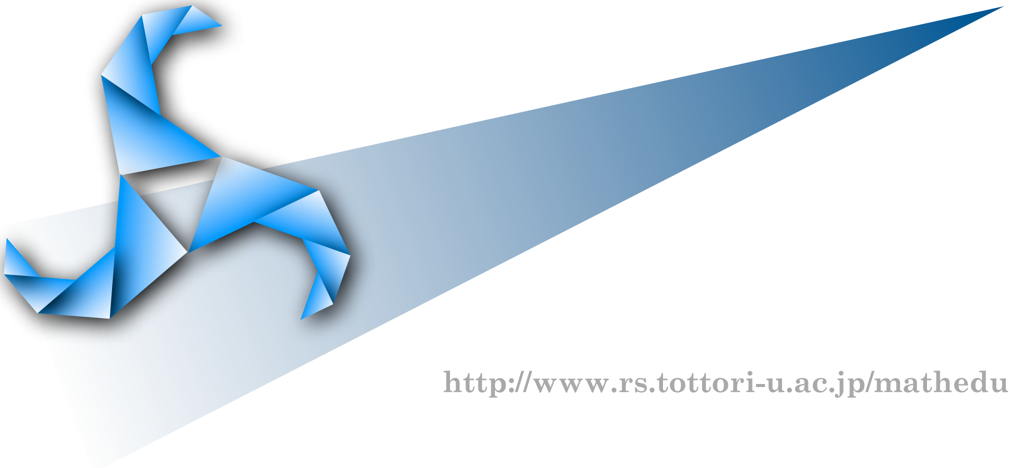
ISSN 1881-6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education



http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

算数の問題解決学習における支援に関する研究

―支援の場と支援内容に焦点を当てた支援設計の枠組みの構築―

山中法子

vol.12, no.7
Mar. 2010

鳥取大学 数学教育学研究室

目次

第１章

研究の目的と方法

本章では，本研究の目的と方法について述べる．
1.1では，本研究の動機について述べる．1.2では，本研究の目的を述べ，1.3では，その目的を達成するための方法を述べる．

1. 研究の目的と方法

1.1　研究の動機

児童が算数を学習する目的は，新たな知識や技能を獲得することのみに止まらず，問題（困難）に直面した際に自ら考え解決（克服）する能力を養うことである．児童は自ら解決する過程において，思考錯誤を行う．その際，思考錯誤の手助けとなるのが教師の支援であると考えられている．そのため，支援は問題解決学習において必要不可欠なものであると言えるだろう．

以上のように問題解決学習における支援がいかに必要であるかについては，多くの教師が感じ，賛同しているであろう．しかし，教育現場における支援の実態をみると，その場しのぎの支援や，教師の経験や感覚に基づいた支援をなされることが多いように見受けられる．実際，筆者も教育実習での授業設計の際に，本時一時間の学習のみを見通した支援設計を行っていた．また，『本当にこの児童に，この支援内容が必要であり，それは妥当なのか．』という根拠が見出せず，「何となく必要だろう」という判断で支援設計を行っていた．このような支援設計のあり方では，問題に直面した際に常に以前と同質の支援を必要とする児童を育てることにつながりかねない．このことから，いかに支援設計を行うかということについての議論が必要ではないかと考えた．つまり，支援設計の際の理論的な判断基準の設定やその有効性についての議論が十分なされておらず，現在これらを明らかにすることが求められる．

1.2　研究の目的

本研究の目的は，問題解決学習における支援の場と支援内容に焦点を当てた支援設計の枠組みを構築すること

である．それにより，教師が理論的根拠に基づく支援設計や単元を超えた一貫性のある支援設計を行うことができるようになると考えられる．

1.3　研究の方法

問題解決学習における支援設計の枠組みは，支援の場と支援内容を決定する視点とその妥当性について明らかにすることで構築できると考えられる．そのため，事例「あまりのあるわり算」の導入を基に構築を図ることとする．まず，本研究の土台となる事例の授業設計を現状の課題を基に行う．次に，授業形式のモデル化を行い，それにより，事例における期待される児童の算数的活動の高まり方の特徴を明らかにする．その特徴を基に，支援の場とその場における支援内容を導出する．さらに，それらの決定の視点と妥当性について明らかにすることで問題解決学習における支援設計の枠組みを構築する．その後,構築した支援設計の枠組みの他教材における適用事例について検討する．その検討を通して，いかに支援設計の枠組みが機能するか，その有効性や用いる際の困難な点について明らかにする．

第2章

「あまりのあるわり算」の導入の授業設計

本章では，事例「あまりのあるわり算」の導入の授業設計を行う事を目的とする．

2.1 では，事例の現状について教科書を基に分析し，それを踏まえて現状のよさと課題を抽出する．2.2 では，現状のよさと課題を基に，授業設計の際に欠くことのできない要件について明らかにする．2.3 では，2.2 の要件を基に，問題開発を行い，さらに，期待される児童の算数的活動を設定する．

2.「あまりのあるわり算」導入の授業設計

2.1 「あまりのあるわり算」導入の現状と課題

2.1.1 「あまりのあるわり算」の概要

「あまりのあるわり算」は小学校第 3 学年において学習する．学習指導要領(2008)A「数と計算」領域に以下のように位置づけられている．

> A 数と計算
> (4)除法の意味について理解し，それを用いることができるようにする．
> ア 除法が用いられる場合について知ること．また，余りについて知ること．
> イ 除法と乗法や減法との関係について理解すること．
> ウ 除数と商が共に1位数である除法の計算が確実にできること．
> エ 簡単な場合について，除数が 1 位数で商が 2 位数の除法の計算の仕方を考えること．

児童はこれまでに，わり切れるわり算，つまり，九九を一回適用してできるわり算について学習している．また，等分除・包含除について理解している．「あまりのあるわり算」において，児童にとって新しい概念となるものは「あまり」である．小学校第 2 学年におけるひき算の学習を通して児童は「のこり」の概念については理解しているが，「あまり」についてはこの学習が初めてである．それでは，「のこり」と「あまり」の違いは何だろうか．決定的な違いは，「あまり」には商と余りが一意に存在するための条件があるということである．その条件とは，余りは 0 以上で除数より小さい数でなければならないというものである．一方，「のこり」は減法の演算結果である．これまでに学習した四則演算においても計算結

果が一意に存在しており，一意に存在することに計算の価値があるといえる注1）．また，わり算において，「あまり」がでることを特殊として捉えるのではなく，わり切れるわり算は「あまり」が「0」となるわり算であると捉える事が大切である．

2.1.2　「あまりのあるわり算」の導入の現状

現在「あまりのあるわり算」は包含除から導入し，それを中心としながら等分除も取り入れるという流れになっている．2.1.2では，導入（第1時）における問題を以下に示した上で，その問題設定の意図について考える．

（K社の場合）

問題1

16人でゲームをします．ふえの数と同じ人数のグループをつくりましょう． 2人のとき，グループは何組できるかな． 3人のとき，グループは何組できるかな．

実際に16人の子どもが描かれ，さらに，2人組の場合と3人組の場合も描かれている．また,「三五　15　三六　18　あれ？」,「3×□＝16の□にあてはまる数はないよ．16÷3と表していいのかな．」,「3人のときは1人あまったね．」,「3人ずつグループをつくるのだから，わり算の式でいいよ．」と吹き出しに書かれている．

問題2

17人で，上のゲームをします． 3人でグループをつくるとき，グループは何組できて，何人あまりますか．

この問題では，まず，わり算の式を立てた後に，数図ブロックなどの具体物を用いて答えを求めさせようとし

ている．さらに，九九を使って求めるよう指導されている．また，あまり「…」の書き方や「わり切れるわり算」「わり切れないわり算」という用語の説明がされている．

これら2つの問題設定から分かることは，問題1は問題2の問題把握を容易にするためのステップとして設定されたものであるということである．これは，問題1は絵や数図ブロックが用いられており，児童が具体的に考えられるような工夫がされていることからわかる．また，教科書には「同じ数ずつ分ける時に，あまりが出ることがあります.」という記述があり，あまりが出る場合があることを問題1の段階で児童に伝えている．問題1を経て，問題2では，具体的操作で答えを求めるだけではなく，わり算の式に表したり，計算を使って答えを求めさせようとしている．これは，既習事項である九九を用いるように促している点から推測できる．また，あまりの表記方法や「わり切れるわり算」「わり切れないわり算」という用語の整理がされている．

2.1.3　現状のよさ

「あまりのあるわり算」の単元の流れを見ていくと，包含除から等分除への流れとなっている．筆者は，このような包含除からの導入はよいと考えている．なぜなら，包含除は「あまり」が出てくる場面が自然であり，その理解も等分除に比べより容易であるからである．詳しいことについては，2.2.1において述べている．

2.1.4　現状の課題

現在の「あまりのあるわり算」の導入を踏まえて，筆者は以下に2点の課題を指摘する．

(1)「あまり」に着目する必要性の欠如

「あまりのあるわり算」において児童にとって新たな課題は「あまり」をどのように処理し，表現するかということであるにも関わらず，例えば前出のK社の導入問題のように，「あまり」について考える必要性のない問題が設定されている．実際にK社の問題1を例に具体的に説明する．問題1での「3人のとき，グループは何組できるかな.」という問いはあくまでも作ることが可能なグループ数を問うているものである．そのため，グループが何組できて，その結果「いくつあまるのか」ということまで考える必要はないのである．つまり，問題1は「商」のみが問題解決につながるものであり，「あまり」は問題解決と関係のない問題となっている．このように，問題1は「商」だけではなく「あまり」にも着目させるような問題としては不十分であるということを指摘することができる．「商」と「あまり」に着目させる問題設定のよさについては，2.2.2において詳しく述べる．

(2)児童自らが課題に直面するような問題設定の欠如

現在の「あまりのあるわり算」の導入では，導入段階ですぐに問題解決のための手段が与えられており，児童が「あまり」の処理や表現方法，「除法」で演算決定することのよさを考える場が設定されていない．これは，例えばK社の問題2から指摘すると，次の通りである．問題2は，「あまりのあるわり算」もわり算の式に表して答えを求められること，また，「あまり」の書き方「…」の説明がされている．つまり，すでに形式化された問題の解決方法，表現方法を教えることが主な目的になっていると捉えることができる．それでは，すでに形式化された問題の解決方法，表現方法の教授は具体的に何を意味し，何が課題とされているのか．児童の活動の実態と関

連させながら述べていく．

① 望ましい演算決定のための吟味の欠如

児童は問題 2 を与えられた時，すでに学習したわり算の経験，すなわち,「何人に分けられるか」という問いからこの問題もわり算で解けそうだと考えるだろう．つまり，児童は

$$15 \div 3 = 5,\quad 18 \div 3 = 6$$

のように解けるので，15 と 18 の間にある数 17 であっても,「17÷3」と式に表わし，答えを求めようとすると予想できる．しかし，今までのわり算と同じようには答えを求めることができず，はたして「17÷3」という式は成立するのかという疑問を抱くだろう．一方，問題 2 では，問題の提示後「わり算の式にかき，数図ブロックをつかって答えをもとめましょう」とあらかじめ児童に「除法」で演算決定することを示している．その時点で児童の「17÷3」は成立するのかという疑問は考える必要がなくなるのである．つまり,「わり切れないわり算」がどうして既習の「わり切れるわり算」と同じように「除法」として演算決定できるのかということを考えることなく，この問題を解決することが可能になるのである．まさにこのことが望ましい演算決定のための吟味の欠如であり，課題として挙げられる．望ましい演算決定，つまり,「除法」で演算決定することの意義については 2.2.4 において詳しく述べる．

② 「あまり」の処理の仕方や表現方法を考える必要性の欠如

すでに①で述べたように，児童は「17÷3」という式が成立するかどうか疑問に思うことが予想される．そこで，

ひとまず「17÷3」の式から離れ，答えを求めるために絵や図を用いたり，既習の「わり切れるわり算」の際に用いた乗法を用いることで答えを求めようとすると考えられる．その活動を通して，児童は「あまり」をどのように処理し，表現すればよいのか，また，算数のよさである簡潔・明瞭・的確に表すために望ましい演算決定は何かということを教師の支援（アシスト）を受けながら考えるようになるのである．そして，最初に抱いた疑問である「17÷3」の立式は成立するということを身をもって実感するのである．しかし，問題2では児童がこのような活動をする必要性が問題設定の中に含まれていない．なぜなら，数図ブロックを用いて「あまり」を視覚的に示し，その「あまり」は「商」の後に「…」と表現することで示すことができるということを教えているからである．このような問題の設定では，児童自らが「あまり」の処理や表現について考える必要性がそもそも含まれていないという課題が挙げられる．

以上の①②で示したように，K社の問題2のような設定では，「17÷3＝5…2」というすでに形式化された問題の解決方法や表現方法が与えられており，形式化されるまでの過程を児童が吟味する必然性がないと主張できる．換言すれば，「除法」で演算決定することのよさ，「あまり」の処理の仕方や表現方法を児童自らが考える必然性の出てくる問題設定になっていないと考えられる．

(1)(2)で示した課題を踏まえて，新たに提案する問題はその課題を克服するための要件を含んだ問題を設定しなければならない．その要件については2.2において詳しく述べる．

2.2「あまりのあるわり算」の導入における要件

2.2.1　包含除からの導入の意義

2.1.3で述べたように，「あまりのあるわり算」の導入は，包含除から学習し，その後等分除の考え方を学習すべきである．包含除から導入することの意義は以下の通りである．

包含除は「全体の中から決められた数ずつとっていく」という考え方であるため，「あまり」が出てくる場面が自然であり，その意味を理解することも等分除に比べ容易であるということが挙げられる．このことを以下の具体例を用いて説明する．

<u>問題</u>

37個の種を1人に4個ずつ配ります．何人に配れますか．

この問題を包含除で考えると，37個の中から4個とり，さらに残りの33個の中から4個とり…というように，全体から一人分ずつを引いて求めることができる．この場合，37個から9人分引いた所で，1個残り，それ以上分けられないということになる．もちろん，既習の乗法を用いて4×9＝36より，9人に分けるとも考えられる．このように，包含除の考え方は，全体の中から決められた数ずつとる活動が商を求めることにつながり，そしてその活動の先に「あまり」がでてくるという自然な流れになっている．

一方，等分除で「あまりのあるわり算」を考えると，その性質上「あまり」さえも等分に分けられるようにしなければならない．そのため，「あまり」を出すという考え方はされず，「あまり」を考えることが不自然な問題場面となってしまう．このことを以下の具体例を用いて説明していく．

問題

37 個の種を 4 人に同じ数ずつ分けます．一人分は何個になりますか．

この問題を等分除で考えてみると，37 を四等分すると $37 \div 4 = 9\frac{1}{4}$ となり，整数だけでは表しきれない．これは，「あまり 1」さえも等分に分けようと考えているからである．この場合，「商」や「あまり」を解釈することは小学校 3 年生の児童にとって難しいことであるといえる．それでは，実際に児童はこの問題をどのように考えるだろうか．まず，「あまり」にあたる部分をあらかじめ被除数から引いた上で（37－1＝36），その後，36÷4＝9 と考えていると予測できる．このような活動が予測できるのも，等分除の性質上，「あまり」を出さないようにわり進めるためのものなのである．

このように，「あまりのあるわり算」を等分除で考えることは不可能ではない．しかし，導入としては，上に挙げたよさより包含除を用いる方が児童にとってより理解しやすいものであると考えられる[注2)]．

2.2.2 「商」と「あまり」に着目する問題設定のよさ

「あまりのあるわり算」では，「あまり」をどう処理し，表現するかが児童にとって新たな課題である．その課題に取り組むためには，導入段階で，「商」そして「あまり」にも着目するような問題を設定することが大切となってくる．「商」だけではなく「あまり」にも着目させるような問題を設定することで，児童は今までに学習したわり算を用いながら工夫して問題を解決しようとしたり，新たな表現方法の必要性を感じることができると考えられ

る．具体的に述べると，「あまりのあるわり算」は九九のみを用いて答えを求めることができないため，九九で求められる最も近い答えを基に，「いくつあまるのか」と考えることができるだろう．さらに，教師の支援を受けながら，「商」だけではなく「あまり」も1つの式に表せないかという活動へと高めていくようにしたい．このような活動を通して，児童は「あまり」の処理や表現方法，つまり，形式化されるまでの過程について考えていくのである．さらに，形式化されるまでの過程の吟味を通して，自ずと「あまり」の条件についても考える児童が育つのではないかと考えている．これらの児童の活動を生み出すためには，「商」と「あまり」に着目させるような問題の設定が必要なのである．

筆者はこのことを踏まえて次に紹介する問題について考察した．

<u>問題</u>

35人の子どもが長いす1きゃくに4人ずつ座っています．みんな座るには，長いすが何きゃくいりますか． （K社3年上）

この問題は，「あまりのあるわり算」において，「あまり」の処理について考えさせる問題として取り入れられている．この問題のポイントは，4×8＝32で8脚必要であると考えた後，あまっている3人も座らせるためにはもう1脚必要であるという考え方である．一見，この問題であれば「あまり」について考えられていると捉えられる．しかし，実際はあまっている人数自体を吟味しなくとも，8脚プラス1脚でみんなが座ることができるということになり，「あまり」の数そのものが問題の解決につながらないといえる．このことより，「あまり」に着目させる問題としては不十分であるといえる．「あまり」に

着目させる問題の提案は2.3.1においてする．

2.2.3　児童に期待する主たる算数的活動

「あまりのあるわり算」の導入では，既習の同数累減，さらには九九を用いて「あまりのあるわり算」も考えようとし，その活動の中で「あまり」の処理や表現方法，望ましい演算決定について吟味する児童の活動に価値があると考えられる．特に，「商」だけではなく「あまり」も1つの式に表わすことができるようになることに活動の高まりがあり，導入段階で考えるべき価値ある活動であると考えている．これらのことを，次の問題[注3)]を用いて説明していく．

