

ISSN 1881-6134

# 鳥取大学数学教育研究

*Tottori Journal for Research in Mathematics Education*



[www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/journal.html](http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/journal.html)

数学的問題解決における〈イメージ〉とその機能に関する調査研究

田中光一

vol.12, no.1

Apr. 2009

# 数学的問題解決における〈イメージ〉とその機能に関する調査研究

田中光一

鳥取大学大学院地域学研究科

## 1. はじめに

### 1.1 研究の動機

我々は数学の問題を解く際に、解決の手がかりの一つとして〈イメージ〉を用いることがある。一般に〈イメージ〉と言うとき、〈イメージ〉と言ってもその使用は、漠然としたことが多い。特に、数学における〈イメージ〉として我々はどのようなものを意味しているのだろうか。心理学におけるイメージは、「物理的な刺激がない状態で、想像ないし記憶によって形成された、刺激の心的表象、心像 (mental image)」である。本研究では、心理学におけるイメージと区別するため、〈イメージ〉と表す。ここでは〈イメージ〉を、「解決者の思考の中で形成された心的表象、およびその操作」として捉えることにするならば、それは数学者に限らず子どもの問題解決においても同様に用いられうるであろう。例えば、次の事例を通して数学的思考における〈イメージ〉について考える。

ビリヤード台(長方形 ABCD)の点 A から打ち出された玉が、3 回のクッションで点 D のポケットに入るとき、最初にクッションする点 P の位置の作図の仕方を考えよ。

この問題における〈イメージ〉を用いた解決の1つは次のようになる。

点 A から打ち出された玉が 1 クッション目で CD に当たるとする。CD にぶつかり跳ね返った後の玉の軌跡は、CD で跳ね返らなかった場合に玉がたどる直線を CD に鏡を置いてうつしたように

〈イメージ〉すると、CD を対称の軸とした線対称な線で描かれる。逆に言えば、跳ね返った玉の軌跡は CD を対称の軸とした線対称な線で描かれるので、ビリヤード台の長方形ごと CD を軸として反転するような〈イメージ〉を用いると、玉の軌跡は図 1 のように直線に展開することができる。

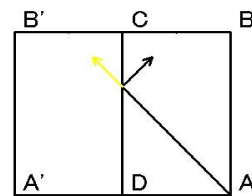


図 1

このように考えると、跳ね返った玉の軌跡は全て、ぶつかる辺を対称の軸とした線対称な線で描かれるので、3 クッションする玉の全ての軌跡を反転させてつなげると一直線上に並ぶという見通しが立てられる。そこで、長方形を何枚か反転させてつなげる〈イメージ〉を表出した図 2 を用いて考える。

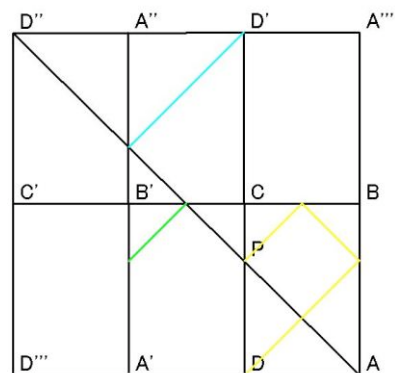


図 2

玉の軌跡を反転させてつなげると一直線上に並ぶことから、玉の軌跡は図 2 の上ではこのような

点 A と点 D”を結んだ直線で表すことができる。したがって、この直線 AD”と CD の交点が最初にクッションする点 P となる。

また、長方形を反転させて広げた図 2 を、今度は逆に折りたたみ元の 1 つの長方形にする〈イメージ〉を用いると、図 2 で描かれた直線も長方形とともに反転し、図 3 のような軌跡を描くことが分かる。

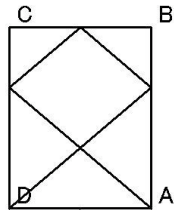


図 3

この事例では、対称の性質を利用して玉の軌跡と長方形を鏡でうつしたように反転させる〈イメージ〉を用いた。このような〈イメージ〉を用いることによって解決の見通しを立てることができ、解決へと至った。なお、図 1、図 2 はあくまで〈イメージ〉の表出であり、これらの図が〈イメージ〉そのものではない。前述したように、〈イメージ〉は解決者の思考の中での心的表象や操作であり、視覚的に表れているものは、全て〈イメージ〉ではなく図である。しかし、ここで言う図は解決者の思考における〈イメージ〉に基づいている。したがって、図は〈イメージ〉を思考の外に視覚的に表出したものと捉えることとする。

