ての被験者が要約して彼らの答えを説明できるとは限らないので、100%得ることができない。他の質問にしても同じような状況に直面するだろう。質問 2 の答えは、表 II に示す。質問 2 (連続する三等分分割) の答えは、質問 1 の答えと厳密に似ている。ここにある分析表は、カテゴリー 1 と 2 に対してカテゴリー 3 で作られている。この質問において、6 年生の答えは他の被験者の答えに似ている。したがって、 χ^2 二乗判定法は意味をもたない。校種も中学校の中でもないテストが重要である中、またしても 3 つの達成水準が異なっている。答えの解釈もまた、質問 1 の答えの解釈に似ている。

無限過程の理由：(1)あらゆる線分には、無数の点が存在する (4.7%)。(2)線分を常に分割し続けることができる (11.7%)。(3)完璧な方法で常に続けることができる (5.5%)。(4)線は面積をもたない (0.2%)。

有限過程の理由：(1)線分は有限である (52.3%)。(2)私たちの手段は有限である (4.3%)。(3)全てのものに終わりはある (0.5%)。

質問 3a は最初の 2 つの質問 (連続する二等分分割と三等分分割) を参照した過程を比較するための対象が必要である。そして、私たちは、これらのひとつの過程が、より早く終わるかどうかが確かめる。答え (表 III a) は 2 つの主なカテゴリーに分けられる。6 年生は他の被験者と顕著に異なり、「同様に無限」という解答を 84.5% が支持している。全学年にわたって χ^2 二乗判定法が極めて重要である。しかしながら、これは 6 年生の能力に帰属している。中学生 (7、8、9 年生) の答えはとても安定している。小学生を比較する場合、違いは重要である。中学生の中の 3 つの達成水準の比較をすると、重要な χ^2 二乗の 41.44%、 $p < 0.0001$ という値をもたらした成績上位者による「無限」という答えの割合が高い。

全ての被験者の 17% が質問に答えなかったということは表 III a に見られる。それ故、答えのひとつに「無解答」を含み、独立しているさらなるカテゴリーの χ^2 二乗判定法を計算し直す。手短に、さらなる「無

解答」は前の何らかの結果と変わりはない。

質問 3b は異なる長さの 2 つの線分にある点の数が関係している。表 IIIb はこの質問に対する答えの分類を示している。無限分割に関して前の質問から得られる結果に非常に似ている結果がここにある。全ての答えの大部分は、「無数の点が存在する」というアイデアか「短い線分ほど点が少ない」というアイデアを支持する 2 つのカテゴリーに分けられる。被験者の全体にわたって、後者の見解を大部分が支持している。これは 6 年生を除く、それぞれの学年でもまた見られ、重要となる x 二乗の値のために貢献する。5、6 年生に 7、8、9 年生の比較をするのではなく、6 年生を除くのと 5、6 年生を除くのとでは、 x 二乗判定法は違いがもはや明らかでない。達成水準の効果は、似た傾向で再び重要となる。

質問 3b で、「長い線分ほど多くの点が存在する (10.0%)。』というのを除いて、彼ら自身の解答で説明する以外の十分な補足の説明がない。

年齢の影響に関係する正しいイメージを得るために、6 年生は除かれなければならない。したがって、私たちは 5 年生と 7 年生の比較と 5 年生と 7、8、9 年生の比較もする。(質問 1、2、3a そして 3b のために)。表 I、II、IIIa そして IIIb を解析すると明らかな傾向を見つけられる。すなわち、5 年生より 7、8、9 年生に「無限」と答える子どもが常に多いことが読み取れる。これはよそに、質問 1 だけは「飛躍的な差」で統計的に重要である。

超限基数。質問 4 は自然数の集合と偶数の集合の比較が関係している。表 IV は、ほとんどの被験者 (70%) が偶数よりも自然数の方が多いというアイデアを支持しているということを明らかにしている。大前提として自然数の集合は偶数の集合を含んでいる。1 割の被験者の片方は、2 つの集合は「同数」だと支持している。彼らの論理的思考では、両方の集合が無数の要素を含んでいる。もう片方の 1 割の被験者は、答えを出すことができていない。

後に解釈を述べる：

2 つの集合は「同数」である。：(1)両方の集合に無数の要素がある (0.2%)。(2)もし、有限集合とみなすのなら、N の方が多く、そうでないなら、集合は「同数」もしくは無限である (0.4%)。(3)私たちは、2 つの集合の間に一対一対応を見つけることができる (0.4%)。N の方が多い理由：(1)両方の集合に無数の要素があるが、N は D を含む (5.3%)。(2)N は D を含む (37.4%)。(3)N は無限集合なので、N により多くの要素がある (8.9%)。

基礎的なこの質問に答える直観は、全ての年齢で変わらない。この質問の答えが二つに分けられる (a:「無限に数がある両集合」、b:「同数でない両集合」) とき、5 つの独立変数のいずれかを得られる x 二乗法の値はどれも意味をもたない。答えが三つに分けられる (a: 両方

とも無限；b：自然数の集合の方が多；c：偶数の集合の方が多）とき、次に中学生の達成水準が重要性をもたらす。この結果は、成績上位者のほとんどが自然数の集合の方がより多いと断言しているというのが原因である。

質問 5：もし、線分 AB を引き続いて二等分するのなら、分点のいずれか一点は線分上の点 C と精密に一致するだろうか。この質問の答え(表 V)は一般的な χ^2 乗判定法(カテゴリー1 と 2 対カテゴリー3)で解析される。重要な結果が達成水準で出る。実際、成績上位者でさえ、誤った答えの割合はまだとても高い (79.8%)。6 年生では、誤った答えの割合はさらに高い (91.4%)。