<u>問題</u>

ホウセンカの種が16個あります．1人に3個ずつ分けると，何人に分けられますか．

筆者は下に示している活動の高まりこそが，「あまりのあるわり算」の導入における価値であると考えている．

<u>活動A</u>
3×□＝16　なし
3×□＝15　あり
（□＝15÷3)
□＝5　あまり1

<u>活動B</u>
15＝3×□
15＋1＝3×□＋1

まず活動Aでは，児童は既習事項を踏まえて，3×□＝16の□に当たる部分を考えるだろうと予測できる．しかし，九九の3の段には16はないことに気づき，今までの九九のみを用いたわり算では答えが求められないことに気がつくだろう．しかしその後，児童は3×□＝15であれば答えを求めることができ，九九を用いて，あるいは除法を用いて□＝5と求め，答えに達するだろう．この

活動では,「あまり」を式に表わすことができていないという不十分な点が挙げられる．一方，活動Bは既習事項である九九を用い，そして両辺に同じ数を加えても相等関係は成立するという決まりを利用して「あまり」を「+1」という形で式に表わすことができている．このように，「商」と「あまり」を1つの式に表わすことそのものに活動の価値があるといえる．なぜなら，活動Aに比べ活動Bは，より簡潔・明瞭・的確に「商」と「あまり」の関係を式に表わすことができているからである．これらのことから，活動Aの児童を活動Bへと高めることに学習の価値があるといえる．その上で，活動Bをさらに簡潔・明瞭・的確に表現したものとして，活動Cには除法での演算決定が位置づけられるべきだろう．

2.2.4 「除法」で演算決定することの意義

「あまりのあるわり算」は,「除法」で立式し計算するものである．しかし,「除法」で演算決定をしたとしても，児童は「除法」の逆演算である「乗法」を用いて問題の解決に努めようとする．なぜなら，今まで学習してきた「わり切れるわり算」において，児童は九九を1回適用して答えを求めており，また，除法で演算するより乗法で演算する方が思考が容易だからである．以上のことから，立式する活動と実際に計算する活動は必ずしも一致しないということが言えるだろう．それでは,「あまりのあるわり算」において「除法」で演算決定することの意義は何だろうか．「除法」で演算決定することは算数のよさである「簡潔・明瞭・的確」に適っており，他者に自らの考え方を伝える際に極めて妥当なものである．このことは，児童の活動を設定する際の活動の価値づけとなり，2.2.3 において述べた通りである．一方，ただ問題

の答えを求めるためだけの演算決定ならば，2.2.3 の活動 A のように「除法」でなくとも「乗法」で十分である．また，「乗法」でなくとも，「減法」を用いても答えは求められるのである．これらのことから，「除法」で演算決定することの意義は，最も簡潔・明瞭・的確に表すことができていると主張できる．そのため，「除法」で演算決定するよさを含んだ問題提示場面の設定，また，前提として「商」と「あまり」に着目させるような問題の設定が必要になるということが主張される．

2.3「あまりのあるわり算」の導入の問題開発

2.3.1　問題の提案

現状の課題を踏まえて，2.2 では「あまりのあるわり算」の導入の際に大切にすべき要件 4 点を明らかにした．それが以下の 4 点である．

(a) 包含除での導入
(b)「あまり」そのものが問題の解決につながるような問題の設定
(c) 児童自らが新たな課題に直面し，問題解決を形式化するための過程が考えられるような問題及び問題提示場面の設定
(d)「除法」で演算決定することによさがあるという要素を含んだ問題提示場面の設定

これらを踏まえて，「あまりのあるわり算」の導入（第 1 時）問題を提案する．

第 1 時のねらいは，「わり切れないわり算もわり切れるわり算と同様に乗法を用いて問題を解決しようとする中で，あまりの処理の仕方や表現方法を考える．さらに，

除法で演算決定することのよさを理解することができる．」である．

問題提示場面

ホウセンカの種が16個あります．1人に3個ずつ配ります．みんなに同じ数ずつ分けられますか．

児童：みんなに同じ数ずつ分けられない．

児童：5人には分けられる．

16個にあと何個加えれば，何人に同じ数ずつ分けられますか．

教師：加える数の求め方をより分かりやすく式に表わしましょう．

数値設定の理由は以下の通りである．「あまりのあるわり算」の導入であるため，多くの児童が絵や図を用いて問題把握をすると考えられる．その際に数の操作がしやすいよう，また，絵を描くことのみに時間を費やすことがないようにするため，「16」という数を選んだ．

上記の問題提示場面，または問題が上に挙げた4つの要件を満たしているかどうか，それぞれ検討していく．

(a)包含除での導入

包含除での導入は問題の通り，達成されている．

(b)「あまり」そのものが問題の解決につながるような問題の設定

「あまり」に着目させる問題であることは達成できているといえる．なぜなら，加える数を求めるためには，「あまり」の数が分からなければならないからである．

つまり，問題解決のためには「あまり」に着目する必然性がある．

(c) 児童自らが新たな課題に直面し，問題解決を形式化するための過程が考えられるような問題及び問題提示場面の設定

以下の理由で達成できているといえる．問題提示場面において，除法で演算決定することや，「あまり」の表記方法については，本問題では触れていない．問題提示では「加える数の求め方をより分かりやすく式に表わしましょう」と提示している．「加える数の求め方」を問うことで「商」に加えて「あまり」にも着目させることができる．また，「わり切れるわり算」と同じように解決しようと試みる活動を通して，「あまり」の処理や表現方法について児童が自ずと考える活動が生まれることが期待される．

(d)「除法」で演算決定することによさがあるという要素を含んだ問題提示場面の設定

問題提示において「より分かりやすく式に表わしましょう」と提示しているため，より分かりやすく式に表わすためには，「除法」での演算決定が最も適切な表し方である(2.2.4 参照)といえるからである．

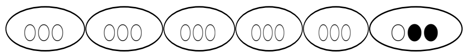
これらの 4 点より，この問題及び問題提示場面は「あまりのあるわり算」の導入の際の 4 つの要件をすべて満たしているといえる．

2.3.2　期待される児童の算数的活動

本時の期待される活動は以下の通りである．

活動A-1：図や絵を用いて具体的に考えていく．

＜活動例＞



図より，あと2個加えれば6人に分けられる

活動A-2：同数累減，乗法を用いて考え式に表わし，除法で計算する．

＜活動例＞

$3\times\square=16$　なし　　$16-15=1$

$3\times\square=15$　あり　　$3-1=2$

（$\square=15\div3$）

$\square=5$

あと2個加えれば6人に分けられる

活動B：乗法と加法を用いてあまりを式に表わす．

＜活動例＞

$3\times\square=15$　　$18-16=2$

$15+1=3\times\square+1$

$3\times6=18$

あと2個加えれば6人に分けられる

活動C:乗法と加法の形式から除法の形式で表しなおす．

＜活動例＞

$16\div3=5$　あまり1　$3-1=2$

あと2個加えれば6人に分けられる

活動はA-1からCに向かい，活動の価値が高まっている．教師は児童が活動A-1から活動A-2へ，活動A-2から活動

Bへと活動を変容させるよう支援（アシスト）していくことが大切となる．特に，本時では，活動 A-2 から活動 Bへの変容，つまり，「あまり」の処理と表現方法を考える中で「商」と「あまり」を1つの式に表わすという活動に重きを置きたい．

以上のように，現状のよさと課題を基に事例の授業設計を行った．

第2章の要約

本章では，本研究の目的である問題解決学習における支援設計の枠組み構築の際に用いる事例「あまりのあるわり算」の導入の授業設計を行った．

現状のよさと課題より，支援設計を行うにあたり欠くことのできない4つの要件が明らかになった．その要件とは以下の通りである．

(a) 包含除での導入

(b) 「あまり」そのものが問題の解決につながるような問題の設定

(c) 児童自らが新たな課題に直面し，問題解決を形式化するための過程が考えられるような問題及び問題提示場面の設定

(d) 「除法」で演算することによさがあるという要素を含んだ問題提示場面の設定

以上の4つの要件を踏まえて問題や問題提示場面の設定，さらに，期待される児童の算数的活動を設定した．

次章では，本事例における支援の特徴を明らかにするため，授業形式のモデル化を行い，分析（アプリオリ分析）することが求められる．

第 2 章の注

注 1) 溝口(2007)においても計算結果が一意に存在することに計算の価値があると主張されており，そのために，「あまり」には条件が必要であるということが述べられている．

注 2) 伊藤(2008)において，等分除・包含除それぞれの「商」と「あまり」の求め方について具体例を基に比較し，考察されている．2.3 はそれを参考に述べた．

注 3) 具体例として挙げた問題は「あまり」に着目させる問題としてはふさわしくない．問題提示方法に改善の余地があるものである．

第3章

「あまりのあるわり算」の導入の分析（アプリオリ分析）

3.1 授業形式のモデル化
3.2 授業形式のモデルの分析

本章では，前章で設計した授業（事例）の分析を行うことを目的とする．授業分析とは，授業形式のモデル化を行い，本事例における算数的活動の高まり方の特徴を明らかにすることで本事例における支援の特徴づけの素地を構築することを意味している．

3.1 では，授業形式のモデル化の意義やその方法について述べる．また，実際に授業形式のモデルを提示し，その説明をする．3.2 では，授業形式のモデルを基に，本事例における期待される児童の算数的活動の高まり方の特徴について明らかにする．

3.「あまりのあるわり算」導入の分析

3.1　授業形式のモデル化

3.1.1　授業形式のモデル化を行う意義

本研究の目的である支援の場と支援内容に焦点を当てた支援設計の枠組みを構築するためには，まず，事例における支援がどのような特徴を有しているか明らかにする必要がある．そのため，事例の授業形式をモデル化する．授業形式のモデル化とは，換言すれば，本授業における期待される児童の算数的活動の構造をモデル化することである．そのため，授業形式のモデル化により，本事例における期待される児童の算数的活動の高まり方の特徴について明らかになる．それを基に，本事例における支援が必要な場とその場に必要な支援内容を明らかにする．次に，事例における支援の場と支援内容の決定の視点とその妥当性について検証することで支援設計の枠組みを構築する．その結果，理論的根拠に基づいた支援設計を行う事ができるようになると考えられる．

3.1.2　授業形式のモデル化を行う際の視点

授業形式のモデル化は，「児童の問題解決中の思考」に視点を当てて考えていく．ここで挙げた「児童の問題解決中の思考」とは，図や式に表れるような視覚化されたものだけではなく，視覚化に至るまでの過程や背後にある児童の考え方も含まれている．各活動における「児童の問題解決中の思考」を各活動の「条件」として挙げる．さらに，その「条件」が各活動でどのように位置づけられるか整理する．以上の方法で，授業形式のモデル化を図る．

3.1.3 授業形式のモデルとその説明

筆者は 3.1.2 で述べた視点を用いて，授業形式のモデル化を図った（図 1：次ページ参照）.

横軸に各活動を位置づけ，縦軸に各活動における児童の問題解決中の思考を「条件」として挙げている．異なる条件は，α，β，γのようにギリシャ文字で分類している．一方，同じ分類の中でも変容していく条件はγ′のように「′」や「″」を用いて表している.

(1)活動の条件α

活動 A-1 の条件αは,「包含除で考える」である．この条件は，16 個のホウセンカの種の中から，3 つ取り出して一まとまりにし，さらに残りの 13 個の中から 3 個を取り出し一まとまりにするという活動から主張できる．このように，16 個の中から決められた数ずつ取り出していくという包含除の考え方は，活動 A-2，活動 B，活動 C においてもされているため，この条件は活動 A-1 から活動 C にかけて保存されたものであると主張できる.

(2)活動の条件β

活動 A-1 の条件βは,「残ったものにいくつ加えれば 3 個になるか考える」である．この条件は，活動 A-1 では以下の考えに表れている．16 個の種を絵や図に表し，3 つずつに分けていく．さらに，残った種 1 つに新たに 2 つ加えることでもう 1 人分でき，分けることができると考えていることから明らかである.活動 A-2 においても，まず,3×□＝15　□＝5 の式で 16 個を 3 つずつ分けた際，分けられる最大の人数は 5 人であり，15 個必要であるということが分かる．次に，残った 1 個にいくつ加えれば 1 人分になるかということを考えるために 3－1＝2 という

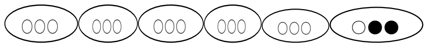
活動 A-1	活動 A-2	活動 B	活動 C
図や絵を用いて具体的に考えていく． 	同数累減，乗法を用いて考え式に表わし，除法で計算する． 3×□＝16　なし　16－15＝1 3×□＝15　あり　3－1＝2 （□＝15÷3） □＝5	乗法と加法を用いてあまりを式に表わす． 3×□＝15 15＋1＝3×□＋1 3×6＝18 18－16＝2	乗法と加法の形式から除法の形式で表しなおす． 16÷3＝5　あまり 1 3－1＝2
α：包含除で考える →	→	→	α
β：残ったものにいくつ加えれば 3 個になるか考える →	→	→	β
γ：数を 1 つ 1 つ数え上げる（図や絵を用いて）→	γ′：γの考えを式に表わし求める →	→	γ′
	δ：九九を用いて商のみを式に表す →	δ′：加える数を分かりやすくするために，「商」だけでなく「あまり」も 1 つの式に表す →	δ″：δ′の逆演算である除法で立式し，あまりを求める

図１　「あまりのあるわり算」の導入の授業形式のモデル

式を立てており，これはまさに，条件βの考え方である．活動B，活動Cにおいても同じような考え方で答えが求められているため，条件βも活動A-1から活動Cにかけて保存されたものであると主張することができる．

(3)活動の条件γとγ'

活動A-1の条件γは，「数を1つ1つ数え上げる」である．この条件は，16個のホウセンカの種を1つずつ丸で表わし，その後「1，2，3,」と3つずつ数え上げて一まとまりにするという活動から挙げることができる．

一方，活動A-2の条件γ'は，「条件γの考えを式に表し求める」である．この条件は，「3×□＝15，□＝5」「3－1＝2」のように立式し，計算で答えを求める活動から主張できる．条件γは「数える」のに対し，条件γ'は数えることなく「計算」を用いて答えを求めるという違いを挙げることができる．条件γ'の式に表し求める活動は活動A-2のみではなく，活動Bや活動Cにおいても見られる．それでは，条件γ'が各活動においてどのように表れているか以下に示す．活動A-2では，同数累減や九九を用いて式に表す活動に表れる．具体的には，「3+3+3+3＝15」「16-3-3-3-3-3＝1」「3×□＝15　□＝5」のような式である．このような式に表された数は1つ1つ数え上げたものではなく，数の一連の流れの中に位置づくものである．言い換えれば，3×□＝15の「3」は「1，2，3」と数え上げた「3」ではなく数の一連の流れの中の「3」なのである．これは，「3」だけではなく，「15」や「5」などの他の数においても同じ事が言える．このように，条件γ'は式に表すことで計算を用いて答えを求めることができる．この条件γ'は活動Bにおける16＝3×□＋1の式や活動Cにおける16÷3＝5の式にも当てはまることである．そのため，

条件γ′は活動A-2から活動Cにかけて保存されていると言える．

(4)活動の条件δとδ′，δ″

条件γ′は「式に表し求める」ものとして活動A-2から活動Cにかけて保存されているものだと分類した．しかし，同じ式に表す活動であっても，その式は一様ではなく様々な式が考えられる．それと同時に式の意味するものも変わってくる．これは，様々な考え方が式の背後にはあるからである．そこで，「式を用いて考える」という広義で捉えられた活動を教師が期待する活動へと断定していくためには新たな条件の付加が必要となる．それが条件δ，δ′，δ″である．

活動A-2の条件δは「九九を用いて商のみを式に表す」である．この条件δは，活動A-2においては3×□＝15　□＝5に表されている．九九の3の段を頭に浮かべ，3×□＝16の式は成り立たないことに気づき，16に最も近い数として15を選ぶのである．その式は3×5＝15，つまり九九を用いて商のみを式で求めることができている．

活動Bの条件δ′は，「加える数を分かりやすくするために，「商」だけでなく「あまり」も一つの式に表す」である．この条件δ′は15＋1＝3×□＋1という活動に表れている．これは両辺に同じ数を加えても相等関係は成立するという決まりを利用し，「あまり」を「＋１」という形で表しているのである．これにより，「商」だけでなく「あまり」も一つの式に表すことができるようになる．

活動Cの条件δ″は「δ′の逆演算である除法で立式し，あまりを求める」である．この条件δ″は16÷3＝5あまり１　という活動に表れている．

3.2　授業形式のモデルの分析

授業形式のモデル化を図った上で，各活動の比較を行った．その結果，条件α，βは活動A-1から活動Cにかけて保存されていることが明らかになった．また，条件γ'も活動A-2から活動Cにかけて保存されている．一方で，条件γは条件γ'へ，条件δは条件δ'へ，さらに，条件δ'は条件δ''へと変容している．また，活動A-2においては，新たな条件δが付加されていることも明らかになった．以上のことから，本事例における各活動は，条件の保存，条件の変容，そして条件の付加により構成されていることが分かる．さらに，各活動の変容には，条件の変容と条件の付加が作用していることが明らかになった．

第3章要約

本章では，支援設計の枠組み構築の際に用いる事例における支援の特徴を明らかにするために，本事例における児童の算数的活動の高まり方の特徴を明らかにした．

その方法として，授業形式のモデル化が挙げられる．授業形式のモデル化とは，換言すれば，本授業における期待される児童の算数的活動の構造をモデル化することである．各活動における「児童の問題解決中の思考」に視点を当てて分析することにより，各活動の構成要素を「条件」として挙げることができた．さらに，各活動間の比較を「条件」に着目して行うことで，本事例は条件の保存，条件の変容，条件の付加によって各活動が構成されていることが明らかになった．さらに，各活動の変容には，条件の変容と条件の付加が作用していることが明らかになった．以上のように，本章では授業形式のモデル化を図ることにより，本事例が有する児童の算数的活動の高まり方の特徴づけを行う事ができた．

