ISSN 1881-6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

算数・数学学習におけるわり算に関する研究

~概念領域に焦点を当てて~

柏木美穂　*Miho Kashiwagi*

vol.13, no.10

Mar. 2011

鳥取大学 数学教育学研究室

目次

第 1 章

研究の目的と方法

本章では，研究の目的と方法について述べる．

1.1 では，本研究の動機を述べる．1.2 では本研究の目的とその目的を達成するための課題を述べ，1.3 ではその課題の解決の方法を述べる．

第１章 研究の目的と方法

1.1 研究の動機

現在，学習内容の系統性や学習の連続性が重要視され，このことを踏まえた学習指導が求められている．しかし，現状では学習指導要領や教科書の教師用解説書に系統図として示されているものを見ても，単に単元名を並べているだけのものがほとんどであり，各学年，学校種間において，どのような考えがどのようにつながっているのかが見えにくく，ここには学年を通した概念のつながりを本質的に見ようとする視点が欠けていると考える．

NCTM の 1959 年報『The Growth of Mathematical Ideas』では，幼稚園から高校までを通して学習の中で取り扱われている 32 個の算数・数学教育における重要なアイデアが具体的に例示されている．日本では，小学校教育であれば小学校で扱う内容だけに焦点が当てられる傾向があり，小学校から高校までを通して１つのトピックスを学年，学校種間を通して見るということはほとんどされていない．

筆者は，今までに学習した知識を使って何とか問題を解決しようとする子どもを育てたいと考えている．このような子どもを育てるためには，子どもたちが今までに学習した知識を生かし，積み重ねていくことができるような学習指導が必要である．子どもたちが，既知のものを用いて未知の問題を解決するのを援助するためには，教師が概念の本質的なつながりを把握しておく必要がある．また，このような視点を持つことによって，その学齢で行われている指導が適切であるか否かを判断する根拠を示すことができるようになり，授業の質を問うことができるようになるのではないかと考える．そこで，四則計算においても，その考えのつながりや変化を学年を通して見ることができるのではないかと考え，本研究ではその中でとくに，以前[i]からも表現に関する一貫性という問題点が指摘されてきたわり算について取り上げることにする．

1.2 研究の目的

本研究の目的は，子どもたちが今までに学習した知識を生かし，積み重ねていくことができるような学習指導を設計するために，わり算を本質的な視点から分析し，各学年でのわり算の学び方を表すための枠組みを用いて，わり算について教材を論理立てることである．それにより，未知の問題に直面したとき今までに学習した知識を使って何とか問題を解決しようと試みる子どもたちが手立てを得ることのできる学習指導が行えると考えられる．

1.3 研究の方法

本研究の目的を達成するために，まず，各学年でのわり算の学び方を表すための枠組み，わり算を本質的な視点から分析するために数学におけるわり算の位置づけ，学習指導を設計するために算数・数学教育におけるわり算の系統について検討する．そして，それらを基によりよいわり算の学習指導を設計し，わり算について教材を論理立てる必要がある．したがって，以下のような5つの研究課題が要請される．

【研究課題1】

各学年でのわり算の学び方はどのような枠組みで表すことができるか

【研究課題 2】

数学的に見てわり算とはそもそもどのようなものか

【研究課題3】

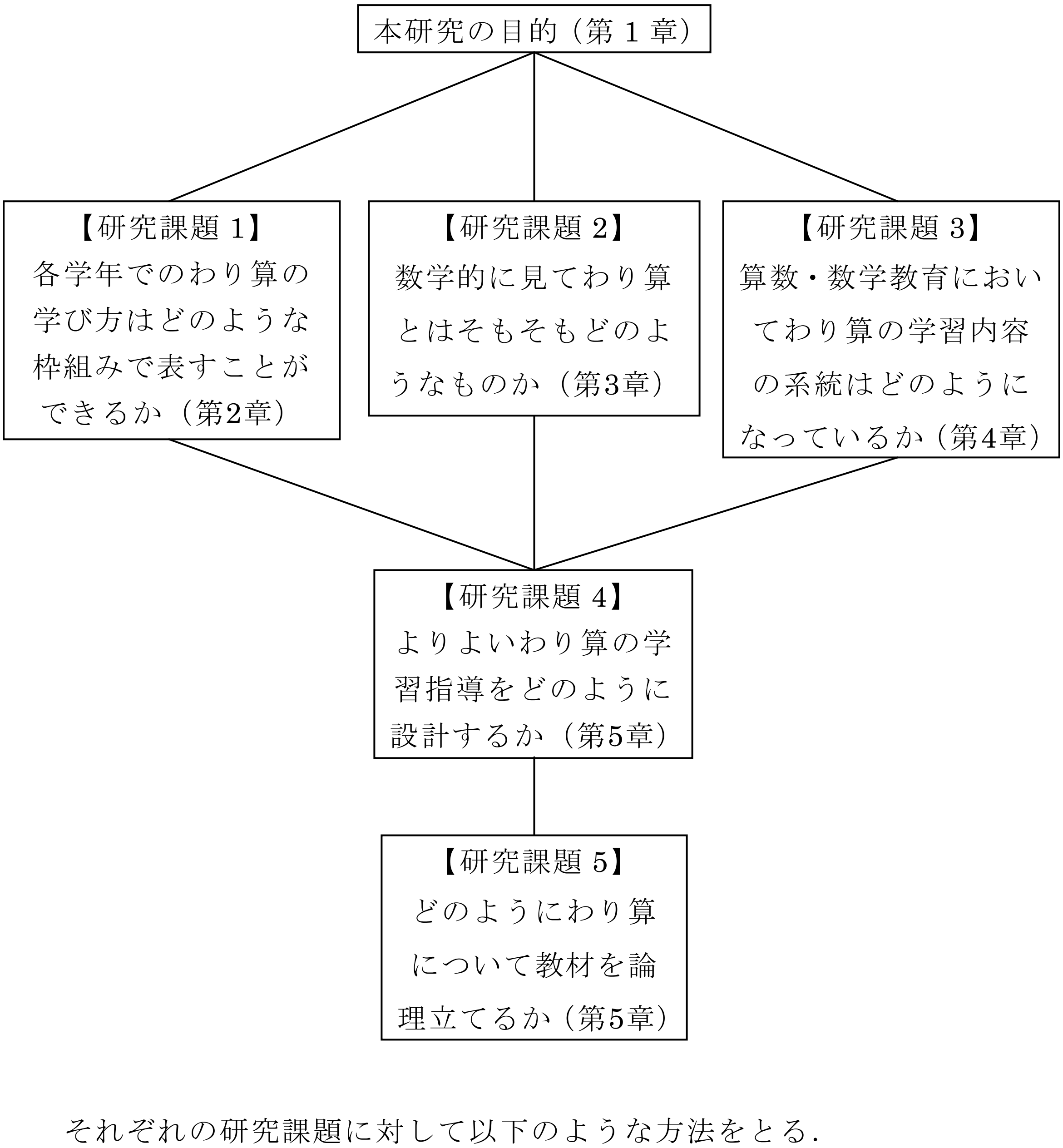
算数・数学教育においてわり算の学習内容の系統はどのようになっているか

【研究課題4】

よりよいわり算の学習指導をどのように設計するか

【研究課題 5】
どのようにわり算について教材を論理立てるか

これら 5 つの研究課題は以下のように位置づけられる.



それぞれの研究課題に対して以下のような方法をとる.

【研究課題１】に対する方法

概念領域に焦点を当てて乗法構造の系統的研究を行った G.Vergnaud（1988）の視点を考察し，各学年でのわり算の学び方を表すための枠組みを構築するための方法について明らかにする.

【研究課題 2】に対する方法

文献を基に，数学におけるわり算の位置づけについて明らかにする.

【研究課題3】に対する方法

先行研究を基に，算数・数学教育におけるわり算の系統について明らかにする.

【研究課題4】に対する方法

【研究課題1】において明らかとなった各学年でのわり算の学び方を表すための枠組みを用いて，【研究課題2】において明らかとなった数学におけるわり算の位置づけ，【研究課題3】において明らかとなった算数・数学教育におけるわり算の系統を基に，学習指導要領及び教科書分析を通してよりよいわり算の学習指導を設計する.

【研究課題5】に対する方法

【研究課題4】において設計したわり算の学習指導を基に，わり算について教材を論理立てる.

これら5つの研究課題が解決されることで，本研究の目的は達成される.

[i]たとえば，“四則演算の説明具は，演算及び問題場面，数の種類によって異なる．一般的には，テープ図や線分図が中心であるが，分数の乗除の場合には面積図が用いられることもある．しかし，それぞれの特徴を生かして実際に学習指導を進める中で,四則演算の表現に関する一貫性という問題点が指摘される.”（矢部他，1999）というような指摘がされている.

第２章

G.Vergnaud（1988）の視点の考察

本章では，各学年でのわり算の学び方を表す枠組みを構築するための方法について明らかにすることを目的とする．
2.1 Conceptual Fields（概念領域），2.2 Theorems-in-action（行為における定理），2.3 Multiplicative Structures(乗法構造)では，G.Vergnaud（1988）の主張について要約する．2.4 では，G.Vergnaud（1988）の視点からわり算について教材を論理立てるにあたって必要となる各学年でのわり算の学び方を表すための枠組みについて考察する．

第2章 G.Vergnaud（1988）の視点の考察

2.1 Conceptual Fields（概念領域）

G.Vergnaud（1988）では，Conceptual Fields（概念領域）を異なる本質のいくつかの概念の習得を必要とするような状況の集合と定義している．学習者は，新しい状況に直面したとき，より単純で，それまでの経験により，すでに知っている知識を使い，新しい状況に適応させようとする．そのため，学習者の理解を援助するためには，学習者の知識の獲得における由来とその後のつながり方について理解する必要がある．しかし，１つの概念は独立にではなく，他の概念との関係で発展するため，１つの概念も１種類の状況だけに言及するわけではない．また，１つの状況も１つの概念だけで分析することはできない．つまり，ある概念をとらえようとするときには，それに関わるいくつかの概念との関係を把握する必要がある．したがって，Conceptual Fields（概念領域）を研究する必要があると G.Vergnaud（1988）では主張されている．

2.2　Theorems-in-action（行為における定理）

2.2.1　Theorems-in-action（行為における定理）の概要

学習者は既知のものを用いて新しい状況を把握しようとするが，それは学習者の直観的な認識であり，暗黙的なものである．そのため，その過程は学習者によって言葉で表されない．学習者が概念を拡張したり形式化したりすることを教師が援助するためには，学習者が問題を解決するためにたどった思考過程（問題解決において直観的な行為に潜んでいるもの）を把握しなければならない．また，問題を解決する活動の中での定理は広い適用性を示すことによって，価値を得る．したがって，１つの問題から多くのものへの適用性を見るために，それらを一般的に表す必要がある．そこでベルニョは，学習者が，問題を解決するために用いる操作あるいは操作の時系列を選択するときに，学習者が考慮する数学的な関係を Theorems-in-action（行為における定理）と呼び，数学的な語を使って一般的に表す必要があると主

張する.

行為における定理

学習者が問題を解決するために用いる操作あるいは操作の時系列を選択するときに，学習者に考慮される数学的な関係

2.2.2　Theorems-in-action（行為における定理）の具体例

ベルニョは先に述べた Theorems-in-action（行為における定理）を用いて乗法構造の系統的研究を行った．その中の具体例を示す．

（Theorems-in-action（行為における定理）についての具体例

（Vergaud，1988，ｐ.144））

問題「コニーは，４つのプラスチックの車を買いたい．１つは５ドルです．彼女はいくら払わなければなりませんか？」

この問題に対して，次の a，b の解法について考える．

解法 a）　4・5=20

解法 b）　5・4=20

ベルニョはこのような解法の違いを単なる解法の違いではなく，「行為における定理」の違いがその背景にあると考えている．それは以下のように示される．

〈解法 a について〉

4 台の車を買うには，1 台分の費用の 4 倍の費用がかかる．つまり解法 a では，4 台の車の値段＝4×1 台分の値段という思考が表れていると言える．ここで用いられている「行為における定理」は，整数 n を用いると，f(n・1)=n・f(1)として数学的な記号を用いてより一般的に表すことができる．また，任意の実数λについて，さらに一般的に f(λ・1)=λ・f(1)で表すことができる．方法 a は同じ比が商品と費用に対して適用するという認知に基づいていると言える．

解法 a の考えを図式化すると以下のように示すことができる．

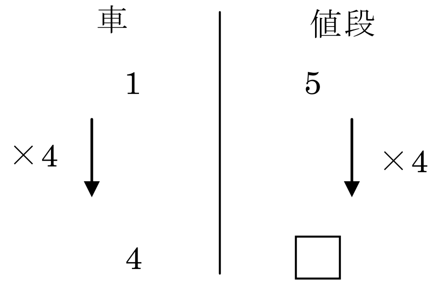


図 2－1　解法 a

〈解法 b について〉

解法 b は，車 1 台あたりの値段に車の台数をかけるという考えである．ここで用いられている「行為における定理」は f(x)=ax と表すことができる．また，解法 b の考えを図式化すると以下の図のように表すことができる．

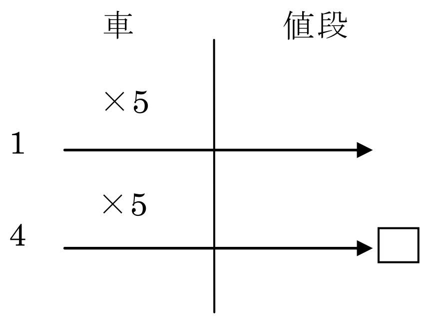


図 2－2　解法 b

2.3 Multiplicative　Structures(乗法構造)

ベルニョは, 2.2.2で挙げたTheorems-in-action（行為における定理）を用いて，次のような乗法の構造の系統的研究を行った．

概念領域の研究への標準的な方法は，状況を見分けて分類すること，それから学習者が自身の推理を表す解法とそのほかの方法についてのデータを集めることである．

research　cycle（研究サイクル）

①対象，関係と行為における定理のレベルを特定する

②状況と題材を設計し，それらを用いて学習者に対して実験をする

③そこで起こる異なる現象を観察し，分析することによって，表象を

概念化したり象徴化したりする
④再び初めに戻り，最初のサイクルを改善する
まず, 状況（領域, 関係, 数のデータ）から始まる. 研究者（F. Tournaire ＆S. Pulos（1985））は，通常，比率と割合を研究する際に，比較の操作と欠測値の操作という 2 種類の問題を使った.

〈comparison　task　(比較の操作)〉

　この操作では，R と R’の比を定めることを求めるのではなく，それらが，R>R'　か　R'>R　か　R=R'かを決定する．つまり，ここでは数量の関係を把握することが問題とされており，それぞれの操作は前後関係領域による制約について分析される必要があると言える．通常，4 つの独立した大きさまたは量が比較の操作に含まれる.

〈missing　task　(欠測値の操作)〉

　この操作では, 比較の操作の結果から, 問題が「単純な割合の問題」と「乗法の割合の問題」に分類されている.

　「単純な割合の問題」では，2 つの数の間に変数とある定数の関係がある．例として，不変の価格，等しい市場占有率，均一な速度，平均消費量，密度，体積，類似性係数，その他.