上の事例において〈イメージ〉が用いられたように、数学では頻繁に〈イメージ〉が用いられている。また、〈イメージ〉をこのように捉えるならば、解決する当事者にとって解決が困難な問題であるほど〈イメージ〉がより用いられていると考えることができる。おそらく困難でない場合は〈イメージ〉を用いずともすぐに解決してしまうだろう。このとき、数学教育における問題解決では、一般的に解決が困難な問題が設定される。ゆえに、〈イメージ〉研究が必要となる。

## 1.2 本研究の目的

そこで本研究では、最終的に、数学的思考における〈イメージ〉の機能を解明し、〈イメージ〉を用いることの教育的価値をあきらかにし、そのような価値に基づく指導を提案することを目的とするが、本稿ではまず課題を抽出し、〈イメージ〉を捉えるための仮説枠組みを設定することを第一の目的とする。そして抽出された課題を実証的に検証することを第二の目的とする。

## 2. 研究課題の吟味

### 2.1 事例分析

先の事例で用いた〈イメージ〉は、対称性という概念に基づいている。Vinner(1981)と川寄(1992)は概念とイメージの関係を、Concept Image という枠組みで捉えている<sup>2) 3)</sup>。両者の先行研究や先の事例から、概念と〈イメージ〉が対応していることが考えられる。

先の事例における〈イメージ〉は解決者個人が持っている概念に基づいている。この解決者個人が持っている概念は、理論的に構成された概念と一致しているとは言い難い。ここで、理論的に構成されている概念と、個人の中に構成されている概念を、Concept と Conception とに分けて捉える必要がある。Conception は Concept にはまだ到達していない、個人が持つ概念として捉える。事例における解決者が持つ対称性の概念が Conception に当たる。〈イメージ〉と Conception が対応していることから、〈イメージ〉もまた個人的なものであることが言える。これは 1.1 で述べた、「解決者の思考の中で形成された心的表象、およびその操作」という〈イメージ〉の定義とも矛盾していない。したがって、Concept には〈イメージ〉は介入しない。ここでは便宜上、〈イメージ〉と Conception を分けて捉えているが、〈イメージ〉と Conception が一致することもあると考え

られる。先にも挙げた Vinner(1981)と川寄(1992)は概念とイメージの関係を、Concept Image という枠組みで捉えており、概念とイメージを分けてはいない<sup>2)3)</sup>。

同じ問題に対して異なる人が〈イメージ〉すれば当然異なる〈イメージ〉が用いられるであろう。また、個人の中でも〈イメージ〉が単一とは限らない。事例でみた〈イメージ〉だけでなく、同一人物が異なる〈イメージ〉を持つことは十分に考えられる。なぜならば、ここでは対称性という Conception に基づいた〈イメージ〉を用いて解決したが、別の Conception に基づけばそれに対応した、事例とは別の〈イメージ〉を用い、解決の様相が異なってくる。言い換えれば、この事例においては対称性という Conception に基づいた〈イメージ〉を用いたが、この問題における Conception は、問題の捉え方により多様に考えられる。

Conception に基づいた〈イメージ〉を用いて解決することで、その解決過程から新たな Conception が構成されたり、〈イメージ〉の基になった Conception が再構成されたりすることは十分に考えられる。したがって、Conception と〈イメージ〉とは互いに影響し合い、変容していくことが考えられる。教育の立場から見れば、変容していく Conception が Concept へと近づくことが望ましい。〈イメージ〉と Conception が互いに影響し合い変容するならば、Conception が Concept に、より近づき高まっていくような〈イメージ〉を用いることが教育として価値があると考えられる。

## 2.2 仮説枠組みの設定と研究課題の抽出

以上のように考えると、〈イメージ〉を捉えるために図4のような仮説枠組みが設定される。

図4の仮説枠組みから、次のような研究課題が抽出される。

課題1「解決に困難が生じた時、〈イメージ〉を用

いるのではないか。」

課題2「個人の中の〈イメージ〉と Conception は対応しているのではないか。対応するのであればどう対応しているのか。」

課題3「Conception は〈イメージ〉とともに変容し、Concept へと近づき高まっていくのではないか。」

これらの研究課題を達成していくことで、〈イメージ〉の機能の解明とその指導について検討していく。そこで本研究の目的を上述の研究課題と照らし合わせると、課題1を調査により検討することが本稿の目的となる。