そのため，次章では，その特徴をもとに，本事例における支援の場とその場における支援内容について検討し，さらに，それらの決定の視点とその妥当性について述べることで，問題解決学習における支援設計の枠組みの構築を行う事が求められる．

第４章

問題解決学習における支援設計の枠組みの構築

本章では，問題解決学習における支援の場と支援内容に焦点を当てた支援設計の枠組みを構築することを目的とする．

4.の冒頭において，支援設計の枠組みの構築方法について述べる．4.1～4.3では，支援設計の枠組みの構築，その問題点の抽出，その問題点を解決した新たな支援設計の枠組みの構築というサイクルで何度も検討を重ねる．4.4.では，検討を重ねて完成した支援設計の枠組みを提示する．

4. 問題解決学習における支援設計の枠組みの構築

支援設計の枠組みの構築に向けて，第3章において構築した「あまりのあるわり算」の導入の授業形式のモデルを用いる．まず，授業形式のモデルを基に，本事例における支援の場とその場における支援内容について検討する．次に，それらを決定する視点とその妥当性について明らかにすることで支援設計の枠組みの構築を図る．なお，支援設計の枠組みの構築は，枠組みの提案，その枠組みの問題点の抽出，問題点を解決した新たな枠組みの提案というサイクルを繰り返しながら構築していく．そのため，最終的に提示する支援設計の枠組みが機能する枠組みとなる．

なお，検討を重ねた過程が分かりやすいように，検討内容により大まかに枠組みA，B，Cと分類している．

4.1　支援設計の枠組みの検討A

4.1.1　支援設計の枠組みの検討 A_1

(1) 支援の場の検討（A_1）

本事例の授業形式のモデル化により，支援が必要な場は，支援1(条件 γ →条件 γ')，支援2(条件 δ →条件 δ')，支援3(条件 δ' →条件 δ'')の3ヶ所であると考えられる．条件の説明を省略した授業形式のモデルに，支援が必要な場を加えたモデルが以下のモデル A_1(図2)である．

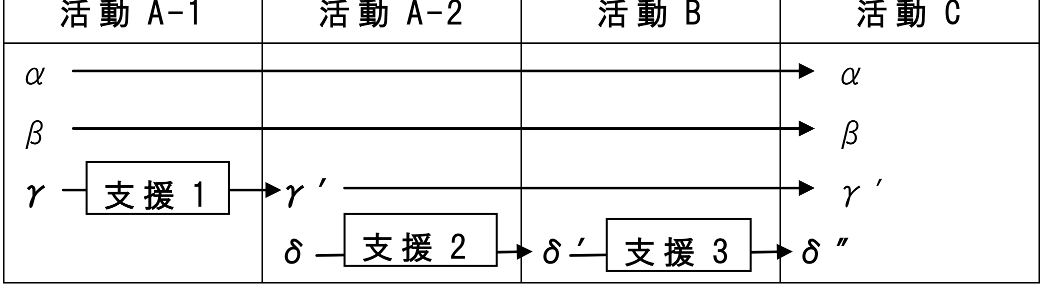


図2　事例における支援の場のモデル A_1

これら3ヶ所の支援の場の共通点は，それぞれ矢印方向に

ある活動へと高めていくために必要な支援である．このことから，支援はある条件をさらに高まった条件へと変容させる場に必要であると考えられる．なぜその場に支援が必要だと主張できるのか，支援１を例にその根拠を明らかにする．

支援１は条件γからさらに高まった条件である条件γ'へと変容する場に必要であると考えている．条件γと条件γ'の内容については，以下の通りである．

活動 A-1		活動 A-2
条件γ；数を１つ１つ数え上げる	**支援１** ⇒	**条件γ'**；γの考えを式に表し求める

条件γでは，ホウセンカの種を丸「○」で表すなど図や絵を用いながら数え上げることによって問題を解決しようとしている．一方，条件γ'は式を用いることで数えることなく計算によって問題を解決しようとしている．以上のことから，条件γ「数える」に対し，条件γ'は「計算する」という相違がみられると言える．本時のねらい達成に向けて，条件γの「数える」活動をもとに，条件γ'の「計算で求める」活動へと高まることが望まれるため，条件γから条件γ'へと変容を促す支援１が必要となる．このように，支援は条件の変容過程に必要であると主張できる．

以上において，支援の場の検討（A_1）を行った．しかし，この支援の場の検討には以下に挙げる問題点（以下「P」）が含まれている．

P[A_1]$_1$　理論を前提にしている

支援の場の検討（A_1）では，「支援はある条件をさらに高まった条件へと変容させていく場に必要である」と主張し，その主張に当てはめて支援１を説明しているに過ぎな

い．つまり，なぜその場に支援が必要であるのかについての吟味がなされていない．

(2)支援内容の検討（A_1）

4.1.1(1)で明らかにした支援が必要な場（3ヶ所）にどのような支援内容が必要となるか検討することが求められる．支援内容は，活動の目的や価値を児童に伝えるためのものと，活動の目的や価値を高めるために具体的に何をしなければならないのかということを伝える2通りのものを設定することとする．2つ目の支援は，1つ目の支援だけでは活動に変化のない児童に対して行う．4.1.1(2)では支援1（条件γ→条件γ'のみに焦点を当てて考える．

活動A-1		活動A-2
条件γ；数を1つ1つ数え上げる	**支援1** ⇒	**条件γ'**；γの考えを式に表し求める

1つ目の支援として，「(図や絵を指して）数えずに求められないかな」を設定した．この設定理由は，条件γと条件γ'の相違点である「数えるか計算するか」ということに着目し，条件γの「数える」活動から条件γ'の「計算で求める」活動へと活動の価値を高めるための的確な表現として設定した．以上のことから分かるように，1つ目の支援内容は変容前後の条件の相違点に着目し，変容後の条件へと高めていくために必要となる内容を設定している．

次に，上記の支援で活動が変容しない児童に対して，2つ目の支援として「(図や絵を指して）式に表せないかな」を設定した．これは，数えずに求める方法を具体的に表したものが式であるため，条件γ'の数えない活動へと変容させるためには，より具体的な支援であると考えた．つまり，2つ目の支援内容は，1つ目の支援をより具体的に表現したものを設定している．なぜなら，2つ目の支援は，1つ目の支援

では活動が変容しなかった児童を変容させることを目的としているからである．

以上において支援内容の検討（A_1）を支援1のみに着目して行った．また，支援1の中にも一般的な支援と具体的な支援の2通りを検討した．しかし，この支援内容の検討（A_1）には以下に挙げる問題点が見られる．

P[A_1]$_2$　事例特有の支援の検討のみである

支援内容の検討（A_1）では，支援内容について本事例に即して具体的に考えている．これは，本事例の教材研究を目的とした検討であれば問題はない．しかし，本研究において支援内容を検討する目的はあくまでも，支援設計の枠組みを構築することにある．そのため，本事例を通して他単元においても共通して主張できる視点を見出す必要がある．つまり，どのような支援内容を，どのように行うかという議論よりも，どのような視点でその支援内容を設定したのか，なぜその支援が妥当なのかという事の吟味が必要となる．また，それらを明らかにすることが支援設計の枠組みの構築へとつながるのである．

支援設計の枠組みの検討 A_1 をまとめると次ページの表(1)の通りである．

<table>
<tr><th></th><th>決定の視点</th><th>決定の視点の妥当性</th></tr>
<tr><td rowspan="2">支援の場</td><td>ある条件をさらに高まった条件へと変容させる場</td><td>事例における条件γ→条件γ′の変容が決定の視点にあてはまるため</td></tr>
<tr><td colspan="2">$P[A_1]_1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">支援内容</td><td>1つ目の支援内容
→条件の変容前後の相違点

2つ目の支援内容
→1つ目の支援内容を具体化</td><td>1つ目の支援内容
→変容前の条件を変容後の条件へと高めるため
2つ目の支援内容
→2つ目の支援の目的は1つ目の支援では活動が変容しなかった児童を変容させることであるから</td></tr>
<tr><td colspan="2">$P[A_1]_2$</td></tr>
</table>

表1　支援設計の枠組みの検討A1まとめ

4.1.2では，4.1.1で明らかになった2つの問題点（以下参照）を解決したものとして，新たな支援設計の枠組みを提案することが求められる．

$P[A_1]_1$　理論を前提にしている

$P[A_1]_2$　事例特有の支援の検討のみである

4.1.2　支援設計の枠組みの検討A_2

(1)支援の場の検討(A_2)

4.1.1(1)の問題点である$P[A_1]_1$理論を前提にしているについての解決は，4.1.2(1)では検討されておらず，

4.1.3(1)で行うものとする．そのため，4.1.2(1)では4.1.1(1)で明らかにした支援の場（以下の図の通り）をもとに支援内容の検討のみを行う．

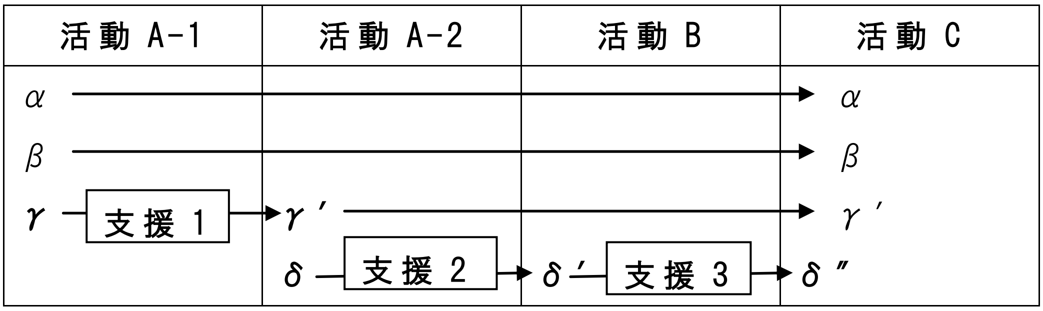


図 2　事例における支援の場のモデル A_1

(2)支援内容の検討（A_2）

4.1.1(2)の問題点である P[A_1]$_2$　事例特有の支援の検討のみであるを解決する方法は以下の通りである．支援内容の検討（A_2）では，事例特有の支援内容(以下「(ア)」)と，それをより一般的に捉えなおし，他単元においても共通して主張できる支援内容（以下「(イ)」）について設定した．それにより，事例特有の支援内容の検討だけにとどまらず，事例を基に支援設計の枠組みが構築できるのではないかと考えられる．

以下に，支援 1～支援 3（支援の場 3 ヶ所）それぞれに設定した支援内容(ア)(イ)について説明していく．また，設定する際に着目した視点を事例に即して明らかにすることで，支援内容の妥当性につい主張する．なお，事例の授業形式のモデルに支援内容(ア)(イ)を加えたモデルとして図 3（次ページ参照）が挙げられる．ただし，保存されている条件である条件αと条件βに関してはモデル内では省略している．

活動 A-1	活動 A-2	活動 B	活動 C
図や絵を用いて具体的に考えていく。	同数累減，乗法を用いて考え式に表わし，除法で計算する。	乗法と加法を用いてあまりを式に表わす。	乗法と加法の形式から除法の形式で表しなおす。
○○○ ○○○ ○○○ ○○○ ○○○ ○●●	3×□＝16　なし　16－15＝1 3×□＝15　あり　3－1＝2 （□＝15÷3） □＝5	3×□＝15 15＋1＝3×□＋1 3×6＝18 18－16＝2	16÷3＝5　あまり 1 3－1＝2

γ：数を１つ１つ数え上げる（図や絵を用いて） → γ' ：γ の考えを式に表わし求める → γ'

支援１
（ア）：具体的な操作から計算へ
（イ）：本時の学習の土台として必要な既習事項を用いた表現方法

δ：九九を用いて商のみを式に表す → δ' ：加える数を分かりやすくするために，「商」だけでなく「あまり」も１つの式に表す → δ'' ：δ' の逆演算である除法で立式し，あまりを求める

支援２
（ア）：「あまり」をいかに式に表すことができるか
（イ）：新たなものを表現するために既習事項に工夫を施す

支援３
（ア）：「あまり」をいかに簡潔・明瞭・的確に表すか
（イ）：新たな表現方法の獲得

図３　事例における支援内容のモデル A2

ⅰ）支援１（条件γ→条件γ'）の場合

活動 A-1 **条件γ**；数を１つ１つ数え上げる	**支援１** ⇒	**活動 A-2** **条件γ'**；γの考えを式に表し求める

（ア）：具体的な操作から計算へ

（イ）：本時の学習の土台として必要な既習事項を用いた表現方法

（ア）は，条件γと条件γ'の決定的な違いに着目し，変容後の条件へと高めるために必要な支援内容を設定した．条件γと条件γ'の決定的な違いは「数える」か，それとも「計算で求める」かということであった．つまり，条件γでの「数える」という具体的な行為が補われたものとして，条件γ'の「式を用いて計算で求める」というものが設定されている．そのため，条件γの具体的操作から条件γ'の式を用い計算で考える部分に着目し，支援内容を検討した．

（ア）について，事例に依存することなく一般的に捉えると以下の（イ）が考えられる．本時で新たに学習する「あまり」について児童が考え，表現する際に土台となる考え方は，すでに学習した「わり切れるわり算」である．例えば，ホウセンカの種の総数である16に近い15に当てはまる九九，つまり，3×□＝15 という式を立て計算することで答えを導き出そうとする活動が挙げられる．この活動は，本時の新たな学習事項である「あまり」について考え，表現する際に必要なものであり，それをもとにして新たな「あまり」について考えることが望まれる．その視点から活動を見直すと，条件γでは計算で答えを求められていないことに不十分さがあり，条件γ'ではそれが補われている．このように補われたことにより，ようやく本時の学習に向かうための基礎的な準備が

できたと言える．このことから，活動A-1を行う児童が本時の新たな学習内容に参加するために必要な活動A-2へと向かうために欠くことのできない支援内容として支援1が主張できる．

ⅱ）支援2の場合（条件δ→条件δ′）

<u>活動A-2</u>
条件δ；九九を用いて商のみを式に表す

支援2 →

<u>活動B</u>
条件δ′；加える数を分かりやすくするために，「商」だけでなく「あまり」も1つの式に表す

（ア）:「あまり」をいかに式に表すことができるか
（イ）：新たなものを表現するために既習事項に工夫を施す

（ア)は，条件δと条件δ′の決定的な違いに着目して変容後の条件へと高めるための支援内容を設定した．条件δと条件δ′の決定的な違いは，「商」に加えて「あまり」も1つの式に表すことができているかどうかであった．条件δでの商のみを式に表すことができた段階から，「あまり」も式に表すことのできる段階へと高めることが，支援2で求められることである．つまり，「あまり」に着目し，既習事項に工夫をこらすことでそれを表現することができないかということを考えさせるための支援内容が必要不可欠となる．

（ア)について一般的に捉えなおしてみると，条件δでは，既習事項である「わりきれるわり算」をもとに，商のみを式に表わし求めている．具体的には，3×□＝15　□＝5のようにである．つまり，新たな学習事項である「あまり」について考え表現するための基礎的な土台が完成している状態で

あるといえる．一方，条件δ′では，条件δを土台として，それに「＋1」という工夫をこらすことによって新たな学習である「あまり」について考え，表現しようとしているといえる．具体的には，15＋1＝3×□＋1 のように，「＋1」で表している部分である．このように，新たなものを表現するために既習事項に工夫を施していると言える．そのため，活動 A-2 を行う児童を，本時の新たな学習事項へと高めるための支援内容が必要となる．

ⅲ）支援 3（条件δ′→条件δ″）の場合

活動		活動 C
条件δ′；加える数を分かりやすくするために，「商」だけでなく「あまり」も 1 つの式に表す	**支援 3** →	**条件δ″**；δ′の逆演算である除法で立式し，あまりを求める

（ア）：「あまり」をいかに簡潔・明瞭・的確に表すか
（イ）：新たな表現方法の獲得

（ア）は条件δ′と条件δ″の決定的な違いに着目し，変容後の条件へと高めるための支援内容を設定した．条件δと条件δ″の決定的な違いは，「あまり」をより簡潔・明瞭・的確に表すことができているかということである．つまり，わり切れないわり算であっても除法で演算決定することや，あまりを「…」と表すことができるかというところに違いがある．あまりの表し方「…」については，児童が考えて見出せるものではなく，何かよい表し方はないかと考えた児童に教師が提示すべきものである．そのため，この活動ではあまり重要視されない．しかし，除法での演算決定へと高めること

は大切であり，必要なことである．(ア)は，条件δでの「あまり」を式に表すことができた段階から，さらにそのよりよい表し方ができている段階である条件δ″へと高めるために必要な支援内容となる．

(ア)をより一般的に捉えなおすと，以下のことが言える．条件δは新たなものを表すために既習事項に工夫を施しているという段階であった．既習事項をどのように工夫することで新たなものを表現することができるか，既習事項との違いに着目しながら獲得していく段階であった．一方，条件δ″では，その既習事項を工夫して表現したものから，新たな表現方法を獲得する段階へと高まっている．つまり，条件δ′の考え方を保存したまま，より適切な表現方法条件δ″へと変容している段階であると言い換えることができる．そのため，変容を促す支援内容が必要であると主張できる．

以上で明らかにした支援内容の検討（A_2）をまとめると，以下の通りである．

本事例特有の支援内容である(ア)については，変容前後の条件の決定的な違いに着目し，変容後へと高めるための支援内容を設定した．一方，(ア)を一般的に捉えなおした支援内容(イ)は，既習事項を用いながら新たな学習内容を獲得するために必要な支援内容を設定した．

しかし，4.1.2(2)で検討した支援内容（A_2）には，以下の問題点が挙げられる．

P[A_2]$_1$　支援1・2・3それぞれに設定した支援内容（ア）の妥当性についての議論がなされていない

支援1・2・3において，(ア)を設定する決定方法については述べられているが，それらが決定的な支援であることの議論はなされていない．換言すれば，支援内容(ア)は「変

