

ISSN 1881-6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education



<http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/mathedu/journal.html>

多様な考え方をどう練り上げていくか

上嶋 剛, 竹村康彦

vol.12, no.4

Dec. 2009

多様な考え方をどう練り上げていくか

鳥取県東部中学校数学教育 Aグループ
鳥取市立桜ヶ丘中学校 上嶋 剛
鳥取市立南中学校 竹村康彦

1 はじめに

新学習指導要領に引き継がれた「生きる力をはぐくむ」という理念の実現のため、中学校数学科の目標は、

数学的活動を通して、数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則についての理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を知り、事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとともに、数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し、それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる。

とされている。より具体的な数学科の役割として、

- ・「論理的思考力や表現力」
- ・「的確な判断力や創造力」
- ・「自ら課題を見つけ自ら学び、自ら問題を解決していく資質や能力」

の育成が期待され、これらは、

- ・「事象を数理的に考察することや処理することのよさを知る」
- ・「実生活におけるさまざまな事象との関連を思考する」

ことを通して身につくものである。これらの資質や能力は「数学的な見方・考え方」と総称できるが、その育成によって、「生きて働く」力や「よりよく生きる」力が備わり、「自らの生き方を見つめる」きっかけになっていくのである。

ところで、「数学的な見方・考え方」は、本来目に見えないもの、すなわち「観察不可能」なものであるから、私たちは生徒の「数学的な見方・考え方」の達成状況を評価する拠り所として「数学的活動」を捉えることにしている。

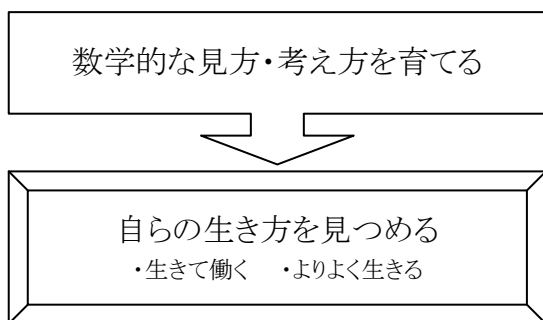


図1 数学科の役割

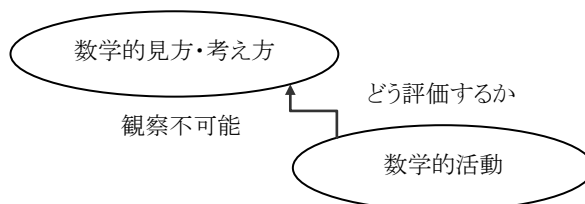


図2 数学的な見方・考え方と数学的活動

これまでの実践研究の積み重ねにより、私たちは授業における基本的な活動場面として、

- ・問題提示
- ・自力解決
- ・集団による課題の検討

という、数学的活動を軸とした3つの活動場面を位置づけてきた。その中で、私たちが課題として捉えているのは、自力解決でみられる「多様な考え方」を集団で「どう練り上げていくのか」ということである。

教師の役割は、数学的に価値の高い教材を求め、生徒とともに問題を作り、自力解決においては生徒の活動の変容（促進）を支援し、集団による練り上げを通して問題の解決に至るだけでなく、個々の活動を振り返り（価値づけ）、そこから新たな課題を見出すことによって学習の質を高めていくように授業を構成することである。その際、教師は生徒にどのような活動を期待するのかを明確にしておく必要があるであろう。なぜなら、教師にそのような用意がなければ、生徒の多様な解決は、いわば雑多なものとして扱われ、本時において追求されるべき課題が明確にならないまま授業が展開されかねないからである。そもそも、生徒の多様な解決は、自己評価力を高め、問題の深い理解と活用を促し、生きて働く力が高めるものであることを、教師は心得ておくべきである。まさにこの点が私たちの研究の出発点となっているのである。

以上をふまえ、私たちの研究グループでは、研究課題を「多様な考え方をどう練り上げていくか」とし、比較的多様な考え方を引き出す問題を提示しやすいと思われる図形領域において、

- ・よい問題の開発と提示の工夫
- ・期待する数学的活動の明確化とその支援
- ・集団による課題の検討の場面で生徒の多様な考え方をどう練り上げていくのかの検討

を中心に、授業構成のあり方を追求してみることにした。

2. 研究の方向性

日々の授業には「本時のねらい」があり、授業はその達成をめざして行われるべきものである。「本時のねらい」には、「～することができる」という表現に代表される行動目標だけでなく、課題を解決することによって得られる数学的に価値のある見方や考え方の育成も含まれる。問題により、あるいは、教師が生徒に期待する数学的活動によって、授業は様々な様相を呈する。そこでは、自力解決による「多様な考え方」は、課題を追求しよりよい数学的な価値を生む前提となるものであり、それを集団で「どう練り上げていくか」という手続きは不可欠なものであるといえる。

「練り上げ」では、例えば、ある授業では、「多様な考え方」が互いに根拠やその帰結として結びつけられたり、また別の授業では、「多様な考え方」が互いに比較検討される展開が想定されたり、さらにまた他の授業では、「多様な考え方」が新たな考え方を生み出す手がかりとして捉えられたりするであろう。

いずれにしても、私たちの基本的な立場は、「多様な考え方」を「練り上げる」ことを通してよりよい数学的価値を生み出そうとするものである。そこで私たちは、以上のような数学的活動の様相の違いをもとに、次のように授業を類型化することにより、研究課題へのアプローチを試みた。すなわち、

類型Ⅰ. 「多様な考え方」が互いに根拠やその帰結として結びつけられるもの

これは、問題に対して、考え方は限定されているが、具体性、抽象性の程度が多様な場合に多く見られるであろう（考え方A・B・Cからの練り上げ）。

類型Ⅱ. 「多様な考え方」が互いに比較検討される展開が想定されるもの

これは、問題に対して、具体性や抽象性が同程度のいくつかの考え方が存在する場合に多く見られるであろう（考え方 B_1 ・ B_2 ・ B_3 …からの練り上げ）。

類型Ⅲ. 「多様な考え方」が新たな考え方を生み出す手がかりとして捉えられるもの

これは、類型Ⅰ・Ⅱの延長線上に位置づけられる場合のほか、問題をオープンエンドにすることによっても実現されるであろう。問題に対して、多様な視点で対象を捉えることにより、新たな視点が生まれ、対象を多角的に考察し、問題への理解を深めるのである（考え方1・2・3…からの練り上げ）。