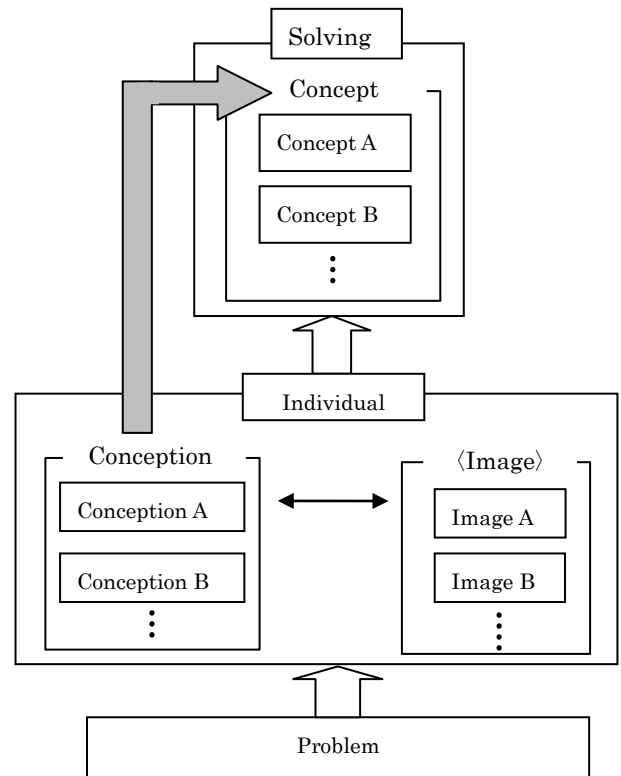


図4 〈イメージ〉の仮説枠組み

## 3. 調査の目的と方法

### 3.1 調査の目的

〈イメージ〉を捉えるため、解決者がどのように考えたかを口頭で説明させる。そのための準備段階として、〈イメージ〉を表出させ、観察可能な状態にすることが必要となる。そこで、解決者に記述させる段階を調査I、口頭による説明を聞き

だすための面接調査を調査Ⅱとし、これら 2 つの調査によって、課題 1 を検討する。

調査Ⅰでは、〈イメージ〉を用いさせる、解決者が用いた〈イメージ〉を記述させる、の 2 点を目的とする。追跡調査として調査Ⅱでは、どのような〈イメージ〉を用いたかを探る、〈イメージ〉が解決にどう影響したかを探る、の 2 点を目的とする。

### 3.2 調査の方法

#### 3.2.1 〈イメージ〉の同定手順

上記のとおり、調査の目的を検討するため、実際の問題解決場面について調査し、分析する必要がある。したがって、本調査では、授業形式でなく、生徒 1 人 1 人に問題解決に取り組ませ、〈イメージ〉を引き出すこととする。

〈イメージ〉そのものを直接観察することは不可能であるので、観察可能なものを手掛かりとして〈イメージ〉を捉える。したがって本研究では解決者が記述した図や表を解決者の〈イメージ〉の表出とみなすことで〈イメージ〉を捉えることとする。しかし、記述だけの〈イメージ〉の分析は調査者の推測にとどまり、〈イメージ〉と判断する根拠としては不十分である。そこで、その記述はどのような考えを表しているのか、記述には表れなかった解決者本人の口頭による説明も、〈イメージ〉を判断するための根拠となる。本調査では、解決者の思考において行われた操作の記述及び口頭による説明をもって〈イメージ〉として捉える<sup>(注)</sup>。

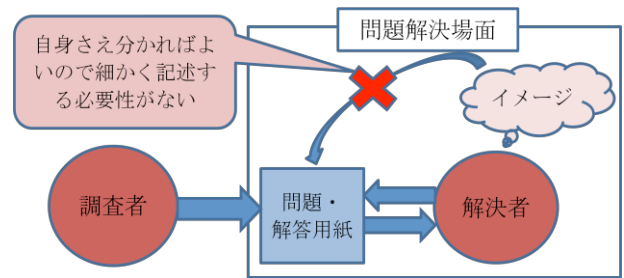
#### 3.2.2 調査問題がそなえる条件

本調査では、〈イメージ〉を捉えるための根拠となる図や表を記述させたい。そこで、調査問題は、  
・少なくとも図や表を用いないと解決が困難であること

・解決者に少しでも多くの記述を残させるための方略が盛り込まれていること

が条件となる。

上述のような方略を考えるにあたり、仮に図 5 のような問題解決場面が解決者 1 人の場合を考える。調査者は解答用紙の記述を介して解決者の〈イメージ〉を分析するため、問題解決場面の外にいる。解決者は問題を読み、〈イメージ〉を用いて解決へと取り組む。しかし、解決者自身さえ分かればよいので細かく記述する必要がない。仮に、ここに架空の第三者を加えた図 6 のような場合を考える。図 5 の場合と同様に〈イメージ〉を用いて解決に取り組むが、第三者に伝達することが目的となるため、細かな記述が必要となることができる。したがって、本調査では第三者に