容前後の決定的な違いに着目し，変容後へと高めるための支援内容」と主張した後，事例を用いてそれを説明しているだけにすぎない．つまり，支援内容の妥当性については言及できていない．このことから，P[A_1]$_2$　事例特有の支援の検討のみであるの解決には至っていないことが明らかである．

P[A_2]$_2$　支援内容（イ）は一般的すぎないか

支援内容（イ）は，P[A_1]$_2$　事例特有の支援の検討のみであるを解決する１つの方法として考えた．本事例のみに特化するのではなく，他単元においても主張できる視点を見つけることで，支援内容の妥当性を主張できないかと考えたからである．しかし，一般的に捉える際に，支援内容（イ）では，「既習事項を用いて新たな学習内容を獲得する」という視点を用いていた．この視点は，支援１・２・３から分かるように，本事例のみではなく他単元においても当てはまることである．しかし，この視点は支援設計の際の視点としてはあまりにも一般的すぎるという問題点がある．

支援設計の枠組みの検討A_2をまとめると次ページの表２の通りである．

	決定の視点	決定の視点の妥当性
支援の場	未検討	未検討
支援内容	（ア） →変容前後の条件の決定的な違い （イ） →既習事項か新たな学習内容かの違い	（ア） →変容後の条件へと高めるため $P[A_2]_2$ （イ） →既習事項を用いながら新たな学習内容を獲得するため
	$P[A_2]_2$	

表 2　支援設計の枠組みの検討 A_2 まとめ

以上の 2 つの問題点とまだ議論がなされていない問題点 $P[A_1]_1$ を解決するための新たな枠組みを 4.1.3 において提示する．以下が解決されていない問題点である．

$P[A_1]_1$　理論を前提にしている

$P[A_2]_1$　支援 1・2・3 それぞれに設定した支援内容（ア）の妥当性についての議論がなされていない

$P[A_2]_2$　支援内容（イ）は一般的すぎないか

4.1.3　支援設計の枠組みの検討 A_3

(1)支援の場の検討（A_3）

4.1.1(1)で明らかになった問題点 $P[A_1]$①　理論を前提にしているは，換言すれば，支援の場の妥当性についての議論がなされていないということである．それを解決するために，

なぜ支援 1～3 が必要であると言えるのか，各活動に即して検討することとした．支援が必要な場は支援の検討 A1 で述べた 3 ヶ所であり，以下の図の通りである．

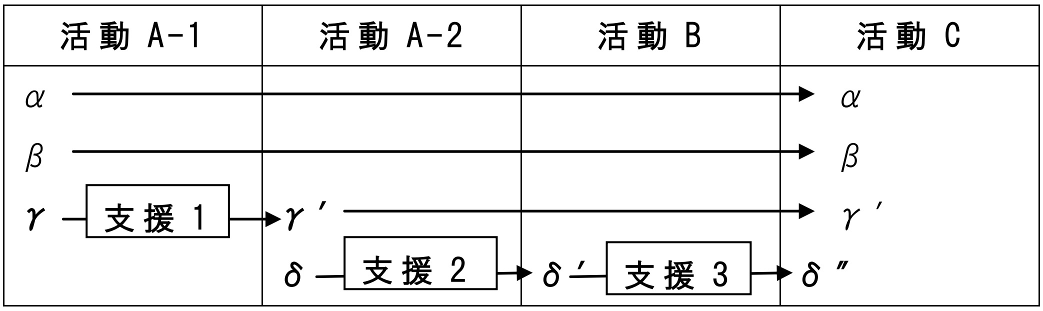
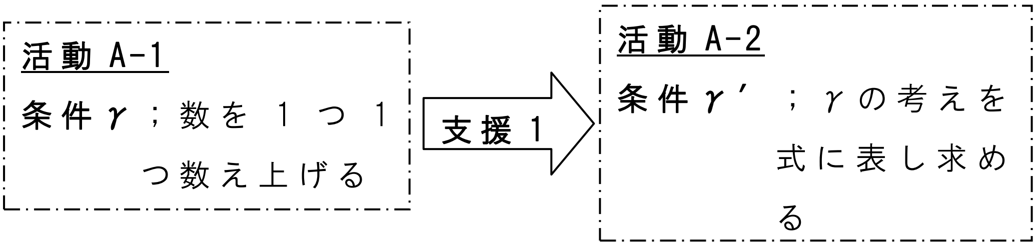


図 2　事例における支援の場のモデル A1

ⅰ）支援 1（条件 γ→条件 γ′）の妥当性



条件 γ と条件 γ′ の決定的な違いは 1 つ 1 つ数えて求めているか，それとも計算で求めているかということであった．条件 γ′ は条件 γ での具体的な操作である「数える」という不十分な点が補われたものとして設定されている．言い換えれば，条件 γ での数える活動から条件 γ′ の式で求める活動へと高まっていると主張できる．このような活動の高まりをアシストするものとして，支援は必要であり，支援 1 の妥当性が主張できる．また，支援 1 は，条件 δ の付加を促す支援としてもその妥当性を主張できる．なぜなら，条件 γ′ の「式を用いて考える」という広義で捉えられたものをさらに具体的に捉え直し分類したものが条件 δ，δ′，δ″ であるからだ．つまり，条件 γ′ を導くことにより，同時に条件 δ も付加されるのである．

ⅱ）支援2（条件δ→条件δ′）の妥当性

活動A-2
条件δ；九九を用いて商のみを式に表す

支援2 →

活動B
条件δ′；加える数を分かりやすくするために,「商」だけでなく「あまり」も1つの式に表す

条件δと条件δ′の決定的な違いは,「商」に加えて「あまり」も1つの式に表すことができているかどうかであった．条件δ′は条件δでの「あまり」を式に表すことができないという不十分な点を補う活動として設定されている．このような活動の高まりを促すものとして支援は必要であり，支援2の妥当性を主張することができる．

ⅲ）支援3（条件δ′→条件δ″）の妥当性

活動
条件δ′；加える数を分かりやすくするために,「商」だけでなく「あまり」も1つの式に表す

支援3 →

活動C
条件δ″；δ′の逆演算である除法で立式し，あまりを求める

条件δ′と条件δ″の決定的な違いは，除法で演算決定できているかどうかである．条件δ″は，条件δ′の逆演算であり，活動Cと比較した際により簡潔・明瞭・的確に表すことができている．つまり，活動は高まっていると言える．このような高まりをアシストする支援として支援3の妥当性を主張することができる．

支援1～3の設定に共通して言えることは，<u>支援が必要な場</u>

は変容前の条件では不十分であり変容後の条件では補われている点に着目し，変容後の条件へと高めることをアシストするために必要であると主張した．

以上のように，支援の場の検討（A3）を行ったが，以下の問題点が指摘できる．

P[A3]1　支援の場の妥当性についての主張となっていない

P[A1]1　理論を前提にしているを解決するものとして，検討してきたが，やはり理論を前提とし，その理論を事例に即して説明しているにすぎない．

P[A3]2　支援内容を検討しているからこそ，支援の場が 3 ヶ所で良いという結論に至っているのではないか

支援の場の検討（A1）（A2）（A3）では，支援が必要な場は支援 1(条件 γ → 条件 γ'),支援 2(条件 δ → 条件 δ')，支援 3（条件 δ' → 条件 δ'' ）と主張している．しかし，支援 1 は実際には条件 γ' への変容の機能だけではなく，条件 δ の付加を促す支援としても機能していることが明らかとなった．これは，支援内容を検討しているからこそ支援 1 のみでよいということが主張できるのである．つまり，本当ならば条件の変容する場 3 ヶ所に加え，条件 δ が付加される場にも支援は必要となる．しかし，本事例における条件の付加（ δ ）は，支援内容を検討すると条件 γ' の変容を促す支援 1 により同時に付加される．そのため，4 つ目の支援（条件 δ の付加）は必要ないと主張できるのである．このことより，再度支援が必要な場とその妥当性について検討することが求められる．

(2)支援内容の検討（A3）

4.1.2(2)で明らかになった問題点 P[A2]1　支援 1・2・3

それぞれに設定した支援内容（ア）の妥当性についての議論がなされていない，P[A_2]$_2$ 支援内容（イ）は一般的すぎないかを基に支援 1～3 における支援内容について検討した．事例の授業形式のモデルに支援内容を加えたモデルが図 4（次ページ参照）である．4.1.2(1)において，支援が必要な場は変容前後の条件の相違に着目し，変容後の条件へと高めるために必要であると主張していることから，支援内容は，条件の相違点に着目し，変容後へと高まるように促す支援内容でなければならないといえる．これについて，事例に即して説明していく．なお，ここで設定している支援内容とは，実際に授業で児童に施す支援ではなく，どのような支援内容が必要であるかという内容面を重視したものとなっている．

ⅰ）支援 1（条件γ→条件γ′）の支援内容

「数えるから計算へ」

条件γと条件γ′の相違点は，数えて求めるか，それとも計算で求めるかということである．このことより，数え上げる活動から計算で求める活動へと促すための支援として，「数えるから計算へ」という支援内容を設定することが必要であると明らかになった．

ⅱ）支援 2（条件δ→条件δ′）の支援内容

「「あまり」をいかに式に表すことができるか」

条件δと条件δ′の相違点は，「商」に加えて「あまり」も 1 つの式に表すことができるかどうかである．このことより，「商」しか式に表すことのできていない活動から，「あまり」も 1 つの式に表すことができるように促すための支援として，「『あまり』をいかに式に表すことができるか」という支援内容を設定する必要があることが明らかになった．

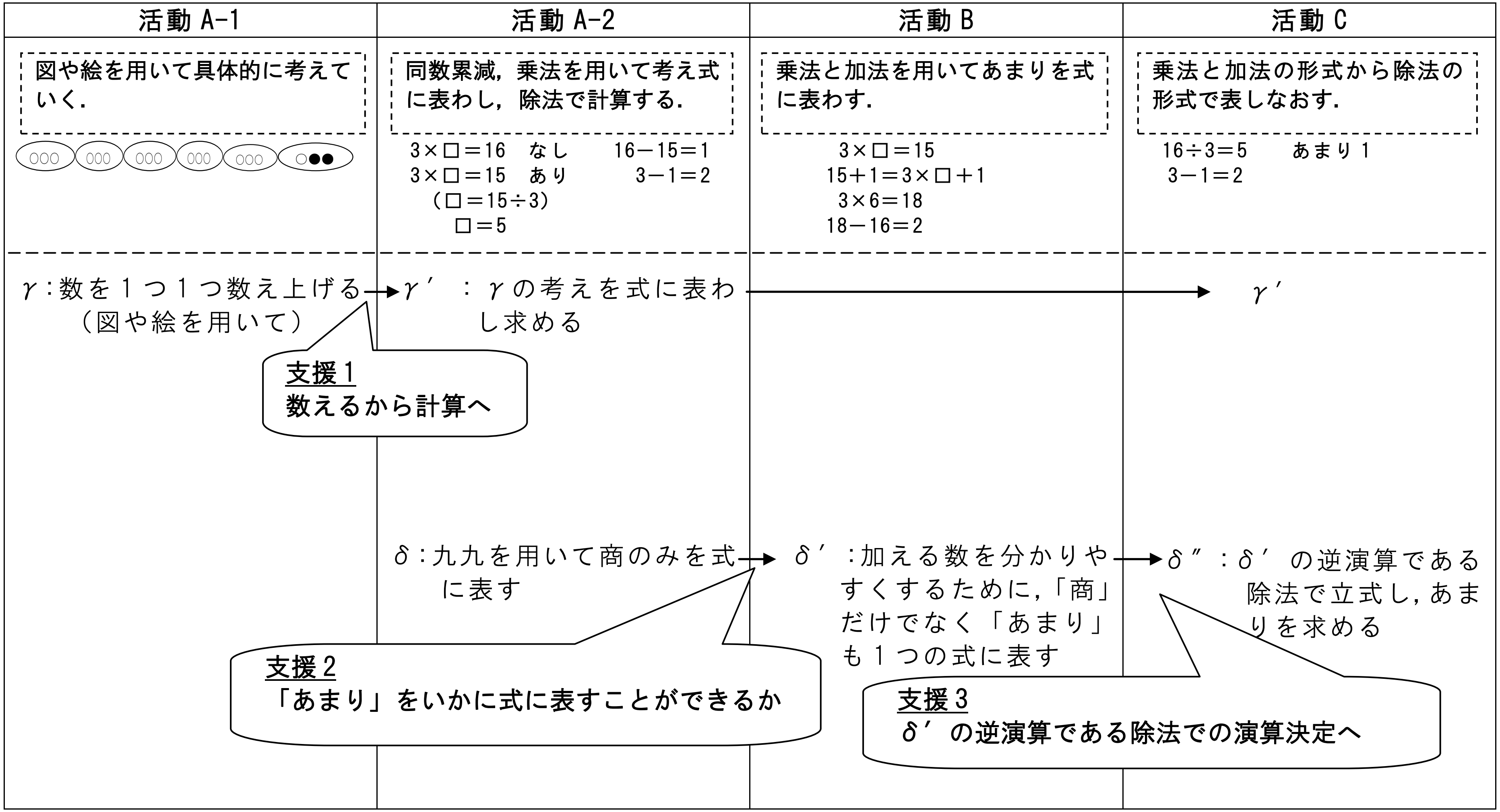


図 4　事例における支援内容のモデル A3

ⅲ）支援3（条件δ′→条件δ″）の支援内容

「δ′の逆演算である除法での演算決定へ」

条件δ′と条件δ″の相違点は除法で演算決定できるかどうかである．このことより，除法で演算決定することを促すための支援として，「δ′の逆演算である除法での演算決定へ」という支援内容を設定する必要があることが明らかになった．

以上のように支援内容の検討（A_3）を行った．しかし，未だ検討の余地が残されている．それが以下の点である．

P[A_3]$_3$ 「変容前の条件と変容後の条件の相違点に着目し，変容後の条件へと高める」の「高める」とは，何を意味しているのか

筆者は本時のねらい達成に向けて，条件γ＜条件γ′，条件δ＜条件δ′＜条件δ″のように，変容後の条件の方が活動の価値が高まるよう授業設計を行った．4.1の支援の場や支援内容の検討の中で「変容後の条件へと高めるため」という言葉を多用しているが，高まっていることがらそのものの「価値」を検討することがなされていない．つまり，どうして条件γ＜条件γ′または，条件δ＜条件δ′＜条件δ″と考えられるのかということについて，各活動の「価値」についての検討がなされていないのである．そのため，活動の構成要素である「条件」の「価値」に着目して支援内容について再度検討することが求められる．また，支援内容の妥当性は，条件の変容と付加を促す支援の質的な違いと関係しているのではないかと考えられる．支援設計の枠組みの検討A_3をまとめたものが，次ページの表3である．

	決定の視点	決定の視点の妥当性
支援の場	変容前の条件では不十分で，変容後の条件では補われている場 $P[A_3]_1$	支援は活動の高まりをアシストするためのものであるから $P[A_3]_2$
支援内容	条件の変容前後の相違点	条件の変容前後の相違点で高まっている内容を高めるため $P[A_3]_3$

表 3　支援設計の枠組みの検討 A_3 まとめ

以上のように 4.1 においては A_1～A_3 にかけて支援の場と支援内容に着目し，それらを決定する視点と妥当性について検討した．しかし，検討内容のほとんどは，支援の場と支援内容を決定する視点が理論を基に述べられていたり，それらの妥当性についての検討も事例の説明にすぎないという多くの問題点を抱えたままである．支援設計の枠組み A において未だ解決していない問題点を以下にまとめておく．

$P[A_3]_1$　支援の場の妥当性についての主張となっていない

$P[A_3]_2$　支援内容を検討しているからこそ，支援の場が 3 ヶ所で良いという結論に至っているのではないか

$P[A_3]_3$　「変容前の条件と変容後の条件の相違点に着目し，変容後の条件へと高める」の「高める」とは，何を意味しているのか

4.2　支援設計の枠組みの検討 B

4.1.3 で挙げた問題点 $P[A_3]_{1\sim3}$ を解決するために，新たな

支援設計の枠組みを提案する．

(1)支援の場の検討(B)

4.1.3 で挙げた問題点 $P[A_3]_1$，$P[A_3]_2$ から分かるように，今までの検討は理論を前提としていたり，支援内容を用いて支援の場の妥当性について論じていた．そのため，支援の場の検討（B）では，3.1.3 で提示した事例の授業形式のモデルに立ち戻り，そこから得られた事実をもとに支援の場について再検討した．

3.2 の授業分析により以下のことが明らかになった．本事例は，条件の保存，条件の変容，そして条件の付加により各活動が構成されているということである．

条件の保存に関しては，児童がすでに獲得している「思考」の保存であるため，教師の介入なしに行われ得るものである．しかし，条件の変容や付加はいかにして行われるのだろうか．児童が思考錯誤を行う中で，自らの力で条件の変容や付加を促し活動を変容させることもあるだろう．一方で，児童自らの力だけでは条件の変容や付加を促すことができない可能性もあると考えられる．その際に，教師の支援が必要となると考えられる．つまり，支援は，条件の変容や付加を促す場に必要である．

以上より，支援の場の決定の視点は，条件の変容や付加を促す場であると主張できる．そのため，本事例における支援が必要な場は，支援 1（条件 γ →条件 γ'），支援 2（条件 δ の付加），支援 3（条件 δ →条件 δ'），支援 4（条件 δ' →条件 δ''）の 4 ヶ所であると主張できる．本事例の授業形式のモデルに支援が必要な場を加えたモデルが図 5(次ページ参照)である．各支援の場について，それぞれ以下に詳しく説明する．