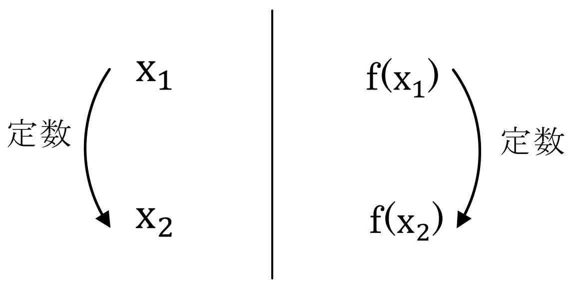


図 2－3

「乗法の割合の問題」では，3 つまたはそれ以上の変数が存在し，それらのうちの 1 つは他のすべての変数が一定に保たれているとき，それぞれに対して比例している．例としてデカルト積の数の組み合わせ, 長方形の面積，三角形の面積，直方体の体積，運動量，その他.

	x_2	x'_2
x_1	$f(x_1, x_2)$	
x'_1		

図 2－4

ベルニョは，このように状況を分析して，題材を設計し，それらを用いて学習者に対して実験をすることによって，学習者の長期にわたる困難についての結果を得た．その困難とは，主に以下に示す事柄に関係する．

①すべての数値に対する正しい解法の拡張，特に数が 1 より小さいとき

②長方形の体積の公式：V（体積）=B（底面積）×H（高さ）において，Ｖ１＜Ｖ２で，Ｈ１＞Ｈ２のときのように順序関係が首尾一貫しなく見えるとき

③比熱，力学，10 学年での電気，体積や 7 年生や 8 年生での幾何学のような難しい概念への正しい解法の拡張

ベルニョは結論として，次のように述べている．「行為における定理の概念は，与えられた概念領域において，学生の能力の長期発達を描写し，由来と飛躍をたどるための最高のツールである．もし，基本的で一般的な数学的な構造を表したり説明したりしなかったならば，どうやって上に示すような拡張を援助することができるだろうか．」（G.Vergnaud，1988，p.160）

2.4 筆者の考察

本研究は，今までに学習した知識を使って何とか問題を解決しようとする子どもを育てたいと考えている．このような子どもを育てるためには，子どもたちが今までに学習した知識を生かし，積み重ねていくことができるような学習指導が必要である．1つの概念を把握する

ためには，それに関わるいくつかの概念との関係を把握する必要がある．つまり，教師は，1つの概念を子どもたちが理解するのを援助するために，本質的な概念が形成されるために用いられる考え方のつながりを把握しておかなければならない．そこで，ベルニョのConceptual Fields（概念領域）はわり算という概念を本質的に見ることにより学年，学校種間を通した一貫性のある学習指導を考えようとする本研究にとって重要な視点である．そのような学習指導を考えるには，それまで子どもたちがどのような考えをどのように学んで来ており，今後の学習にそれらをどのように生かし，1つの概念について理解していくのかを表す枠組みが必要である．そこで，本研究では特にTheorems-in-action（行為における定理）を数学的な語で表すというベルニョの視点をここに借り，その枠組みを構築したいと考える．Theorems-in-action（行為における定理）を用いることで，多様な解決を数学的な語を用いて一般的に表すことで，場面に依存せず考え方にどのような違いがあるのかを表すことができる．

第2章の要約

本研究では，それまで子どもたちがどのような考えをどのように学んで来ており，今後の学習にそれらをどのように生かし，1つの概念について理解していくのかを表す枠組みが必要である．そこで，本章では，各学年でのわり算の学び方を表す枠組みを構築するための方法について明らかにするために，概念領域に焦点を当てて乗法構造の系統的研究を行ったG.Vergnaud（1988）の視点を考察した．

G.Vergnaud（1988）の視点の考察により，各学年でのわり算の学び方を表す枠組みを用いて，教材を論理立てるにあたり重要な2つの要件が明らかとなった．その要件とは以下の通りである．

（1）Theorems-in-action（行為における定理）を数学的な語で表すこと

多様な解決を数学的な語を用いて一般的に表すことで，場面に依存せず考え方の違いを表すことができ，各学年でのわり算の学び方を表す枠組みになりうる．

（2）Conceptual Fields（概念領域）の視点

1つの概念を把握するためには，それに関わるいくつかの概念との関係を把握する必要がある．このことから，わり算について教材を論理立てるには，わり算に関わる概念との関係を考慮する必要がある．

次章では，　わり算という概念を本質的に見るために，わり算の数学的な位置づけについて明らかにする．

第3章

数学におけるわり算の位置づけの検討

本章では，わり算の数学におけるわり算の位置づけについて明らかにすることを目的とする．

3.1では,わり算の問題から数学でわり算がどのような位置づけとなっているかについての手がかりを得る．3.2 では，数学におけるわり算の位置づけの根拠について検討し,3.3 では3.2において検討したわり算の位置づけの根拠となるものが実際の問題場面では，どのように関係しているかについて考察する．

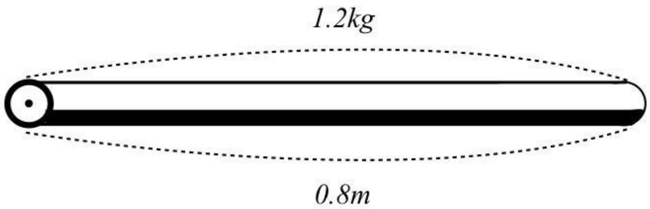
第3章　数学におけるわり算の位置づけの検討

3.1 わり算の問題から見えるもの

各学年におけるわり算の問題では，1 にあたるものを求めるということが問題とされている場合がほとんどである．1 にあたるものを求める問題とは，次に示すような問題である．

まず，小学校 5 年生の小数のわり算についての問題である．

問題 A：図のような鉄のパイプがあります．長さは 0.8mで，重さは 1.2 kgです．この鉄のパイプ 1mの重さは何kgですか．（東京都・平成 16 年度小学校　学力を図るための調査[正答率　54.8%]）



求めなければならない 1mのときの重さを□kgと表すと，この問題場面の鉄パイプの長さと重さの数量の関係は，図 3－1 のように数直線上の対応図で表すことができる．

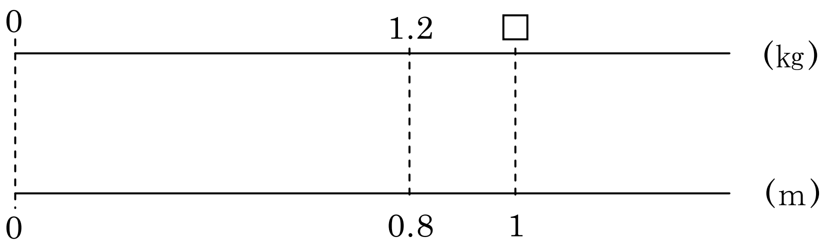


図 3－1

詳しくは，3.3 で触れることにするが，ここで着目したいことは，図 3－1 からも分かるように 0.8 を 1.2 と見たときの 1 にあたるものを求めるということが問題となっているということである．

続いて小学校 6 年生における分数のわり算の例を挙げる．

問題 B：水そうに水を入れています．$\frac{2}{3}$分間に$\frac{5}{6}\ell$が入ります．同じ割合で水を入れていくと，1 分間では何ℓの水が入りますか．（文部省，平成 14 年，[正答率 30．5%]）

求めなければならない 1 分間の水の量を□ℓと表すと，この問題場面の水を入れる時間とその時間に貯まる水の量の数量の関係は，図 3－2 のように数直線上の対応図で表すことができる．

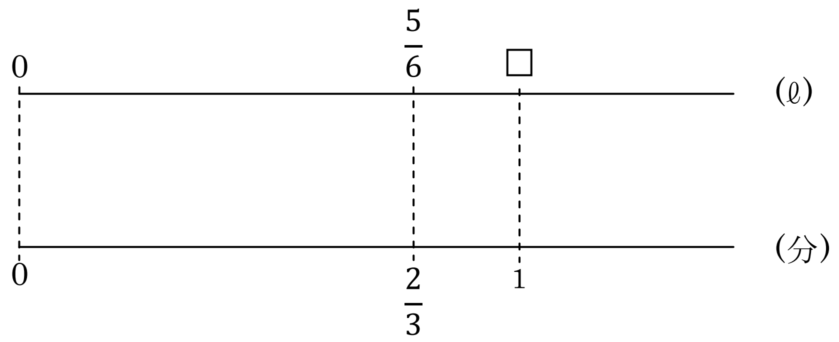


図 3－2

この問題でも，問題を解決する際に $\frac{2}{3}$ を $\frac{5}{6}$ と見たときの 1 にあたるものを求めるということが行われている．そこで，この 1 にあたるものを求めるという点に，数学におけるわり算の位置づけについての背景があるのではないかと考えた．

3.2　わり算と単位元，逆元

数学では逆元を認めるということが大切にされている．元とは，要素とも呼ばれるもので，集合を構成する個々のものを言う．逆元について考えるためには，単位元について触れる必要がある．

単位元とは，定義された演算に対して元の値を変えない元のことを言う．加法の場合では，0 をたしても値が変わらないことから，単位元は 0 である．

例：13＋$\boxed{0}$＝13

乗法の場合では，1 をかけても値が変わらないことから，単位元は 1 である．

例：13×$\boxed{1}$＝13

一方，逆元とは，その元で計算すると単位元になる元のことを言う．先の例を用いると，加法の場合では単位元が 0 なので

例：13＋$\boxed{（-13）}$＝0

となり，加法について 13 の逆元は，－13 である．

乗法の場合では，単位元が 1 なので

例：13×$\boxed{\frac{1}{13}}$＝1

となり，乗法について 13 の逆元は，$\frac{1}{13}$である．

上の例から，逆元を考えようとすると逆演算が登場することが分かる．除法は，数学的には乗法の逆演算として定義されるが，単位元が 1 である乗法についての逆元を考えると，乗法の逆演算が登場する．ここに，数学におけるわり算の位置づけがあると考えられる．

例：13×□＝1

　　□＝1÷13

3.3　問題場面での検証

3.3.1　一般的な問題

先に単位元と逆元という視点から，数学の中でのわり算の位置づけについて検討したが，その考えは，実際のわり算の問題の中でどのように関わっているかについて 3.1 で挙げた問題 A, B を例に考察する．

問題 A の場合では，数直線上の対応図（図 3－1）をもとに，次のように立式できる．

□＝1.2÷0.8

問題場面の数量関係及びこの式の数の動きは，図 3－3 のように数直線上の対応図に表される．

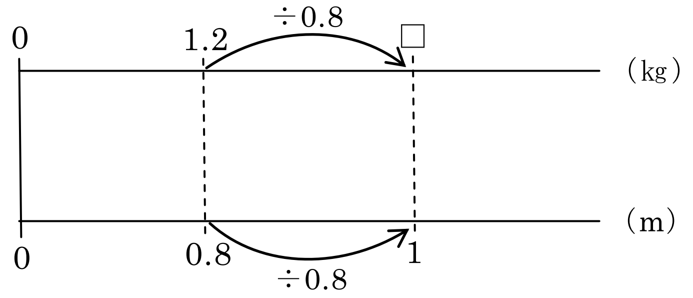


図 3－3

この計算過程は次のようになる．

□＝1.2÷0.8

　＝（1.2×10）÷（0.8×10）・・・①

　＝12÷8・・・②

また，数直線上の対応図を用いると図 3－4 のように表すことができる．なお，図中の①，②は上の式の①，②に対応している．

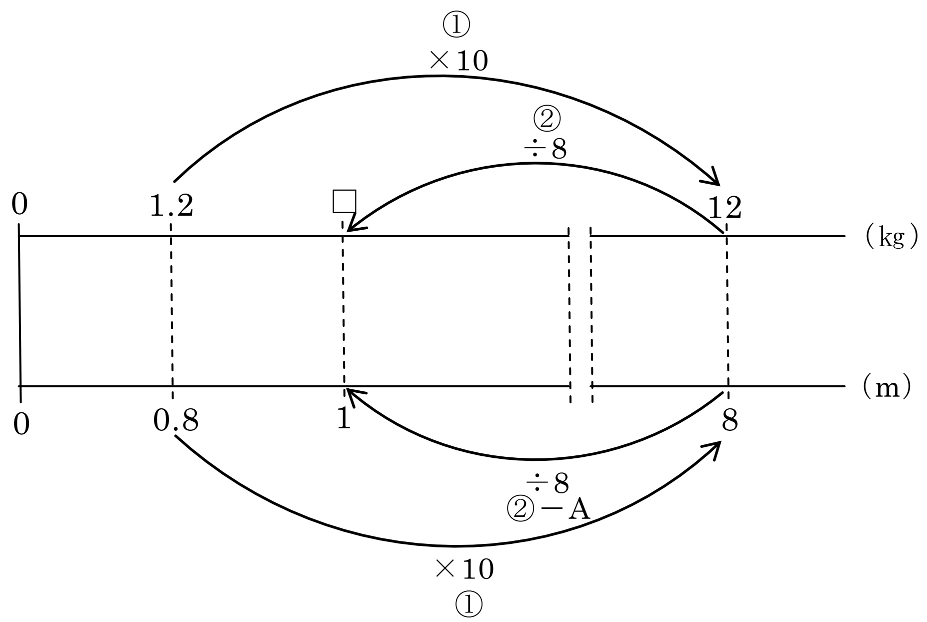


図 3－4

②－A では，÷8 をすることによって 1 を作っていることが確認できる．このことから，0.8 を 1.2 と見たときの 1 にあたるものを求める計算過程において，単位元が 1 であるかけ算についての逆元を求める

という考えが用いられていると言える．

次に，問題 B の場合では数直線上の対応図（図 3－2）をもとに，次のように立式することができる．

$\square = \frac{5}{6} \div \frac{2}{3}$

問題場面の数量関係及びこの式の数の動きは，図 3－5 のように数直線上の対応図に表される．

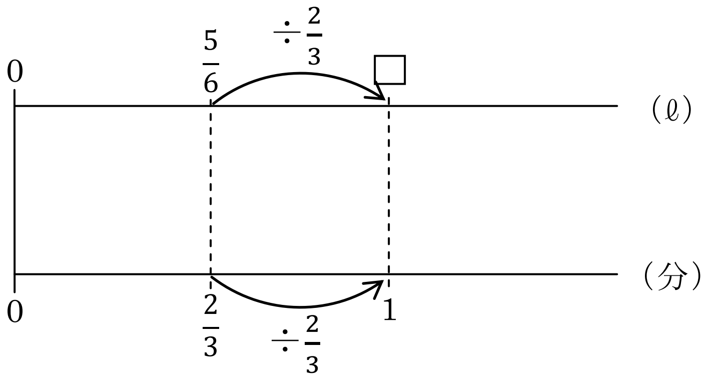


図 3－5

この計算過程は次のようになる．

$\square = \frac{5}{6} \div \frac{2}{3}$

$= \left(\frac{5}{6} \times \frac{3}{2}\right) \div \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\right)$ ・・・③

$= \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} \div 1$

$= \frac{5}{6} \times \frac{3}{2}$

また，数直線上の対応図を用いると，図 3－6 のように表すことができる．なお，図中の③は上の式の③に対応している．

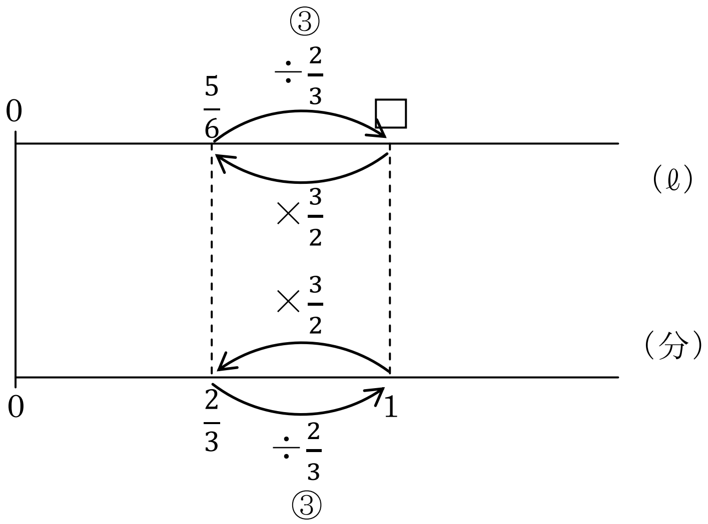


図 3－6

③では，$\div\frac{2}{3}$ をすることによって 1 を作っていることが確認できる．

また，この式は以下のように変形して解くことも考えられる．

$\square = \frac{5}{6} \div \frac{2}{3}$

$= (\frac{5}{6} \times 3) \div (\frac{2}{3} \times 3)$ ・・・④

$= \frac{5}{2} \div 2$

この場合の計算過程は数直線上の対応図を用いると図 3－7 のように表すことができる．なお，図中の④は上の式の④に対応している．

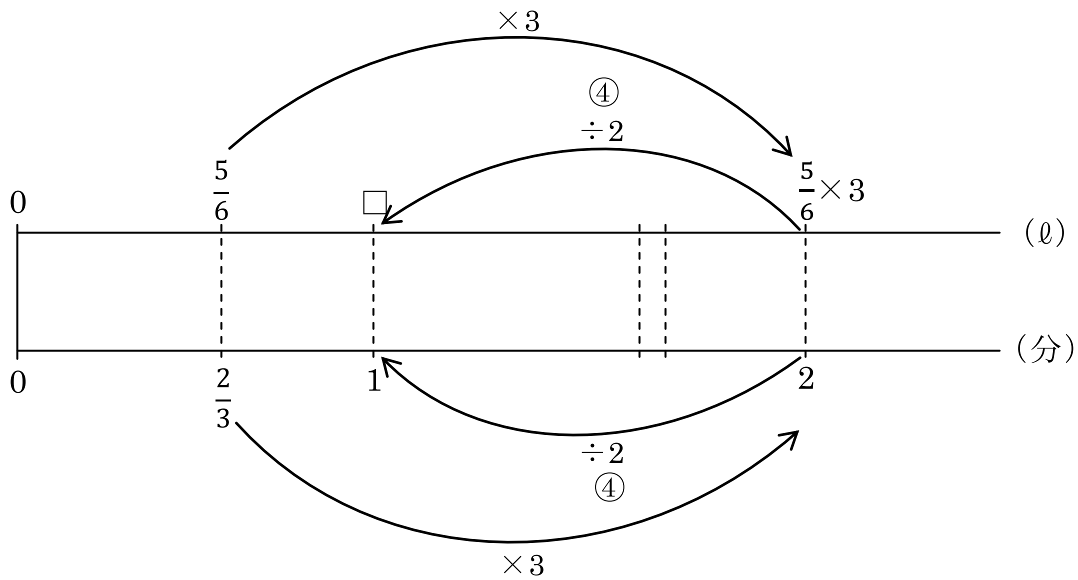


図 3－7

④では，÷2 をすることによって 1 を作っていることが確認できる．このことから，問題 A と同様に，$\frac{2}{3}$ を$\frac{5}{6}$ と見たときの 1 にあたるものを求める計算過程において，単位元が 1 であるかけ算についての逆元を求めるという考えが用いられていると言える．