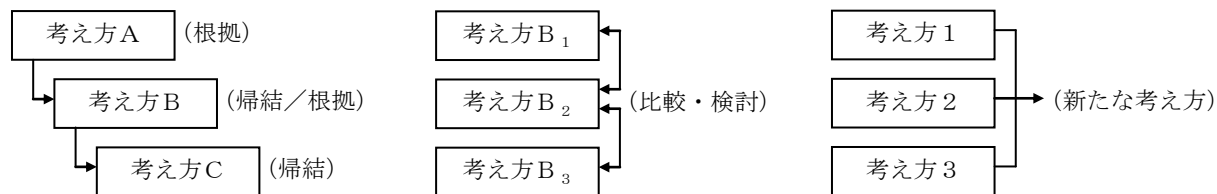


図3 授業の類型（左から、類型Ⅰ・類型Ⅱ・類型Ⅲ）

そして、これまでのいくつかの実践をもとに、その成果と課題を明らかにすることにより、問題提示の仕方や支援のあり方を授業ごとに構想し、生徒の多様な考え方をどう練り上げていくのかの検討を行い、授業のあるべき姿（類型Ⅰ・Ⅱ・Ⅲへのモデル化）を模索していくことにした。

3. 多様な考え方の展開の実践例

次に、3つの実践例を示す。

実践例 1 (類型 I 「多様な考え方」が互いに根拠やその帰結として結びつけられる事例)

数学科学習指導案

単元名 座標平面上の三角形の面積

本時のねらい

座標平面上の三角形の面積を、座標を文字で表すことにより一般化する。

準備 ワークシート

本時の学習過程

学習活動	○主な発問 ・教師の期待する反応	・留意点 ○評価 ※手だて
1. 座標平面上の三角形の面積を求める。	<p>○座標平面上にある三角形の面積を求めてみよう。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・長方形の面積から余分な三角形の面積をひく。 ・三角形をいくつかの三角形に分けて全体の面積を求める。 <p>○いろいろな面積の求め方を考えてみよう。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・等積変形をして面積を求める。 	<p>○面積を一つの方法で求めることができる。</p> <p>※座標平面上に補助線を引いて考えさせる。</p> <p>※補助線を三角形の外側、または内側に引いて考えさせてみる。</p> <p>※長方形を作って考えさせる。</p>
2. 文字を使って式を作り、面積を求める。 具体例からの予想(自力・他力解決)	<p>○座標が文字の三角形の面積を求めてみよう。</p> <p>○班で協力して計算してみよう。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・三角形の辺の長さを求める。 ・面積を求めるために必要な三角形を一つずつ計算していく。 	<p>○文字を使って辺の長さなどを表すことができる。</p> <p>○求めたい三角形の面積を文字式で表すことができる。</p> <p>※面積を求めるために必要な長さを、文字を使って表してみる。</p> <p>※班の分担、班内の分担を決めて考えてみる。</p>
3. 具体的な数を当てはめて計算して面積を求める。	<p>○別の三角形の面積を、文字式に代入して求めてみよう。</p>	<p>○文字の有用性に気づくことができる。</p>

実践例2 (類型II 「多様な考え方」が互いに比較検討される展開が想定される事例)

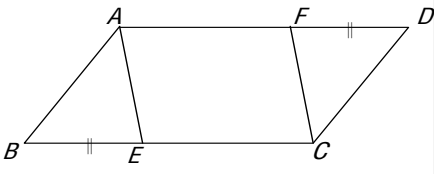
数学科学習指導案

単元名「平行四辺形の証明」

本時のねらい

- ・ 平行四辺形になる条件を使った証明が少なくとも一つはできる。
- ・ 「逆向きにたどって考える発想」の有用性を感じさせる。
- ・ 生徒から、多様な証明方法を引き出し、さらにそれを相互に関連付けたり、補完したりして発展、深化させる。

本時の学習過程

学習活動	指導上の留意点
<p>問題 $\square ABCD$で、図のように $BE = DF$となる点 E, Fをとるとき、四角形 $AECF$は平行四辺形になることを証明しなさい。ただし、証明方法を何通りか考えること。</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 「平行四辺形になる条件」を利用する問題であることに気づく。 2. 「平行四辺形になる条件」が5つあることを確認する。 3. 5つの証明が考えられることを予想する。 4. 一人ひとりが、できるだけ多くの証明方法を考える。 ・ 少なくとも「1組の向かい合う辺が、等しくて平行」を利用した証明は理解する。 5. 班を使って、証明方法を話し合う。 ・ $\triangle ABE$と$\triangle CDF$の合同を証明することで、「2組の向かい合う辺がそれぞれ等しい」、「2組の向かい合う角がそれぞれ等しい」、「2組の向かい合う辺がそれぞれ平行」という条件を利用した証明にそれぞれ結びつくことに気づく。 ・ 四角形 $AECF$の対角線の交点を Oとするとき、$\triangle AOF$と$\triangle COE$の合同を証明することで、「対角線がそれぞれの中点で交わる」という条件を利用した証明ができることに気づく。 6. 班の代表者が発表し、共有化する。 ・ 班の中で、班員に説明し、その後、全体の前で発表する。 7. 5つの証明方法があることを確認し、結論は同じでも、さまざまなアプローチが考えられる良さを実感する。 	 <ol style="list-style-type: none"> ○ 仮定と結論を確認させ、結論を導くには、何を利用したらよいか考えさせる。 ○ 「逆から考える発想」であることを押さえ、その有用性を感じさせたい。 ○ 「平行四辺形になる条件」は、証明を行うためのアイテムとして、プリントに示す。 ○ 最初は、各自にじっくり考えさせる。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 1つ証明ができた生徒は他の証明方法をいくつか考えさせる。 ・ 証明の書き方にこだわりすぎず、その発想の良さを押さえない。 ○ 班の中で、教え合うことで、お互いの考えを共有化させたり、補完させたりする。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 三角形に合同に着目すると、それを利用して、3つの違うルートで、結論にたどり着く、そのおもしろさを実感させたい。 ・ 平行四辺形になる条件の5種類のどれを利用しても同じ結論に行き着くことができるその多様性から、いろいろな考え方ができる良さを感じさせたい。 ○ 生徒に発表させると共に、全員の理解が図れるように補足説明を行う。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 班の代表は前もって決めておく。 ○ 「平行四辺形になる条件」5つの全てを根拠として証明することに「論証のおもしろさ」や「逆から考える発想」の大切さを実感させたい。