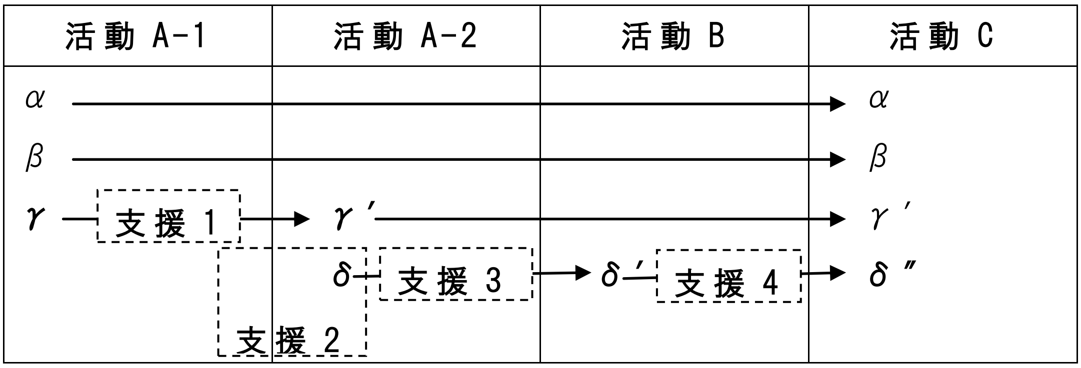


図 5　事例における支援の場のモデル B

（1）支援 1（条件 γ →条件 γ' ）

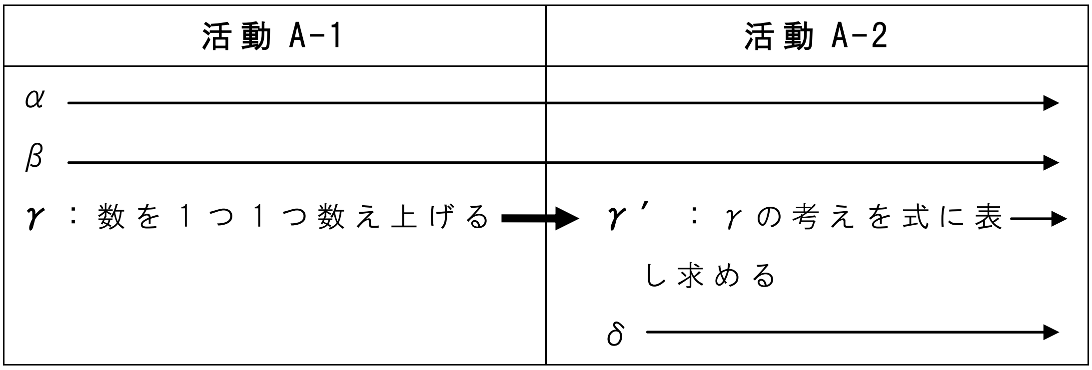


図 6　事例における活動 A_1 と活動 A_2 の比較モデル

授業形式のモデルにおいて活動 A-1 と活動 A-2 を比較した．活動の条件に着目すると，活動 A-1 の条件 γ「数を 1 つ 1 つ数え上げる」は，活動 A-2 の条件 γ'「γ の考えを式に表し求める」へと変容していることが明らかになった．支援は，条件の変容や付加を促す場に必要であることから，条件 γ から条件 γ' へと変容を促す場，つまり，支援 1 が必要不可欠となると主張することができる．

（2）支援2（条件δの付加）

活動 A-2	活動 B
α ⟶	⟶
β ⟶	⟶
γ' ⟶	⟶
δ：九九を用いて商のみを式に表す ➡	δ'：加える数を分かりやすくするために，「商」だけでなく「あまり」も1つの式に表す ⟶

図7　事例における活動 A-2 と活動 B の比較モデル

授業形式のモデルにおいて，活動 A-2 と活動 B を比較した．活動の条件に着目すると，活動 A-2 では新たな条件δ「九九を用いて商のみを表す」が付加されていることが明らかになった．支援は，条件の変容や付加を促す場に必要であることから，条件δを付加させる場，つまり，支援2が必要不可欠であると主張することができる．

（3）支援3（条件δ→条件δ'）

授業形式のモデルにおいて，活動 A-2 と活動 B を比較した（図7参照）．条件に着目すると，活動 A-2 の条件δ「九九を用いて商のみを式に表す」は，活動 B の条件δ'「加える数を分かりやすくするために，「商」だけでなく「あまり」も1つの式に表す」へと変容していることが明らかになった．支援は，条件の変容や付加を促す場に必要であることから，条件δから条件δ'へと変容を促す場，つまり支援3が必要不可欠であると主張することができる．

（4）支援4（条件δ′→条件δ″）

活動B	活動C
α →	→
β →	→
γ' →	→
δ′：加える数を分かりやすくするために，「商」だけでなく「あまり」も1つの式に表す →	**δ″**：δ′の逆演算である除法で立式し，あまりを求める →

図8　事例における活動Bと活動Cの比較モデル

授業形式のモデルにおいて，活動Bと活動Cを比較した．条件に着目すると，活動Bの条件δ′は，活動Cの条件δ″「δ′の逆演算である除法で立式し，あまりを求める」へと変容していることが明らかになった．支援は条件の変容や付加を促す場に必要であることから，条件δ′から条件δ″へと変容を促す場，つまり支援4の妥当性を主張することができる．

以上の支援の場の検討Bでは，支援の場の妥当性について支援内容に踏み込むことなく理論的に説明することができている．そのため，新たな問題点はなく，支援の場に関しては，新たに検討を重ねる必要がないと考えられる．

(2)支援内容の検討B

4.2(1)において，支援が必要な場について明らかになった．そこで，それらの場において条件の変容や付加を促すためにどのような支援内容が必要となるのか検討する必要がある．支援は，条件の変容や付加を促す場に必要であることから，支援内容は，条件の変容や付加を促すものでなければならない．

まず，支援1，支援2，支援3，支援4のそれぞれに必要な

支援内容として以下のものが挙げられる．支援1・3・4に関しては，4.1.3(2)支援内容の検討 A_3 において設定したものと同じである．

支援1：数えるから計算へ
支援2：※支援1により，条件δは付加されるため新たな支援は必要なし
支援3：「あまり」をいかに式に表すことができるか
支援4：δ′の逆演算である除法での演算決定へ

次に，上記のように設定した支援内容の妥当性について明らかにすることが求められる．この検討がまさに，P[A_3]$_3$「変容前の条件と変容後の条件の相違点に着目し，変容後の条件へと高める」の「高める」とは，何を意味しているのかの解決につながり，支援設計の枠組み構築につながると考えられる．支援内容の妥当性は，条件の変容や付加を促す支援の質的な違いを明らかにすることにより主張できるのではないかと考え，検討することとした．条件の変容や付加を促す支援の質的な違いについて検討するためには，条件の変容や付加そのものにどのような違いがあるのか明らかにすることが必要である．そのため，まず，事例における授業形式のモデルを視覚的に条件の相違が分かりやすいように矢印を工夫した．次に，そのモデルを基に，条件の変容や付加の違いを明らかにする．さらに，それを基に両者の支援の質的な違いについて検討する．

Ⅰ）授業形式のモデルの検討

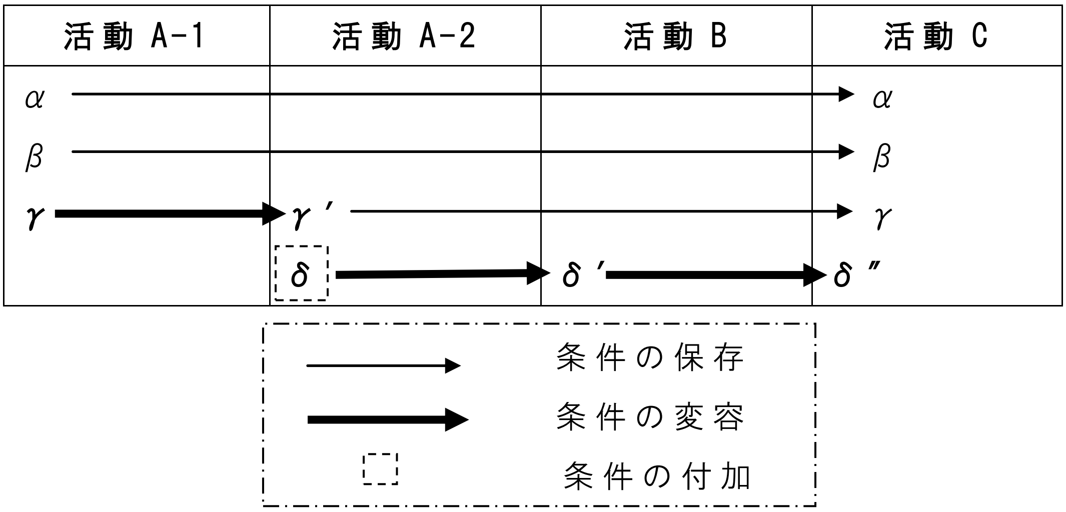


図 9　事例における授業形式のモデル B

今まで提示した事例に関するモデル(図 1～5)は，条件の保存，条件の変容すべてにおいて同じ矢印（→）を用いていた．しかし，条件の保存と変容には支援を要するか否かという違いがあり，それらの違いについて表すため，モデルの矢印を図 9 のように変更した．具体的には，条件の保存は細い矢印（→）を用い，条件の変容は太い矢印（ ➡ ）を用いることとした．条件の付加に関しては，条件を四角（ ⬚ ）で囲み表すこととした．これにより，条件の保存，条件の変容，条件の付加についてそれぞれ分類することができた．

Ⅱ）条件の変容と変容を促す支援

上記の図 9 から分かるように，本事例における条件が変容する場は 3 ヶ所（条件γ→条件γ′，条件δ→条件δ′，条件δ′→条件δ″）である．各変容について具体的に見ていく．

ｉ）条件γ→条件γ′の変容

<u>条件γと条件γ′は「児童の問題解決過程における数量関係の捉え方」という共通の視点で分類されている．</u>

条件γ：図や絵を用いながら数を1つ1つ数え上げる過程を通して数量関係を捉えようとしている．このように実際に図や絵を用いて数えながら答えを求めることは，児童にとっては実際的で確かな手段であると考えられる．しかし，この方法は形式的なものではなく，同様の問題においても常に数える活動を要するものである．

条件γ′：式を用いて数の把握を行っている．これは，γの考えを式に表し，計算で答えを求めようとしている活動から主張できる．式に表し計算で答えを求めるということは，問題の全体的な構造をつかむことができていると考えられる．また，他者へ自らの考え方を示す際に有効な方法である．

ⅱ）条件δ→条件δ′→条件δ″の変容

条件δ，δ′，δ″は「式の用いられ方，つまり，どのような計算で答えを求めているか」という共通の視点で分類されている．

条件δ：既習の「わりきれるわり算」と同様に考えようとしており，九九を用いて商のみを式にあらわすことができている．

条件δ′：条件δに「＋1」という工夫を加えることで，商だけでなく「あまり」も1つの式にあらわすことができている．

条件δ″：条件δ′の逆演算である除法で立式し「あまり」を求めている．

これらの条件の変容から，条件の変容とは，ある活動の価値そのものを変容させることを意味していると考えられる．つまり，条件の変容は，ある共通の視点で分類され得る条件

を活動の段階的価値を基準として変容させることである．ここで用いている「価値」とは，本時の目標達成のために教師が設定した児童に期待する活動の段階的価値づけを意味している．

このことから，変容を促す支援は，変容前の活動と変容後の活動の価値を比較し，価値の変容点を支援内容とすると考えられる．事例に即して述べると，以下の通りである．

（1） 条件γ→γ′の支援内容

条件γから条件γ′への活動の価値の変容は，図や絵を用いて数えるという数の把握から式を用いた数の把握へであった．そのため，設定した支援内容「数えるから計算へ」は妥当なものである．

（2） 条件δ→δ′の支援内容

条件δから条件δ′への活動の価値の変容は，九九を用いて商のみを式に表す活動から「あまり」も1つの式に表す活動へと変容している．そのため，「「あまり」をいかに式に表すことができるか」という支援内容は妥当であると言える．

（3） 条件δ′→条件δ″の支援内容

条件δ′から条件δ″への活動の価値の変容は，順演算から逆演算へであった．そのため，支援内容「δ′の逆演算である除法での演算決定へ」は妥当であると考えられる．

Ⅲ）条件の付加と付加を促す支援

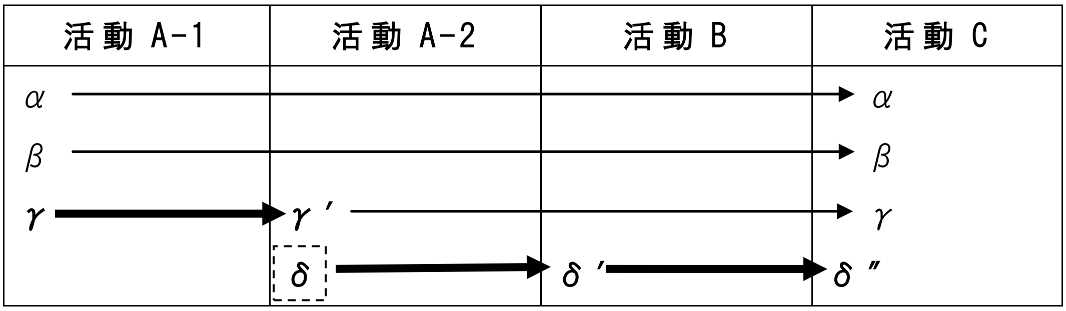


図 9　事例における授業形式のモデル B

上記のモデル B より，本事例における条件の付加は活動 A-2 における条件δの付加のみである．条件δの付加について事例に即して具体的に見ていく．

条件δの付加

条件γ′では，式に表し計算で求める活動であればどのような活動であってもよいという分類がなされていた．例えば，活動 A-2 において同数累減で求めることも含まれていた．しかし，実際は計算で求めている様々な活動の中でも教師が児童に期待する活動はその価値によって段階的に分類されている．本事例においては，条件δの付加により，用いる計算の方法について断定することが可能となった．活動に即して述べると，活動 A-2 において，条件α，β，γ′のみであれば，同数累減による答えの導き方もよしとされる．しかし，そこに条件δが付加されることにより，同数累減ではなく，九九を用いた式ということが断定されるのである．

以上の具体例より，条件の付加とは，新たな価値そのものを付加することであると考えられる．つまり，新しい視点による分類項目の付加と言い換えることができる．さらに，条件の付加より，条件の付加を促す支援内容の決定の視点は，教師が児童に期待する活動に対して，不完全な点に着目することであると考えられる．

以上のように，支援内容について条件の変容と付加の相違に着目して検討した．しかし，支援内容の検討(B)にも以下に挙げる問題点が見られる．

P[B]1　Ⅰ授業形式のモデルの検討の中で，条件の保存，変容の中にも，様々な様相があるのではないか

支援を要するか否かという視点で条件の保存，変容，付加を見ると，条件の保存は支援を要さないのに対し，条件の変容や付加は支援を要する可能性があるという違いがあった．そのため，図 9 の事例における授業形式のモデル B では，条件の保存は細い矢印，条件の変容は太い矢印，さらに，条件の付加は条件そのものを丸で囲むことで違いを明らかにした．しかし，条件の保存や変容について具体的に捉えると，同じ「保存」や「変容」という言葉で分類されている中にも，様々な様相があるのではないかと考えた．そこで，同じ分類の中でも違いがあるならばそれらの違いを分かりやすく表すためにモデルの改善が必要となる．

P[B]2　条件の変容と付加の相違については活動の「価値」が大きく関わるようだ．それでは，「価値」に着目すると，どのような相違がみられるだろうか

条件の変容は，ある活動の価値を変容させることであった．また，条件の付加は新たな価値を付加することであった．このことから分かるように，両者には活動の「価値」という共通のものがある．しかし，支援設計の枠組みの検討 B では「ある活動の価値」や「新たな価値」など意味していることが曖昧であり，また両者の相違も比較されていない．そのため，活動の「価値」に焦点を当て，条件の変容と付加ではその「価値」にどのような相違がみられるのか明らかにする必要がある．さらに，その「価値」の相違から支援内容の妥当性を明らかにすることが求められる．

事例に即して「価値」について明らかにする際に，数学的価値づけではなく活動の説明になりがちであるため，注意が必要である．

P[B]3　「児童に期待する算数的活動」を前提として「条件」や「活動の価値」があるのか

今までの検討では，教師が設定した児童に期待する活動を基準とし，それに対し活動の構成要素である「条件」や「活動の価値」をいかに変容させるか，または，付加するかと考えていた．しかし，本来は，「条件」や「活動の価値」が「児童に期待する算数的活動」の根拠になるべきものなのではないだろうか．換言すれば，教材の本質は「条件」や「活動の価値」に表れるものであり，それらを構成要素として児童に期待する算数的活動が設定され得るということである．そのように考えるならば，条件の付加における支援内容決定の視点や妥当性において主張している「教師が児童に期待する活動に対し不十分な点」ということは成り立たないのではないだろうか．この点は，再度検討の余地がある点である．

支援設計の枠組みの検討 B をまとめたものが次ページの表 4 である．

	決定の視点	決定の視点の妥当性
支援の場	条件の変容を促す場 条件の付加を促す場	条件の保存 →児童が既に獲得している「思考」の保存 支援の必要性なし 条件の変容や付加 →a）児童自らが変容や付加を促すことが可能な場合 支援の必要性なし b）児童自らの力では変容や付加を促すことが困難な場合 支援の必要性あり
支援内容	Ⅱ)条件の変容 変容前後の活動の価値を比較し，価値の変容点 Ⅲ)条件の付加 教師が児童に期待する活動に対し，不完全な点	Ⅰ)授業形式のモデル 条件の保存，条件の変容，条件の付加という 3 つの分類の明示 $P[B]_1$ Ⅱ)条件の変容 ある活動の価値そのものを変容することを意味しているから Ⅲ)条件の付加 新たな価値そのものの付加を意味しているから $P[B]_2$　$P[B]_3$