以上の考察から，わり算の問題では，1 を作ることや 1 にあたるものを求めることが問題となっており，その計算過程において，単位元が 1 であるかけ算についての逆元を求めるという考えが用いられていると言える．

3.3.2　1 を求める場合でない問題

わり算の問題の中には，1 にあたるものを求める場合でないものもある．1 にあたるものを求める場合でない問題とは，次のような問題のことである．

問題例：3.6m が 900 円のリボンは 2m では何円か(矢部他，1999)

この問題場面の数量関係を 2 本の数直線上の対応図に表すと, 図 3－8 のようになる．

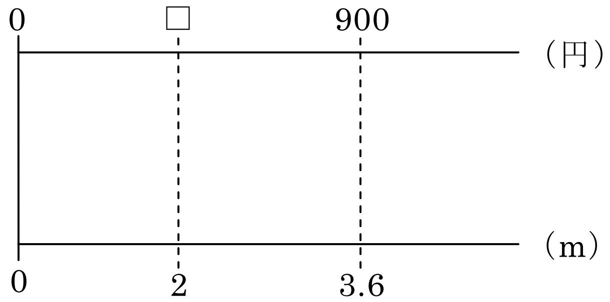


図 3－8

ここで, 期待される解法は大きく分けて 2 通り考えられる. 1 つ目は，900÷3.6 をして 1mの値段を求めるという段階を踏み，そこから 2 倍して解を求めるという方法である．この考え方を数直線上の対応図に表すと，図 3－9 のようになる．

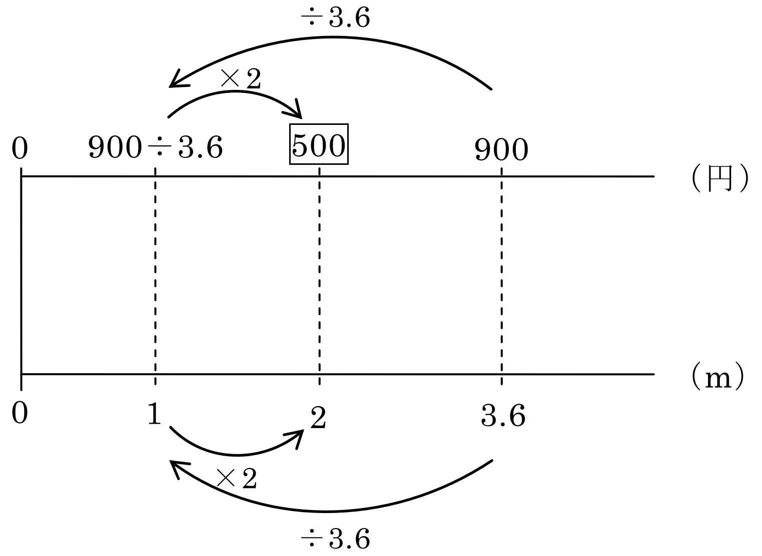


図 3－9

2 つ目は，図 3－10 のように下側の数直線に示した 2 数の関係から，上側の数直線でも同様に, 900÷1.8 をして直接解を求めるという方法である.

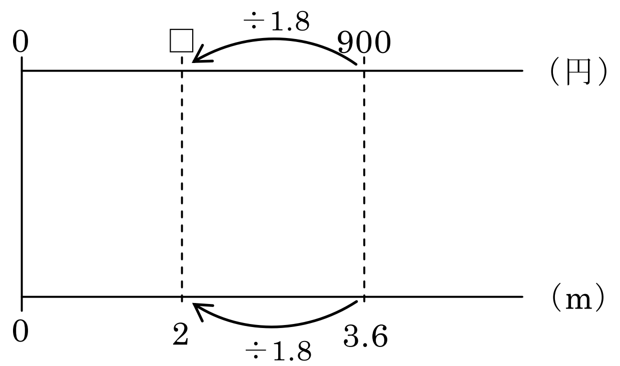


図 3－10

この方法では一見，1 にあたるものを求めるということが行われていないように思われる. しかし, 問題場面の数量関係から導き出した 900÷1.8 という式の計算過程を数直線上の対応図に表すと，次の図のように，単位元が 1 であるかけ算についての逆元を求めるという考えが用いられていることを確認することができる．したがって，1 にあたるものを求めるということが前提となっていると解釈することができる.

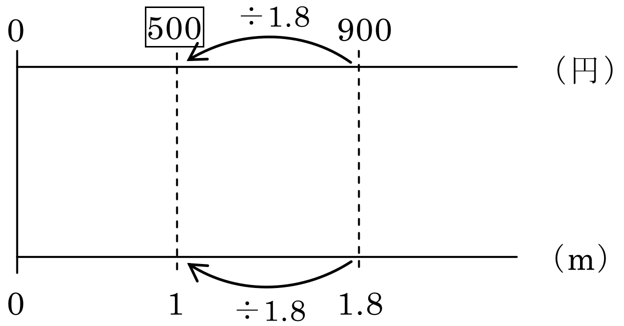


図 3－11

第3章の要約

本章では，わり算の数学におけるわり算の位置づけについて検討した．

わり算の問題では, 1 にあたるものを求める問題がほとんどである．この 1 にあたるものを求めるということには,「数学的には, 除法は, 乗法の逆演算として定義されるが，単位元が 1 である乗法についての逆元を考えると，乗法の逆演算が登場する」という数学的な位置づけがあると考えられる．

このことは，実際のわり算の問題場面の計算過程において，1 を作っていることが確認できることから，単位元が 1 であるかけ算についての逆元を求めるという考えが用いられていると言えることが明らかとなった．また，1 にあたるものを求める場合でない場合においても，その計算過程において，単位元が 1 であるかけ算についての逆元を求めるという考えが用いられていることを確認することができることから，1 にあたるものを求めるということが前提となっていると解釈することができる．

本章では，わり算について数学における位置づけについて明らかにしたが，学年，学校種間を通した一貫性のある学習指導を設計するためには，算数・数学教育におけるわり算の系統について明らかにすることが求められる．したがって次章では，算数・数学学習におけるわり算の系統について検討する．

第4章

算数・数学教育におけるわり算の学習内容の系統

本章では，算数・数学教育におけるわり算の系統について明らかにすることを目的とする.

4.1では,わり算の数学の立場での定義からわり算について述べるためには，かけ算について述べる必要があることを述べる．したがって，4.2において各学年で学習するかけ算の内容について検討した上で，4.3において各学年で学習するわり算の内容について検討する.そして，4.4では4.2，4.3において明らかとなった事柄を「わり算の学習内容の系統表」として示す.

第4章　算数・数学教育におけるわり算の学習内容の系統

4.1 除法は乗法の逆演算

数学では，除法は乗法の逆演算であると定義される．そして，この除法と乗法の関係は，第 3 章で述べたように，単位元が 1 である乗法についての逆元を考えると，逆演算が登場するという数学的な背景に基づいている．このことから，わり算について研究するにあたっては，かけ算についての系統についても，把握しておかなければならないと言える．

4.2 かけ算

かけ算を小学校 2 年生で学習する際では，「基準量×いくつ分」という同数累加の考え方で学習する．しかし，学年が進み，小学校 5 年生の乗数が小数となるかけ算になると，それまでの「基準量×いくつ分」という同数累加の考え方が適用できなくなる．ここでは形式不易の原理により，何倍の関係（a×b＝c）の形式を保存して「基準量×いくつ分」という意味から「基準量×割合」という意味に拡張される．そして,「基準量×割合」というように割合によって意味づけられる．このことにより，整数，小数の場合において，かけ算は「基準量×割合」と考え方が統合される．また，小学校 6 年生の乗数が分数となるかけ算，わり算及び中学校 1 年生の正の数・負の数のかけ算，わり算では，小数のかけ算で学習した「基準量×割合」の考え方が適用される．

4.3　わり算

4.3. 1　「等分除」と「包含除」

わり算を小学校 3 年生で学習する際では,「等分除」と「包含除」という同じ 32÷4 においても,（答えの 8 は同じでも）求めようとしている事柄とそのための操作が 2 つの場合でまったく異なる 2 つの考え方で学習する．しかし，図 4－1 のように，等分除の考えは包含除の考えに内包することができると考えられる．

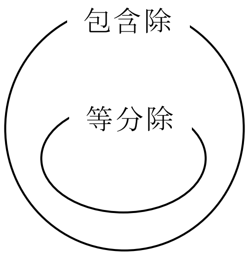


図 4－1

等分除に対して包含除が優位であることは，中島（1981）でも述べられている．

> たとえば,「32 個のチップを 4 人に同じように分配すると 1 人分は何個か」という等分除の場合は，（まず，トランプのカード配りのときのように）各人に 1 個ずつ配ると 4 個いることから，その問題は「4 個ずつの分配を何回行えば 32 個になるか」という包含除に帰着できる．このようにして，等分除の場合が実質的に包含除の場合に帰着できることから，いずれの場合も，同じわり算として 32÷4 を用いてもよいことを，子どもにも理解させることができるわけである．（中島，1981，p.13）

（例）15÷3＝5 の場合

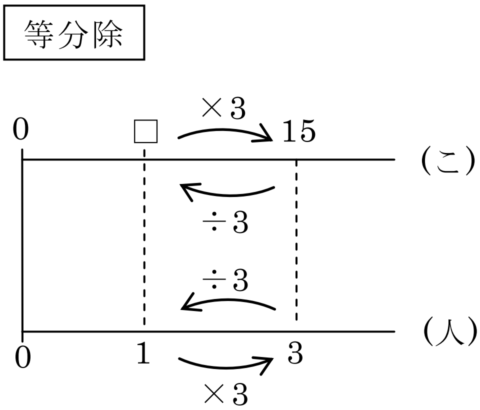


図 4－2

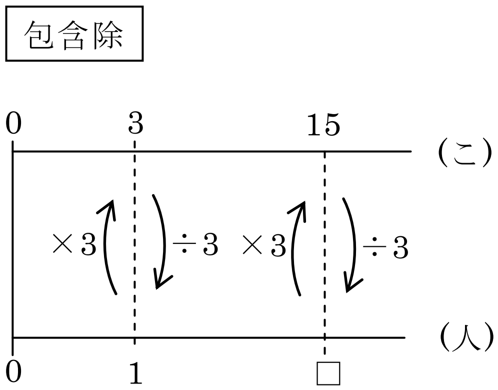


図 4－3

4.3.2　あまりのあるわり算

あまりのあるわり算は，等分除の場合では「等分する」という意味から「あまりが出る」ということが不自然である．もし，図 4－4 のように数直上の対応図に表したならば，実際に等分しているのは 15

÷3 の部分だけということになる．

問題：みかん 16 こを，3 人で同じ数ずつ分けます[3 年上 p 84]

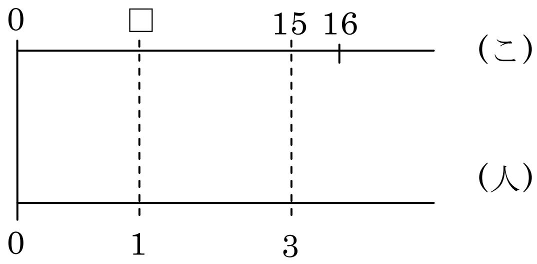


図 4－4　□=16÷3=5…1

「等分する」という意味に従い，先ほどの問題を用いてあまりのあるわり算を等分除で数直線上の対応図を用いて表すと図 4－5 のようになる．

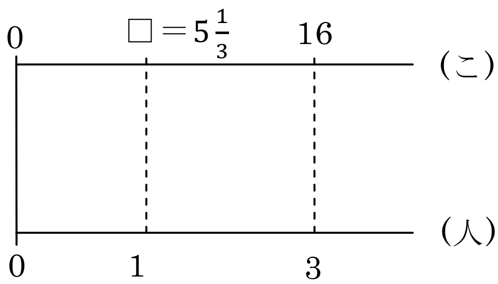


図 4－5　□=16÷3=5

これに対して包含除の場合では，図 4－6 のように数直線上の対応図で表される．

問題：17 人でゲームをします．3 人でグループをつくるとき，グループは何組できて，何人あまりますか[3 年上 p 81]

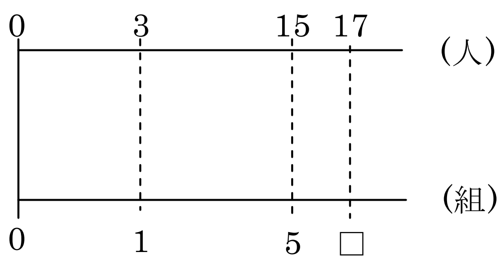


図 4－6　□=17÷3=5

このことから，あまりのあるわり算は包含除の場面で取り扱われるべきであると言える．

また，あまりのあるわり算についても，被除数＝除数×商＋あまりとすることで，除法が乗法の逆演算であるという関係にあることがわかる．したがって，あまりのあるわり算も，逆演算であるという関係でかけ算（同数累加）とつながる．

4.3.3　わり算の性質

小学校 4 年生では，何十のわり算において「除法及び被除数に同じ数をかけても同じ数で割っても商は変わらない」

a÷b=c

（a×m）÷（b×m）＝c

（a÷m）÷（b÷m）＝c

というわり算の性質について学習する．この性質は，小学校 5 年生で学習する小数のわり算，小学校 6 年生で学習する分数のわり算，中学校 1 年生で学習する正の数・負の数のわり算においても用いられる重要な性質である．「除法及び被除数に同じ数をかけても同じ数で割っても商は変わらない」というわり算の性質が成り立つ理由を確認するにあたって，除法は乗法の逆演算であるという関係及び 2 本の数直線上の対応図に表すことが重要となってくると考えられるが，このことについては第 5 章において述べることにする．

4.3.4　小数のわり算

小学校 5 年生の小数のわり算では，除数が小数であるわり算について学習する．数学では，除法は乗法の逆演算と定義されている．4.2 で述べたように，かけ算は「基準量×いくつ分」という同数累加の考えから，「基準量×割合」という考え方に拡張される．除法が乗法の逆演算であるという見方をしたとき，小数のわり算までの整数の範囲のわり算においては，同数累加の逆を行っていると言える．同様に，除数が小数となった場合のわり算の学習においても，図 4－7 のよう

に,「基準量×割合」という乗法の逆演算であると見ることができる.したがって，小数のかけ算と小数のわり算は，除法が乗法の逆演算であるという関係でつながる．また，整数，小数の場合においてわり算は「基準量×割合」の逆演算であると考え方が統合される．

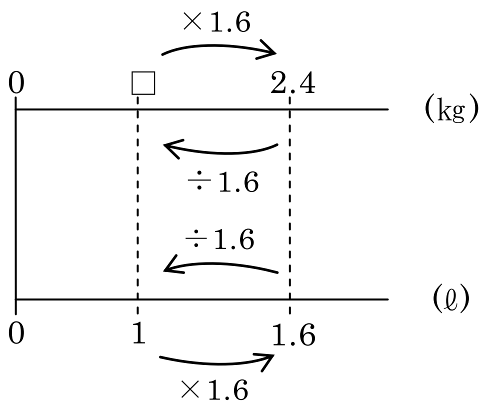


図 4－7　2.4÷1.6＝1.5

4.3.5　分数のわり算

小学校 6 年生の分数のわり算では，除数が分数であるわり算について学習する．ここでは，図 4－8 のように，5 年生の小数のわり算で学習した「基準量×割合」という乗法の逆演算であるという考えが適用される．したがって，小数の場合と同様に，分数のかけ算と分数のわり算は除法が乗法の逆演算であるという関係でつながる．