考えを伝える状況を調査問題として設定する。

図 5 解決者 1 人の場合

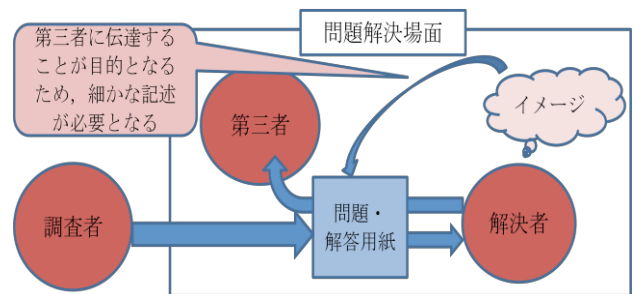


図 6 架空の第三者を加えた場合

### 3.3 調査Ⅰ

#### 3.3.1 調査Ⅰの開発

これらの条件を基に次のような調査問題を開発した。

次のような問題を解こうと悩んでいる人がいま

す。

あなたの考えを教えてあげてください。

下の余白を使って、自由に書いてください。

問：「戸のついた下駄箱が並んでおり、それぞれ1番、2番…といったように番号がついています。

いま、下駄箱の戸が全て閉まっています。1人目の人は戸を全て開けました。2人目の人は2の倍数の戸を閉めました。3人目の人は3の倍数の戸を開いている戸は閉め、閉まっている戸は開けました。4人目は4の倍数の戸を、5人目は5の倍数の戸を、…、という手順で順番に戸を開け閉めします。」

(1) 下駄箱が10個あり、10人目の人が開け閉めし終えた時、戸はいくつ開いていますか？

(2) 下駄箱が1000個あり、1000人目の人が戸を開け閉めし終えた時、戸はいくつ開いていますか？

### 3.3.2 調査 I の実施

本研究では発達段階による相違は問題としていない。また、本調査問題の解決には、平方数の概念の必要性が生じる。よって、本調査では中学3年生を対象とした。

調査対象：鳥取県内中学校3年生 74名

実施日：2008年10月16, 17日

実施時間：15分

調査 I は授業前に学校教員監督のもとに15分で行われた。学校教員は、調査者から渡された以下のような指示文に沿って調査を実施した。調査問題の内容に関わる生徒からの質問は一切受け付けないこととした。以下、教師への指示文。

①調査用紙を1人に1枚ずつ配ってください。

②まず、出席番号を必ず記入させてください。名前は書かないよう、お願いします。

③調査用紙の上から3行（太字部分）を先生が読んでください。（この3行を生徒が見落とさないようにするためです。）

④1枚で足りない生徒は手を挙げて2枚目をもらうよう、指示してください。2枚目は調査用紙の余りでも白紙でも、どちらでも構いませんが、その際、2枚目にも出席番号と、出席番号の横に②と書くよう指示してください。

(例：11番の場合…11-②)

⑤読み終えたら、「はじめ」と言って開始してください。時間は15分です。15分経ったら「やめ」と言って終了し、回収してください。

### 3.3.3 調査 I の結果と考察

調査問題(1)について、74名のうち、73名については、図や表などの記述がされていた。1名(正答)は解のみで図や表などの記述はなかった。正答に至った者は74名のうち49名であった。正答、誤答に関わらず、記述されていたものを分類すると、

・10回の操作による戸の開閉状態を、表を用いて表しているもの(図7)

(1) 1人目	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	PA = 0
2	○ X ○ X ○ X ○ X ○ X	PA = X
3	○ X X X ○ ○ ○ X X X	
4	○ X X ○ ○ ○ ○ X X	
5	○ X X ○ X ○ ○ ○ X ○	
6	○ X X ○ X X ○ ○ X ○	
7	○ X X ○ X X X ○ X ○	
8	○ X X ○ X X X ○ ○ ○	
9	○ X X ○ X X X ○ X ○	
10	○ X X ○ X X X ○ X X	

32

図7

・表を用いて開いている戸の番号と閉まっている戸の番号を別の行に分けて、次の操作で開閉される戸の番号を○で囲み、別の行に向けた矢印を書いているもの(図8)

135	157	1687	1668	1478	148	140	149	149
678910	79	6	6	10	10	10	10	149

図8

- 1~10 のそれぞれの倍数の数を書きだしているもの(図 9)

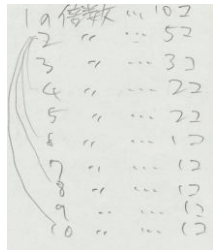


図 9

- 1~10 のそれぞれの約数の数を書きだしているもの(図 10)

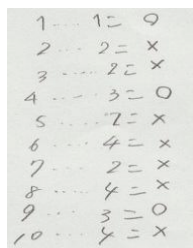


図 10

という記述に分類できた。

調査問題(2)について、74 名のうち、41 名については、図や表などの記述がされていた。33 名については解のみで図や表の記述がない、もしくは何も記述がされていなかった。正答に至った者は74 名のうち8 名であった。正答、誤答に関わらず、記述されていたものを分類すると、