次に、被験者によって書かれた補足の説明を記す。

その点が到達する理由：(1)分割は無限である (7.5%)。(2)線分は有限である (58.1%)。(3)線分は点を有限数個含む (0.4%)。5 年生と 7 年生の比較、そして 7、8、9 年生に対して 5 年生は、質問 4 と 5 の両方ともに重要性をもたない。

質問 6：線分 AB 上の点と正方形上の点を比較。表 VI はそれぞれの学年で被験者の 65%以上が、正方形上のすべての点を線分上の点に写すことは不可能であると断言していることを表す。 χ^2 乗判定法はすべての学年にわたって有意義である。5 年生からより高学年の明らかな改善点があるにもかかわらず、それぞれの学年の被験者のたった三分の二しかこの質問に誤った答えを出していない。5 年生からより高学年の思考の変化は、 χ^2 乗法の重要な値が原因ということでも十分かもしれない。しかし、興味深いことは、9 年生の思いがけない落ち込みで、80%以上が点は一貫しないだろうと信じている。その結果として、中学校の中の解析は重要な χ^2 乗検定値をもたらされる。小中学校の比較も達成水準も重要な違いがある結果が出ない。これにもかかわらず、5 年生と 7 年生、5 年生と 7、8、9 年生の比較は重要な違いをもたらす。

被験者の答えの説明はずいぶん様々で、2 つだけ似た形の説明がそれぞれの見解で出された。これらの被験者は、点が常に一致すると断言した。被験者の 10%は、正方形と線分上には点が無数に存在すると言い、14%は、正方形の辺と線分は同じ長さであるという説明をした。38%の被験者が正方形は線分を含んでいるから、8%の被験者が線分の面積は正方形の面積よりも小さいからという理由で、点は一貫しないと断言した。

質問 7：正方形と立方体上の点の対応。この質問の答えの区分を表 VII に表す。少なくともそれぞれの学年段階の被験者の 70%が、立方体の点と正方形の点は一貫しないと支持している。中学校に対する小学校と 7、8 年生と 9 年生の比較は重要でない。他方で、5 年生より 7 年生に無限を提言する被験者が多いことは重要である。

様々な説明のタイプがあるため、2、3のタイプしか提示しない。点が一致すると主張する被験者の頻繁な理由は：(1)それぞれに点が無数に存在する（10.6%）。；(2)点は面積をもたないので、常に続けることができる（2.1%）。；(3)立方体の辺と正方形の辺は同じ長さである（10.3%）。点が一致しないと主張する被験者の頻繁な理由は：(1)正方形は立方体の一部である（立方体は正方形を含む（37.9%））。；(2)正方形は二次元で、立方体は三次元である（12.1%）。

極限。質問 8a：曲線の長さ。この質問の答え（表VIIIa 参照）は、一度 3つのカテゴリーで分析され、2つのカテゴリー（最初のカテゴリー対二つ目、三つ目のカテゴリー）で分析される。2つの結果の集まりは等しい。その結果は二分された分析からここに伝わる。年齢を上回って、 χ 二乗検定値は 36.75、df=4、 $p<0.0001$ は非常に重要である。表VIIIaを見ると、6年生の大部分が不変のままと主張している（93%）のが主な結果である。中学校の中では χ 二乗検定値が重要な意味をもたない。

達成水準の間の違いは重要である。成績中位者と成績上位者の 60% は波線の長さが一定のままだと信じ、成績下位者の三分の一も同様に信じている。

質問 8b は半円によって定められる面積の和がどうなるかを尋ねている。この質問に対する答え（表VIIIb）は再び 4つのカテゴリーにわたって区分している。しかしながら、二つ目と三つ目のカテゴリー（すなわち、面積は変化する）の分析は、一つ目のカテゴリー（面積は一定）と合同で比較する。この質問は、学年間、小学校と中学校の間、中学校の中、達成水準の中でも大いに違いがある。さらに、6年生は全学年、そして小学校と中学校の間の両方で、有能な結果に大いに関与する。最も印象的な発見は、面積の和が一定のまま（誤った答え）と支持する被験者の割合が 5年生より、7、8、9年生の方が大きく、どの学年よりも 6年生が大きく、成績下位者より成績上位者の方が大きいことである。

次に、被験者によって提示された説明について述べる。：

面積が減少する（正しい答え）理由：(1)最終的に面積をもたない直線になる（3.6%）。(2)面積は 0 に収束する（1.5%）。(3)断片はより小さくなる（4.0%）。(4)半円の長さは減少する（1.1%）。(5)半径が減少する（0.4%）。

面積が一定の理由：(1)半円の数が増加する代わりに、それぞれの半円の長さが減少する（25.9%）。(2)（誤った）幾何学的証明（1.1%）。

曲線に従属する面積は一定であると主張する被験者は、同じく曲線の長さが一定だと信じているかどうかという興味深さに気付く。4分の3にあたる 388人の被験者は、2つの質問に矛盾のない答えを出し、その被験者の 68%は、両方の場合で一定のままだと主張した。 χ の係数 0.44 は非常に重要である。

質問 9：周の長さが一定の長方形の面積の変化。表 IX は回答を 5 つのカテゴリーに分け与えた。それぞれの学年（8 年生を除く）ではほとんどの被験者が、長さや幅が変化するにもかかわらず、面積は周の長さに従って一定だと間違えて信じている。