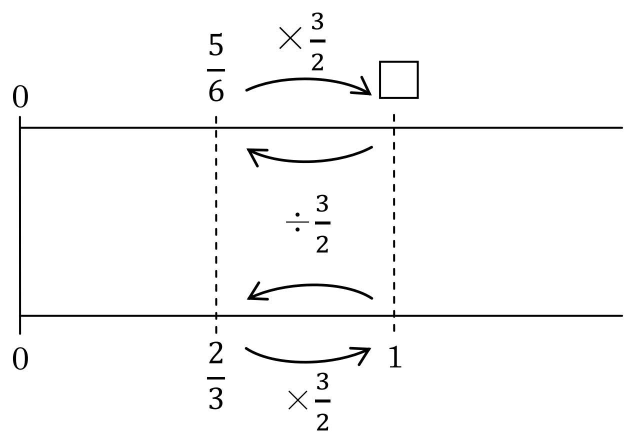


図 4－8　$\frac{5}{6}\div\frac{2}{3}$ の場合

4.3.6　正の数・負の数のわり算

正の数･負の数のわり算においても，小数，分数のわり算と同様に，図 4－9，図 4－10，図 4－11 のように，「基準量×割合」という乗法の逆演算であるという考えが適用される．したがって，正の数・負の数のかけ算と正の数・負の数のわり算は除法が乗法の逆演算であるという関係でつながる．なお，正の数・負の数のかけ算，わり算では，計算の意味を考えるにあたって正の数×（÷）負の数，負の数×（÷）正の数，負の数×（÷）負の数の場合において，符号の変換の問題が挙げられるが，このことについては第 5 章で取り上げることにする．

正の数÷負の数の場合

（例）6÷（－2）＝−3

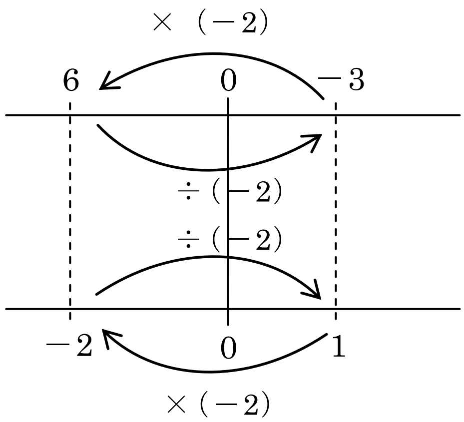


図 4－9

負の数÷正の数の場合

（例）(－6)÷2＝−3

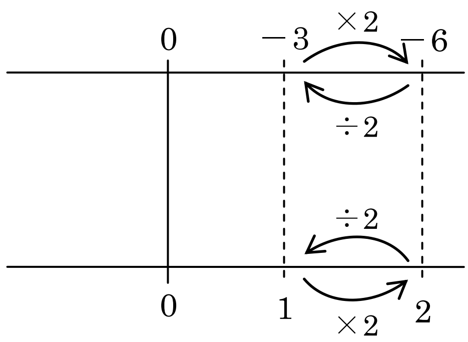


図 4－10

負の数÷負の数の場合

（例）（－6）÷（−2）＝−3

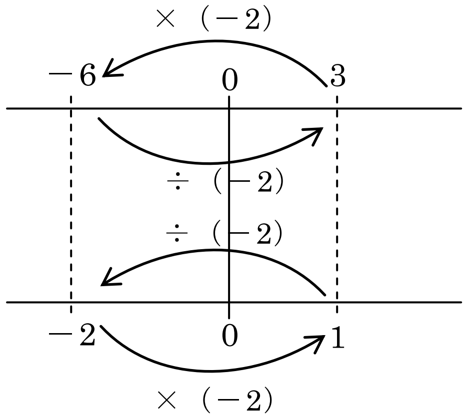
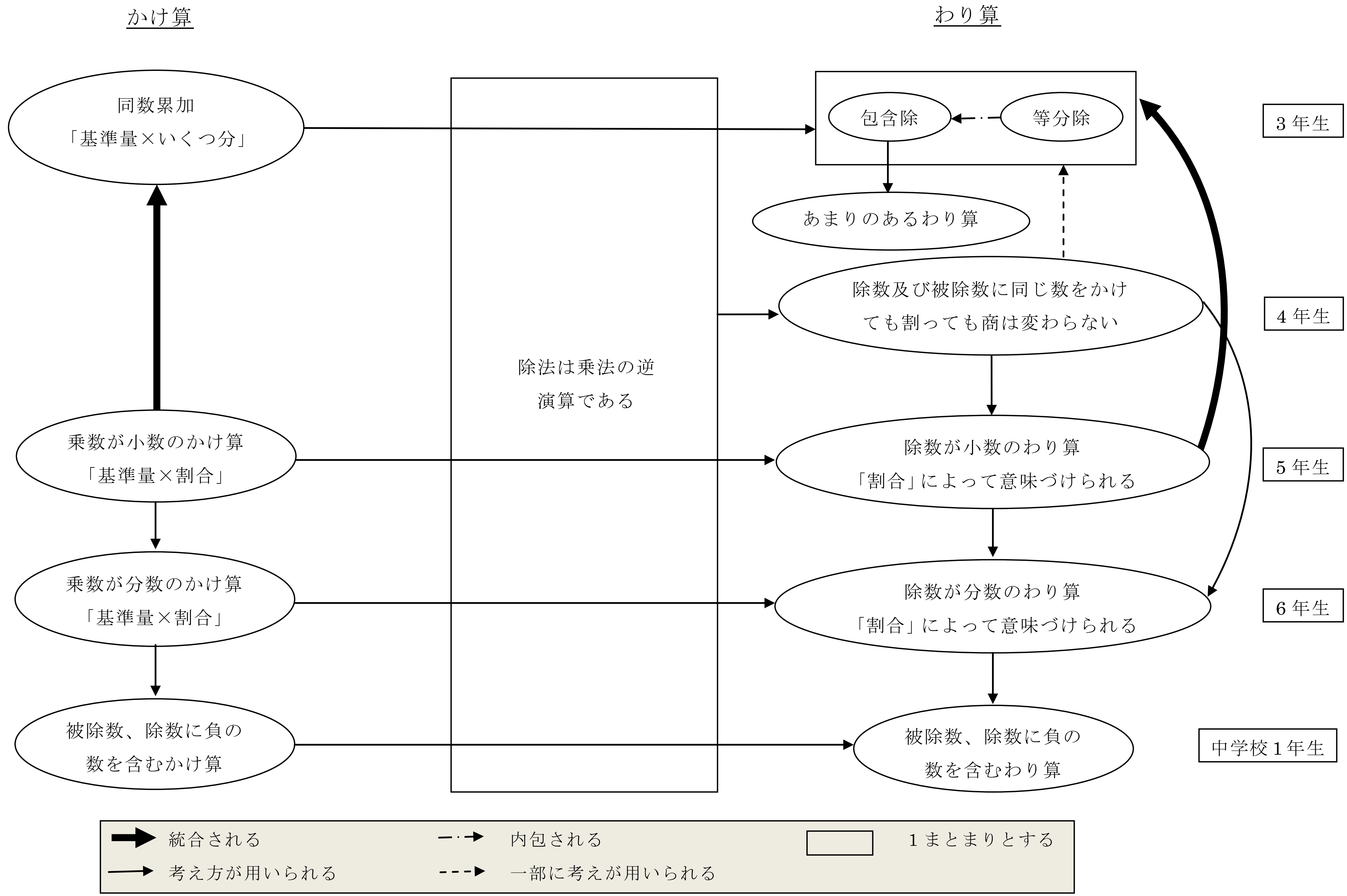


図 4－11

4.4 わり算の学習内容の系統

以上の事柄に基づいて,「わり算の学習内容の系統表」を構築すると,次のように表すことができる.

わり算の学習内容の系統表



第 4 章の要約

本章では，学年，学校種間を通した一貫性のある学習指導を設計するために，算数・数学教育におけるわり算の系統について検討した．その結果，明らかとなった要件は以下に示す2点である．

（1）数学では，除法は乗法の逆演算であると定義されていることから，わり算について研究するにあたっては，かけ算についての系統についても，把握する必要があること

（2）各学年におけるかけ算，わり算の学習内容について検討し，それらを「わり算の学習内容の系統表」として示したが，学年を通して用いられており，本研究の目的である今までに学習した知識を生かし，積み重ねていくことができるような学習指導を考えるにあたって重視するべき3つの関係が明らかとなった．それは，以下に示す関係である．

$\boxed{\text{I}}$ 除法は乗法の逆演算であるという関係

$\boxed{\text{II}}$ 除数及び被除数に同じ数をかけても同じ数で割っても商は変わらない」という関係

$\boxed{\text{III}}$ 「基準量×割合」とその逆演算の関係

したがって，次章では，本章で明らかとなった事柄を基に，本研究の目的である今までに学習した知識を生かし，積み重ねていくことができるような学習指導を設計し，教材を論理立てることが求められる．

第5章

わり算についての教材論理の検討

本章では，第2章において明らかとなった各学年でのわり算の学び方を表すための枠組みを用いて，第3章において明らかとなった数学におけるわり算の位置づけ，第4章において明らかとなった算数・数学教育におけるわり算の系統を基に，学習指導要領及び教科書分析を通してよりよいわり算の学習指導を設計する．そして，設計したわり算の学習指導を基に，わり算について教材を論理立てることを目的とする．

5.1 では，これまでの学習指導と本研究のねらいについて明らかにし，5.2，5.3では，数直線上の対応図を使ったよりよいわり算の学習指導を設計するために数直線上の対応図の構造分析を行った上で，学習指導における有効性について明らかにする．5.4では，わり算のTheorems-in-action（行為における定理）について明らかにし，5.5ではそれを用いて平成22年度版の教科書と比較しながら学習指導を設計する．そして，5.6では，本研究の視点から第4章で挙げたわり算の学習内容の系統を捉え直す．

第5章　わり算についての教材論理の検討

5.1 これまでの学習指導と本研究のねらい

本研究ではわり算について取り上げている．数学では，除法は乗法の逆演算と定義されており，教科書では各学年においてかけ算を学習した後にわり算を学習するようになっている．計算の意味を説明する際の道具に着目すると，5 年生の小数のかけ算・わり算では線分図，6 年生の分数のかけ算・わり算では面積図を用いるというように，それぞれの表現の特徴を生かした指導が行われている．しかし，ここには表現に関する一貫性という問題点があると以前からも指摘されてきた．（矢部他，1999）一方，平成 23 年度版の教科書からは 6 社すべてにおいて数直線上の対応図を取り扱うようになっている．

筆者は，今までに学習した知識を使って何とか問題を解決しようとする子どもを育てたいと考えている．このような子どもを育てるためには，子どもたちが今までに学習した知識を生かし，積み重ねていくことができるような学習指導が必要である．そこで，第 2 章で述べたベルニョの Theorems-in-action（行為における定理）に焦点を当て，第 4 章で挙げた「わり算の学習内容の系統表」に基づき，わり算における Theorems-in-action（行為における定理）について考察する．そして，どのように数直線上の対応図を使えばよりよいわり算の学習指導を設計することができるかについて検討する．

5.2 数直線上の対応図に関する構造分析

5.2.1　先行研究の考察

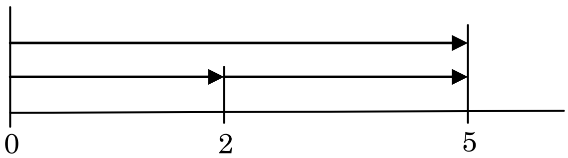
数直線上の対応図を使ったわり算の学習指導を設計するために，数直線上の対応図に関する構造分析を行っておくことが求められる．数直線上の対応図に関して，矢部他（1999）では，次のように書かれている．

1．数直線による四則演算の表現

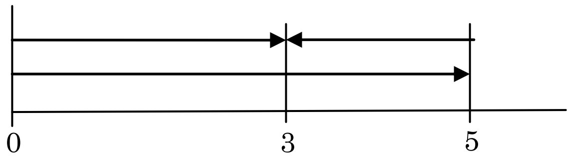
四則演算の説明具は，演算及び問題場面，数の種類によって異なる．一般的には，テープ図や線分図が中心であるが，分数の乗除の場合には面積図が用いられることもある．しかし，それぞれの特徴を生かして実際に学習指導を進める中で，四則演算の表現に関する一貫性という問題点が指摘される．

そこで，まず数直線による四則演算の表現について検討する．数直線は，原点からの距離が数の大きさを表し，点が数を表す．数直線を有効に活用するためには，四則演算について学習する前に，数を数直線上に位置付けなければならない．さらに，数を整数から分数，小数へと拡張するにしたがって，整数と整数の間の点にも数があり，大きさがあるという意識を育てることが必要である．このような意識を育てつつ，次のように四則演算を表現できる数直線を，各学年の内容に応じて一貫して活用していくものである．

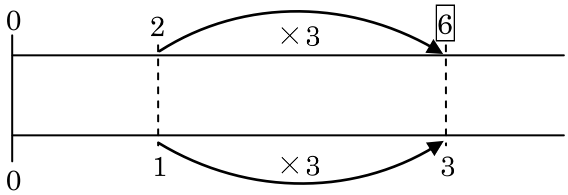
（1）加法　2＋3＝5



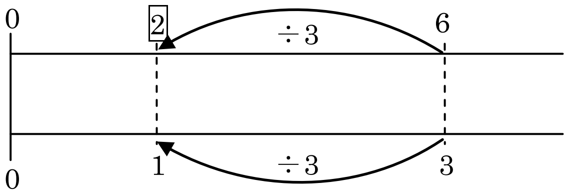
（2）減法　5－2＝3



（3）乗法　2×3＝6



（4）除法　6÷3＝2



5.2.2　先行研究への付け加え

5.2.1 で挙げた先行研究では，数直線による四則演算の表現について述べられているが，本研究では（3）乗法，（4）除法の数直線について，次の 2 点について付け加える．

① 乗法，除法になると数直線が 2 本になる理由

乗法と除法では数直線を 2 本用いて数量関係が表される．これを 1 本の数直線で図 5－1 のように表すことも可能である．しかし，かけ算，わり算では「基準となる量」とその「割合」の 2 数量が登場する．1 つの点が異なる 2 つの数を表すということには違和感があるため,2 本の数直線に分けて表す方がその数量関係を捉えやすいと考えられる．したがって，一方では「基準となる量」を表し，他方ではその「割合」を表す．

32÷4 の図式

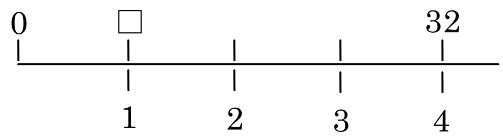


図 5－1

②単位元，逆元

かけ算とわり算の数量関係を 2 本の数直線上の対応図に表すと 4 つの数が関係している．第 3 章で述べたように，わり算では 1 にあたるものを求めることが問題となっている場合がほとんどである．つまり，この 4 つの数のうちの 1 つには 1 が含まれるため，乗法の単位元である 1 が図上に表されることになる．このことは，次のように確認することができる．

問題：15 このクッキーを，3 人に同じ数ずつ分けます．1 人分は何こになりますか[3 年上 p 25]

求めなければならない 1 人分のクッキーの個数を□ことすると，この問題場面のクッキーの数と人数の関係は，次のように数直線上の対応図で表すことができる．

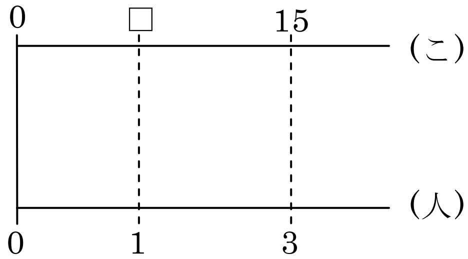


図 5−2

この問題は，数直線上の対応図をもとに，次のように立式できる．

□＝15÷3

この計算過程は数直線上の対応図を用いると図 5−3 のように表すことができる．

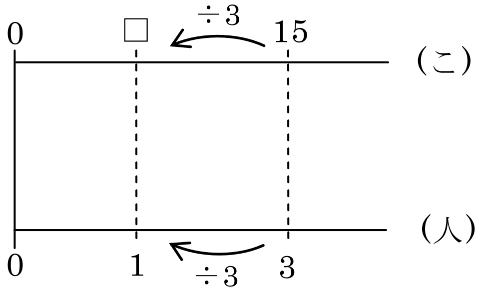


図 5−3

図 5−3 の下側の数直線において，÷3 をして 1 を作っているという点は，単位元が 1 であるかけ算についての逆元を求めるという考えが用いられていると見ることができる．