実践例3 (類型III「多様な考え方」が新たな考え方を生み出す手がかりとして捉えられる事例)

数学科学習指導案

単元名 立方体の切断

本時のねらい

空間における直線や平面の位置関係を考えながら、立方体の切断面がどのような形になるか説明できる。

準備

ワークシート、立方体模型

本時の学習過程

学習活動	主発問 (『』) と予想される生徒の反応	評価と留意点
1 前時の振り返り		<ul style="list-style-type: none"> 前時の円柱の、いろいろな切断面を考えたことを想起し、本字の意欲づけとしたい。
2 本時の学習内容を知る。 3 自力解決 ・既習事項を想起して、予想する。 ・予想した図形になる理由を考え、発表する。	『立方体を平面で切ったときの切り口はどんな形になりますか。その理由も考えよう。』 ・三角形、正三角形、二等辺三角形、直角三角形△、四角形△、正方形、長方形、平行四辺形、台形、ひし形、五角形、六角形、七角形△ (△は誤り) ・辺の長さや角の大きさ、2直線の位置関係、平面の位置関係など既習事項を使って説明する。 ・五角形、六角形など一定の条件 (1組の対辺が平行等) が加わることに気づき、その理由を考える。	<ul style="list-style-type: none"> 立方体の定義の確認 (評) 空間の位置関係を考え、図形を予想することができたか。 切断面の形を一番適切な名称で答えさせる。 ※複数の切断面が考えられない生徒には、具体物を見ながら考えさせる。 ※考えを整理するために、点を決めて切断面を動かすよう助言する。 (評) 辺の長さ、角の大きさ、2直線の位置関係や平面の位置関係など既習事項を使って説明できたか。 ・表現が不十分な場合でも支援しながら最後まで発表させる。 ・誤った切断面を予想した場合にも、なぜ間違いかを考えさせたい。
4 まとめ		<ul style="list-style-type: none"> 学習したことがらを使って、論理的に考えることよさに気づかせる。

4. 考察

(1) 類型Ⅰ「多様な考え方」が互いに根拠やその帰結として結びつけられる事例

実践例1をもとに考察してみた。

【具体的な生徒の「多様な考え方」の様相】

面積を求めることができない生徒が予想より多く、面積を求めることに対しての支援する時間が多くなった。そのため、面積を求めることが授業のねらいだと考える生徒が多数いた。そして座標を文字で表して面積を求めるとき、思考や行動が止まる生徒が多く、そのまま授業が終了し、消化不良となってしまった。