- (1)で用いた表を 11 回目以降も用いているもの(図 11)

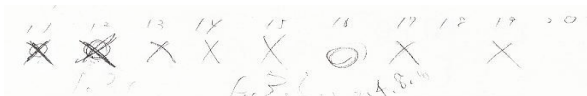


図 11

- (1)で開いていた戸は自然数を 2 乗した数であることから、平方数を書きだしているもの(図 12)

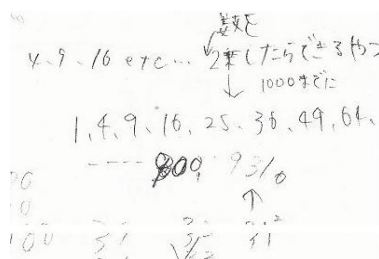


図 12

- 計算式を立てているもの(図 13)

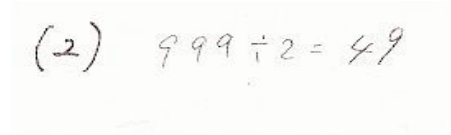


図 13

- 記述からはどのような思考か予想できなかったもの(図 14)

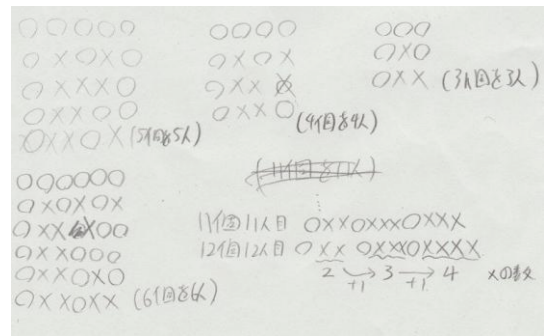


図 14

といった記述があった。

本調査問題で用いられる〈イメージ〉の一例として、戸が開け閉めされる操作、およびその操作が奇数回行われることで開いた状態になる、という〈イメージ〉を用いることが考えられる。思考の中で操作された戸の開閉という〈イメージ〉の結果を表出すると、見やすくするため表にまとめることができると考えられる。また、操作が奇数回行われる戸を探すために思考の中で戸の開閉を〈イメージ〉し、戸が操作される回数を数え、記述することが考えられる。1 人目、2 人目、…、が開け閉めした場合といったように、毎回全ての戸の開閉状態を同時に考えることは、戸の数が増えるほど効率が悪くなる。戸の操作が奇数回行われる戸を探せばよいことに気づくことで、それぞれの戸が何回操作されるかを考えるようになり、戸がいつ開いていていつ閉まっているかは問題とならなくなり、さらに全ての戸の開閉状態を同時に考えなくともよくなる。そして、このような考えから、奇数回の操作回数を有する戸の番号は平方数であることに気づくことができる。以上の点から、戸を奇数回開閉する操作の〈イメージ〉を用いることが望ましいと考えられる。

調査 I (1)において、10 回それぞれの戸の開閉状態をまとめた表を記述している解答が最も多く、前述の望ましい〈イメージ〉を用いたと予想されるそれぞれの戸が操作される回数を記述した解答は若干名であった。(2)における記述は、(1)の表から気づき平方数に着目したと思われるものがほとんどであった。3.2 で述べたように、調査 I の記述だけではそれを〈イメージ〉と断定することはできない。したがって調査 I の目的である、〈イメージ〉を用いさせることを達成できたとは現段階では判断できないが、少なくとも〈イメージ〉の手掛かりとなる記述をさせることは達成できたと言える。

### 3.4 調査 II

#### 3.4.1 調査 II の開発

調査 I の記述を分類した結果を基に、調査 II を実施する解答を抽出する。(1)において分類されたそれぞれの記述の中から、その記述の特徴がより明確である解答を候補として挙げる。さらにその候補の中から、(2)で分類されたそれぞれの記述の特徴がより明確であるものを選ぶ。また、本調査問題における解決において、用いた〈イメージ〉がうまく機能しなかった場合も考えられるので、正答に至っていない解答も、調査 II の実施対象とした。その結果、9 名の生徒の解答を抽出した。抽出された 9 名の生徒による記述の特徴は、表 1 の通りである。