表 4　支援設計の枠組みの検討 B まとめ

4.3　支援設計の枠組みの検討 C

4.2(1)での支援の場の検討は，理論的になされており新たな問題点の検討を要さないものであった．一方，4.2(2)の支援内容の検討では，3 つの問題点（P[B]$_1$，P[B]$_2$，P[B]$_3$）があり，さらに検討を重ねる必要がある．そこで，今後は 4.2(1)で示した支援の場における支援内容の検討に焦点を当て検討していくこととする．

Ⅰ　授業形式のモデルの検討

P[B]$_1$　Ⅰ授業形式のモデルの検討の中で，条件の保存，変容の中にも，様々な様相があるのではないかを解決するものとして，以下の図 10 事例における授業形式のモデル C を提示する．

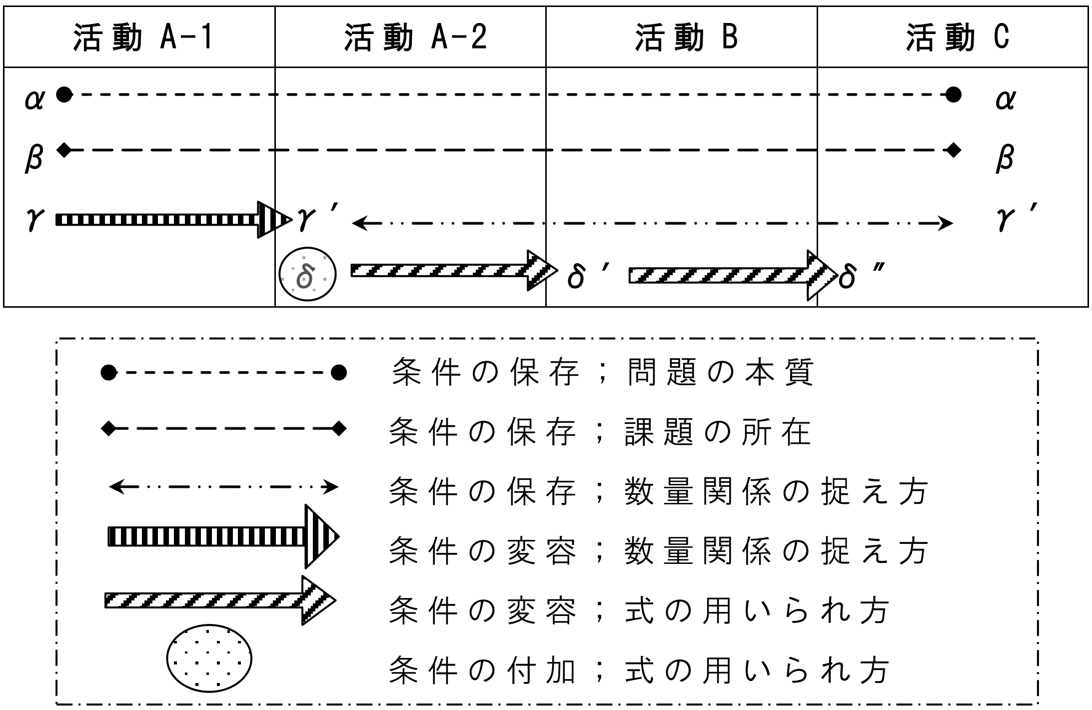


図 10　事例における授業形式のモデル C

図 9 事例における授業形式のモデル B では，条件の保存，変容，付加を矢印などを変えることで分類していた．具体的

には，条件の保存は細い矢印（→），条件の変容は太い矢印（➡），条件の付加は条件そのものを丸で囲み大別していた．しかし，条件の保存や変容についてそれぞれ見ていくと，条件の保存という分類の中にも，または，条件の変容という分類の中にも何か違いがあるようである．そのため，それらの違いを明らかにし，分類することが必要であると考えた．

まず，条件の保存と変容や付加には支援を要するか否かという違いがあるため，それらを大別することが大切である．そこで，条件の保存は端と端に同じマークをつけた線とし，条件の変容は一方の矢印とし，条件の付加は条件そのものを丸で囲むことで区別をはかった．

次に，条件の保存や変容について1つ1つの条件を詳しく見ていくこととした．条件の保存は，モデルから分かるように，条件αの保存，条件βの保存，また，条件γ'の保存の3つがある．

ｉ）条件の保存；条件αの場合

条件αは「包含除で考える」であった．除法には包含除，等分除の考え方がある．それらの違いについてはすでに2.2.1において述べた通りである．包含除の問題であれば児童は包含除の考え方をし，また，等分除の問題であれば児童は等分除の考え方を用いて問題を解決しようとする．このことから，「包含除で考える」ということは，教師が提示する問題に依存したものであり，問題の本質に関わることであると考えられる．そのため，この条件αは「問題の本質」という観点で設定されていると考えられる．

ⅱ）条件の保存；条件βの場合

条件βは「残ったものにいくつ加えれば3個になるか考える」であった．これは，換言すると「「あまり」の考え方」で

ある．「あまりのあるわり算」の導入において，「あまり」の考え方は児童にとって新たな課題であり，教師が本時において児童に意識させたいことである．そのため，この条件βは「課題の所在」という観点で設定されていると考えられる．

ⅲ）条件の保存；条件γ′の場合

条件γ′は条件γが変容したものである．そのため，条件γについて先に明らかにしておく必要がある．

以上のように条件の保存についてそれぞれ見ていくことで，同じ「保存」という分類にも様々な条件の保存があることが分かった．次に，条件の変容について詳しく見ていく．条件の変容は条件γ→条件γ′，条件δ→条件δ′，条件δ′→条件δ″の3ヵ所である．

ⅳ）条件の変容；条件γ→条件γ′

条件γは「数を1つ1つ数え上げる」であり，条件γ′は「γの考えを式に表し計算で求める」であった．つまり，条件γの「数える」活動から条件′の「計算する」活動へと変容している．「数える」活動の中で特定の活動に断定されているわけでもなく，また，「計算」に関しても，同数累減や九九を用いた計算など様々である．このことから，条件γ，γ′は「数量関係の捉え方」という観点で分類されていると考えられる．

ⅴ）条件の変容；条件δ→条件δ′→条件δ″

条件δは「九九を用いて商のみを式に表す」，条件δ′は「加える数を分かりやすくするために，「商」だけでなく「あまり」も1つの式に表す」，条件δ″は「δ′の逆演算である除法で立式し，あまりを求める」である．これらは，計算で求める

ことは共通しているが，それぞれの条件でどのような計算，つまり式を用いて考えているかという事に相違がみられる．そのため，条件δ，δ′，δ″は「式の用い方」という観点で分類されていると考える．

以上のことから，同じ「条件の変容」という分類にも様々な条件の変容があることが分かった．

Ⅱ　条件の変容の支援内容決定の視点とその妥当性

4.2(2)より，条件の変容と条件の付加には活動の「価値」に着目すると相違があるようであった．そのため，条件の変容の支援内容決定の視点と条件の付加の支援内容決定の視点には相違があると考えられる．そこで，両者の違いを活動の「価値」に着目して事例に即しながら明らかにする．そもそも，条件とは「児童の問題解決中の思考」を抽出したものであり，活動の構成要素である．このことから活動の「価値」を明らかにすることは条件の「価値」について明らかにすることであると考えた．この検討は，P[B]2　条件の変容と付加の相違については活動の「価値」が大きく関わるようだ．それでは，「価値」に着目すると，どのような相違がみられるだろうかを解決することを意味する．また，P[B]3　「児童に期待する算数的活動」ありきの「条件」や「活動の価値」なのかで指摘した点に注意し，検討する必要がある．

各条件の「価値」に着目することで条件の変容の支援内容決定の視点とその妥当性を主張する．条件の変容は，条件γ→条件γ′，条件δ→条件δ′，条件δ′→条件δ″の3ヶ所である．

条件γ→条件γ′の変容

条件γ「(図や絵を用いながら)数を1つ1つ数え上げる」ことの価値は，次の通りである．数はものの属性として対象と結びついて存在するものである．そのため，本問題においては「ホウセンカの種」という対象と結びつけて数を捉えていることに価値があると言える．活動例に即して述べると，「ホウセンカの種が16個，そのうち，3個とると…」のように捉えていることを示している．

条件γ′「γの考えを式に表し求める」の価値は，次の通りである．式に表し，計算で求めるという事は，属性として対象と結びついて存在する数を抽象したものとして捉える事ができていることを意味している．このようにものの属性を捨象して数を捉えられていることに価値があり，条件γでは見られない価値である．

条件δ→条件δ′→条件δ″の変容

条件δ「九九を用いて商のみを式に表す」ことの価値は，次の通りである．同数累減ではなく，九九を用いて「商」を式に表し計算することは，児童がすでに学習した内容の中で最も適切な方法であるため，価値があるといえる．

条件δ′「加える数を分かりやすくするために，「商」だけでなく「あまり」も1つの式に表す」の価値は次の通りである．両辺に同じ数を加えても相等関係は成立するという決まりを用い，「商」だけでなく「あまり」も1つの式に表すことにより，問題場面通りに正しく式に表すことができていることに条件δ′の価値がある．活動に即して述べると，「15+1=3×□+1」という式に表れており，「＋1」により後いくつ加えれば一人分になるかということを式から読み取ることができることに価値がある．このように，「あまり」も1つの式に表すことは条件δでは見られ

なかった点である．

条件δ″「δ′の逆演算である除法で立式し，あまりを求める」の価値は次の通りである．演算では左辺の答えを右辺に表す方法が一般的である．なぜなら，その表し方は問題場面を簡潔・明瞭・的確に表し，かつ計算を形式的に行う事ができるからである．そのため，条件δ′の式の表し方「15+1=3×□+1」よりも，条件δ″の「16÷3=5…1」の方がより価値ある表現方法であると主張できる．

条件の変容について，各活動の「価値」に着目し事例に即して検討した．その検討を通して，条件の変容は変容後の条件が変容前の条件に内包されているという特徴があることが明らかになった．それをモデル化すると以下の通りである．

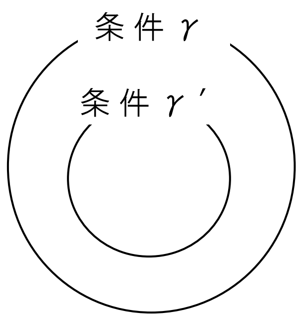


図 11　活動の「価値」に着目した条件の変容モデル（γ→γ′）

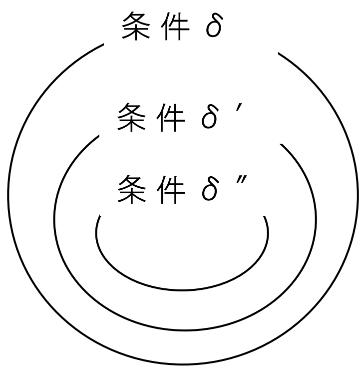


図 12　活動の「価値」に着目した条件の変容モデル（δ→δ′→δ″）

以上のことより，条件の変容を促す支援の決定の視点は，変容前後の条件の価値に着目し，変容後にしか含まれていない価値とすることが適切であると主張できる．

Ⅱ　条件の付加の支援内容決定の視点とその妥当性

条件の付加は，本事例では条件δの付加の1ヶ所のみであ

る．活動の「価値」に着目して事例について詳しく見ていくことで，条件の付加の支援内容決定の視点とその妥当性について主張する．

<u>条件δの付加</u>

条件δ「九九を用いて商のみを式に表す」の価値は次の通りである．条件δの付加により，式の表し方が特定されることに条件δの付加の価値があると考えられる．活動例に即して述べると，条件δの付加される前の活動では，問題場面をどのような式で表しても式で表されていれさえいればよしとされていた．しかし，条件δの付加により，より問題場面に即した表し方が求められるようになった．条件δでは九九を用いて商を式に表すこと，条件δ′では「あまり」も１つの式に表すこと，さらに条件δ″では，より洗練された表し方になっている．このように，条件δの付加は今までの条件には見られない，新たな観点の価値が付加されていると言える．

以上のことより，<u>条件の付加は，前の条件の中に条件の価値が内包されていない</u>という特徴を挙げることができる．そのため，条件の付加は児童にとって条件の変容よりも着目すべき点が明らかではなく，活動の変容が困難であると言えるだろう．しかし，<u>条件の付加は，教材の本質を見抜き，それと比較して欠けている価値を加えることで活動の高まりを促している</u>．そのため，<u>支援内容の決定の視点は，教材の本質を見抜き，それと比較して欠けている価値</u>に着目することで可能となる．

以上のように，条件の変容と付加に分け，それらの意味することを捉えることそのものが支援内容の妥当性の主張へとつながった．また，支援内容を決定する視点についても明ら

かにすることができた．しかし,「Ⅰ授業形式のモデルの検討」については，支援内容の決定の視点や妥当性に関して示唆を得る検討ではなく，また検討の目的そのものも支援設計の枠組み構築には不要なものであった．

4.4　支援設計の枠組みのまとめ

4.1 から 4.3 の検討を経て,問題解決学習における支援設計の枠組みの構築がなされた．支援設計の枠組みの構築は 4.1 から 4.3 にかけて提案した枠組みの問題点を解決しながら検討を重ねることにより構築されたため,4.4 において完成した支援設計の枠組みについてまとめておく．

第 4 章の冒頭でも述べたが，支援設計の枠組み構築は，支援の場とその場における支援内容に着目して行う．それらを決定する際の視点とその妥当性を述べることで支援設計の枠組みは構築される．支援設計の枠組みは表 5 の通りである．

	決定の視点	決定の視点の妥当性
支援の場	条件の変容を促す場 条件の付加を促す場	条件の保存 →児童が既に獲得している「思考」の保存. ⇩ 支援の必要性なし 条件の変容や付加 →a）児童自らが変容や付加を促すことが可能な場合 ⇩ 支援の必要性なし b）児童自らの力では変容や付加を促すことが困難な場合 ⇩ 支援の必要性あり

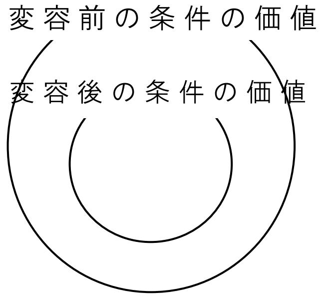
支援内容	i）条件の変容 変容前後の条件の価値に着目し，変容後にしか含まれていない価値	i）条件の変容 変容後の価値が変容前の価値に内包されているため，変容後のみに見られる価値へと変容することが活動の高まりとなる．  図 13　活動の「価値」に着目した条件の変容モデル
	ⅱ）条件の付加 教材の本質を見抜き，それと比較して欠けている価値	ⅱ）条件の付加 変容前の条件に価値が内包されていない．そのため，教材の本質を見抜き，それと比較して欠けている価値を加えることが活動の高まりを促すこととなる．

表 5　問題解決学習における支援設計の枠組み

以上のように，問題解決学習における枠組みを構築した．支援設計の枠組みを用いた支援設計の流れは，図 13（次ページ参照）の通りである．

支援設計までの流れ

授業設計

↓

授業形式のモデル化

↓

条件の保存	条件の変容	条件の付加
支援不要	要支援	要支援
	支援内容決定の視点 変容前後の条件の価値に着目し，変容後にしか含まれていない価値	**支援内容決定の視点** 教材の本質を見抜き，それと比較し欠けている価値

支援設計の枠組み適用

図 13　支援設計の枠組みを用いた支援設計

第4章要約

本章では，本研究の目的である問題解決学習における支援設計の枠組みを構築した．

支援の場と支援内容に焦点を当て，それらを決定する視点とその妥当性について明らかにすることで，支援設計の枠組みの構築を図った．その際に，事例という特殊なものを用いながら，その具体的な検討から一般的なものを導くという手法をとった．

事例における支援の場と支援内容について検討し，それらの決定の視点とその妥当性について主張することは一度の検討では困難であり，検討を重ねることにより可能となった．特に，妥当性についての主張は，事例に依存しすぎたり，理論を前提としているなど多くの問題点が挙げられた．それらの問題点を解決したものとして新たな提案を重ねた．その結果，最終的に支援設計の枠組みを構築することができた．

まず，支援の場については，条件の変容や付加を促す場であることが明らかになった．なぜなら，児童自らの力では条件の変容や付加を促すことが困難な場合があると考えられるからである．

次に，条件の変容や付加を促す支援内容の決定の視点とその妥当性については，活動の価値に焦点を当て，条件の変容や付加ではどのような相違がみられるか明らかにすることで主張した．条件は活動の構成要素であることから，活動の価値を条件の価値と捉え直して検討した．条件の変容は変容前の条件に変容後の条件の価値が内包されているという特徴を有している．そのため，条件の変容を促す支援内容の決定の視点は，変容前後の条件の価値に着目し，変容後にしか含まれていない価値とした．一方で，条件の付加は変容前の条件に価値が内包されて

おらず，新たに出現するものである．そのため，条件の付加を促す支援は，児童にとって条件の変容よりも着目すべき点が明らかではなく困難であることが明確になった．しかし，教師が教材の本質と比較し欠けている価値を新たに加えることで児童の活動の高まりを促すことができることから，この視点が妥当であると主張できた．

以上のように，問題解決学習における支援設計の枠組みを構築した．しかし，これは事例を用いて構築したものに過ぎず，この枠組みがいかに機能するか，その有効性を明らかにするためには，他単元における適用事例を検討することが求められる．そのため，次章において，構築した支援設計の枠組みの適用事例について検討する．

第5章

問題解決学習における支援設計の枠組みの適用事例

本章では，第4章で構築した問題解決学習における支援設計の枠組みがいかに機能するか検証するため，他単元における適用事例について検討することを目的とする．

5.1では，「あまりのあるわり算」の導入を用いて構築した支援設計の枠組みについて，他単元を用いて検証することの意義とその方法について述べる．5.2では，適用事例となる中学校1年生の「方程式」の授業設計を行い，5.3では，その授業形式のモデル化を図ることで的活動の高まり方の特徴づけを行う．5.4では，構築した支援設計の枠組みを用いて支援設計を行い，その有効性や用いる際の難点について5.5で述べる．