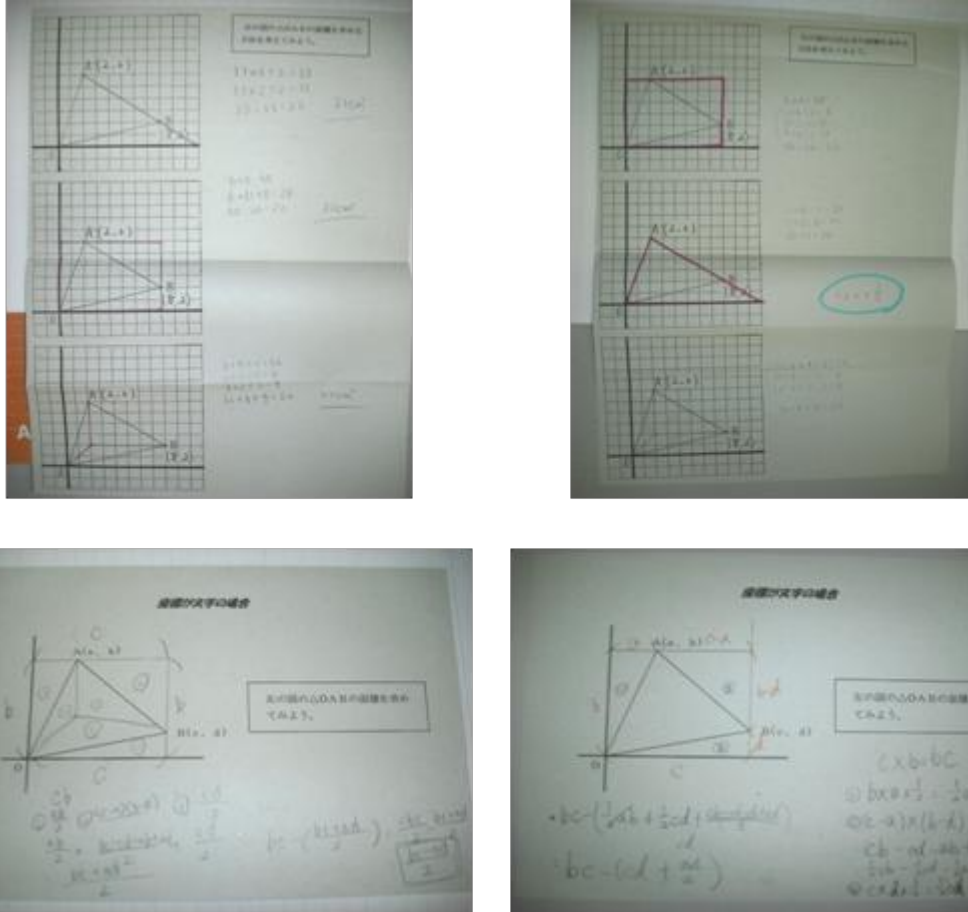


図4 生徒のワークシートより

【授業実践を通して見えてきた学習指導上の困難点・改善点】

座標平面上の三角形の面積を多様な方法で求めたのち、文字式を用いて一般化することをねらった指導例である。これは類型Ⅱにあてはまるが、具体例を用いた面積計算と文字による一般化とが、別個の目標になってしまっている印象を与える。文字式で一般化させたいという教師の意図に反し、生徒はその必然性に気づいていないのである。展開1から展開2への移行を円滑にする工夫が必要である。それにはまず、導入時の問題の提示（最初の発問）が重要である。それにより教師の期待する自力解決と練り上げを通して課題がより明確になっていくのである。いきなり文字式を提示することも1つの手段として考えられる。その上で、展開1において、思考を促す支援として効果的なものは何であるかをよく考えることである（それは展開2における発問となる）。さらに、ワークシートにかなり工夫の余地がある。例えば、図のみ与え数値を明示しないようなワークシートや、座標平面の第1象限だけでなく他の象限に図がかかれたもの、などであれば、違いの中に共通点を見いだすような思考を促すであろう。そうすれば、展開1から展開2への移行が円滑になるであろうし、教師の意図次第では、類型Ⅰのような展開にすることもできるであろう。そこで抽象度の違う考えが併存した状態からの練り上げを行う、類型Ⅰのような展開で授業改善案を考えた。具体的な数値、任意の数値、文字へと抽象度を上げながら面積の一般化へと課題の練り上げを行うことをねらった授業である。

・授業改善案

本時の学習過程

学習活動	◎主発問 ・教師の期待する反応	・留意点 ○評価 ※手だて
1. (問題の提示) 4種類の位置関係にある三角形の面積を求める。	「次の三角形の面積を求めてみよう。」 <ul style="list-style-type: none"> ・ 長方形の面積から余分な三角形の面積をひく。 ・ いくつかの三角形に分割して考える。 ・ 平行線を利用し、等積変形をして考える。 	○三角形の面積を求めることができる ※三角形の底辺や高さをどこにするか考えさせる。 ※座標平面上に補助線を引いて考えさせる。 ※補助線を三角形の外側、または内側に引いて考えさせてみる。 ※長方形を作って考えさせる。 ・ 等積変形で面積を求めるものは、本時のねらいとはなれているため、本時では扱わない。
2. (課題の設定) 文字を使って式を作り、面積を求める。 具体例からの予想(自力・他力解決)	課題 座標を文字で表し、一般化する ◎ (3) の三角形の面積を求めてみよう。 ○どんな数でも答えが出せるようなやり方を考えてみよう。 ○座標の数値と面積とを比べて(3)の面積を予想してみよう。 ・ 適当に数字を当てはめて面積を求める。(B) ・ 文字を使って面積を求める。(C)	○文字を使って面積を求めることができる。 ※(1)(2)をどう解いたかを振り替えさせる (A→B) ※数字を当てはめて考えさせる。 (B→C) ※数字の代わりになるものがないか考えさせる。(B→C)
3. (課題の解決) 面積を表す文字式に具体的な数字を代入して面積を求める。	○文字式に数字を代入して(1)、(2)の面積を求めてみよう。 ・ 数を代入して計算する。(B) ・ 代入して計算した結果と比較し、文字式の有用性を確認する。(C)	○文字の有用性に気づくことができる。 ・ さらに深まりそうな生徒には、第1象限以外の三角形でも考えさせる。