3.1 で述べた調査 II の目的を達成するため、次のような質問項目を設定した。

質問 1. 「この問題はすぐに取り掛かれましたか？」

質問 2. 「この図はどのような考えを表しているのですか？」

質問 3. 「どうしてそのような解き方を思いついたのですか？」

質問 4. 「もう一度、この図を使ってあなたの考えを説明してください。」

質問 1 は、解決に困難を感じたかを探るため、質問 2 は、図がどのような〈イメージ〉を記述したのかを探るため、質問 3 は、既習事項との関連を探るために設定した。また、質問 1~3 で解決時の考えを思い出させるとともに整理させ、質問 4 で、より確実に解決者の考えを引き出すことを狙いとした。質問の設定理由から、生徒が用いた〈イメージ〉については質問 2~4 の結果を基に分析する。

表 1. 生徒 9 名の記述の特徴

生徒	(1)	(2)
A	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ 10 回の操作による戸の開閉状態を、表を用いて表している。</li> <li>・ 開いている戸の番号と閉まっている戸の番号を別の行に分けて、次の操作で開閉される戸の番号を○で囲み、別の行に向けた矢印を書いている。</li> <li>・ 10 回の操作それぞれの開いている戸の数、閉まっている戸の数を書きだしている。</li> <li>・ 正答へ至っている。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ 記述が少しだけ残っている（計算式）が途中で終わっている。</li> </ul>
B	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ 10 回の操作による戸の開閉状態を、表を用いて表している。</li> <li>・ 正答へ至っている。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ 図や表を用いているが、誤った着眼点を持ったため、正答へ至らなかった。</li> </ul>
C	B と同様	B と同様
D	B と同様	B と同様
E	B と同様	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ (1)で開いていた戸は自然数を 2 乗した数であることから、平方数を書きだしている。</li> </ul>



F	Bと同様	Eと同じ
G	<ul style="list-style-type: none"> <li>・10回の操作による戸の開閉状態を、表を用いて表している。</li> <li>・図・表を用いて、各戸が操作される回数に着目している。</li> <li>・正答へ至っている。</li> </ul>	Eと同じ
H	<ul style="list-style-type: none"> <li>・図・表を用いて、各戸が操作される回数に着目している。</li> <li>・正答へ至っている。</li> </ul>	Eと同じ
I	<ul style="list-style-type: none"> <li>・図や表を用いているが、誤った着眼点を持ったため、正答へ至らなかった。</li> </ul>	記述なし

### 3.4.2 調査Ⅱの実施

調査対象：鳥取県内中学校3年生 9名  
 実施日：2008年12月16, 17, 18日  
 実施時間：10～15分

調査Ⅰで得られた解答の中から、正答に至った者、至らなかった者の両者を含む9名を抽出し、調査Ⅱである面接調査を実施した。面接は1対1で10～15分程度で行い、ビデオカメラ及びボイスレコーダーで記録した。面接は調査者、解決者ともに、解決者本人の解答用紙を見ながら進められた。

### 3.4.3 調査Ⅱの結果と考察

質問1の「この問題はすぐに取り掛かれましたか?」という問に対する回答は表2の通りである。

表2. 質問1に対する回答

A	公式にあてはめられるか考えたけど分からなかった。
B	内容を理解するのに時間がかかった。

C	問題を見て少し考えてからやった。
D	とりあえず規則性を探そうと思った。
E	ちょっと考えたらできた。
F	規則性を見つけるのに時間がかかった。
G	問題の意味が少し難しかった。
H	少し時間がかかってからやり始めた。
I	よくわからなかった。

表2より、生徒D, Eを除く7名は、本調査問題に対しすぐに取り掛かれなかったと話していることが分かる。質問1についての分析は、生徒が〈イメージ〉を用いているかを分析した後で行う。

質問2以降での生徒の回答から〈イメージ〉を分析する。生徒Aは(1)について、「下駄箱に頭の中で自分で番号をつけていて、どの下駄箱が開いているか番号を書きだして、次の人が開け閉めする番号に○をして、その番号を移動させた。」と、図15の囲まれた部分を指差しながら回答した。(1)では、10回の操作それぞれについて、戸の番号それぞれが開閉どちらの状態であるかを考え、結果、開状態の戸がいくつあるかを数えている。これは、生徒B,C,D,E,Fも同様の方法を取っていた。思考の中で行った戸の開閉という操作を表と口頭による説明で表しているの、〈イメージ〉が表れていると捉えることができる。(2)では時間がなくなり、解決に至ることができなかった。