分析はカテゴリー 1（面積は減少する）とカテゴリー 2（面積は一定である）で一度実行され、不変と変化でもう一度実行される。両方の分析は、重要な違いをすべての学年、小中学校、そして達成水準で生み出す。不変と変化（減少または増加、不安定かどうか）は大いに 3 つの学年で違いがあるが、「不変」と「減少」は 7、8、9 年生の間ではそこまで違いがない。

調査結果の下では、最初の 2 つのカテゴリー（面積が減少するというのと面積は一定である）の比較が基盤になる。すべての学年で、この質問における有意義な χ^2 の結果は、小学生が出す正しい答えの低い割合が明らかな原因である。これは、小学校と中学校の比較から得られる非常に重要な χ^2 乗値 14.31 に反映される。中学校の中での答えの区分は、学年間でかなり安定（無意味な χ^2 乗）しているが、達成水準間では安定していない。成績上位者と 6 年生で最も誤った答えの割合が高いのに気付く。

上記の分析は、「無回答」を含み一つのカテゴリー（「減少」と「一定」に加えて）として解釈される。 χ^2 乗値はこの変化の結果として有意義か無意味にもならない。

情報から不動の開発動向に帰するのは難しい。しかしながら、もし小学生（5、6 年生）と中学生（7、8、9 年生）を比較するのなら、年齢とともに正しい答えが増加している割合に気付くかもしれない。他方で、最も高学年（9 年生）であることを考慮しても、面積は不変であると支持する被験者の割合が、面積は減少すると推論する被験者より大いに多い。

次に関連のある理由を記す。：

面積が減少する理由：(1)面積は 0 に収束する（5.1%）。；(2)幅が減少する（0.2%）。；(3)数学的証明（7.9%）。

面積が一定である理由：(1)周の長さは変わらない（20.3%）。；(2)長さや幅の間の補償（18.1%）。

質問 10a：正三角形。大きさを小さくしていく過程は最終的に終わるのだろうか。

それぞれの学年で 4 分の 3 以上の被験者が、その過程は無限ということに同意している（表 Xa 参照）。その過程は無限であるという考えを支持している被験者の割合は、7 年生の後は減少しているけれども、全体の χ^2 乗判定法は有意義な違いを表さない。

次に正当化した理由の形式が見つけられる。

その過程が無限である理由：(1)全ての線分には点が無数に存在する（12.5%）。；(2)三角形のすべての辺を常に分割できる（0.2%）。；(3)

三角形はより小さくなるが、その過程は決して終わらない (3.4%)。

その過程が有限である理由：(1)面積が減少し、面積がなくなる (3.0%)。；(2)点を動かすための場所がなくなる (3.0%)。

小学校と中学校の比較もまた重要でないが、中学校の中では、より被験者の学年が上がるにつれて、その過程は終わりが来ると支持している割合が大きくなることは、6.42 の重要な χ 二乗値を出している。成績上位者のほとんどが、その過程は無限であると考え、この変化が分析されるとき重要な違いに關与される。

質問 10b：最後の図、正三角形の面積。この質問の答えの区分は表 Xb に表す。年齢の影響に関して明らかでない結果が情報から引き出される。被験者の年齢が上がるにつれて少なくなる「微小な面積」という答えがある。すなわち、5年生ではほぼ 50%だったのが 9年生では 4分の1以下になる。

情報の分析で、答えが 2つのカテゴリーに分かれる。すなわち、「点」と「面積が 0 になる」である。独立の χ 二乗判定法は、一度すべてのカテゴリーで実行され、再び「無回答」のカテゴリーを除いて実行される。「無回答」を含むか含まないかで、有意水準の結果に影響しない。3つのカテゴリー（「小さい三角形」、「点か面積がない」、「微小な面積」）の分析が基の結果を与える。

これらのカテゴリーは学年間で有意義に分けられる。これは、高学年の子どもたちは「小さい三角形」という回答に偏る一方で、低学年の子どもたちは「微小な面積」という回答に偏っているのが原因である。だから、中学校の中で安定している回答は、無意味な違いを示すなか、小学校に中学校を比較するのは有意義である。

達成水準にとって χ 二乗判定法は大いに有意義である。しかしながら、この結果の説明は簡単でも明らかでもない。達成水準の間で激しく目立つカテゴリーは「微小な面積」である。この回答は、成績下位者は 12%で、成績中位者はその 2 倍で、さらに成績上位者はその 2 倍である。

議論

1. 無限分割の直観に矛盾する性質

区間の無限分割の考えは、それ自体矛盾しているということについて議論される。したがって、この矛盾は答えを 2つの主要な正反対のカテゴリー、すなわち無限分割を受け入れるのと受け入れないのに分けることにより明らかになるということを期待する。研究結果は仮定を裏付けた。すべての学年で、すべての質問にとって区間の連続する分割に関して、答えはこれらの 2つの正反対の方向へ向かわされる。

「有限」という答えが大抵通用しているが、「無限」という答えはすべての答えの40%近くで次いでいる。

研究結果の上で、いくつか別の可能性の解釈を考慮する。初めに、被験者は無限の概念（厳密に言えば、無限分割の概念）を有していないことについて議論されるかもしれない。よって、彼らの答えは実際出まかせで、その無限分割は受け入れられるか受け入れられないかということについて議論されるかもしれない。

しかしながら、この議論は次の理由で切り捨てられるだろう。他のいくつかの質問に対する彼らの答えの特徴を明らかにするにつれて、無限の明らかな概念はほとんどの被験者によって理解されている。これらの質問：(a)「線分を連続して二等分分割することで、任意に線分上の点を与えられ、分点のひとつが一致するのか。」必ず一致するという考えを誤ってほとんどの被験者が支持するということが示されている（表V参照）。少なくとも暗黙のうちに、分割の過程が終わるのを受け入れるということは、線分上のあらゆる点がいつかは分点のひとつに辿り着くということを示している。(b)正三角形の解釈。すべての学年段階で被験者のほとんど（78～90%）が、その過程は無限であると支持している（表Xa参照）。