ワークシート

面積を求めてみよう

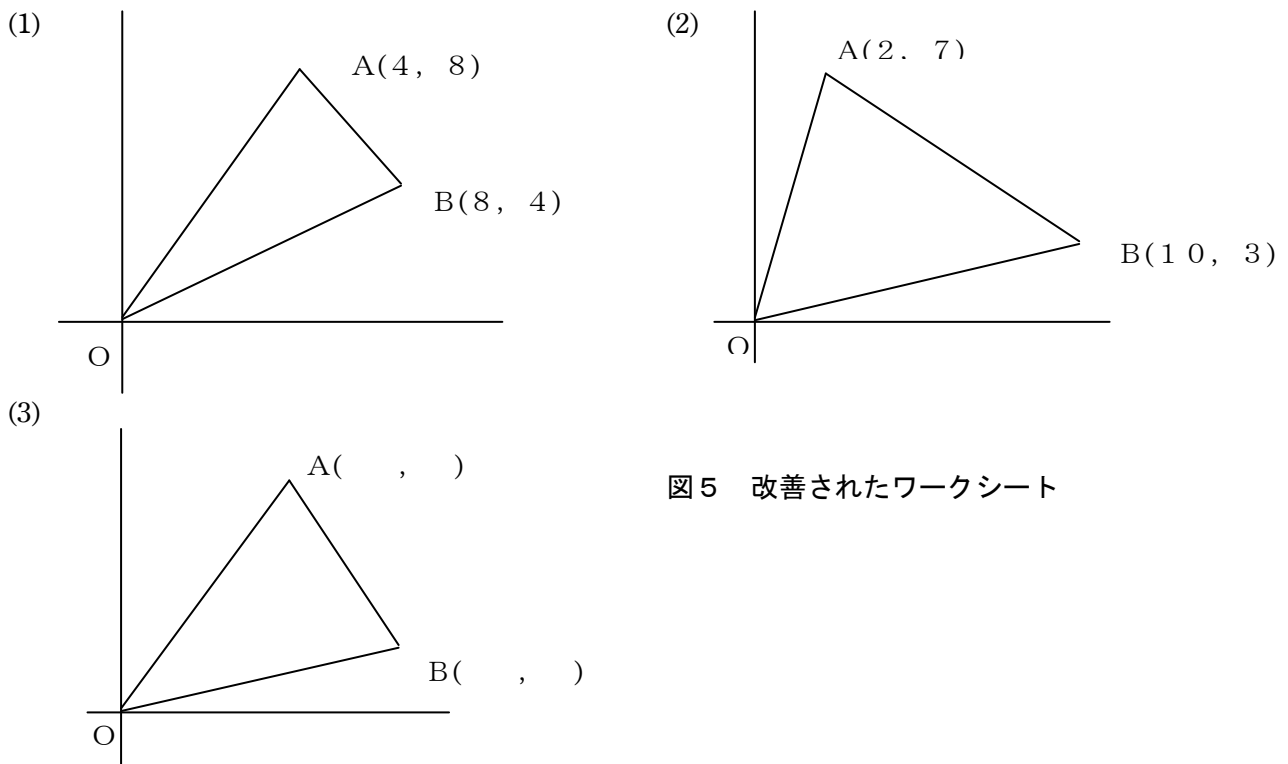


図5 改善されたワークシート

(2) 類型II「多様な考え方」が互いに比較検討される展開が想定される事例

実践例2をもとに考察してみた。

【具体的な生徒の「多様な考え方」の様相】

生徒に図6のようなワークシートを使って証明方法を考えさせたところ、解答例1～5のような答が引き出せた。解答例1は「1組の向かい合う辺が等しくて平行」という条件を使った証明である。予想したとおり、多くの生徒はこの証明を行っていたし、それがねらいの一つでもあった。

解答例2は「 $\triangle ABE$ と $\triangle CDF$ の合同」を利用し、「2組の向かい合う辺がそれぞれ等しい」という条件を使った証明である。この証明方法も解答例1と同じくらい多くの生徒が行っていた。生徒の中には、三角形の合同を利用する証明が定着しているように感じる。

解答例3の「証明②より」とかいてあるのは、「 $\triangle ABE$ と $\triangle CDF$ の合同」を利用するということをさしている。

「2組の向かい合う角がそれぞれ等しい」という条件を使って証明している。時間的なこともありこの証明を行っていた生徒は2, 3人であった。

解答例4は、未完成ながらも「対角線がそれぞれ交点で交わる」という条件を使っての証明を試みている。

(図6参照)

解答例5は、 $AE \parallel FC$ の根拠となっている錯角は正しくないが、「2組の向かい合う辺がそれぞれ平行」という条件を使って証明することに挑戦している。

以上の解答例からもわかるように、解答例4, 5は未完成だったり、まちがいをふくんでいたりもするが、平行四辺形になる条件の5つとも生徒は利用して証明を試みたことになる。

実際の授業では、全体の前で、生徒自身に説明をさせたのは、時間が足らず、解答例1, 2のみであった

が、4人組の学習班の中では、「 $\triangle ABE$ と $\triangle CDF$ の合同」を利用することで、さらに解答例3まで引き出すことができたところもあった。解答例4, 5は各一人ずつ考えていた。全体的に時間不足で、全ての考えを、全体で紹介することはできなかった。

問題 $\square ABCD$ で、図のように
 $BE = DF$ となる点E, Fをとるとき、四角形AECFは
 平行四辺形になることを証明しなさい。
 ただし、証明方法を何通りか考えること。

図6 問題提示

① 仮定より $AD = BC$ $BE = DF$ $\therefore AF = EC$ ① 解答例1
 $BC \parallel AD$ $\therefore EC \parallel AF$ ②
 ①②より、1組の向かい合う辺が平行で等しい
 \therefore 四角形AECFは平行四辺形

② $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ で、 ④より $AE = FC$ ⑤ 解答例2
 $\square ABCD$ なので、 $\angle B = \angle D$ ① $\square ABCD$ より $AF = EC$ ⑥
 $AB = CD$ ②
 仮定より $BE = DF$ ③ ⑤⑥より2組の向かい合う辺が
 ①②③より2辺とその間の角 等しいので
 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ ④

③ 証明②より $\angle AEB = \angle CFD$ ① 解答例3
 $\angle AEC = \angle CFA$ ④
 平行四辺形の性質より $\angle BAD = \angle BCD$
 証明②より $\angle BAE = \angle DCF$ ②より $\angle EAF = \angle FCE$ ③
 ①④②より2組の向かい合う角がそれぞれ等しいので $\square AECF$ となる。

④ 四角形AECFの対角線の交わる点
 点をGとする。 $\triangle AFG \cong \triangle CEG$ で、
 $\square ABCD$ より $AF = CE$ ① 解答例4

① $\square ABCD$ は「平行四辺形」だから、
 $AF \parallel EC$ ① 解答例5
 $\angle A = \angle C$ ②より、錯角が等しい $\rightarrow AE \parallel FC$ ②
 2組の辺が平行だから
 $\square AECF$ 。

図7 生徒の解答例

【授業実践を通して見えてきた学習指導上の困難点・改善点】

・授業後の研究会より

○ 成果

- ・一人ひとりが、じっくり考え、それをもとにしてお互いにしっかり関わろうとしていて、学習班で教え合うことが、ある程度できていた。
- ・「平行四辺形になる条件」に到達するためにどのような証拠を集めていけばいいのかといった「逆からの発想」の有用性は感じられた。
- ・生徒は、班の中や全体で、自分の考えを伝えるための工夫を努力できていた。
- ・生徒の中から、4種類の証明方法を引き出すことができた。

○ 課題

- ・一つの証明を考えたら、次を考えるのが精一杯で、時間が足りなかった。
- ・少なくとも、一つの証明方法については、全員が理解できるように配慮が必要であった。
- ・班によっては、班員の誰も証明方法が考えつかないところもあり、そこに対する支援の方法をもっと用意しておく必要があった。
- ・三角形の合同を核にして、3つの証明に発展できるが、そこを押さえて、発問を工夫していきなかったがうまくいかなかった。
- ・生徒に、班で考えたり、班や全体の場で説明したりすることを慣れさせていなかったもので、とまどっていた。
- ・多様な考えも重要だが、その中でどれが一番いいのかという視点も必要かもしれないと感じた。