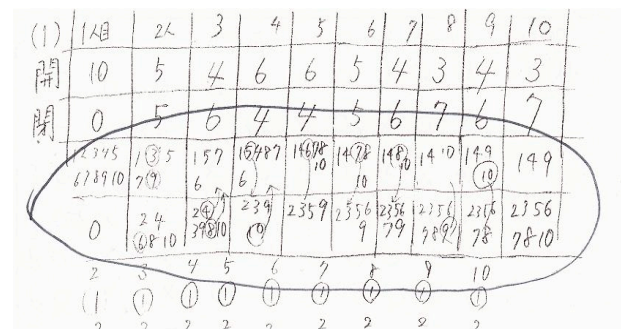


図15 生徒Aの記述

(1)で生徒Aと同じ〈イメージ〉を用いていた生徒Eは(2)について、「順に書いていって、開いている番号が全部2乗した数だったから、1000まで

に、ある数を2乗した数は何個あるかを数えて出した。」と回答している。これは、書き出した表から、1,4,9は平方数であることに気づき、1000以下で最大の平方数を探すというやり方である。

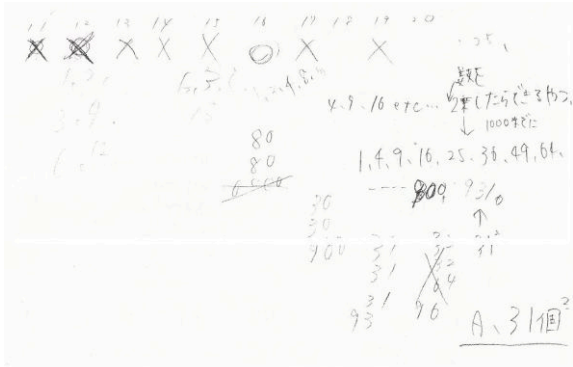


図 16 生徒 E の記述

生徒 G は(1)について、「戸の操作を永遠に続けても、奇数回目で開き、偶数回目で閉まる。」と、手で戸を開け閉めする動作をしながら回答している。これは、奇数回操作される戸が開いていることに着目し、それぞれの戸が何回操作されるかを考え、奇数回操作される戸がいくつあるかを数えるというやり方である。これは生徒 H においても同様の方法がとられている。

また、生徒 G は(2)について、「2乗の数は奇数個Oを持っている。だから開いている状態になる。」と、(1)で記述した表を指差しながら回答している。これは、奇数回操作される番号が平方数であることに着目し、1000以下で最大の平方数を探すというやり方で、生徒 H も同様の方法をとっている。戸が開いているのは何回開閉された場合かという、思考の中での操作が図や口頭による説明に表れて

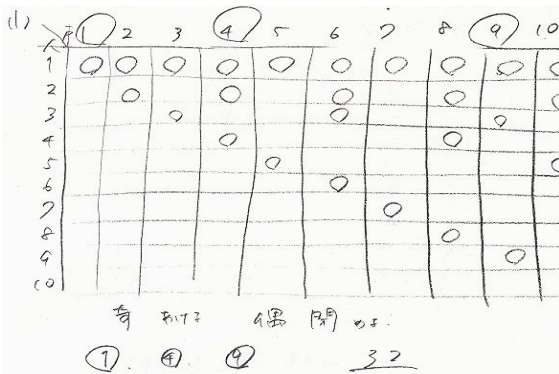


図 17 生徒 G の記述

いるので〈イメージ〉を用いていると捉える事ができる。

本調査問題では、大きく分けると2通りの〈イメージ〉が用いられていた。生徒 A が用いた〈イメージ〉は、各試行における戸の開閉を操作することにより、詳細な戸の開閉状態を得ることができ、解決へと導く機能を果たしていると考えられる。しかし、(2)において平方数がいくつあるかを数えること理由について、「順に書いていって、開いている番号が全部2乗した数だったから」といった生徒 E の回答などから、なぜそうなるのかを説明できていない。それに対し、生徒 G が用いた〈イメージ〉は、操作される回数を考えることでなぜ平方数が開いているかを説明することができ、全ての試行を考えなくとも解決へと導く機能を果たしていると考えられる。2つの〈イメージ〉は共通して、解決へと導く機能を有していることが考えられる。

本調査問題において生徒が〈イメージ〉を用いていると捉える事ができたので、質問 1 について分析する。9名中7名については解決に困難が生じた時、〈イメージ〉を用いていると捉えることができた。また、すぐにとりかかれたと答えた残り2名についても、図や口頭による説明から〈イメージ〉を用いていると捉えることができた。この2名については、前述の解決へと導く〈イメージ〉の機能が発揮し、問題の理解が円滑に進んだのではないかと考えられる。

#### 4. 〈イメージ〉の機能

3.4.3 では本調査問題において用いられた〈イメージ〉を2つに分類することができた。ここで2つの〈イメージ〉のうち、すべての戸の開閉を順に毎回操作する〈イメージ〉を「〈イメージ α〉」(以下、 $I(\alpha)$ )、それぞれの戸において開閉を操作する〈イメージ〉を「〈イメージ β〉」(以下、 $I(\beta)$ )とする。 $I(\alpha)$ を用いた解決( $S(\alpha)$ )は、戸の開閉操