したがって、被験者が無限の概念に対する直観的なアイデアを持ち、答えがほとんど出まかせではないということを認めなければならない。

答えの双対性のある第二のもっともらしい説明は次のことかもしれない。：教えられたこと、例えば、「線分は無数に点を含む」ということを再生する児童生徒がいる。そして、それをしない児童生徒がいる。

調査結果は、被験者の反応が実際、数学の知識に影響されているという結論を実に支えている。調査結果によって気付かされることがあるので、十分に数学を学習した6年生と成績上位者は彼ら自身と他の被験者を区別する。しかし、数学教育の影響はそれ自身で次の結果を説明できない。(1)少なくとも7年生から無限という答えの割合が増加していない。逆に、質問3aを除く無限の概念に属するすべての場合に、無限という答えの割合が7年生から9年生にかけて減少している。(2)ほとんどの質問で、成績上位者（質問4、6、7、8）であることを考慮に入れると有限という答えの割合は非常に高い。したがって、たとえ指導過程が答えに影響するということを受け入れるにしても、第二の要因はなおさら考慮される必要がある。

研究結果の第三のもっともらしい説明は次のことになるかもしれない。質問は2つの異なる方法で説明できる事実があるので、2つの正反対の答えのカテゴリーがある。例えば、線分の連続する分割を引用する質問は、数学的線分は理想的な無次元の点で分割されるという概念に関連したこと、もしくは物質的線分すなわち作図は、小さな有形の図で物質的に分割されると解釈されるかもしれない。

第一に、正しい答えは「連続する分割の過程は無限」だろう。第二に、

許容範囲の答えは「過程は有限」だろう。

この第二の解釈は、最初はもっともらしく聞こえるけれども、被験者の論証の吟味が受け入れないことを認める。全員ではないが「有限主義者【finitist】」の答えは、「具体主義者【concretist】」の論証に付随して起こり、同じく「無限主義者【infinitist】」の答えは、「純粹主義者【purist】」の論証に付随して起こる。その過程には終わりが来ると主張するほとんどの被験者は、「区間は有限である」（すなわち、理論的な論証）という根拠によって答えを裏付ける。逆に、まるでその過程が無限であるかのように、区間の分割を受け入れる被験者は、具体的なものの一つに「もし、完璧な手段を使うのなら具体的な論証をいつも実行することができる」ということを考慮する。

上述の事実を考慮すると、被験者は、少なくとも 11 歳から確かな無限の直観を経験し始めるという結果を私たちは支持する。直観はとても不安定、すなわち問題の概念と象徴的な文脈に影響を受けるということに矛盾している。

答えを二つの正反対のカテゴリーに分けることは、指導の影響として、もしくは個人の解釈の結果として完全に説明され得ることはできない。さらに、もっと基礎的な事実もまた考慮されなければならない。知的な計画の有限という性質と無限の概念は矛盾している。すべての被験者の 50% 近くが、「線分は有限」なので線分は永遠に分割できないと主張する。被験者の 87% が立方体上の点の集合と正方形上の点の集合は「一致するはずがない」と主張する。彼らのおよそ 60% が「正方形は立方体の一部」で「正方形は二次元、さらに立方体は三次元」という有限の議論を表明する。

被験者に自然数の集合と正の偶数の集合を比較するように尋ねるとき、似た状況が起こる。被験者の 71% が「自然数の集合はより大きい」と主張する。主な議論は「自然数の集合が偶数の集合を含む」ということである。

これらの研究結果はむしろ自明のように思える。なぜなら、簡単に予測可能な上、ありふれた初歩的な直観と言えるからである。しかし、研究結果は自明ではない。実際、それぞれの場合において、被験者に 2 つの無限集合を比較するように尋ねた。必然的に、自然な答えは「両方の集合が無限の要素を構成要素としている」となるだろう（さらに、被験者は大きさの異なる超限基数という考えはないが、無限の初歩的な直観があるということを前提とする）。この場合も、闘争状態である。その集合の比較は無限とはいえ、被験者によって代表とされる事実であり、有限の大きさをもっている。“finitising”の効果などの比較は、例えば線分のような単体の“finitising”の効果よりも強い。

無限という答えの割合は、いくつかの異なる質問でかなり異なる。線分上の任意に与えられた点が辿り着くかどうかという質問で、被験者の 81.2% が無限であるとした。その二つの質問が、連続する二等分分割と三等分分割に関連していることは、被験者のおよそ 40% が無限という答えを与えているということの結果的にもたらす。線分と正方

形上の点の数を比較するとき、被験者の 26.7%が無限であるとしている。自然数の集合と正の偶数の集合の比較は、無限という答えのおよそ 10%を結果的にもたらしている。

これらの矛盾は、無限の自然な直観がとても不安定と言われているので、憶測上の影響と文脈上の影響によって決まると分かる。不安定な無限の直観は、心理学的実在として本質的な矛盾の性質を認めることで説明され得る。

2. 安定な直観的解釈

現在の研究で主要な仮定は、直観と特に無限の直観には年齢の影響に大きな抵抗があるということである。調査結果はこの仮定を部分的に確かめた。7年生からの答えの主要なカテゴリー(特に、「有限」と「無限」)は、高学年に向けて無限という答えが少し優位を占める傾向にあって、それぞれの年齢にわたって大抵安定している。