以上のことから，数直線上の対応図には，単位元，逆元ということが図自体に表されていると言える．ただし，1 にあたるものを求める場合でない問題もある．このことについては，3.3 において述べた事柄から，1 にあたるものを求める場合でない問題においても，その計算過程において，単位元が 1 であるかけ算についての逆元を求めるという考えが用いられていることを確認することができる．したがって，1 にあたるものを求めるということが前提となっていると解釈することができる．

5.3.　数直線上の対応図の有効性

本研究では，かけ算，わり算の学習指導において，数直線上の対応図を用いることは有効であると考える．その理由は以下に示す 2 点についてである．

1 点目は，表現に関する一貫性という点についてである．各学年のわり算の学習で用いられる考え方は，等分除の場合，包含除の場合，除数が有理数であるわり算の場合の 3 つであるが，それらの異なる考え方は 2 本の数直線上の対応図を用いると，図 5－4，図 5－5，図 5－6 のように表すことができる．

a÷b＝c の場合

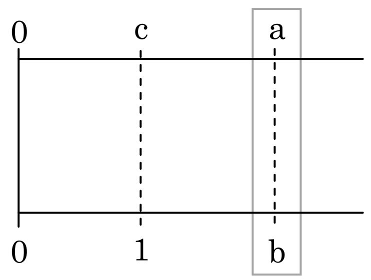


図 5－4　等分除の場合

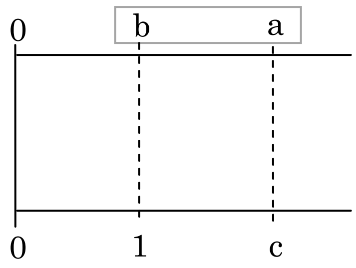


図 5－5　包含除の場合

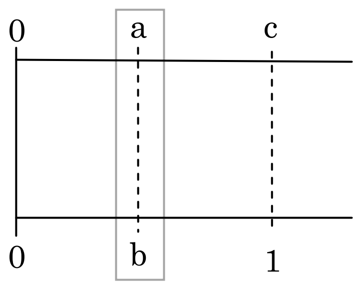


図 5－6　除数が有理数の場合

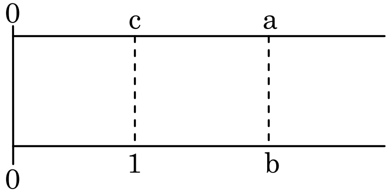
数直線上の対応図を用いると，小学校 3 年生から中学校 1 年生までに学習するわり算は次のように整理することができる．

２本の数直線の対応図を用いた各学年でのわり算

３年生

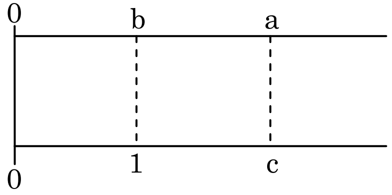
等分除

a÷b=c の場合



包含除

a÷b=c の場合



４年生

<u>小数÷整数</u>

「等分する」という考えが使われている

<u>わり算の筆算</u>

・２位数÷１位数

・２位数÷２位数

<u>何十でわるわり算（包含除）</u>

「除数及び被除数に同じ数をかけても、同じ数で割っても商は変わらない」

a÷b=c のとき、

(a×m)÷(b×m)=c

(a÷m)÷(b÷m)=c

５年生

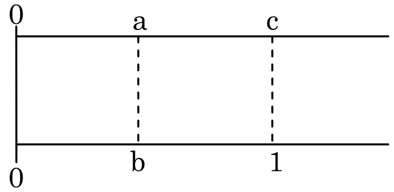
<u>分数÷整数</u>

「等分する」という考えが使われている

小数のわり算の筆算

整数÷小数、小数÷小数

a÷b=c の場合

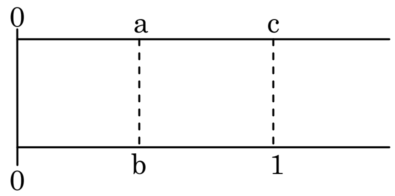


除数が小数のわり算になると、「等分する」という意味が適用できなくなり、割合によって意味づけられる。

6年生

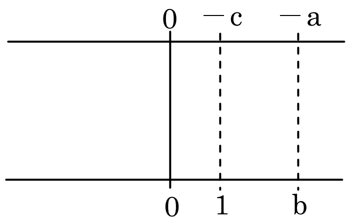
中学校
1年生

整数÷分数、分数÷分数（除数が分数の場合）



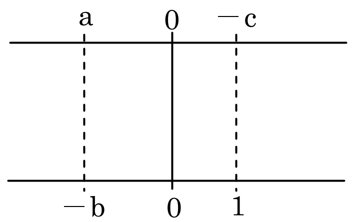
負の数÷正の数、正の数÷負の数、負の数÷負の数（除数または被除数が負の数）

（－a）÷b＝－c



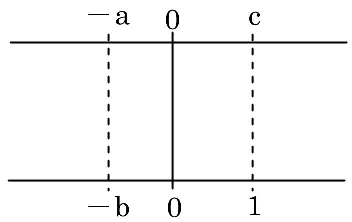
負の数÷正の数

a÷（－b）＝－c



正の数÷負の数

（－a）÷（－b）＝c



負の数÷負の数

このことから，数直線上の対応図は，問題場面に依存せず，解決の多様性を一般的に表すことができると言える．

2 点目は，数学的な本質という点についてである．第 3 章で述べたように，逆元を考えようとすると，逆演算が登場する．数直線上の対応図を用いて，わり算の計算の過程を図上で見ることで，単位元が 1 である乗法の逆元を考えるとわり算が登場することを確認することができる．

実際に子どもたちが単位元，逆元ということを知っているわけではない. しかし, 2 本の数直線上の対応図に問題場面の数量関係を表し，数直線上でその計算過程を見ることによって，除法は乗法の逆演算であることを説明することができる．そして，このことは単位元が 1 である乗法の逆元を考えたときに逆演算，つまり，わり算が登場するという数学的な背景に基づいていると言える．

以上の 2 点から，2 本の数直線上の対応図を用いることはかけ算，わり算の学習指導において，有効であると考える．

5.4 数直線上の対応図を用いたよりよいわり算の学習指導の設計を行うために

5.4.1 わり算における Theorems-in-action（行為における定理）

第 4 章で挙げたわり算の学習内容の系統表から，わり算における Theorems-in-action（行為における定理）は，以下の 3 点であると考える．

1 点目は，除法は乗法の逆演算であるという関係である．2 本の数直線上の対応図の有効性に支えられた除法は乗法の逆演算であるという関係は，いずれの学年のかけ算，わり算の学習においても考慮されるべき関係であり，学習指導を考えるにあたって重視するべき関係である．

2 点目は,「除数及び被除数に同じ数をかけても同じ数で割っても商は変わらない」という関係であり，これは小学校 4 年生の「何十でわるわり算」で登場する関係である．その後の小数のわり算，分数のわ

り算においても用いられる重要な関係である．

3点目は，「基準量×割合」とその逆演算の関係である．小学校5年生の小数のかけ算，わり算の学習で登場する「基準量×割合」とその逆演算の関係は，それまでに学習してきた整数の範囲における「基準量×いくつ分」という同数累加とその逆演算の考え方を統合するものである．また，その後の学習においても用いられていくものであり，学習指導を考えるにあたって重視するべき関係である．したがって，3点目については，「基準量×いくつ分」と「基準量×割合」の関係を区別するために，2つに分けて示すことにする．

以上の3点を以下のようにTheorems-in-action（行為における定理）TaⅠ～TaⅢとする．

TaⅠ：$c \times b = a \Leftrightarrow a \div b = c$

（除法は乗法の逆演算であるという関係）

TaⅡ：$a \div b = c \Leftrightarrow (a \times m) \div (b \times m) = c \Leftrightarrow (a \div m) \div (b \div m) = c$

（除数及び被除数に同じ数をかけても同じ数で割っても商は変わらないという関係）

TaⅢ－α：$a \times b = \sum_{k=1}^{b} a \quad \left(\sum_{k=1}^{b} a = \overbrace{a + a + a + \cdots + a}^{b\text{個}} \right)$

（同数累加）

TaⅢ－β：$Ap = B \ (A, B, p \in \mathbb{Q}, A \neq 0, B \neq 0, p \neq 0)$

（「基準量×割合」の関係）

ここでは,わり算のTheorems-in-action（行為における定理）を挙げているが，TaⅢについては，かけ算の形で示している．G.Vergnaud（1988）では，乗法構造の概念領域は，単純な乗法で演算決定されるような割合の問題として分析されたり，人が通常かける，または割る必要があったりするすべての状況から成り立つと述べられているよ

うに，かけ算とわり算は乗法構造という同じ構造の一部である．また，TaⅠで示しているように，数学では除法は乗法の逆演算と定義される．除法は乗法の逆演算であるという見方をすると，除法は，整数の範囲においては同数累加の逆演算を行っており，有理数の範囲においては「基準量×割合」の逆演算を行っていると言える．つまり，かけ算の考えが拡張されることでわり算の考え方も拡張される．言いかえれば，かけ算について示すことは，わり算について示していることにもなる．したがって，TaⅢについては，かけ算の形で示す．

なお，以降においては Theorems-in-action（行為における定理）について【TaⅠ】,【TaⅡ】,【TaⅢ－α】,【TaⅢ－β】と表記する．

5.4.2　わり算における Theorems-in-action（行為における定理）の違い

5.4.1 で 3 つの Theorems-in-action（行為における定理）を挙げたが，これらは，ある学年の学習のみで習得されるものではなく，学年を通してそれぞれの学年での学び方をすることで習得されていく．このような見方をすると，それぞれの Theorems-in-action（行為における定理）には，それ自体に変化があるものとそうでないものという違いがある．その違いについてここで触れておく．

①【TaⅠ】

【TaⅠ】（$a \div b = c \iff c \times b = a$）は，3 年生では（$a, b, c \in \mathbb{N}$）という条件で，4 年生では（$a, b, c \in \mathbb{N}$）という条件に（$a, c \in \mathbb{Q}^{+}, b \in \mathbb{N}$）という条件を付け加えて，「基準量×いくつ分」という同数累加の逆演算という学び方をする．しかし，小学校 5 年生の小数のかけ算になると，（$a, b, c \in \mathbb{Q}^{+}, b \neq 0$）という条件になる．そこで，形式不易の原理により，何倍の関係（$a \times b = c$）の形式を保存して「基準量×いくつ分」という意味から「基準量×割合」という意味に拡張される．そして，分数の場合では，小数の場合と同様の（$a, b, c \in \mathbb{Q}^{+}, b \neq 0$）という条件で，中学校 1 年生の正の数・負の数では（$a, b, c \in \mathbb{Q}, b \neq 0$）という条件に変更され，適用される．したがって，各学年において条件

の変更は行われるが，【TaⅠ】（$a \div b = c \Leftrightarrow c \times b = a$）自体に変化はないと言える．

②【TaⅡ】

【TaⅡ】（$a \div b = c \Leftrightarrow (a \times m) \div (b \times m) = c \Leftrightarrow (a \div m) \div (b \div m) = c$）は，4 年生の「何十でわるわり算」の場面で用いる．ここでは，整数の範囲において，除数と被除数に 10 や 100 などに数を限ってかけたり割ったりする．つまり，（$a, b, c \in \mathbb{N}$）の一部という条件で，【TaⅡ】（$a \div b = c \Leftrightarrow (a \times m) \div (b \times m) = c \Leftrightarrow (a \div m) \div (b \div m) = c$）を用いることができるという学び方をする．そして，学年が進むにつれて小数，分数のかけ算，わり算になると，（$a, b, c \in \mathbb{Q}^+, b \neq 0$）という条件で適用できるという学び方をする．続いて，中学校 1 年生の正の数・負の数のかけ算，わり算になると，条件が（$a, b, c \in \mathbb{Q}, b \neq 0$）と変更され，適用できるという学び方をする．したがって，【TaⅠ】と同様に，各学年において条件の変更は行われるが，【TaⅡ】自体に変化はないと言える．

③【TaⅢ】

2，3 年生では，（$a, b, c \in \mathbb{N}$）という条件で，4 年生では（$a, b, c \in \mathbb{N}$）という条件に（$a, c \in \mathbb{Q}^+, b \in \mathbb{N}$）という条件を付け加えて，【TaⅢ－$\alpha$】（$a \times b = \sum_{k=1}^{b} a$）という学び方をする．しかし，5 年生の小数のかけ算になると，（$a, b, c \in \mathbb{Q}^+, b \neq 0$）という条件になる．そこで，形式不易の原理により，何倍の関係（$a \times b = c$）の形式を保存して「基準量×いくつ分」という意味から「基準量×割合」という意味に拡張される．そして【TaⅢ－α】（$a \times b = \sum_{k=1}^{b} a$）は【TaⅢ－$\beta$】（$Ap = B$（$A, B, p \in \mathbb{Q}, A \neq 0, B \neq 0, p \neq 0$））に統合され，6 年生の分数

のかけ算，わり算は小数の場合と同様の（a，b，$c \in \mathbb{Q}^{+}$，$b \neq 0$）という条件で適用され，中学校 1 年生の正の数・負の数のかけ算，わり算では（a，b，$c \in \mathbb{Q}$，$b \neq 0$）という条件に変更され適用される．したがって，【TaⅢ】は，【TaⅠ】,【TaⅡ】と異なり，各学年における条件の変更に加えて，【TaⅢ】自体が拡張され，2 段階の変化があると言える．

5.4.3　学習指導の検討を行うために

数直線上の対応図を使ったよりよいわり算の指導を考えるために，各学年においてどのような事柄がより強調される必要があるかについて検討する．検討するべき項目として次の 6 点を挙げる．

○小学校 3 年生

○小学校 4 年生

○小学校 5 年生の小数のかけ算

○小学校 5 年生の小数のわり算

○小学校 6 年生

○中学校 1 年生

5.5 学習指導の設計

5.5.1　小学校 3 年生

小学校 3 年生では，整数の範囲で包含除と等分除の 2 つの考え方でわり算を学習する．3 年生では，【TaⅠ】（$a \div b = c \iff c \times b = a$）について，それまで学習してきた同数累加の逆演算であるという学び方をする．ここでは，【TaⅠ】（$a \div b = c \iff c \times b = a$）についてその仕組みをしっかりと把握しておく必要があると考える．除法は乗法の逆演算であるという点について見ると，平成 20 年度学習指導要領の中でも，「除法は乗法の逆算であるため，乗法と関連させて，被除数，乗数のいずれを求める場合に当たっているかを明確にすることも大切である」とされている．現行（平成 22 年度版）の教科書でも，わり算の問題を考える際の手がかりとして，次のようにかけ算の式が示

されている.

$\boxed{\text{等分除}}$

問題：24 このいちごを，3 人に同じ数ずつ分けると，1 人分は何こになりますか.

$\boxed{\text{1 人分の数}}$×3 が 24 こだから，1 人分の数は，□×3＝24 の□にあてはまる数と同じになります. [3 年上 p 27]

$\boxed{\text{包含除}}$

問題：12 このあめを，1 人に 3 こずつ分けると，何人に分けられますか.

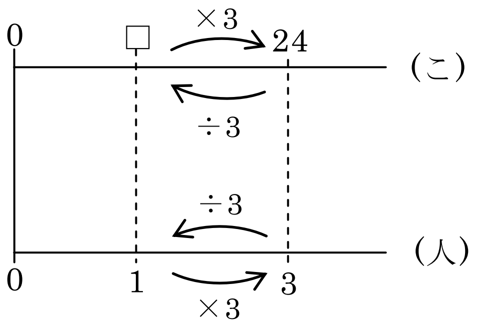
3×$\boxed{\text{人数}}$が 12 こだから，人数は，3×□＝12 の□にあてはまる数と同じになります.

[3 年上 p 29]

これに関して，本研究では，数直線上の対応図を用いて下のように乗法と除法の関係を示すことで，図中の矢印の関係から【Ta I】(a÷b＝c ⟺ c×b＝a) を視覚的に確認できるようにしたいと考える. それにより，単位元が 1 であるかけ算の逆元を考えたときにわり算が登場するということが見え，除法は乗法の逆演算であるという関係がより把握しやすいと考える.

等分除

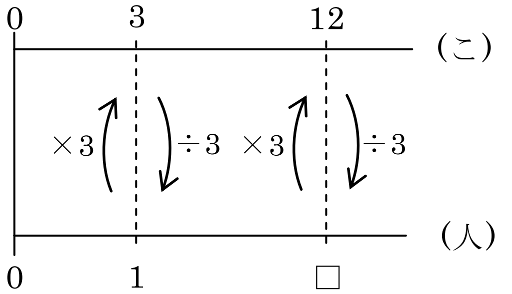
問題：24 このいちごを，3 人に同じ数ずつ分けると，1 人分は何こになりますか.