5. 問題解決学習における支援設計の枠組みの適用事例

5.1　支援設計の枠組みの適用事例検証の意義と方法

第4章において，事例「あまりのあるわり算」の導入を基に，問題解決学習における支援設計の枠組みの構築を図った．しかし，その支援設計の枠組みがいかに機能するのか，その有効性を示すためには，他単元における適用事例を検証することが必要不可欠となる．そのため，適用事例として，他単元である中学校1年生の「方程式」を用いる．まず，「方程式」の授業設計，授業分析（アプリオリ分析）を行う．授業分析とは，授業形式のモデル化を行い，期待される生徒の数学的活動の高まり方を特徴づけることを意味している．その後，第4章で構築した支援設計の枠組みを用いて支援を設計することとする．なお，適用事例の授業設計に関しては，鳥取数学教育研究会（Lapinの会）で検討を重ねたものである．

5.2　適用事例「方程式」の授業設計

5.2.1　本時の位置づけとねらい

本時の学習のねらいについて述べる前に，生徒がすでに学んでいる内容とこれから学ぶ内容についての整理を行う．生徒は「方程式」を学習する前に「大小関係を表す式」についての学習を行っている．このような単元構成の理由は以下の通りである．小学校の学習内容では，数の大小関係や，数を計算の対象としていた．一方，中学校の学習内容では，そのような数そのものを対象とする方法から，式の大小関係，また，式を計算の対象とする方法へと変容することが求められる．そのため，「大小関係を表す式」の学習では式の大小関係を学び，次に，大小関係が等しい式の計算である「方程式」を学ぶ．さらに，大小関係を表す式の計算である「不等式」を学習することが求められる．「大小関係を表す式」の内容は，

数量の関係には等号（＝）を使った等しい関係ばかりではなく，大小の関係（＞，＜，≧，≦）もあるということである．つまり，「不等式の表し方」は学習するものの，その解き方については「方程式」を学習後に学習する．そこで，本時では，「不等式の表し方」と「方程式」について学習した生徒が「方程式」や「不等式」の関係やその意味について学習する場とする．また，既習事項である「方程式の解」を用いて「不等式の解」へと捉え直す活動を行うためには，問題の全体的構造を捉える事が求められる．以上のことより，本時の学習のねらいは以下の通りである．

<u>本時のねらい</u>

　立式そのものよりも方程式や不等式の解や式の意味に着目し，吟味することができる．また，問題の全体的構造を捉えることができる．

5.2.2　問題と問題提示場面の設定

　本時のねらいを達成するためには，次に挙げる 2 点を踏まえた問題，問題提示場面を設定しなければならない．1 点目は，既習事項である方程式で立式し解を求めるものの，その解では不十分であるため不等式の考え方へと移行するような問題の設定である．2 点目は，問題の全体的構造を把握し演算を決定する必要性とよさが含まれた問題の設定である．これら 2 点を踏まえた問題，問題提示場面は以下の通りである．

問題提示場面

問題

ある店で入会金500円を払って会員になると，商品を7%引きで買える．この店で商品を何円購入すると，会員になったほうが得か．

※問題に取りかかることのできない生徒には，「1つ1000円の品物を買ったらどうなるか」と具体的な数字をあてはめながら考えるよう促す．

この問題，問題提示場面において上で述べた2点が達成されているかどうか確認する．まず，1点目については，以下の説明の通りである．この問題における方程式の解は，会員になった方が得である下限を表している．そのため，方程式の解以上の商品を購入すると会員になった方が得であるため，「～以上」を表すために不等式の考え方が必要となる．この活動がまさに，方程式と不等式の関係や意味を吟味することとなる．なお，5.2.1で述べたように生徒は方程式の解法については学んでいるが，不等式の解法については学んでいない．そのため，方程式で問題を解いた上で不等式について考えられるよう，問題は「何円以上購入すると」ではなく，「何円購入すると」のように設定した．

2点目は，「商品を何円購入すると会員になった方が得か」という提示方法によって達成されている．つまり，「1つ1000円の商品を最低何個買うとき得か」という提示であれば逐次近似から答えを探る方法であり，問題の全体的構造を捉えることは難しい．また，おおよその答えは求まるものの，正確な答えを導くことは困難である．しかし，今回提示した問題であれば，具体的な商品の値

段に言及していないため，問題の全体的構造を捉える必要性が出てくる．また，そうすることで逐次近似から答えを探るのではなく，線分図を用いて問題の全体的構造を捉え，さらに方程式で立式することで正確な解を求めることができるという良さがあげられる．

以上より，本問題，問題提示場面は本時のねらいを達成するために必要な2点を達成していると主張できる．

5.2.3 期待される生徒の数学的活動の設定

本時の期待される生徒の数学的活動は以下の通りである.

活動 A-1：(1 つ 1000 円の商品を買うと仮定し,) 表を用いて調べていく

＜活動例＞

個数	1	2	3	…	7	8
会員外	1000	2000	3000	…	7000	8000
会員	1430 (500＋1000－1000×0.07)	2360 (500＋2000－2000×0.07)	3290 (500＋3000－3000×0.07)	…	7010 (500＋7000－7000×0.07)	7940 (500＋8000－8000×0.07)

会員と会員外では，商品を買う個数が 1 つ増えると 70 円ずつ差がなくなる．　<u>7000 円～8000 円の間に答えがありそうだ</u>

活動 A-2：(1 つ 1000 円の商品を買うと仮定し,) 比例関係を用いて考える

＜活動例＞

1000 円の 7%は 1000×0.07＝70 より，会員になって 1000 円のものを買うと会員にならない場合に比べて 70 円安くなる.

1000 円で 70 円

2000 円で 140 円　(2000×0.07)　(70×2)

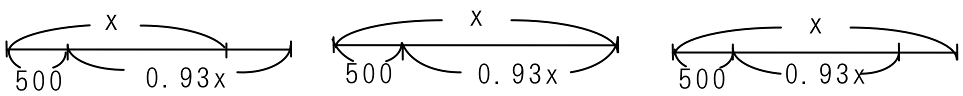
：

7000 円で 490 円　(7000×0.07)　(70×7)

8000 円で 560 円　(8000×0.07)　(70×8)　<u>入会金は 500 円であるので，7000 円～8000 円の間に答えがありそうだ</u>

活動 B：線分図をかき，それを基に方程式（不等式）で立式し，方程式の解を求める

i）　　　　　　　　ii）　　　　　　　　iii）



$x < 0.93x + 500$　　　$x = 0.93x + 500$　　　$x > 0.93x + 500$

$0.07x = 500$

$x = 7142.85$

7142.85 円購入した際に会員と会員外の支払金額は等しくなる

活動 C：方程式で得られた解を吟味し，考察する

＜活動例＞

i）　　　　　　　　ii）　　　　　　　　iii）

$x < 0.93x + 500$　　　$x = 0.93x + 500$　　　$x > 0.93x + 500$

$0.07x = 500$

$x = 7142.85$　　　　　$x > 7142.85$

7142.85 円以上購入した際に会員の方が得となる

5.3　適用事例「方程式」の授業分析（アプリオリ分析）

5.3.1　授業形式のモデルとその説明

構築した支援設計の枠組みを用いて支援設計を行う前提として，授業形式のモデル化を行うことが求められる．授業形式のモデル化の方法は，3.1.2 で述べた通りである．次ページの図 14 が適用事例「方程式」の授業形式のモデルである．

活動 A-1	活動 A-2	活動 B	活動 C
(1 つ 1000 円の商品を買うと仮定し)表を用いて調べていく	(1 つ 1000 円の商品を買うと仮定し)比例関係を用いて考える	線分図を書き、それを基に方程式(不等式)で立式し、解を求める	方程式で得られた解を吟味し、考察する
α：会員と会員外の支払い金額を計算し，表にまとめ，それらの規則性を見つける →	α'：会員になった際に割引になる額を比例関係を用いて求める →	α''：会員と会員外の支払い方の関係を線分図に表す →	α''
β：具体的な購入金額をあてはめて考え，おおよその答えを求める →	→	β'：方程式で立式し，正確な解を求める →	β''：方程式で得られた解を不等式の考え方へと適用する

図 14　適用事例「方程式」の授業形式のモデル

図 1 「あまりのあるわり算」の導入の授業形式のモデル(p.29)と同様に，横軸に各活動を位置づけ，縦軸に各活動における条件を挙げている．異なる条件は，α，βのようにギリシャ文字で分類している．一方，同じ分類の中でも変容する条件はα′のように，「′」や「″」を用いて表している．以下に，各条件の説明を行う．

(1)活動の条件α，α′，α″

活動 A-1 の条件αは「会員と会員外の支払金額を計算し，表にまとめ，それらの規則性を見つける」である．この条件は,「1000 円の品物購入，2000 円の品物購入，…」と仮定し，会員と会員外の支払金額を計算し，表にまとめ，さらに，会員と会員外の支払金額の差の規則性を見つけている活動を表している．具体的には，1000 円の品物を購入すると仮定すると,会員外は 1000 円支払い,会員は 500＋1000－1000×0.07＝1430 より 1430 円支払わなければならない．つまり，会員の方がその差である 430 円多く払っていることとなる.次に，2000 円の品物を購入した場合，会員外は 2000 円の支払いに対し,会員は 500＋1000－1000×0.07＝2360 より 2360 円の支払いとなる．つまりその差は 360 円であり，その分会員の方が多く払っていることになる．以上より，1000 円の商品と 2000 円の商品を購入した会員の支払金額の差は，430－360＝70 より 2000 円の商品を購入した会員の方が 70 円得しているといえる．このように条件αは，会員と会員外の支払金額の差の規則性を見つける活動を指している．

活動 A-2 の条件α′は「会員になった際に割引になる額を比例関係を用いて求める」である．この条件は，会員になった際の割引額に着目し，割引額を比例関係を用いて求める活動を表している．具体的に述べると，会員が 1000 円の品物を購入すると仮定すると，1000×0.07＝70 より，70 円安く購入

できることから，比例関係をもとに，2000 円の商品では 70 ×2＝140のように割引になる額を計算している活動を指している．

活動 B の条件 α'' は,「会員と会員外の支払い方の関係を線分図に表す」である．これは，購入した品物を x（会員外の支払い額）とし，それよりも会員の支払金額（500＋0.97ｘ）が大きくなる場合，小さくなる場合，または，等しくなる場合とそれぞれを仮定し線分図に表す活動から主張できる．また，この条件は活動 C においても方程式と不等式の解の吟味の際に用いられるため，活動 C にかけて保存されているといえる．

(2)活動の条件 β，β'，β''

活動 A-1 の条件 β は,「具体的な購入金額をあてはめて考え，おおよその答えを求める」である．これは,「1000 円の品物購入，2000 円の品物購入，…」と具体的な購入金額を仮定して会員になった際の支払金額を計算し，その金額と会員外の金額の比較より会員になった方が得するおおよその品物の値段を求める活動から主張できる．具体的には，7000 円の品物を購入すると仮定すると，会員は 500＋7000－7000×0.07＝7010 より，7010 円支払うことになり，会員外（7000 円）と比べて余分に 10 円支払わなければならない．次に 8000 円の品物を購入すると仮定すると会員は 500＋8000－8000×0.07＝7940 より，7940 円の支払いとなる．一方会員外は 8000 円支払うため,会員になった方が 60 円お得になるということが明らかになる．このことから，7000 円～8000 円の間に本問題の答えがあると推測できる．以上のことから明らかになったように，活動 A-1 ではあくまでもおおよその答えを求めており，正確な答えではないと主張できる．

また，活動 A-2 においても，「1000 円の品物購入，2000 円

の品物購入，…」と具体的な購入金額を仮定し，会員になった際に得する金額に着目することでおおよその答えを求めている．具体的には，会員は 1000×0.07＝70 より，1000 円につき 70 円ずつ得することが分かる．このことから 7000 円の品物を購入すると 70×7＝490 円得するものの，入会金 500 円より下回っているため会員外の方が得であるとわかる．しかし，8000 円の場合では，70×8＝560 より，入会金 500 円を上回っており，会員になった方が得であると主張できる．以上より，答えは 7000 円と 8000 円の間にあるとおおよその答えを求めることができる．このことから，条件 β は活動 A-1 から活動 A-2 にかけて保存されていると主張できる．

活動 B の条件 β' は,「方程式で立式し,正確な解を求める」である．これは，条件 α'' の数直線をもとに，会員と会員外の支払い方の関係を方程式に表し，正確な解を求めることから主張できる．活動に即して述べれば，数直線をもとに $x=0.93x+500$ と立式し,その解は 7142.85 である.この解は,会員と会員外の支払金額が等しくなる際の品物の金額を表している．また，この解は活動 A-1 や活動 A-2 の条件 β のような「答えは 7000 円～8000 円の間」というおおよその答えではないことは明らかである．このことから，条件 β' は条件 β と異なり，正確な答えを求めることができていると主張できる．

活動 C の条件 β'' は「方程式で得られた解を不等式の考え方へと適用する」である．これは，不等式で立式することはできてもその解を求められない生徒が，方程式の解を吟味することにより，その解を不等式の解へと適用させる活動から主張できる．具体的には，$x>0.93x+500$ と立式するも，その解法が分からない．そこで，求めることのできる方程式 $x=0.93x+500$ の解を用いて不等式の解を吟味する活動である．右辺と左辺が等しい場合の解(方程式の解)は 7142.85 で

あることから，左辺が大きくなる場合の解は 7142.85 より大きくなると推測でき，$x > 7142.85$ へと適用する活動を示している．

5.3.2 授業形式のモデルの分析

授業形式のモデル化を行った上で，各活動の比較を行った．すると，活動 A-1 の条件 α は活動 A-2 では条件 α' へと変容し，さらに活動 B では条件 α'' へと変容していることが分かった．また，条件 α'' は活動 B から活動 C にかけて保存されていることも明らかになった．条件 β は活動 A-1 から活動 A-2 にかけて保存されるものの，活動 B では条件 β' へと変容する．さらに活動 C では条件 β'' へと変容している．以上のことから，本事例における各活動は条件の保存，条件の変容により構成されていることが明らかになった．また，各活動の変容には条件の変容が作用していることが明らかになった．

5.4 適用事例「方程式」の支援設計

構築した支援設計の枠組みを用いて，適用事例「方程式」の支援設計を行う．まず，支援の場を決定し，次に支援内容を決定する．

5.4.1 支援の場の決定

支援設計の枠組み(表 6：次ページ参照)より，**<u>支援の場の決定の視点は条件の変容や付加を促す場</u>**であると主張できる．そこで，「方程式」の授業形式のモデルにおいて，条件の変容や付加を促す場がどこに見られるか明らかにすることにより，支援の場を決定することができると主張できる．5.3.2 で明らかにしたように，「方程式」の授業形式のモデル内に条件の変容は 4 ヶ所見られた．その 4 ヶ所とは，条件 α →条件 α' （支援１)，条件 α' →条件 α'' （支援 2)，条件 β →条

件β′（支援3），条件β′→条件β″（支援4）である（以下図15参照）．一方で，条件の付加は見られなかった．以上のことより，適用事例「方程式」の授業では，条件の変容を促す4つの支援が必要であり，それ以上でもそれ以下でもないことが主張できる．

活動 A-1	活動 A-2	活動 B	活動 C
α → 支援 1 →	α′ → 支援 2 →	α″ →	α″
β →	支援 3 →	β′ → 支援 4 →	β″

図 15　適用事例における支援の場のモデル

	決定の視点	決定の視点の妥当性
支援の場	条件の変容を促す場 条件の付加を促す場	条件の保存 →児童が既に獲得している「思考」の保存． ⇩ <u>支援の必要性なし</u> 条件の変容や付加 →a）児童自らが変容や付加を促すことが可能な場合 ⇩ <u>支援の必要性なし</u> b）児童自らの力では変容や付加を促すことが困難な場合 ⇩ <u>支援の必要性あり</u>

表 6　問題解決学習における支援設計の枠組み（支援の場）

5.4.2 支援内容の決定

5.4.1において，支援の場（4ヶ所）が明らかになった．そこで，それらの場にどのような支援内容が必要となるか，支援設計の枠組み(表 7)にあてはめて検討する．支援設計の枠組みより，**条件の変容を促す支援内容の決定の視点は変容前後の条件の価値に着目し，変容後にしか含まれていない価値**である．これをもとに，各支援の場における支援内容を検討する．

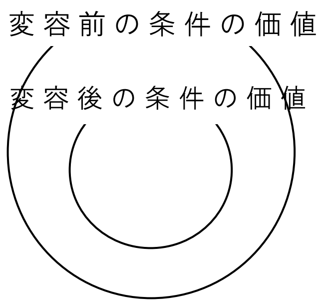
	決定の視点	決定の視点の妥当性
支援内容	ｉ）条件の変容 変容前後の条件の価値に着目し，変容後にしか含まれていない価値	ｉ）条件の変容 変容後の価値が変容前の価値に内包されているため，変容後のみに見られる価値へと変容することが活動の高まりとなる．  図 13 「価値」に着目した条件の変容モデル
	ⅱ）条件の付加 教材の本質を見抜き，それと比較して欠けている価値	ⅱ）条件の付加 前の条件に価値が内包されていない．そのため，教材の本質を見抜き，それと比較して欠けている価値を加えることが活動の高まりを促すこととなる．

表 7 問題解決学習における支援設計の枠組み(支援内容)