12歳(形成的操作期の初期とおよそ一致)を越えると、無限の概念に関係する直観的解釈は形成過程のままである。これは直観的解釈の発達のためにより一般的な課題をもたらす。自然な直観的解釈の発達は一般的な知的発達に関連して起こるということを仮定されるかもしれない。それらの特異性を定義することは安定しているが、それらの抵抗(確かな年齢水準の始まり)は年齢と指導の影響でさえもある。

形成時期とそれらの安定な直観を予測できる一般的な法則を与えることは難しい。これらの時期は、おそらくその分野の具体的特性において決まる。他方で、直観の発達の多くの特性は、ピアジェの段階説を参照して説明され得ると仮定されるかもしれない。例えば、頻繁な答えに関係している安定性は、12歳から始まる無限の直観と形成的操作期の一般的特性の強い関係によって説明されるかもしれないということを仮定されるかもしれない。いかにも無限は必ず、直接、具体的に明確な情報を越えなければならない。そして、必然的に比例制を用いる精神的経験に基づいて事を進めなければならない。

つまり無限の概念は除外して、無限の直観は何なのか。

直観の主要な特性が、その融合した特性とその自明な事柄(その自発的な容認)であるということを想起させる。ピアジェの理論で、そのような知識の様相は解析的構造を持つ定義による操作と操作的シエマにおいて不適合である。しかし実際、融合した自明な事柄の解釈と説明はすべての年齢、前操作期の終わりだけでなく、知識のいくつかの体系の解釈のすべての様相で存在している。

無限の直観はそれぞれの知的発達段階で知的な基本計画によって実際に影響されるかもしれないということを信じている。しかしながら、これは直観の特異性をほとんど取り消さない。無限の直観は、無限集合の大きさに関係している真実もしくは自明な事柄を本当に感じ取ることで、論理的結論や明確な分析を真実として受け入れること

ではないということの意味する。これは、12歳から始まる無限の直観が不変のままであるかもしれない間に、無限の概念は教授過程によって発達するかもしれないということの意味する。

3. 極限と「幾何学的規則」保存の問題

半円の問題に関連して2つの質問が尋ねられる。(a)半円の直径が減少するにつれて曲線の長さに何が起こるのだろうか。そして、(b)同じ状況の下で、その面積の和に何が起こるのだろうか。

最初の見解：2、3の無回答者を除く、ほぼすべての被験者が質問を理解し、その過程を永久に続けることの可能性に関連しているいくらかの異議を提起する者はいない。470人のうち何人かの被験者が「半円がとても小さくなるので、いくらか続けることはほとんど不可能になるのだろうか」と尋ねた。これは、そのような幾何学的問題の具体的解釈は自然ではないということの意味する。なぜなら、少なくともその質問自身がそのような可能な解釈を意味しないかどうかを考慮する年齢ではないからである。より早く有限という解答に注目させたとしても、それらが見えるとき、必ずしも具体的な解釈によって与えられるわけではない。

2つ目の見解は、直観自身の内部力学に関係している。任意の線の長さにおける正しい答えの割合は、6年生を除いて年齢とともに増加している。しかし、9年生で57.8%上回らない。残りの被験者は二つのグループに分けられる。およそ24%は線の長さは減少すると考え、およそ14%は増加すると考えた。

もし議論に注意を払うならば、この場合の直観的言動の仕方に関係するいくつかの手掛りを得る。線の長さが増加すると主張する被験者は半円の数を主に参照している。線の長さが減少すると推論する被験者は特に直径の大きさに焦点を合わせる。正しい答えはピアジェの意義で補償の効果があるということをそれゆえ仮定するかもしれない。半円の数が増加することは、直径の大きさが減少することによって補償される。正しい解答を与えられない被験者は、補償的活動で成功しない被験者である。何人かの被験者の注意は、他の被験者が直径の大きさを考えているだけの間に、半円の数だけに重点を置かれている。

私たちがここで直面する問題は、ピアジェの「保存」の分野に関連しているということ仮定されるかもしれない。よく知られているように、この性質の問題は、子どもはわずかの質的变化（例えば、形状）にもかかわらず、長さや数、重さ、音量などの不変特性もしくは集合を理解する必要がある状況に触れる。ピアジェの見解の保存効果は内部平衡すなわち、二つの正反対の変化を補償し、調和することによって引き起こされる。平衡法は相互的な知覚的特性の自動的な影響ではないという価値のある想起である。実際、保存は複雑な精神活動の結果である。異なる数や重さ、音量などの特性は異なる年齢から保存され始める。

曲線の問題は具体的操作の保存問題と同じ分類に属していない。それは、形状を変える対象でないが、重さもしくは音量を保つ（最終的に、同一性を保つ）。被験者が曲線の問題を持つことは、異なる形状が原因で異なる曲線の無限の連続である。したがって、その問題は具体的操作の一つではなく、具体的操作の分野で起こる代償である。それどころか、典型的な形式的操作の問題に直面する。この陳述の理由は次である。(1)被験者は無数の変化を通して、保存の確かな特性を理解するように尋ねられる。(2)被験者は曲線が起こり得る作図可能な理想的なものを与えられないと考慮している。(3)論理的思考は仮説演繹法の論法の形式である。半円の数が増加するにつれて線の長さには何が起こるのだろうか。要するに、形式的操作の様相の論理的思考が関係している特別な保存の形式の問題をもつということを考慮してもよい (Inhelder and Piaget,1958,pp.328-9 参照)。