□×3＝24
□を求めるには
（数直線を手がかりに）
24÷3＝8

包含除

問題：12 このあめを，1 人に 3 こずつ分けると，何人に分けられますか.



□×3＝12
□を求めるには
（数直線を手がかりに）
12÷3＝4

5.5.2　小学校 4 年生

小学校 4 年生では，【TaⅡ】（a÷b＝c　⇔　（a×m）÷（b×m）＝c　⇔　（a÷m）÷（b÷m）＝c）について，「何十でわるわり算」の場面において，整数の範囲で除数と被除数にかけたり割ったりする数を 10 や 100 などに限って用いるという学び方をする．ここでは，【TaⅡ】（a÷b＝c　⇔　（a×m）÷（b×m）＝c　⇔　（a÷m）÷（b÷m）＝c）が成立する根拠を把握しておく必要がある．そのときに，3 年生で学習した【TaⅠ】（a÷b＝c　⇔　c×b＝a）に基づいているということにも触れる必要があると考える．この部分について現行（平成 22 年度版）の教科書では次のような問題が挙げられ，わり算の性質に関する関係を示している．

問題：6÷2，60÷20，600÷200 の計算について調べましょう．

答えがみんな 3 になるわけを考えましょう．[4 年下 p 41]

60 ÷ 20

10 でわる ↓↑ ↓↑ 10 をかける

6 ÷ 2

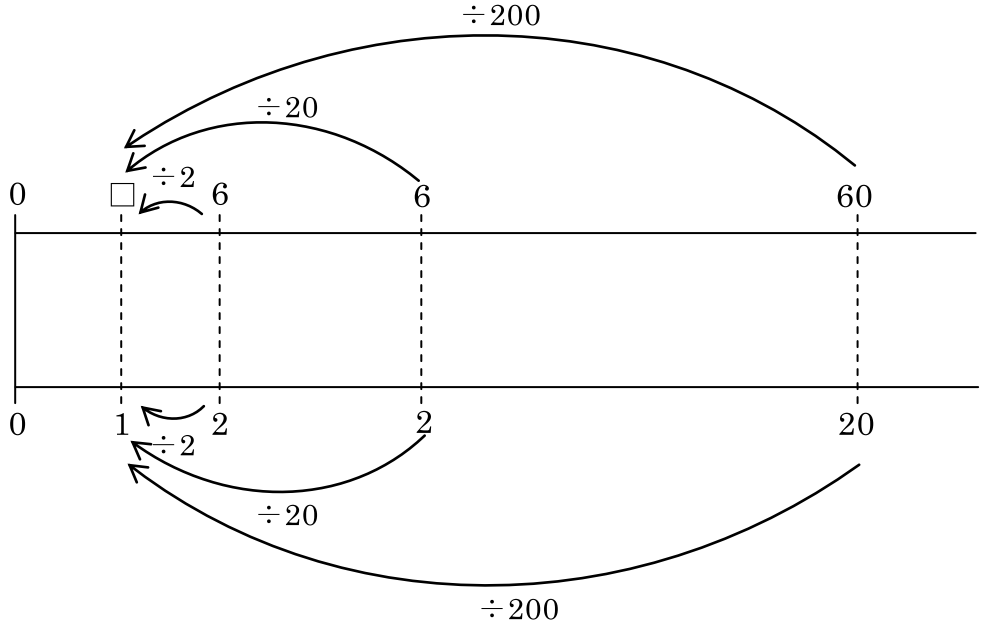
600 ÷ 200

10 でわる ↓↑ ↓↑ 10 をかける

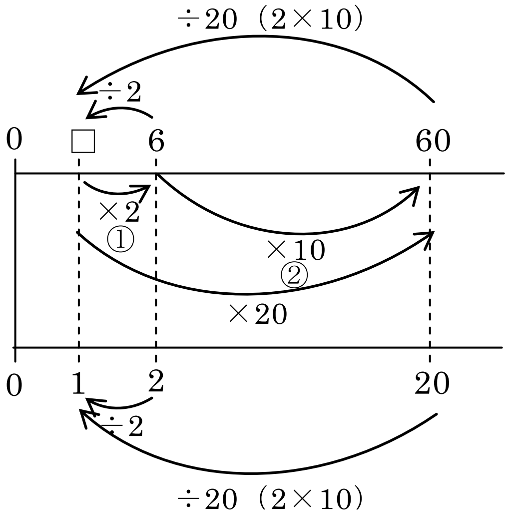
6 ÷ 2

これに関して，本研究では，わり算の性質について考えるにあたって，2 本の数直線上の対応図を用いて，下のようにそれぞれのわり算の式の関係を示すことで，数直線上の対応図上で矢印の関係から，【Ta Ⅱ】（a÷b＝c ⟺ （a×m）÷（b×m）＝c ⟺ （a÷m）÷（b÷m）＝c）が，成立する根拠及び【Ta Ⅰ】に基づいているということを視覚的に確認できるようにしたいと考える．それにより，3 年生において学習した【Ta Ⅰ】とそのことを確認した際の数直線上の対応図における矢印の関係の見方を使うことができる．

問題：答えがみんな 3 になるわけを考えしょう．[4 年下 p 41]
下のように数直線上の対応図に，6÷2，60÷20，600÷200 の数量関係を表し，計算をしたときの数の動きを矢印で表す．

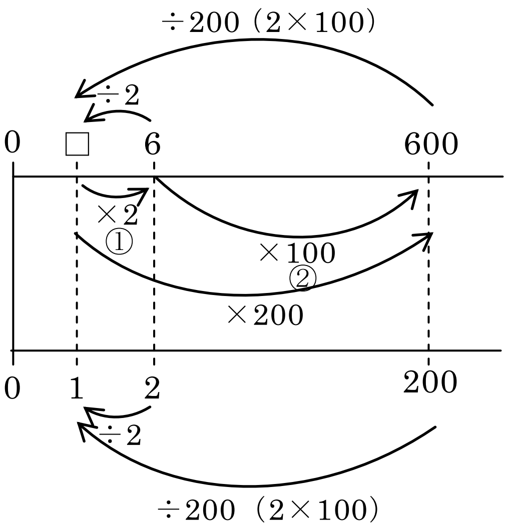


除数と被除数に同じ数をかけても割っても，1 にあたる値を求めるという同じ計算をしていることが分かる．また，3 年生で学習した除法は乗法の逆演算であるという関係から下の図のように 6÷2，60÷20，600÷200 の答えがすべて 3 になる理由を確認することができる．



数直線上の対応図を見ると、6÷2 では両辺を 2 で割っており、60÷20 では両辺を 20 で割っているが、この 20 は①と②をかけたものと見ることができる。

6÷2 と 60÷20 の場合



数直線上の対応図を見ると、6÷2 では両辺を 2 で割っており、600÷200 では両辺を 200 で割っているが、この 200 は①と②をかけたものと見ることができる。

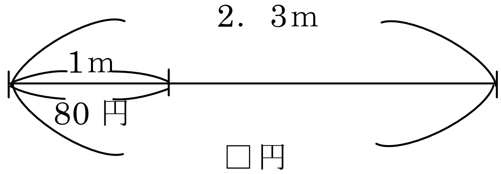
6÷2 と 600÷200 の場合

5.5.3　小学校 5 年生の小数のかけ算

小学校 5 年生の小数のかけ算では，形式不易の原理により，それまでに用いていた【TaⅢ－α】($a\times b=\sum_{k=1}^{b} a$)がうまく適用できなくなる．そして，【TaⅢ－β】（Ap＝B（A，B，$p\in\mathbb{Q}$，A≠0，B≠ 0，p≠0)）という考え方に拡張される．ここでは，【TaⅢ－α】($a\times b=\sum_{k=1}^{b} a$) が【TaⅢ－β】（Ap＝B（A，B，$p\in\mathbb{Q}$，A≠0，B≠ 0，p≠0)）に意味が変わること，そして，今まで用いてきた【TaⅢ－α】($a\times b=\sum_{k=1}^{b} a$) が【TaⅢ－β】（Ap＝B（A，B，$p\in\mathbb{Q}$，A≠0，B≠ 0，p≠0)）に統合されることを強調する必要がある．その部分について，現行（平成 22 年度）の教科書では次のような指導が行われている．

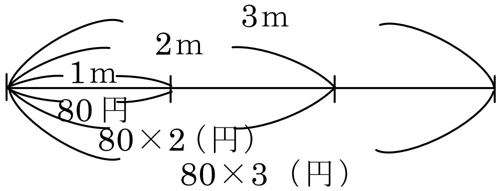
問題：$\boxed{1}$　1mの 80 円のリボンを 2.3m買ったときの代金を求めましょう．[5 年生上 p 69]

まず数量の関係を右のような線分図で表し，



2mのとき・・・80×2

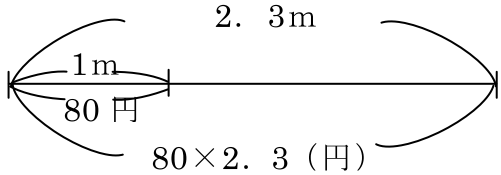
3mのとき・・・80×3



として，代金を求める式をことばの式で表す．

$\boxed{\text{1mのねだん}} \times \boxed{\text{長さ}} = \boxed{\text{代金}}$

乗数が小数の場合でも適用できることをおさえる．

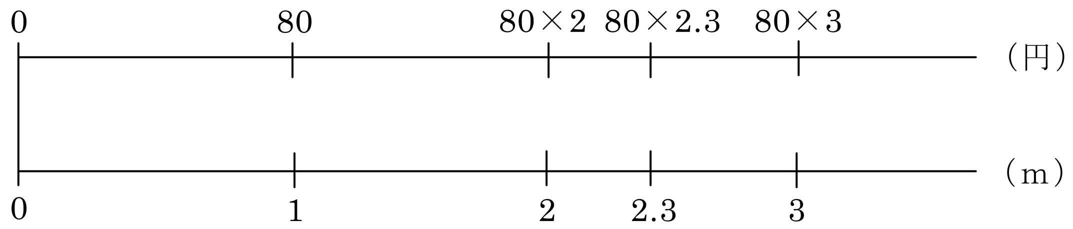


教科書では，線分図を用いた説明が行われているが，5.1 でも述べたように，ここには表現に関する一貫性という問題点があると指摘される．また，「ことばの式」は問題によって異なっており，この点に関して場面に依存するという問題点が指摘される．このことについて，伊藤（2008）では次のような指摘がされている．「個々の問題場面に応じて，この場合は○○だからかけ算で，あの場面は△△だからわり算で，というようなキーワードや言葉の式などに依存した，場合分けを教え込むことが混乱の原因になっている．というのは，そうしたやり方はその場しのぎにはなるかもしれないが，数量の関係のとらえ方としての基本が身に付かないからである．」（伊藤，2008，p.96）

これに関して，本研究は，数直線上の対応図を用いて下のようにリボンの長さが 2 倍，3 倍，そして 2.3 倍となったときのリボンの長さ

と値段の関係を示すことで，【TaⅢ－α】（$a\times b=\sum_{k=1}^{b} a$）が小数の場合においても適用できることから，【TaⅢ－β】（$Ap=B$（$A, B, p\in\mathbb{Q}, A\neq 0, B\neq 0, p\neq 0$））に拡張されることを視覚的に確認できるようにしたいと考える．これにより，数直線上に2つの数量の比例関係を見ることができ，数直線上に必ず解が存在するということを把握することができると考える．

問題場面から数直線の1にあたるところは80である．2にあたるところは80の2倍で3にあたるところは80の3倍で80×3，同じように，2.3にあたるところは80の2.3倍で80×2.3とする．

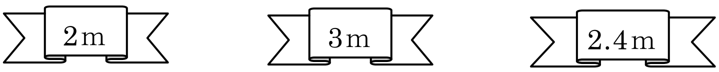


5.5.4　小学校5年生の小数のわり算

小学校5年生では，【TaⅢ】について，数の範囲が小数まで広がることから，それまで用いてきた【TaⅢ－α】（$a\times b=\sum_{k=1}^{b} a$）の逆演算が適用できなくなり，【TaⅢ－$\beta$】（$Ap=B$（$A, B, p\in\mathbb{Q}, A\neq 0, B\neq 0, p\neq 0$））の逆演算に拡張される．そして，【TaⅢ－$\alpha$】（$a\times b=\sum_{k=1}^{b} a$）の逆演算が【TaⅢ－$\beta$】（$Ap=B$（$A, B, p\in\mathbb{Q}, A\neq 0, B\neq 0, p\neq 0$））の逆演算に統合されるという学び方をする．【TaⅠ】（$a\div b=c \Leftrightarrow c\times b=a$）については，「基準量×割合」の逆演算という関係に対して適用できるという学び方をする．【TaⅡ】（$a\div b=c \Leftrightarrow (a\times m)\div(b\times m)=c \Leftrightarrow (a\div m)\div(b\div m)=c$）については，整数の範

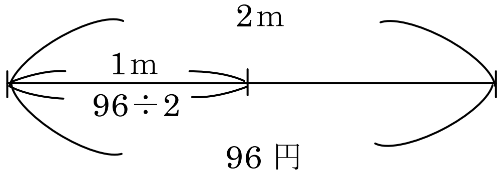
囲だけではなく，小数の場合にも適用できるという学び方をする．したがって，ここでは，その 3 点について強調する必要がある．その部分について，教科書では次のように書かれている．

問題：$\boxed{1}$　次の 3 種類のひものねだんは，どれも 96 円です．
それぞれのひもの 1mのねだんは何円ですか．
[5 年生上 p 78]

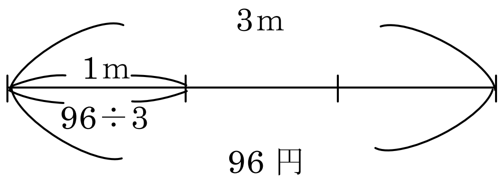


まず数量の関係を線分図で表し，

2mのとき・・・96÷2



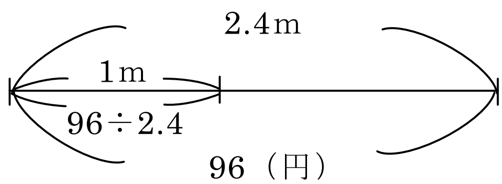
3mのとき・・・96÷3



として，1mのねだんを求める式をことばの式で表す．

$\boxed{代金}$ ÷ $\boxed{長さ}$ ＝ $\boxed{1mのねだん}$

除数が小数の場合でも適用できることをおさえる．

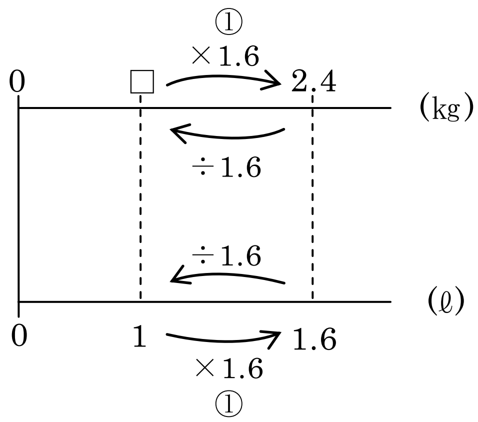


教科書で行われている指導に関しては，5.5.3 で述べた小数のかけ算の場合と同様の問題点が指摘される．

これに関して本研究では，2 本の数直線上の対応図を用いて，次のように，既習の小数のかけ算を用いて立式し，解を求める式としてわり算を導くことができるようにしたいと考える．これにより，図上の

矢印の関係から，【TaⅠ】（a÷b＝c $\Leftrightarrow$ c×b＝a），【TaⅢ－α】（a ×b=$\sum_{k=1}^{b} a$ ）の逆演算から【TaⅢ－β】（Ap＝B（A，B，p∈ℚ，A≠0，B≠ 0，p≠0)）の逆演算に意味が拡張されること，そして統合されることを視覚的に捉えることができる．また，その計算過程も同様に数直線上の対応図を用いて表すことができ，【TaⅡ】（a÷b＝c $\Leftrightarrow$ （a×m）÷（b×m）＝c $\Leftrightarrow$ （a÷m）÷（b÷m）＝c）を図上で確認することができる．これにより，【TaⅡ】が整数の範囲だけではなく，小数の場合にも適用できることを把握することができると考える．