○ 研究主題について

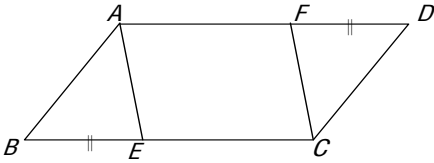
この証明は、その方法が何通りかある問題なので、「考え方に多様性がみられるもの」と考えられ、類型Ⅱと捉えることができる。さらに、ここでは、5つの予想される証明方法のうち3つが「ある三角形の合同」を利用するという共通点を持つことに着目したい。つまり、生徒が集団との関わりの中で、考えを関連付け、補完していく過程で、この共通点すなわち「友だちの考え」を利用することができる。そのことに生徒は集団で考えを深めることの意義を実感できるように思う。

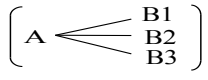
また、5つの証明方法の個々、独自の部分や共通点を把握することで、5つの方法のつながり、その体系化ができることに気づくことを通して、生徒の理解はより一層深まるのではないだろうか。

・授業改善案

本時のねらいである「5つの証明方法相互の関連や補完」をより意識して、指導案の改善を行うと以下ようになる。

本時の学習過程

学習活動	○主な発問・教師の期待する反応	・留意点 ○評価(方法)※手 だて
1. 平行四辺形になることの証明。(問題の提示)	<p>「$\square ABCD$で、図のように $BE = DF$ となる点 E, F をとるとき、四角形 $AECF$ は平行四辺形になることを証明しなさい。ただし、証明方法を何通りか考えること。」</p> 	<ul style="list-style-type: none"> ・仮定と結論を確認させ、結論を導くには、何を利用したらよいか考えさせる。 ・「逆から考える発想」であることを押さえ、その有用性を感じさせたい。 <p>○5つの「平行四辺形になる条件」のいずれかが利用できる。</p>

<p>2. いくつかの証明方法を考える。(課題の設定)</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・「1組の向かい合う辺が等しくて平行」の条件を使って、証明できる。(B5) ・$\triangle ABE$と$\triangle CDF$の合同を証明し、それを利用しようとする。(A) ◎$\triangle ABE$と$\triangle CDF$の合同を利用して、証明する方法をいくつか考えてみよう。 ・「2組の向かい合う辺がそれぞれ等しい」の条件を使って、証明できる。(B1) ・「2組の向かい合う角がそれぞれ等しい」の条件を使って、証明できる。(B2) ・同位角、錯角を利用し、$AE \parallel FC$をいい、「2組の向かい合う辺がそれぞれ平行」を使って証明できる。(B3) ○「対角線がそれぞれ中点で交わる」を使って、証明できないだろうか。 ・ACとEFの交点をOとするとき、$\triangle AOF$と$\triangle COE$の合同を利用し、「対角線がそれぞれ中点で交わる」を使って証明できる。(B4) 	<ul style="list-style-type: none"> ・1つの証明ができた生徒には他の証明方法を考えさせる。 ※$\triangle ABE$と$\triangle CDF$の合同の証明を説明させる。 ○ 三角形の合同を利用し、3つの別の証明方法に結びつけることが出来る。  ※学習班の中で教えあうことで、お互いの考えを共有化させたり、補完させたりする。 ・三角形の合同に着目すると、3つの違う証明につながるおもしろさを実感させたい。 ・平行四辺形になる条件の5種類の全てで証明できることから、いろいろな考え方ができる良さを感じさせたい。 ※全体でそれぞれの証明を発表させる。 ○5種類の証明を理解することができる。
<p>3. 5つの証明方法のつながりを考える。(練り上げ)</p>	<ul style="list-style-type: none"> ◎この5つの証明を比べて、そのつながりや気づいたことは何ですか。 ・$\triangle ABE$と$\triangle CDF$の合同を利用する証明が3つある。 ・「1組の向かい合う辺が等しくて平行」を使った証明が一番シンプルでわかりやすい。 ・5つの平行四辺形になる条件の全てで証明が可能である。 ・結論から逆向きにたどって考えると証明の方法を見つけやすい。 	<ul style="list-style-type: none"> ・5つの証明のつながりや独自の部分を明確にしたい。 ・平行四辺形になる条件5種類の全てを根拠とし、それぞれ証明できることから「論証のおもしろさ」や「逆から考える発想」の大切さを実感させたい。 ○5つの証明のつながりを考えることでより理解を深めることができる。

(3) 類型Ⅲ「多様な考え方」が新たな考え方を生み出す手がかりとして捉えられる事例

実践例3をもとに考察してみた。

【具体的な生徒の「多様な考え方」の様相】

この実践は、類型Ⅲを意図した授業の試みであった。しかし、実際の生徒の活動は、課題の認識不足によると思われる自力解決への取りかかりの遅れが見られた。また、生徒の様々な反応を整理しまとめ上げていく教師の用意も不十分であり、かなり練り上げの視点を絞り込む必要を感じた。

生徒が見つけた切断面は、図8のようなものであった。

【授業実践を通して見えてきた学習指導上の困難点・改善点】

課題設定においては「取りかかりのための支援」がいかに大切であるか、ということに十分留意しないとイケない。「取りかかりのための支援」が効果的であるかどうかということが、一人ひとりの生徒にとって自分なりの課題へのアプローチによる「自力解決」への決め手となるからである。言い換えれば、自力解決の場面で、課題に対して何一つ解決の糸口を見いだせないような生徒がいないようにする支援が必要であるということである。これは、生徒による活動の振り返りを可能とするための最低限の条件であり、学びの質が向上したかどうかを自己評価するポイントとなるものである。

以上をもとに、授業改善案を示すことにする。まず、問題の提示場面においては、教師が立体模型を用いて範示を行うことにより、課題の把握を容易にし、自力解決時の多様性の幅を広げることが意図した。また、ワークシートは、生徒が試行錯誤しながら、気づいた点をまとめられるように、次のようなものを考えてみた(図9)。