正しい答えは、単に高度な数学的知識（保存の平衡法なしで）の効果だけだと想像されるかもしれない。しかし、調査結果は面積の和に関係していることが曲線を決定するとき、たとえ「保存」という答えは間違った答えであるという場合でも、年齢と達成水準の類似した割合の区分が見つかる。面積が変わらないということをサポートする被験者の数は、5年生で37%から9年生で62%に増加している。成績上位者は成績下位者よりも同様の間違った解答をしばしば支持している。児童生徒の数学的知識を越えているということを結局信じることになるので、この場合、彼らの解答に関与している具体的な直観的構造（ピアジェの保存構造によく似ている）がある。具体的な形式的操作期である過程を扱う「保存」現象の場合を再度目立たせたい。

質問9の周の長さが一定の長方形の面積の変化から得た結果は、概念を補う。正答の割合は年齢につれて増加し、数学の知識の増加の影響が原因であると思われるかもしれない。しかし、同時に、この影響が前述と同じ保存メカニズムによって対平衡【counter-balanced】に保たれていると推定することは筋が通っている。15~16歳の被験者の半分でさえ、この質問を正確に解かない（すなわち、面積が減少するということを支持する）。被験者は2つの相反する直観の影響に直面する必要があるということ推定することは筋が通っているように見える。1つ目の効果は、面積が0に収束するという考えを持っているために、面積の実質的な減少傾向によって決められる。他方の影響は、長方形の横と縦が逆に変化する全体的な保存メカニズムによって決められる。9年生で2つの影響は平衡される。より若い年齢で保存効果は強力であるかのように見える。

今まで、知的行動の積極的な特質【positive attribute】を象徴する心的平衡【mental equilibration】のメカニズムを表現することである保存は一般に受け入れられていた。自立的なメカニズムの機能を果たしている保存は、場合によっては、誤解答が生じる可能性が増大するかもしれないということを上記で見られる。

最後の質問は正三角形に関係している。すべての被験者の非常に高

い割合が、引き続いて正三角形を内接させる作図の過程に終わりがな
いかのように感じる。

この研究結果は、「有限主義者【finitist】」と「無限主義者【infinitist】」
という見解が「抽象主義者【abstract】」と「具体主義者【concretist】」
の定位と呼ばれるかもしれないことに直接結び付かないというそれ
までに表象した考えを裏付けている。もし、実際的な活動なら、引き
続き小さくなる三角形の形成過程は線分の分割の形成過程よりもと
ても複雑である。したがって、上記の過程は線分の分割の過程よりも
「有限主義者【finitist】」の解釈に近いということを公平に立証して
いる。これをよそに、三角形の問題で「無限主義者【infinitists】」の
割合が、分割の問題での割合のおよそ2倍である。一般に、成績上位
者は無限主義者【infinitist】の解釈の割合がより高くなっている。

相反する無限の直観の構造は、最後の図の面積に関する答えで明
らかになる。これらの答えは、8年生と9年生で同程度に生じる、面
積がない、小さな面積、小さな三角形という3つのカテゴリーに分け
られる。「無限主義者【infinitist】」の解答を承認したいくつかの0で
ないイメージ（「小さな三角形」、「小さな面積」）を表明することを多
く心に留めさせる。「具体主義者【concretist】」の解答の割合が年齢
とともに増加し、8年生で最大値26%であるということに気付くこと
もまた興味深い。そのような展開は、構造上「具体主義者【concretist】」
と「抽象主義者【abstract】」の解釈の仮定を受け入れると予想され得
ない。直観的観点からの実際に、「とても小さな三角形」という解答
は、「極限は点である」という解答に劣らず過程の極限として受け入
れることができる。なぜなら後者の場合が質問を尋ねるかもしれない
からである。「最後の図の直前の図はどうなるだろうか」。この質問は
数学的観点からではくだらないが、直観的観点からではとても論理的
である。

4. 指導の影響

直観は指導の影響を受けても不変のままであるということ仮定
される。調査結果はより複雑な象徴を示した。場合によっては、プ
ラスになる指導の影響が見つけられる。それと同時に他の場合では、そ
の影響は0かマイナスでさえもある。

この状況で関係のある事実は、6年生によって得られる調査結果の
中から引き出すことができる。上記の一部の児童は、数学の特別な授
業を受けていて、これらのほとんどの児童は数学がとても得意だと予
想される。高等数学の基礎【high mathematical standard】の有益な
影響は、線分の分割に関するあらゆる質問で確認され得る。これら
の質問で、彼らは他の学年と比較すると「無限主義者【infinitist】」
の答えにおいて最も高い割合を得る。

同じ被験者はいくつかの他の質問に対して誤解答の高い割合を示

す。質問 4:「偶数よりも自然数の方が多い (77.6%)」。質問 5:「点 C は線分の分割が続くことで一致する (91.4%)」。質問 6:「線分上の点よりも正方形上の点の方が多い (65.5%)」、そして質問 7:「正方形上の点よりも立方体上の点の方が多い (70.7%)」。質問 8b:「曲線で定められる面積の和は一定である (70.7%)」。質問 9:「周の長さが一定の長方形の面積は一定である (63.3%)」。

簡潔に言えば、プラスになる指導の影響を明らかにした答えのカテゴリーだけは、授業活動間に指導される概念に直接基づいている。5年生以降の児童生徒は直線、線分について学習する。すなわち、直線の無限について、そして線分は無数の点から構成されるという事実についてである。例えば、「線分は無数の点を含む」。この正しい知識は、2つの異なる長さの線分が比較されるときでさえ抵抗する。しかし、一次元と二次元、もしくは二次元と三次元の図の比較をするとき、無限の概念は能動的でない。圧倒された「有限主義者【finitist】」のスキーマがある。非常に興味をそそることは、まさしく同じ質問で、大多数の成績上位者もまた、ほぼ常にとても高い割合の誤解答をしたという事実である。例えば、質問 4 の答えで、「正の偶数よりも自然数の方が多い」と解答した成績上位者は 81.3%、成績中位者は 78%、成績下位者は 49%であった。