ⅰ）条件αᅠ→条件α′（支援 1)の支援内容

活動 A-1
条件α；会員と会員外の支払い金額を計算し，表にまとめ，それらの規則性を見つける

⇒

活動 A-2
条件α′；会員になった際に割引になる額を比例関係を用いて求める

条件αと条件α′の価値について比較を行い，条件α′のみに含まれる価値が支援内容になる．まず，条件αでは，会員の支払金額を計算し，その計算結果と会員外の支払額の比較から規則性を導き出している．一方，条件α′では，会員になった際の割引額に着目し，その割引額を比例関係という規則性を用いて計算している．つまり，条件α′は条件αのように会員と会員外の支払金額をもとに規則性を見つけるのではなく，割引額に着目することで比例関係という規則性をもとにおおよその答えを求めることができている．換言すれば，規則性を見出すのが条件αの価値であるのに対し，条件α′は規則性を用いて答えを求めることに価値があると主張できる．以上のことから，条件α′のみに含まれる価値は割引額に着目することで規則性をもとに答えの検討ができていることであるといえる．そのため，条件αから条件α′へと変容を促す支援内容は，「割引額に着目し，規則性を用いて求める」と設定した．

ⅱ）条件α′→条件α″（支援 2)の支援内容

活動 A-2
条件α′；会員になった際に割引になる額を比例関係を用いて求める

⇒

活動 B
条件α″；会員と会員外の支払い方の関係を線分図に表す

条件α′と条件α″の価値を比較し，条件α″のみに含まれる価値が支援内容となる．条件α′には，既述したように会員の割引額に着目し，比例関係という規則性を用いておおよその答えを求めるという価値があった．一方，条件α″は，会員と会員外の支払い方の関係を線分図に表すことにより，問題の全体的構造を捉える事ができるため，結果として比例関係のような規則性を用いることの必要性がなくなり，規則性なしで答えを求めることができるという価値がある．このことより，条件α″のみに含まれる価値は，問題の全体的構造を線分図に表すことであると主張できる．そうであるならば，条件α′から条件α″への変容を促す支援内容は，「問題の全体的な関係を線分図に表す」と設定できる．

iii）条件β→条件β′（支援3）の支援内容

<u>活動A-1</u>

条件β；具体的な購入金額をあてはめて考え、おおよその答えを求める

<u>活動B</u>

条件β′；方程式で立式し、正確な解を求める

条件βと条件β′の価値を比較し，条件β′のみに含まれる価値が支援内容となる．条件βは逐次近似の考え方をもとに徐々に答えの範囲を狭め，おおよその答えを求めることに価値があると考えられる．一方，条件β′は，条件α″をもとに方程式で立式することで，正確な解を求めることができる．この「正確な解を求める」という価値は条件β′のみに含まれる価値であるため，条件βから条件β′へと変容を促す支援内容は「いかに正確な解を求めるか」であると主張できる．

ⅳ）条件β′→条件β″（支援 4)の支援内容

活動 B
条件β′；方程式で立式し、正確な解を求める

⇒

活動 C
条件β″；方程式で得られた解を不等式の考え方へと適用する

条件β′と条件β″の価値を比較し，条件β″のみに含まれる価値が支援内容となる．条件β′は正確な解を求めるという価値がある．一方，条件β″には，問題に即したより正確な解を求めるという価値がある．今回の問題では，「商品を何円購入すると，会員になったほうが得か」という提示の仕方をとっている．条件β′では，7142.85 円購入する時，会員になった方が得であることを示している．しかし，この解は会員になった方が得する下限の金額であり，8000 円や 9000 円でも会員になった方が得なのである．つまり，7142.85 円以上の商品を購入した場合会員の方が得なのである．このような，「～以上」の考え方は条件β′では行われず，条件β″で方程式の解を吟味することにより導出されることである．以上のことから，条件β″のみに含まれる価値は，問題に即したより正確な解を求めることであると主張できる．そうであるならば，条件β′から条件β″へと変容を促す支援内容は「問題に即したより正確な解を求める」である．

以上のように，構築した支援設計の枠組みに適用事例をあてはめることにより，支援の場とその場における支援内容を決定することができた．

5.5 適用事例から見る支援設計の枠組みの有効性と難点

5.4 では，構築した支援設計の枠組みをもとに適用事例「方程式」の支援設計を行った．この適用事例の支援設計を基に，構築した支援設計の枠組みがどのように機能したのか，また，その有効性について明らかにする．さらに，支援設計の枠組みを用いる際に困難であると感じたことについても明らかにする．

5.5.1 構築した支援設計の枠組みの有効性

構築した支援設計の枠組みを適用事例の支援設計の際にいかに用いたかということを客観的に捉え直すことで，その機能や有効性についての吟味を行う．

まず，支援設計の前提として適用事例の授業設計を行い，その授業形式のモデル化をはかった．授業形式のモデル化より，適用事例の場合は，条件の保存と変容により活動が構成されていることが明らかになった．次に，この事実をもとに，支援設計の枠組みを用いて支援の場，さらに，支援内容について設定した．支援の場については，構築した支援設計の枠組みに基づけば，条件の変容や付加を促す場である．これを適用事例にあてはめたところ，条件の変容は見られるものの，条件の付加は見られないため，今回の適用事例では，条件の付加に関する支援設計の枠組みの検証は不可能であることが明らかになった．つまり，この適用事例では条件の変容に関する支援設計の枠組みの検証のみにとどまることになる．それでは，条件の変容の場に必要となる支援内容について吟味する必要がある．構築した支援設計の枠組みによると，条件の変容を促す支援内容の決定の視点は，変容前後の条件の価値に着目し，変容後にしか含まれていない

価値である．この視点をもとに支援内容を設定した．

以上のように，構築した支援設計の枠組みをもとに適用事例における支援設計を行った．実際に構築した支援設計の枠組みを用いることにより，支援設計の枠組みがいかに機能するか明らかにできただけでなく，以下の有効性も明らかになった．それは，支援の場と支援内容の決定のための視点が明らかであるため，どこに着目すれば決定できるかということが明白な点である．また，それらの決定のための視点は，理論的根拠に基づくため，結果として理論的根拠に基づいた支援の場と支援内容の決定が可能になると主張できる．さらに，支援設計の枠組みを用いて支援設計を行う場合，支援内容を決定する際に算数的活動の価値づけの吟味が必ず必要となる．なぜならば，その価値に着目し決定しているからである．このことから，枠組みを適用する過程において，教師自らが設定した活動の価値づけの妥当性について吟味することができ，必要であれば支援設計の際に設定した活動の修正を行うことができる．このことは，支援設計の枠組みを用いて支援設計を行うことのよさであると主張できる．

5.5.2　構築した支援設計の枠組み適用の際の難点

5.5.1 において，構築した支援設計の枠組みの機能とその有効性について述べた．しかし，一方で支援設計の枠組みを用いる過程において困難な点も明らかになった．それは，支援設計の枠組みを用いる前提として不可欠な授業形式のモデル化を図る際に，条件の特定が困難であるという点である．条件は，各活動における生徒の問題解決中の思考と言い換えることができることから，活動の構成要素が条件であると主張できる．この条件の特定，

さらにそれらの配列は支援設計の枠組みを適用する際のベースになるものであり，非常に重要なものである．しかし，条件の特定は教師の教材理解に強く依存するものであり，教師の教材理解の度合いにより，その条件の特定も変化すると考えられる．特に，教材理解が浅い場合，条件の特定は非常に困難である．なぜなら，条件の特定は活動の価値づけによって行われるからだ．しかし，すべての教師が全く同じ教材理解をし，授業設計を行うということは不可能であり，また，同様であることは一概によいと主張できない．教師によって教材理解の度合いが異なり，その結果，条件の設定は異なるだろう．しかし，条件の設定は異なったとしても，支援設計の枠組みを用いることで活動の価値を吟味した支援設計が可能となる．これは，支援設計の枠組みを用いるからこそなしえることであると主張できる．

第5章要約

本章では，構築した支援設計の枠組みがいかに機能するか適用事例を基に検証し，その有効性と用いる際の難点について明らかにした．

まず，適用事例である中学校1年生の「方程式」の授業設計を行った．次に，支援設計の枠組みを適用させる際に前提となる授業形式のモデル化を図った．それにより，適用事例における数学的活動は，条件の保存と変容で構成されていることが明らかになった．その事実を基に，構築した支援設計の枠組みを用いて適用事例における支援の場と支援内容を決定した．支援設計の枠組みを用いることにより，支援の場と支援内容を決定する際に着目すべき視点が焦点化されるというよさが挙げられる．また，その決定の視点は理論的根拠に基づくため，理論的根拠に基づく支援設計が自ずと可能になったと結論付けられる．さらに，支援設計の枠組みを用いた支援設計の過程において，活動の価値づけの吟味が欠かせないことから，教師が設定した活動の吟味も行うことができる．

一方，支援設計の枠組みを用いる過程において困難な点も明らかになった．それは，授業形式のモデル化を行う際の条件の特定である．この理由として，条件の特定は教師の教材理解に深く関わっているからであると考えられる．そのため，教師の教材理解の度合いにより，条件の特定も様々であると考えられる．しかし，教師によって条件の特定は異なったとしても，構築した支援設計はそれらに応じた活動の価値づけの吟味を必要とするため，それらを踏まえた支援設計，活動の設定が可能になると考えられる．

第６章

研究の結論と今後の課題

本章では，本研究で得られた成果とその意義を6.1でのべる．さらに，6.2では，本研究で考察ができなかった課題を述べる．

6. 研究の結論と今後の課題

6.1　研究から得られた結論

本研究の目的は，問題解決学習における支援の場と支援内容に焦点を当てた支援設計の枠組みを構築することである．

以上の目的は，第四章において以下の通りに達成された．支援設計の枠組みは，支援の場と支援内容のそれぞれを決定する視点，さらに，その妥当性について明らかにすることにより構築される．そのため，事例をもとにそれらを明らかにすることで構築した支援設計の枠組みが以下の表である．

<table>
<tr><th></th><th>決定の視点</th><th>決定の視点の妥当性</th></tr>
<tr><td>支援の場</td><td>条件の変容を促す場
条件の付加を促す場</td><td>条件の保存
→児童が既に獲得している「思考」の保存．
⇩
<u>支援の必要性なし</u>
条件の変容や付加
→a）児童自らが変容や付加を促すことが可能な場合
⇩
<u>支援の必要性なし</u>
b）児童自らの力では変容や付加を促すことが困難な場合
⇩
<u>支援の必要性あり</u></td></tr>
</table>

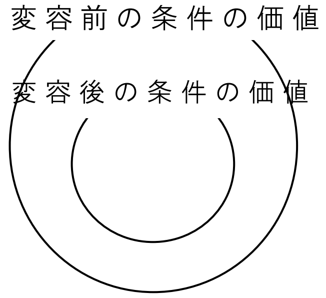
支援内容	ⅰ）条件の変容 　変容前後の条件の価値に着目し，変容後にしか含まれていない価値	ⅰ）条件の変容 　変容後の価値が変容前の価値に内包されているため，変容後のみに見られる価値へと変容することが活動の高まりとなる．  図 13　「価値」に着目した条件の変容モデル
	ⅱ）条件の付加 　教材の本質を見抜き，それと比較して欠けている価値	ⅱ）条件の付加 　変容前の条件に価値が内包されていない．そのため，教材の本質を見抜き，それと比較して欠けている価値を加えることが活動の高まりを促すこととなる．

表 5　問題解決学習における支援設計の枠組み

以上のように支援設計の枠組みを構築し，さらにその適用事例を検討することにより，支援設計の枠組みの有効性や用いる際に困難な点について明らかになった．まず，有効性については 3 点挙げられる．1 点目は支援設計の枠組みを用いることにより，支援の場と支援内容を決定する視点が明確になることである．換言すれば，支援設計の際に着目すべき点が焦点化されるといえる．2 点目は，決定の視点は理論的根拠に基づくものであるため，理論的根拠に基づいた支援設計を行うことができることである．つまり，

「どのような児童に，どのような支援を施せばよいのか」という問いに教師の経験や感覚だけではなく理論的根拠をもとに答えられることができ，このことが本研究の成果であると主張できる．3点目は，支援設計を行う際には，教師が設定した活動の価値づけの吟味が必ず必要となる．そのため，支援設計を行う過程において設定した活動の妥当性について振り返り，必要であれば修正を加えることが可能となると考えられる．支援設計の枠組みの構築には，以上のような有効性が挙げられた．

次に，支援設計の枠組みを用いる過程において困難な点について明らかにする．それは，授業形式のモデル化の際の条件の特定である．条件は，児童の「問題解決中の思考」であり，算数的活動の構成要素としている．条件の特定が困難な理由の1つとして，条件の特定は教師の教材理解に依存するということが挙げられる．つまり，教師の教材理解が浅い場合には活動の価値づけが困難であり，結果として条件の特定が困難になると考えられる．これは，実際に筆者自身が条件の特定の際に実感したことである．このように，教師の教材理解の度合いにより，児童の算数的活動の価値づけや条件の特定は異なるだろう．しかし，教師間の教材理解の差異は当たり前のことであり，一概にそれが悪いとも主張できない．本研究の目指すところは，決して支援設計のマニュアルを作ることではない．支援設計の枠組みを用いることにより，教師の教材解釈の差異に関わらず活動の価値を吟味した支援設計が可能になることに枠組みを構築した意義があると考える．

6.2 今後の課題

本研究で考察ができなかった課題は3点挙げられる．

1点目は，条件の付加の支援内容決定にあたり，それが

いかに機能するか適用事例で検証することができなかった点である．これは，適用事例において条件の付加が見られなかったため検証が不可能であったからである．

2点目は，用いている語の吟味がなされていないことである．具体的には，授業形式のモデル化にあたり，条件の変容や条件の付加を特定するための着目すべき視点が吟味されていないことである．そのため，教師によって条件の変容や条件の付加の特定の基準が異なるという問題点が挙げられる．授業形式のモデルを基に支援設計の枠組みを適用するため，モデル化を行うための視点は統一する必要がある．また，理論的な根拠に基づく支援設計の枠組みの構築がなされたと主張しているが，どのようであれば理論的根拠に基づいているといえるのか，その議論がなされていない．

3点目は，構築した支援設計の枠組みを用いることで単元を超えた一貫性のある支援が可能となるのか，また，それにより児童の問題解決能力にどのような影響を与えるのか検証できなかった点である．

引用・参考文献

伊藤説朗(2008)．算数科の未来型学力＝思考力・表現力を育てる授業．明治図書

岡本和夫　他 38 名(2009)．未来へひろがる数学 1．新興出版社啓林館

岡本和夫　他 4 名(2009)．未来へひろがる数学 1　平成 21 年度用補助教材．新興出版社啓林館

溝口達也(2007)．算数・数学学習指導論．鳥取大学数学教育学研究室

文部科学省(2008)．小学校学習指導要領．東京書籍．p．48

謝辞

本研究を進めるにあたり，多くの方々にご指導いただき，また，支えていただいたことに，心から感謝申し上げます．

溝口達也先生には，数学教育に関することだけでなく，学問全般についてのお話から研究の仕方に至るまで丁寧にご指導していただき，心から感謝しています．数学に苦手意識をもっていた私が数学教育に興味を持ち始めたきっかけは，やはり溝口先生の授業でした．その授業を通して，教師の教材理解や児童の実態の把握がいかに大切であるか実感することができました．私の教育観，指導観にも大きな影響を与えるものとなりました．また，本物，本質を見抜く力の大切さを教えていただいたのも，溝口先生でした．未だに本物，本質を見抜くことの困難さを感じている一方で，そのような視点を与えてくださったことそのものが私にとっては大きな収穫であったと感じています．「研究は厳しく，人間関係は温かく」という先生のお言葉の通り，研究に関しては厳しく指導していただきました．しかしその厳しさは本当のやさしさであったと振り返って気がつくことができました．「今の私にとって何が必要か」ということを常に考え指導してくださったことに，深く感謝しております．溝口先生から学んだことは，将来の教師生活に多大な影響を与えるものであると感じています．先生との出会いに感謝しています．

また，矢部敏昭先生にも，講義や卒業論文中間発表会の際にご指導いただき，本当に感謝しております．矢部先生の学問に対する姿勢から，「常に学び続けることの大切さ」を学びました．また，「学ぶことの楽しさ」も実感することができました．至らない点が多い私を，常に温

かい目で見守ってくださり，良い点を見つけ認めてくださったことがとても嬉しく，励みになりました．「教育者として…」という前に，「人間として魅力があるのか」ということを自問自答するきっかけを与えてくださったのも矢部先生でした．研究に行き詰っている際に，矢部先生の「つまずきは成長の証」という言葉がとても胸にしみ，研究の励みになったこともありました．矢部先生に出会い，ご指導いただけたことを幸せに思います．

さらに，研究室の先輩である田中光一さん，尾﨑正和さん，早田透さんには，研究に関する些細な問いにも丁寧に答えていただき，また，何事も相談しやすい雰囲気づくりをしてくださっていたことに感謝申し上げます．また，國政裕恵先生には，小学校の現場での経験を基に，指導のあり方や児童の実態について教えていただきました．現場経験のない私にはとても貴重な助言であり，研究に新たな視点を与えてくださったことに大変感謝しております．また，夏合宿の際に多くの先輩方から助言を頂いたことに，深く感謝申し上げます．同級生である前田静香さん，常友愛子さんとは，研究仲間として，また，時にはよきライバルとして互いに切磋琢磨しながら研究を進めることができたことに，とても喜びを感じているとともに，感謝しています．また，後輩である安井紗笑さん，柏木美穂さん，小村亮さんにも様々な面で大変お世話になりました．感謝しています．

このように多くの方に支えられ，本論文を完成させることができました．今回学んだことを生かしながら，新たな場でさらに研究に励むことを通して，感謝の意を示したいと思います．これからも，ご指導よろしくお願いいたします．

最後に，どんな時でも常に私を応援し続けてくれた家

族に感謝申し上げます．大学院においてもしっかりと勉学に励みたいと思います．

平成 22 年 1 月

山中法子

鳥取大学数学教育研究　ISSN 1881–6134

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。
  - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
  - 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
  - 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
  - その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX 0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/