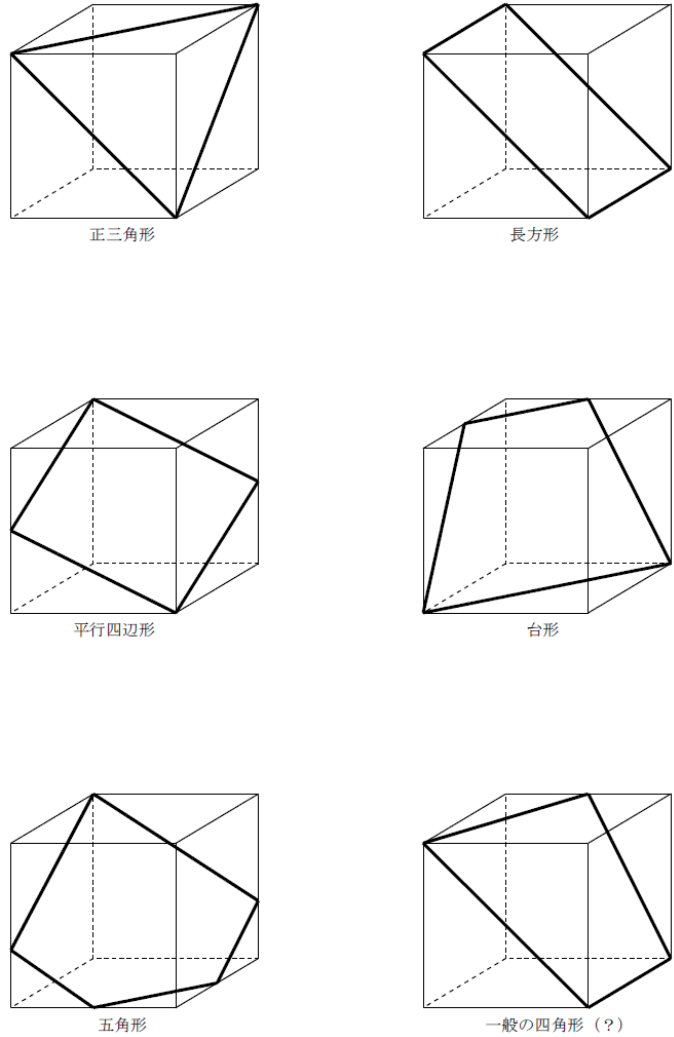


図8 生徒の解答例

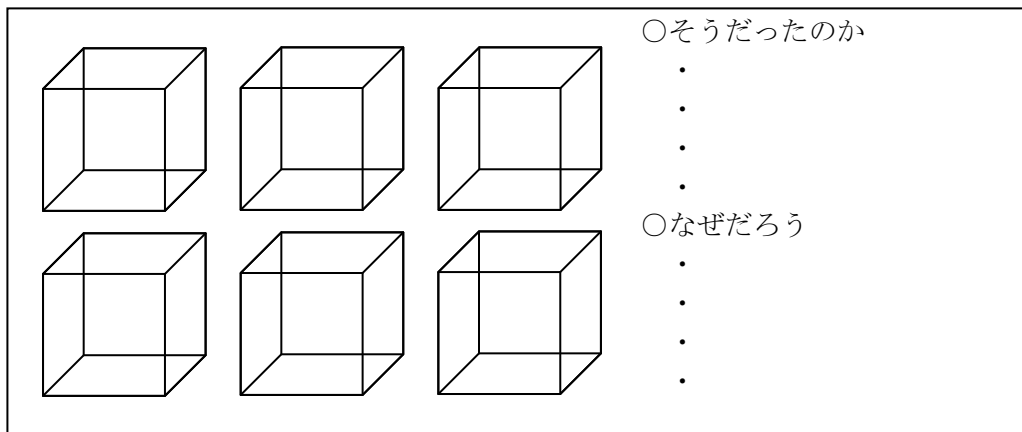
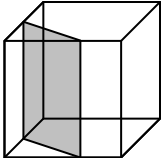
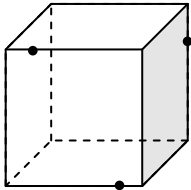


図9 「立方体の切断」ワークシート

本時の学習過程

学習活動	○主な発問 ・教師の期待する反応	・留意点 ○評価
<p>1. 立方体を底面に垂直な1つの平面で切断したときのようなすを観察する</p> 	<p>○立方体を平面で切って2つの立体に分けると、どんなことが分かるでしょう</p> <ul style="list-style-type: none"> ・三角柱と五角柱ができる ・五面体と七面体に分かれる ・切り口が長方形になっている 	<ul style="list-style-type: none"> ・留意点 ○評価 ・模型を使ってイメージを持たせる ○切り口が多角形になることがわかる ・2平面が交わると直線ができることにふれる
<p>問題提示</p> <p>このように、切り口は長方形のような多角形になることがわかります。そこで、立方体を1つの平面で切るとき、切り口にできる形、できない形を考えよう</p>		
<p>2. 長方形をもとに他の多角形の作り方を考える(自力解決)</p> <p>3. 切断によりできる形とできない形があることについて考える(集団による課題の検討)</p>	<p>○ほかにどんな四角形ができるだろうか</p> <ul style="list-style-type: none"> ・切り口が正方形や台形にもなる ・ひし形、平行四辺形 (1) ・ただの四角形(誤答) ・4つの面が切れると四角形になる (2) ・三角形ができた <p>○三角形ができるのはどんな切り方をしたときだろう</p> <ul style="list-style-type: none"> ・長方形をだんだん傾けて上下の面が切れないようにすればよい (3) ・1つの頂点だけを切り落とせばよい ・正三角形や二等辺三角形ができる <p>○五角形や六角形はできるだろうか</p> <ul style="list-style-type: none"> ・三角形を作るときと逆の方向に辺を移動させればよい (4) <p>◎一般の四角形ができないのはなぜだろう</p> <ul style="list-style-type: none"> ・4面のうち2面は平行だから必ず平行線ができる ・平行線のない四角形はできない ・だから正五角形はできない ・正六角形はできる <p>○七角形はできるだろうか</p> <ul style="list-style-type: none"> ・立方体は六面体、だから無理 	<ul style="list-style-type: none"> ・随時、ワークシートに切断面の形と、気づいたことを記入させる ・切断面が四角形と三角形になる場合の切り方の違いをもとに、いろいろな多角形の作り方に気づかせる ・切断面を1つずつ増やす工夫を考えさせる (1~3) → (4) ・誤答例に対しては、ねじれの位置にある2直線はできないことを思い出させる (誤答) と (2) ○直線や平面の位置関係から、切断面の形とその理由を説明することができる
<p>4. 3点指定切断</p> 	<p>○図のように3点を通る平面で立方体を切ったときの切り口の形を考えてみよう</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・新たな課題として、3点指定切断を与える