無限の概念に関連した数学の指導は次の 2 つに分岐する（そして一見すると、相反する効果である）。いくつかの概念の影響は非常にプラスである（線分の分割と関連した問題）。その他の概念の影響はマイナスか 0 である（質問 4、5、6、7）。

この研究結果は、私たちの解釈上で受け入れるかどうか説明され得る。無限の直観の相反する性質を説明することは、現実有限へ適応する私たちの通常の論理スキーマを用いる無限集合を考える傾向があるという事実である。

通常の数学の指導は学校で直接指導される概念に何が関係するかという困難を乗り越える。無限の直観は基本的にこの指導では影響を及ぼされない。他方で、数学教育は一般に、論理的思考を強くする。すなわち、有限主義者【finitist】は自然の思考方法の構想を練る。基準外の質問は無限集合に関係していること、もしくは児童生徒は具体的な情報を得ない質問に対して、通常の数学の指導（そして、時々間接的な数学の指導の効果）が進歩しているにもかかわらず、私たちは高い割合の「有限主義者【finitist】」の間違った反応を予期するにちがいない。

要約と結論

矛盾する無限の性質。無限は矛盾しているような直観を表す。事実の説明は、論理スキーマが現実有限へ適応することである。純粋な

矛盾【genuine contradiction】、知能を乗り越えることはコントロールの専門用語で潜在的無限【potential infinity】もしくは、特異無限【improper infinity】を考案した。この矛盾は、被験者の反応が一般的に主な2つのカテゴリー「有限主義者【finitist】」と「非有限主義者【non-finitist】」に分けられるという事実によって、私たちの調査結果で言い表される。有限主義者【finitist】の解釈は広まる傾向がある。年齢と指導の影響は2つのうち片方だけで説明できる。純粋な矛盾【genuine contradiction】の影響としてだけ説明され得る矛盾した結果がある。「無限主義者【infinitist】」の答えと「有限主義者【finitist】」の答えの具体的な説明を与える被験者がいる。十分な数学の指導を受けている児童生徒は、あまり指導を受けていない児童生徒より間違った「有限主義者【finitist】」の割合が高い。高等数学の指導は、必然的に限られた被験者と事象に適応され、より体系づけられた形式の論理スキーマの活用を究明する。

年齢の影響。一般的に言えば、無限の直観体験は大体7年生（12～13歳）から始まり比較的安定しているように見える。次の状況のタイプがある。(a)ある場合には、5年生から7年生で可視的向上がある。その後、頻繁に安定になる傾向がある（質問は線分の分割に関する。すなわち質問1、2、3a、3bである。線分と正方形上の点の間、正方形と立方体上の対応）。最後の2つの質問に対して、「有限主義者【finitist】」による解釈の割合はすべての年齢において60%以上である。5年生から7年生への向上は、おそらく年齢（形式的操作期）と指導の影響に起因する。しかし、指導はこれらの結果だけでは説明できない。なぜなら、向上は7年生から9年生でほとんどの場合見付けられないからである。(b)2つ目のカテゴリーの場合には、年齢が原因の重要な変化がない。変化はかなり振動的な特徴を示す。これらの場合には、有限主義者【finitist】もしくは他の誤解答は、調査したすべての年齢で一定の高い割合を示す（自然数の集合と正の偶数の集合の比較。分点と線分上に与えられた任意の点の一致。半円の面積の和。周の長さが一定である長方形の面積）。(c)正三角形の構造に関して、すべての年齢で無限主義者【infinitist】の答えが70～80%ということに気付いた。簡潔に言えば、無限の直観に関係する向上は、11歳から12歳だけで見付けられ、質問の一部のみで見付けられる。

指導の影響。指導の影響は、次の情報を考慮することで年齢の影響と区別されている。(a)調査結果は特別な数学の授業を受けている6年生によって得られる。(b)その調査結果は成績上位者のクラスによって引き起こさせた。2つの分岐効果は同一視され得る。(a)プラスになる反応の影響は線分の分割に関する。(b)マイナス（もしくは0）になる反応の影響は他の質問の分野に関する。この研究結果は次の方法で解釈されている。通常の数学の授業は、形式的にのみ無限の概念の表面的な理解に影響を及ぼす。直観は影響を受けないままで

ある。その代わりに、数学の授業は体系的に受け入れられている純粋な有限主義者【finitist】である論理スキーマを深める。葛藤の状況が有限主義者【finitist】を生成させる（無限集合はいくつかの部分集合との対応を考慮される必要がある）とき、十分に指導された児童生徒（大抵の場合）でさえ、（誤った）解釈は広がる傾向がある。成績上位者によって得られる、線分の分割に関連した調査結果は授業で何が教えられているかを直接（表面的に）思考することとして解釈される。

極限。2つの質問は、境界線の長さを一定にした図の面積の展開と関係していることを尋ねられている。両方の場合で、大部分の被験者は実際、面積が0に収束するけれども面積は一定のままだということをサポートしている。さらに興味深いことは、これらの場合でもまた「最も指導された児童生徒」（6年生と成績上位者）が誤解答の割合が最も高いという事実である。この研究結果は、間接的だが私たちの解釈すなわち、数学が児童生徒に連続を教えるということを裏付けている。妥当な直観、妥当な数学的制御を用いることなしでは、この不変性は悪化して理解できない剛性になるかもしれない。