問題：すなが 1.6ℓあります．重さをはかったら，2.4 ㎏ありました．このすな 1ℓの重さは何㎏ですか．

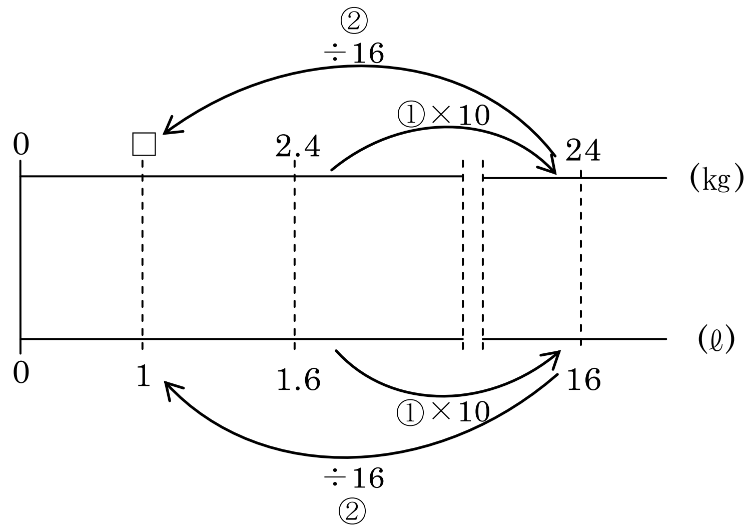


→①矢印の方向へ 1.6 倍されているから

□×1.6＝2.4

←□に当たる数を求めるには，かけ算の逆算で

2.4÷1.6＝1.5



計算過程

①整数にするために×10 をする

②下側の数直線において，1 を作るために÷16 をする

5.5.5　小学校 6 年生

小学校 6 年生では，【TaⅠ】(a÷b＝c　⟺　c×b＝a）について，分数のかけ算，わり算においても 3，4，5 年生における学習と同様に適用できるという学び方をする．【TaⅡ】(a÷b＝c　⟺　（a×m）÷（b×m）＝c　⟺　（a÷m）÷（b÷m）＝c）については，整数，小数の場合と同じように分数の場合にも適用できるという学び方をする．【TaⅢ】については，5 年生の小数のわり算で用いた【TaⅢ－β】(Ap＝B（A，B，p∈ℚ，A≠0，B≠ 0，p≠0)）が分数の場合にも適用できるという学び方をする．したがって，ここでは，その 3 点について強調する必要がある．その部分について，教科書では次のように書かれている．

問題 $\boxed{1}$ かべにペンキをぬっていきます．

㋐ $\frac{7}{8}$ m^2 のかべを 2 dℓでぬれるペンキがあります．1 dℓでは何 m^2 ぬれますか．

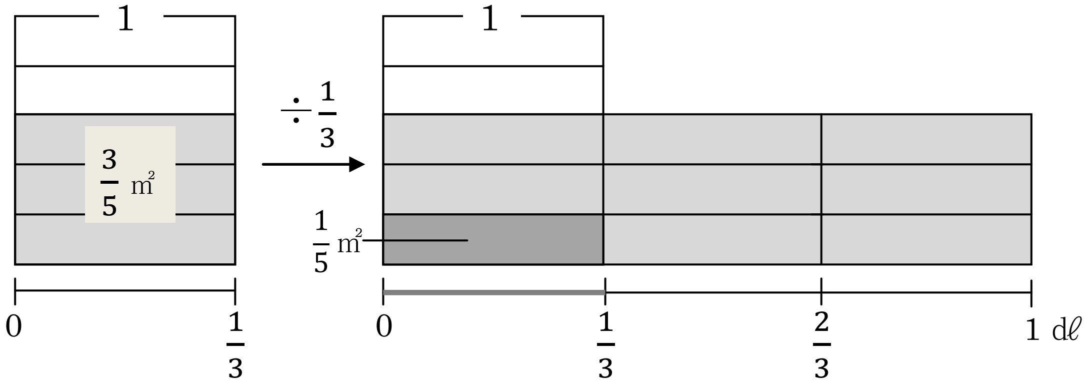
ペンキ 1 dℓでぬれる面積を求める式をことばの式で表す．

$\boxed{\text{ぬれる面積}} \div \boxed{\text{ペンキの量}} = \boxed{\text{1 dℓでぬれる面積}}$

$\frac{7}{8} \div 2$

㋑ $\frac{3}{5}$ m^2 のかべを $\frac{1}{3}$ dℓでぬれるペンキがあります． 1 dℓでは何 m^2 ぬれますか．

ぬった面積　　　　　　　　　　1 dℓでぬれる面積



1 dℓは $\frac{1}{3}$ dℓの 3 倍だから，

$\frac{3}{5} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{5} \times 3$

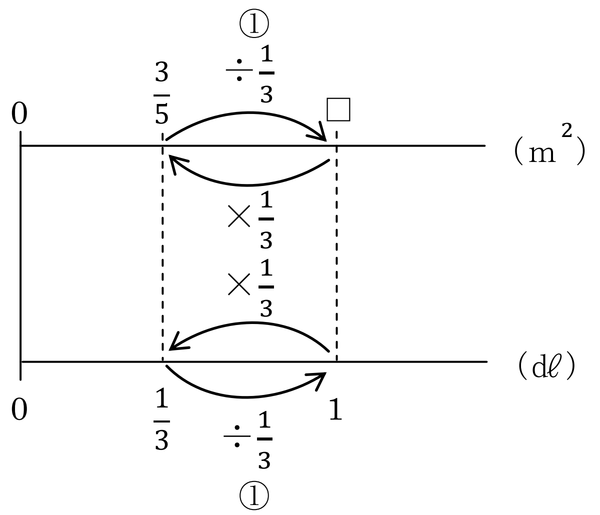
$= \frac{9}{5}$　　　　　　　　$\underline{\frac{9}{5}\text{m}^2}$

教科書では，5 年生の小数のかけ算，わり算では線分図を用いるが，6 年生の分数のかけ算，わり算では面積図を用いており，5.1 でも述べたように，ここには表現に関する一貫性という問題点があると指摘される．また，面積図は上に挙げている問題のような場合には有効であるかもしれないが，$\frac{81}{100}$ のように分母と分子がより大きな数になった場合には有効であるとは言えないことが指摘できる．このことについ

て，杉山（1997）では次のような指摘がされている．「面積図は分数の学習で比較的多く使われ，整数や小数の学習ではあまり使われていません．面積図自体を否定するのではありませんが，面積図だけを用いた説明では，「分数のかけ算は整数や小数のかけ算とは別もの」というイメージを子どもにもたせるおそれがあります．」（杉山，1997，p.49）

これに関して本研究では，2 本の数直線上の対応図を用いて，次のように，既習の分数のかけ算を用いて立式し，解を求める式としてわり算を導くことができるようにしたいと考える．これにより，図上の矢印の関係から，分数のわり算においても 3，4，5 年生で用いてきた【TaⅠ】（a÷b＝c ⇔ c×b＝a），5 年生の小数のわり算で用いた【TaⅢ－β】（Ap＝B（A，B，p∈ℚ，A≠0，B≠0，p≠0））の逆演算という関係を視覚的に捉えることができる．また，その計算過程も同様に数直線上の対応図を用いて表すことができ，【TaⅡ】（a÷b＝c ⇔ （a×m）÷（b×m）＝c ⇔ （a÷m）÷（b÷m）＝c）を図上で確認することができる．これにより，【TaⅡ】が整数，小数の場合と同じように分数の場合にも適用できることを把握することができると考える．

問題：$\frac{3}{5}$ m^2 のかべを$\frac{1}{3}$dℓでぬれるペンキがあります．1 dℓでは何m^{2}ぬれますか．

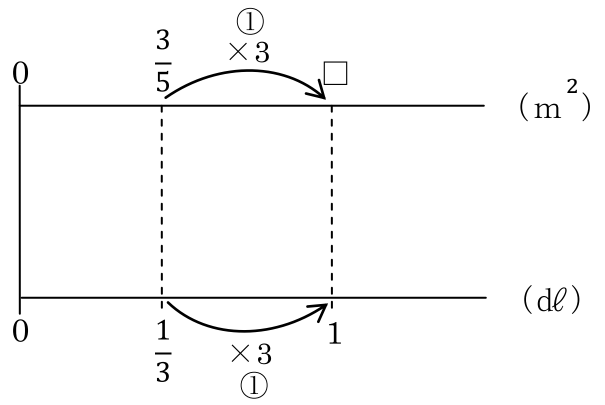


→①矢印の方向へ$\frac{1}{3}$倍されているから

$□\times\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$

←□に当たる数を求めるには，かけ算の逆算で

$\frac{3}{5}\div\frac{1}{3}=\frac{9}{5}$



計算過程

①下側の数直線において，1 を作るために×3 をする

5.5.6　中学校 1 年生

中学校 1 年生では，【TaⅠ】(a÷b＝c ⟺ c×b＝a) について，正の数・負の数のかけ算，わり算においても小学校における学習と同様に適用することができるという学び方をする．【TaⅡ】(a÷b＝c ⟺ (a×m) ÷ (b×m) ＝c ⟺ (a÷m) ÷ (b÷m) ＝c) については，数の範囲が負の数まで広がっても適用できるという学び方をする．【TaⅢ】については，小学校で用いてきた【TaⅢ－β】(Ap＝B (A, B, p ∈ ℚ, A≠0, B≠ 0, p≠0)) が正の数・負の数の場合にも適用できるという学び方をする．したがって，ここでは，その 3 点について強調する必要がある．その部分について，教科書では次のように書かれている．

かけ算について

負の数×正の数の場合

正の数×正の数，例えば，2×3は，次のようにして求めることができます.

2×3＝2＋2＋2＝6

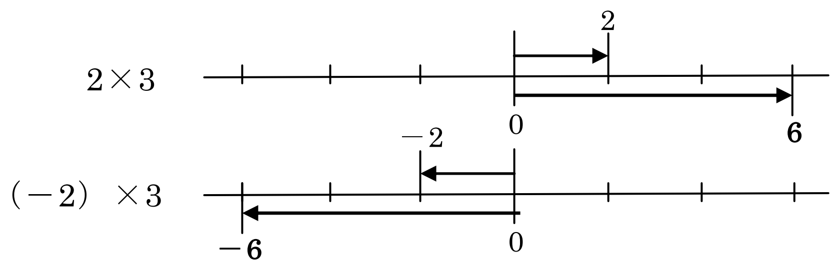
負の数×正の数も，同じように考えると，

（－2）×3＝（－2）＋（－2）＋（－2）＝－6

この－6は，－（2×3）に等しくなります.

負の数×正の数は、絶対値の積に負の符号をつけます。

（－2）×3
＝－（2×3）



正の数×負の数の場合

（＋2）×（－3）について

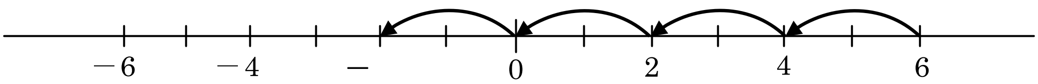
下の図のように，かける数が正の数のときから考え，3，2，1と1ずつ小さくしていくと，積は，2ずつ小さくなっていきます.

そして，かける数が0のときには，

（＋2）×0＝0

となり，かける数をさらに1小さくした（＋2）×（－1）は，0より2小さく，－2であると考えられます.

（＋2）×（＋3）＝＋6
（＋2）×（＋2）＝＋4
（＋2）×（＋1）＝＋2
（＋2）× 0 ＝
（＋2）×（－1）＝
（＋2）×（－2）＝
（＋2）×（－3）＝



正の数×負の数は、絶対値の積に負の符号をつけます。

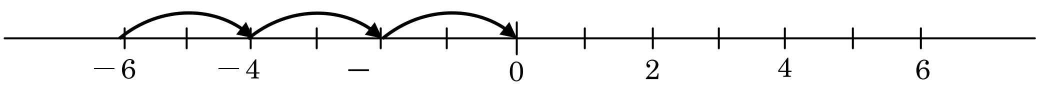
（＋2）×（－3）
＝－<u>（2×3）</u>

<u>負の数×負の数の場合</u>

負の数×負の数も，正の数×負の数のときと同じように考えることができます.

（－2）×（－3）について考えてみましょう.

（－2）×（＋3）＝－6
（－2）×（＋2）＝－4
（－2）×（＋1）＝－2
（－2）× 0 ＝
（－2）×（－1）＝
（－2）×（－2）＝
（－2）×（－3）＝



負の数×負の数は、絶対値の積に正の符号をつけます。

（－2）×（－3）
＝＋（2×3）

わり算について

正の数÷正の数，例えば，6÷2 は，□×2＝6 の□にあてはまる数を求めることです．負の数をふくむわり算も，同じように考えると，（－6）÷2 は，□×2＝－6 の□にあてはまる数を求めることになります．

次の□にあてはまる数を求めましょう．

□×2＝－6，　□×（－2）＝6，　□×（－2）＝－6

上のことから，

（－6）÷2＝－3

6÷（－2）＝－3

（－6）÷（－2）＝3

（－6）÷2＝－（6÷2）

6÷（－2）＝－（6÷2）

（－6）÷（－2）＝＋（6÷2）

負の数÷正の数
正の数÷負の数 ｝・・・絶対値の商に負の符号をつける

負の数÷負の数・・・絶対値の商に正の符号をつける

教科書では，かけ算について負の数×正の数は同数累加，正の数×負の数と負の数×負の数は解の数の変化，わり算については除法は乗法の逆演算であるという関係から正の数・負の数のかけ算，わり算の説明をしているが，ここには正の数・負の数のかけ算，わり算の単元内においても，5 年生，6 年生のかけ算，わり算の学習で用いられてきた説明具と比較しても，表現に関する一貫性という問題点があると指摘される．

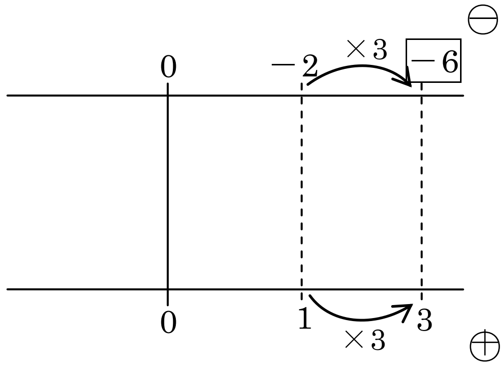
これに関して本研究では，小学校の学習で用いてきた 2 本の数直線上の対応図を用いて，次のように，正の数・負の数のかけ算，わり算における数量関係を示したいと考える．正の数・負の数の乗除では，しばしば符号の変換が問題となるが，このように示すことによって，小学校から用いてきた考えを使って，図上の数の位置関係から，符号の変換の仕組みについて視覚的に捉えることができると考える．また，

図中に計算過程の数の動きを示すことによって，その矢印の関係から【TaⅠ】（a÷b＝c $\Leftrightarrow$ c×b＝a）が，正の数・負の数のかけ算，わり算においても小学校における学習と同様に適用されることを視覚的に確認することができる．