5. 研究のまとめ

多くの授業では、自力解決により「多様な考え方」がある程度出揃った段階で「練り上げ」に移行するが、そこでの発問は特に重要である。自力解決の場面での支援は、練り上げに向けて構成され、課題解決に向かわせるために行われなくてはならない。類型ごとに授業の特徴を述べてみると、

類型Ⅰの授業は、具体から抽象へ（考え方AからBへ、BからCへ）の思考を促す支援により、少しずつ練り上げていく。そうしておくことにより、抽象度の違ったいくつかの考え方が併存した状態であっても、練り上げが可能となるのである。実践例1の授業改善案では、「座標の数値が提示されていない三角形の面積を求める」という発問によって、文字を使って表現する一般化へと練り上がることを狙っている。つまり、具体的な数値から三角形の面積を導き出す方法がいくつか併存することが予想されるが、文字式を利用して面積を表す一般化へと課題解決が収束していくのである。

類型Ⅱの授業は、具体性や抽象性は同程度であるが、出揃った結果から何を導き出すことを課題とするのかを明確に持った上で、授業を展開していく必要がある。実践例2の授業改善案では、「 $\triangle ABE$ と $\triangle CDF$ の合同」という共通のアイデアを使って、3つの異なる証明方法へ分化、発展させることができる証明問題を使っている。5つの証明が出揃った後、それらを比較検討する中で、「どの証明が、一番シンプルでわかりやすいか」、「5つの証明のうち、証明が互いにどのようにつながっているのか」などに着目させ、多様な考えのおもしろさやつながり、有用性などを感じさせることができる。本時の課題学習をもとに、「平行四辺形の中に平行四辺形を作る方法がほかにもあるのだろうか」といった新たな課題を設定すれば、類型Ⅲに属する授業づくりができよう。

類型Ⅲの授業は、問題をオープンエンドにしている。このような場合、教師が生徒にどのような活動を期待するのかを明確にしておかないと、本時において追求されるべき課題が明確にならないまま授業が展開されかねない。実践例3の授業改善案では、立方体を1つの平面で切断することにより、「長方形以外の四角形もできる」「4つの面が切れると四角形になる」「長方形をだんだん傾けて上下の面が切れないようにすると三角形になる」など、立方体の切断面を多様な視点で捉え、それらの結びつきを考えながら、「切断面を1つずつ増やす工夫を考える」という新たな視点を設けている。そして「切断によりできる形とできない形があることについて考える」という練り上げにより、空間図形概念の形成するための総仕上げの題材として生かすことが可能となるのである。

授業が類型Ⅰ～Ⅲのどの様相を呈するかは、問題の提示の仕方に大きく依存している。「立方体の切断」をもとに考えてみると、例えば、

- ・「立方体を次の3つの点を通る平面で切るとき、切り口はどんな形になるでしょう」→類型Ⅰ
- ・「立方体を1つの平面で切るとき、切り口が四角形になるような方法を考えよう」→類型Ⅱ
- ・「立方体を1つの平面で切るとき、切り口にできる形、できない形を考えよう」→類型Ⅲ

のように、問題提示によってさまざまなタイプの授業展開となるのである。問題提示の場面においては、生徒が課題を意識し、教師の意図する数学的活動を導くための明快な問題が提示されなくてはならず、効果的な発問、板書、ワークシート等が準備されなくてはならない。

いずれの場合も「平行な2平面に交わる平面があるとき、交線が平行になる」という考えを中心に切断面の形を追求する課題を設定し授業を構成することができる。そして「立方体の切断を通して、空間の直線や平面の位置関係の理解を深める」という数学的価値の追求をめざすのである。学年や生徒の習熟の程度によっては、例えば、「平行四辺形の面積2等分と、立方体（に代表される平行六面体）の体積2等分のような、平面と空間の性質の共通性に気づく」といった新たな数学的価値にまで練り上げることもできよう。

本研究を通して、類型Ⅰ、類型Ⅱ、類型Ⅲのそれぞれに属するものについて、授業づくりのモデルをある程度示すことができたのではないかと思う。今後の目標として、日々の授業で想定される、例えば「考え方A・ B_1 ・ B_2 ・ B_3 ・ C_1 ・ C_2 」のような類型複合的な授業づくり、さらには、図形以外の領域における本研究との共通点や相違点についての考察も行ってみたい。

参考文献

研究報告第31・32・33集、鳥取大学教育地域科学部附属小・中学校、1999・2000・2001

研究のまとめ第36集、鳥取大学附属小・中学校、2004

石谷健二郎、「立方体の切断」を空間図形概念形成の導入題材として生かす実践例、2002

編集委員

矢部敏昭 鳥取大学数学教育学研究室 tsyabe@rstu.jp

溝口達也 鳥取大学数学教育学研究室 mizoguci@rstu.jp

(投稿原稿の内容に応じて、外部編集委員を招聘することがあります)

投稿規定

- ❖ 本誌は、次の稿を対象とします。
 - ・ 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
 - ・ 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
 - ・ 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
 - ・ その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供
- ❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。
- ❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。
- ❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒680-8551 鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX 0857-31-5101 (溝口)

<http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/>