他方では、形式的水準と具体的な形式的操作スキーマを暗示しているピアジェによって表現されている類似の保存メカニズムに起因しているので、私たちは面積の不変性の考えをサポートしている答えの割合が高いと解釈する。間違っただ直観、すなわち面積の不変性の場合、保存メカニズムの補償である。

両方の要因、すなわち保存効果と児童生徒の反応を悪化させるのに従う論理的な不変性を支持されるかもしれない。

テル・アビブ大学

Note.1

私たちの質問に関連している次の概念は、初めにリストによって学童に導入される。: 5年生 - 線分は無数の点で構成される。7年生 - 有限集合と無限集合の大まかな概念。8年生 - 一対一対応、有理数そして無理数。私たちの被験者は無限基数の比較について指導されているはずはない。

TABLE I

The successive divisions of a segment by two (in %)

Categories of answers	Grade										Sex		Levels of School Achievement		
	5	6	7	8	9	M	F	High	Medium	Low					
Total	46	58	152	104	110	218	252	122	141	103					
N =	470														
1. Practically the process comes to an end. Theoretically the process is infinite.	12.2	6.5	8.6	11.2	16.3	13.8	12.4	11.9	24.5	12.9	1.0				
2. The process in infinite	29.0	17.4	44.8	31.6	27.9	22.9	30.0	28.2	39.8	30.7	9.8				
1 + 2	41.2	23.9	53.4	42.8	44.2	36.7	42.4	40.1	64.3	43.6	10.8				
3. The process comes to an end.	55.4	76.1	44.8	51.3	51.0	62.4	53.5	57.1	33.3	52.1	83.3				
4. No answer	3.4	-	1.7	5.9	4.8	0.9	4.1	2.8	2.4	4.3	5.9				

* The first two categories have been combined to indicate both types of "infinite" answers.

謝辞

本研究を進めるに当たり、非常に多くの方々から御指導頂きましたことを深く感謝しております。

矢部敏昭先生には、本当に御世話になり、言葉では言い尽くせない程感謝しております。私は工学部所属の学生ながら、このように地域教育学科で数学教育に関する研究をさせて頂けたのは、矢部敏昭先生に相談に乗って頂いたことがきっかけでした。矢部敏昭先生は、何も知らない私にとっても親切に対応して頂きました。本研究を進めるに当たっても、研究が上手くできず、悩んでいるときに矢部敏昭先生は私に何度も声をかけて頂き助けて頂いたことを大変感謝しております。

溝口達也先生にもまた、大変御世話になり、言葉では言い尽くせない程感謝しております。教員を目指しているとは言うものの、まだまだ知識不足で、論文の書き方、文章の書き方、文献の読み方さえ分からない私にとっても厳しく御指導頂きました。本研究において私自身、納得のできるまで研究を進めることはできませんでしたが、本研究を通して多くのことを先生方に学ばせて頂きましたことを深く感謝しております。

そして、研究室のメンバーにも恵まれました。私は2年生の頃から授業の質問等で当時の数学教育専攻の院生室にもよく行かせて頂いておりましたが、塩見拓博さんや川口卓己さん、田中光一さん、尾崎正和さん、早田透さんには大変感謝しております。特に、田中光一さんと尾崎正和さんには、研究室の一員かのようにとても親切にして頂いたことを大変嬉しく思い、感謝しております。早田透さんには、本研究のアドバイスだけでなく、社会に出るために必要な言葉遣い、礼儀など研究面以外においても様々な御指導を頂いたことを感謝しております。また、修士1年の前田静香さんや池田さんにも本研究を進めるに当たって色々なアドバイス、サイエンスワールドでは、私たち学部生を引っ張って頂いたことなど大変感謝しております。同期である柏木美穂さん、小村亮さん、安井紗笑さんにも仲間に入れて頂いたこと、色々なアドバイスを頂いたことなど感謝しております。また、3年生のゼミ生にも数多くの場面で助けて頂きました。

応用数理工学科の藤村薫先生にも心より感謝しております。藤村薫先生は私のわがままを受け入れて下さり、忙しい中、矢部敏昭先生、溝口達也先生に御願いして頂きました。また、大信田先生、加藤先生、中井先生、吉本先生、土井先生と工学部の先生方にも多くのアドバイス等を頂いたことを深く感謝しております。特に、中井先生には、数学基礎論を理解するに当たって、一緒になって親身に考えて下さったことはとても感謝しております。

このように非常に多くの方々に出会い、研究に励むことができたことを大変感謝しております。

最後に、大学卒業まで支援して下さった家族に感謝いたします。

鳥取大学数学教育研究 ISSN 1881-6134

Site URL : <http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu>

編集委員

矢部敏昭 鳥取大学数学教育学研究室 tsyabe@rstu.jp

溝口達也 鳥取大学数学教育学研究室 mizoguci@rstu.jp

(投稿原稿の内容に応じて、外部編集委員を招聘することがあります)

投稿規定

- ❖ 本誌は、次の稿を対象とします。
 - ・ 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文、またはその抜粋・要約・抄録
 - ・ 算数・数学教育に係わる、理論的、実践的研究論文／報告
 - ・ 鳥取大学、および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
 - ・ その他、算数・数学教育に係わる各種の情報提供
- ❖ 投稿は、どなたでもできます。投稿された原稿は、編集委員による審査を経て、採択が決定された後、随時オンライン上に公開されます。
- ❖ 投稿は、編集委員まで、e-mailの添付書類として下さい。その際、ファイル形式は、PDFとします。
- ❖ 投稿書式は、バックナンバー（vol.9以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551 鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX 0857-31-5101 (溝口)

<http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/>