かけ算について

負の数×正の数

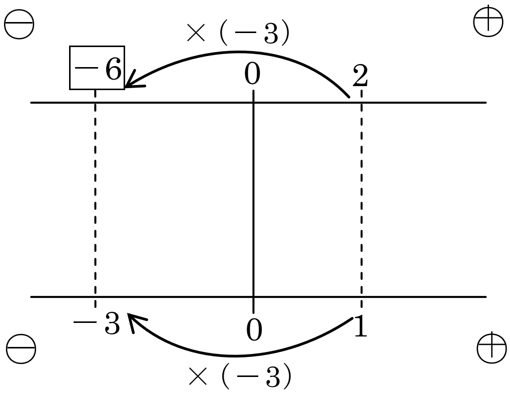
（−2）×3＝−6



1にあたる数が−2であることから、上側の数直線は右に進むと⊖であることが分かる。したがって、3にあたる数の符号は⊖である。

正の数×負の数

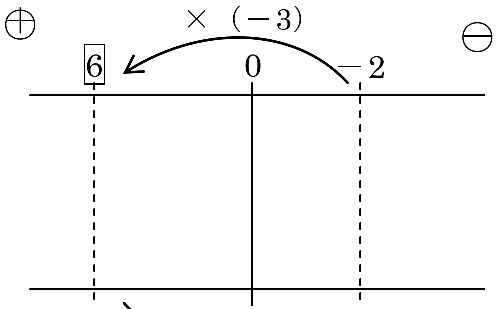
（+2）×（−3）＝−6



1にあたる数が2であることから、2本の数直線は右に進むと⊕であることが分かる。したがって、−3にあたる数の符号は⊖である。

負の数×負の数

（−2）×（−3）＝6

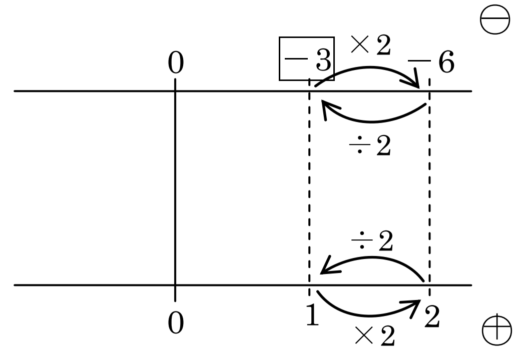


1にあたる数が−2であることから、上側の数直線は右に進むと⊖であり、左に進むと⊕であることが分かる。したがって、−3にあたる数の符号は⊕である。

わり算について

負の数÷正の数

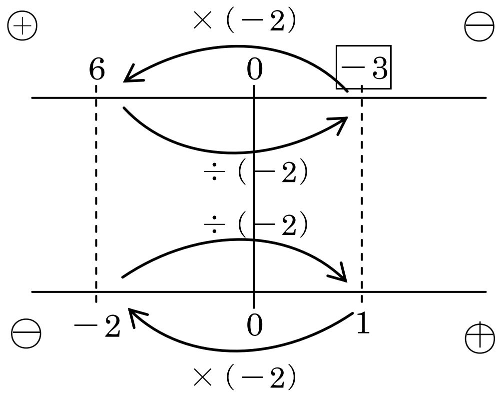
（－6）÷2＝－3



2にあたる数が－6であることから、上側の数直線は右に進むと⊖であることが分かる。したがって、1にあたる数の符号は⊖である。

正の数÷負の数

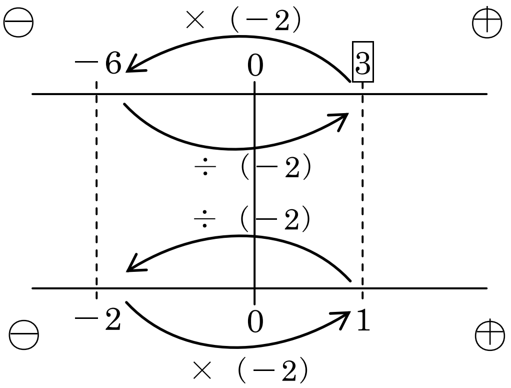
6÷（－2）＝－3



－2にあたる数が6であることから、上側の数直線は左に進むと⊕右に進むと⊖であることが分かる。したがって、1にあたる数の符号は⊖である。

負の数÷負の数

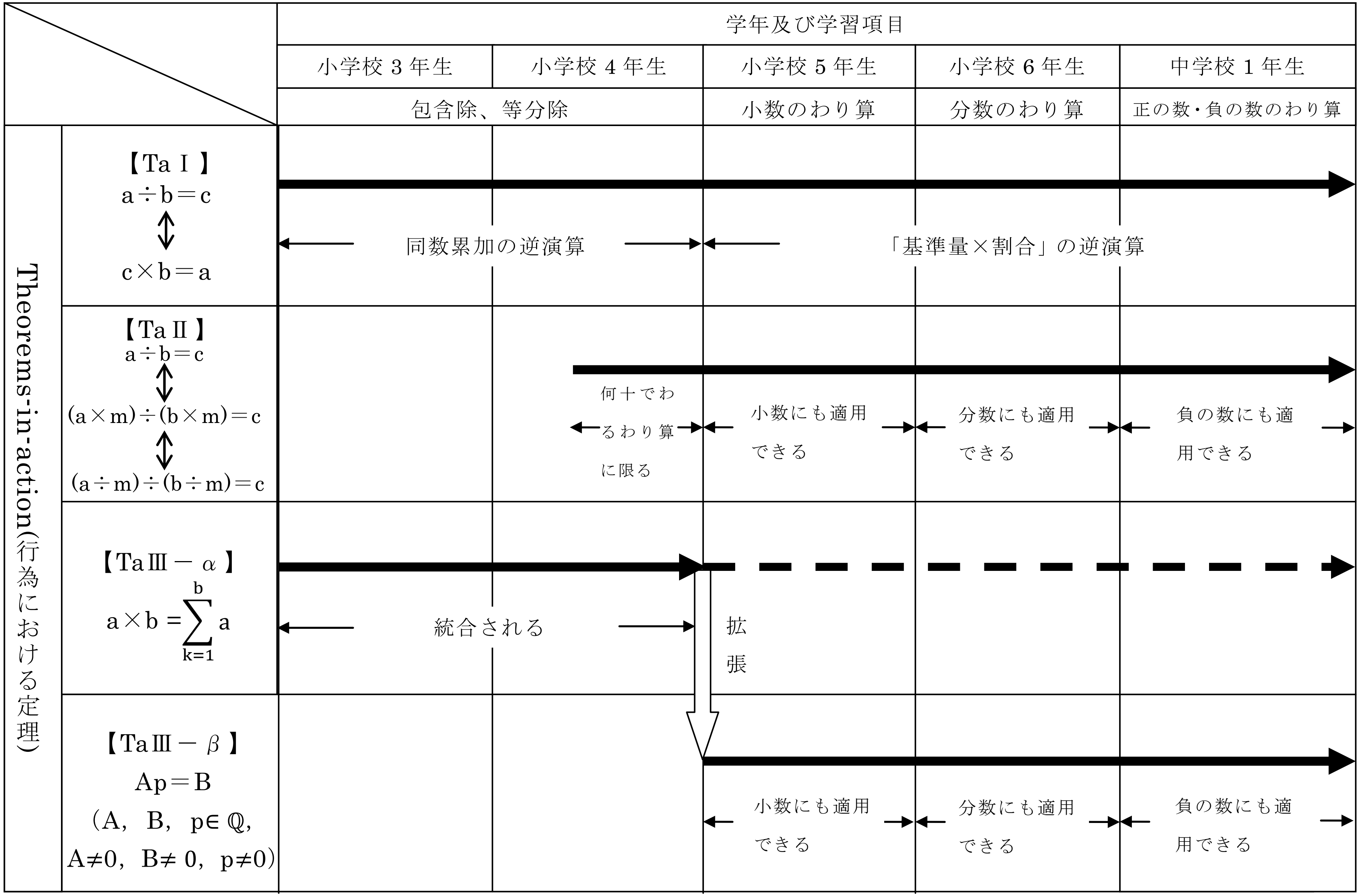
（－6）÷（－2）＝3



－2にあたる数が－6であることから、2本の数直線は左に進むと⊖であり、右に進むと⊕であることが分かる。したがって、1にあたる数の符号は⊕である。

5.6.　本研究の視点から見た教材論理の系統

5.5 において考察した学習指導に基づき，第 4 章で示したわり算の学習内容の系統表をベルニョの Theorems-in-action（行為における定理）に焦点を当てた本研究の視点から捉え直し，次のように「Theorems-in-action（行為における定理）を視点とした教材論理の系統」として示す.



※ツールとして数直線上の対応図を位置づける

図５－７　Theorems-in-action（行為における定理）を視点とした教材論理の系統

第 5 章の要約

本章では，第2章において明らかとなった各学年でのわり算の学び方を表すための枠組みを用いて，第3章において明らかとなった数学におけるわり算の位置づけ，第4章において明らかとなった算数・数学教育におけるわり算の系統を基に，学習指導要領及び教科書分析を通してよりよいわり算の学習指導を設計した．そして，設計したわり算の学習指導を基に，第4章で示したわり算の学習内容の系統表を「Theorems-in-action（行為における定理）を視点とした教材論理の系統」として本研究の視点から捉え直した．その結果以下の事柄が明らかとなった．

第 2 章で述べたベルニョの Theorems-in-action（行為における定理）を数学的な語で表すことで，各学年におけるわり算の学習で用いる考え方を場面に依存せずに表すことができ，わり算というトピックスについて学年を通して見たときに，どのように考え方がつながり変化しているのかをはっきりと把握することができる．この Theorems-in-action（行為における定理）を用い，各学年のわり算の学習における Theorems-in-action（行為における定理）の学び方を考慮し，学習指導を設計することで，子どもたちが今までに学習した知識を生かし，積み重ねていくことができるようなわり算の学習指導を設計することができるということが明らかとなった．また，このような学習指導を設計するにあたり，平成 23 年度版の教科書から 6 社すべてにおいて取り扱われる数直線上の対応図を学習指導の道具として用いることは有効であるということも明らかとなった．

第6章

研究の結論と残された課題

本章では，　本研究で得られた成果とその意義を6.1で述べる．さらに，6.2 では，本研究において残された課題を述べる．

第6章　研究の結論と残された課題

6.1 研究から得られた結論

本研究では，5 つの研究課題が要請された．この 5 つの研究課題について，以下のように結論づけた．

【研究課題 1】

各学年でのわり算の学び方はどのような枠組みで表すことができるか

研究課題1に対し，G.Vergnaud（1988）の視点の考察により，多様な解決を数学的な語を用いて一般的に表すことで，場面に依存せず考え方の違いを表すことができることから，Theorems-in-action（行為における定理）を数学的な語で表すことで，各学年でのわり算の学び方を表す枠組みを構築することができるということが明らかとなった．

【研究課題2】

数学的に見てわり算とはそもそもどのようなものか

わり算の問題では, 1 にあたるものを求める問題がほとんどである．研究課題 2 に対し，文献の考察から，この 1 にあたるものを求めるということには, 除法は, 数学的には乗法の逆演算として定義されるが, 単位元が 1 である乗法についての逆元を考えると，乗法の逆演算が登場するという数学におけるわり算の位置づけがあるということが明らかとなった．

このことは，実際のわり算の問題場面の計算過程において，1 を作っていることが確認できることから，単位元が 1 であるかけ算についての逆元を求めるという考えが用いられていることが明らかとなった．また，1 にあたるものを求める場合でない場合においても，その計算過程において，単位元が 1 であるかけ算についての逆元を求めるという考えが用いられていることを確認することができることから，1 にあたるものを求めるということが前提となっていると解釈することができることが明らかとなった．

【研究課題3】

算数・数学教育においてわり算の学習内容の系統はどのようになっているか

研究課題3に対し，先行研究から，数学では除法は乗法の逆演算であると定義されており，わり算の学習内容の系統を把握するにあたっては，かけ算の学習内容の系統についても，把握する必要があるということが明らかとなった．さらに，各学年におけるかけ算，わり算の学習内容の系統について検討し，それらを「わり算の学習内容の系統表」として示した．ここから，学年を通して用いられていることから，今までに学習した知識を生かし，積み重ねていくことができるような学習指導を考えるにあたって重視するべき3つの関係が明らかとなった．それは，以下に示す関係である．

Ⅰ　除法は乗法の逆演算であるという関係

Ⅱ　除数及び被除数に同じ数をかけても同じ数で割っても商は変わらない」という関係

Ⅲ　「基準量×割合」とその逆演算の関係

【研究課題4】

よりよいわり算の学習指導をどのように設計するか

研究課題4に対し，【研究課題1】において明らかとなったTheorems-in-action（行為における定理）を数学的な語で表すという枠組みを用いて，【研究課題2】において明らかとなった単位元が1である乗法についての逆元を考えると，乗法の逆演算が登場するという数学におけるわり算の位置づけ，【研究課題3】で構築した「わり算の学習内容の系統表」から明らかとなった学習指導を考えるにあたって重視するべき3つの関係を基に，学習指導要領及び教科書分析を通して現在の学習指導と比較させながらよりよいわり算の学習指導を設計した．

【研究課題5】

どのようにわり算について教材を論理立てるか

研究課題5に対し，【研究課題4】において設計したわり算の学習指導を基に，第4章で示したわり算の学習内容の系統表を「Theorems-in-action（行為における定理）を視点とした教材論理の系統」として本研究の視点から捉え直した．これにより，以下の事柄が明らかとなった．

第2章で述べたベルニョのTheorems-in-action（行為における定理）を数学的な語で表すことで，各学年におけるわり算の学習で用いる考え方を場面に依存せずに表すことができ，わり算というトピックスについて学年を通して見たときに，どのように考え方がつながり変化しているのかをはっきりと把握することができる．このTheorems-in-action（行為における定理）を用い，各学年のわり算の学習におけるTheorems-in-action（行為における定理）の学び方を考慮することで，子どもたちが今までに学習した知識を生かし，積み重ねていくことができるようなわり算の学習指導を設計することができるということが明らかとなった．また，このような学習指導を設計するにあたり，平成23年度版の教科書から6社すべてにおいて取り扱われる数直線上の対応図を学習指導の道具として用いることは有効であるということも明らかとなった．

以前から，日本でも「既習事項を使う」ということや，「高いところから見る」という概念領域に関連する研究は行われている．しかし，１つのトピックスを学年，学校種間を通して見るということはまだ十分に行われているとは言えない．

本研究では，Theorems-in-action（行為における定理）を数学的な語で表すという枠組みを用いて一般的に表すという視点を大切にし，本質的な視点から分析を行うことで，教材を論理立てること，そして，学年，学校種間を通して，子どもたちが今までに学習した知識を生かし，積み重ねていくことができるような学習指導を根拠を持って設計

することが可能になるということが明らかとなった．本研究では，わり算を取り上げたが，他の教材においても同じような方法で教材を論理立て，学年，学校種間を通して子どもたちが今までに学習した知識を生かし，積み重ねていくことができるような学習指導を設計することができるのではないかということを提言したい．

6.2 残された課題

本研究の残された課題として挙げる点は以下の 2 点である．

1 点目は，第 3 章において単位元と逆元という視点から，数学の中でのわり算の位置づけについて明らかにしたが，数学で逆元を認めるということがなぜ大切にされているのかについては考察することができていない点である．

2 点目は，実践面についてである．本章において，本質的な視点から分析を行うことで，教材を論理立てること，そして，学年，学校種間を通して，子どもたちが今までに学習した知識を生かし，積み重ねていくことができるような学習指導を根拠を持って設計することが可能となることを明らかにした．しかし，このような学習指導を実践した際，学年を通して教師が実際にどのように指導を行っていくのか，また，子どもはどのような反応を示すのかについては検討することができていない．

引用・参考文献

・伊藤説朗(2008).　算数科の未来型学力＝思考力・表現力を育てる授業，明治図書

・啓林館（2006）．未来へひろがる数学 1

・啓林館（2006）．わくわく算数 4 年～6 年上下

・キース・デブリン　山下純一郎訳（1995）．数学：パターンの科学，日経サイエンス社

・文部科学省（2008）．小学校学習指導要領解説　算数編，東洋館出版社

・文部科学省（2008）．中学校学習指導要領解説　数学編，教育出版株式会社.

・中島健三(1981）．算数・数学教育と数学的な考え方　その進展のための考察，金子書房

・Smith,E&Henderson,K,B .(1959).　*The Growth of Mathematical Ideas K-12*.　Twenty-fourth yearbook. (pp.111-181).NCTM.

・算数教育学研究会(1979).　算数科教育研究，学芸図書株式会社

・杉山吉茂(1997)．少なく教えて多くを学ぶ算数指導，明治図書出版株式会社

・Vergnaud，G．(1988)．Multiplicative structures. Hiebert,J & Benhr,M (Eds). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. (pp.141-161) LEA.

・矢部敏昭，溝口達也，栗岡玲子，児島幹夫（1999）．小数の除法の意味の拡張を図る学習指導に関する－考察－第 5 学年における数直線の活用，鳥取大学教育地域科学部教育実践研究指導センター研究年報第 9 号

謝辞

この研究を遂行するにあたり，ご指導いただいた方々に深く感謝いたします。

溝口達也先生には，物事を理解することが遅い私に，具体例を挙げて分かりやすく説明して下さるなど，終始熱心にご指導していただいたことを心から感謝しています．先生から多くのことを学ぶことができ，大変嬉しく思っております．本当にありがとうございました．

また， 矢部敏昭先生にも， 講義や卒業論文中間発表の際にご指導いただき， 大変感謝しております．時折声をかけていただき，励みになりました．温かく見守っていただき，ありがとうございました．

最後になりましたが，研究室の先輩である早田透さん，前田静香さん，池田和彌さんには，いつも快く相談に乗って下さったり多くの助言をして下さったりしたことに心から感謝申し上げます．同級生である小村亮さん，安井紗笑さん，日野治樹さん，後輩である朝岡卓哉さん，尾崎いづみさん，玉川奈緒さんにも大変お世話になりました．感謝しています．

このように多くの方に支えられ， 本論文を完成させることができました．教師になっても学ぶ姿勢を大切にし，自分自身を磨いていきたいと思います．

平成２３ 年1 月

柏木美穂

鳥取大学数学教育研究　　**ISSN 1881–6134**

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。

- 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
- 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
- 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
- その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/