作が全て行われた後の詳細な戸の開閉状態を、表を用いて表すというものである。一方、 $I(\beta)$ を用いた解決( $S(\beta)$ )は、戸が開くのは開閉操作が奇数回行われた時であることから、それぞれの戸において操作される回数を調べるというものである。 $I(\alpha)$ 、 $I(\beta)$ ともに解決へと導く機能を有していることが分かるが、それぞれにおける解決  $S(\alpha)$ と  $S(\beta)$ との間には、質的な違いがみられる。3.4.3においても述べたように、 $S(\alpha)$ は、全ての戸の開閉を同時に考えるので膨大な数に対応することが困難であり、なぜ平方数の番号の戸が開いているかを説明できない。それに対し、 $S(\beta)$ は、全ての戸の開閉を考えなくともよく、操作される回数を考えることでなぜ平方数が開いているかを説明することができる。さらに今後、戸が操作される回数とは約数の数であることに気づき、約数を奇数個持つ数は平方数であるということに気づく可能性も期待できる。以上の点から、 $S(\alpha)$ よりも  $S(\beta)$ の方が教育の立場から見れば望ましい。したがって、 $I(\alpha)$ を用いて  $S(\alpha)$ へと至っている生徒に  $I(\beta)$ を用いさせることにより、 $S(\beta)$ へと高めることが可能になると期待できる。そのためには教師の指導によって可能となることも考えられるし、 $I(\alpha)$ を用いた  $S(\alpha)$ の過程において生徒が自ら気づいて  $I(\alpha)$ から  $I(\beta)$ に変容することも考えられる。〈イメージ〉は、解決へと導く機能の他に、解決の質を高める機能も有していることが考えられる。この2つの〈イメージ〉の機能を図示すると図18のように表せる。

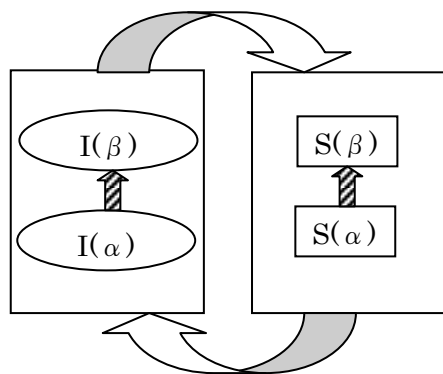


図18 〈イメージ〉の機能

## 5. 結論と今後の課題

本調査の結果から、解決に困難が生じた時、〈イメージ〉を用いることが捉えられた。本調査問題については課題1を達成できたと考えられる。〈イメージ〉は、解決へと導く機能と解決の質を高める機能を持っていると考えられる。これらの機能は図4のモデル図にも一致する。

本研究の今後の課題として、まず、研究課題1以外の達成が挙げられる。そして、〈イメージ〉の機能の仕方になぜ違いが起こるのかという課題が残っている。また、望ましい〈イメージ〉を用いさせるために、どのような指導が有効であるかという研究が必要となる。

### 注

このような手法は、松尾(1996)の調査方法においてもなされている<sup>4)</sup>。

### 引用・参考文献

- 1) 藤永保・仲真紀子(監修)「心理学辞典」丸善株式会社
- 2) Tall,D & Vinner,S.(1981)ESM,12 (2),151-169
- 3) 川寄道広(1992)「図形指導における視覚イメージの影響」数学教育学の新展開
- 4) 松尾(山崎)七重(1996)「図形の概念形成を促進する要因に関する基礎的研究—長方形の弁別に着目して—」数学教育学論究, 65・66, 3-33

編集委員

矢部敏昭 鳥取大学数学教育学研究室 [tsyabe@rstu.jp](mailto:tsyabe@rstu.jp)

溝口達也 鳥取大学数学教育学研究室 [mizoguci@rstu.jp](mailto:mizoguci@rstu.jp)

(投稿原稿の内容に応じて、外部編集委員を招聘することがあります)

投稿規定

- ❖ 本誌は、次の稿を対象とします。
  - ・ 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文、またはその抜粋・要約・抄録
  - ・ 算数・数学教育に係わる、理論的、実践的研究論文／報告
  - ・ 鳥取大学、および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
  - ・ その他、算数・数学教育に係わる各種の情報提供
- ❖ 投稿は、どなたでもできます。投稿された原稿は、編集委員による審査を経て、採択が決定された後、随時オンライン上に公開されます。
- ❖ 投稿は、編集委員まで、e-mailの添付書類として下さい。その際、ファイル形式は、PDFとします。
- ❖ 投稿書式は、バックナンバー（vol.9以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551 鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX 0857-31-5101 (溝口)

<http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/>