ISSN 1881-6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

数学教育における理解に関する研究

尾﨑正和

vol.12, no.11

Mar. 2010

鳥取大学 数学教育学研究室

目次

第 1 章

研究の動機と目的

本章では，研究の目的と方法について述べる．
1.1 では，本研究の動機を述べる．
1.2 では，本研究の目的を述べる．
1.3 では，本研究の目的を達成するための方法について述べる．

1.1. 本研究の動機

学習の場である授業において，子どもたちから「わかった」という声をよく耳にする．同じ問題に対しても子どもたちはそれぞれ違う活動をしている．また，評価問題に対しても同じ授業を受けているにも関わらず，その解き方も多様である．解決の方法やアプローチが違い，さらには，評価問題での解決までもが違うということは，「わかった」の意味することは多様にあるのではないか．これは筆者のはじめの関心であった．

子どもたちの多様な解決を導き出し，それらを支えているのは，既習の内容であると考えられる．今までの学び，その学びをどのように身につけているかによって，その解決が変わるのではないか．そうであるならば，理解という不可視なものによって，数学的活動の違いがあるのではないだろうか．

これが本研究の動機である．

1.2. 本研究の目的

算数・数学教育における「理解」に関する研究は，特に教授－学習過程に着目した理論的及び実践的研究の中に多くみられる．理解という不可視な対象に対して，Pirie と Kieren（1992）の超越的再帰モデルは生徒の内部に生起する理解を，可視化するため学習者の理解の過程を水準化しており，学習者の活動の様子や活動記録などを通して学習者の理解過程を表現している．そのようにすることで，学習者の理解過程が可視化され，教授的示唆を得ている．このことから，理解を可視化するにあたり，数学的活動に着目し，理解を捉えていくことが有効であると言える．そのように捉えたうえで，学習者の「わかる」という行為にはどのような活動が存在するのであろうか，またいかなる活動が必要となるのか．児童・生徒の算数・数学の学習において，その内容と方法に関する理解の側面からの検討は今後も重要であろう．しかし，「理解」という言葉の意味やその用いられ方は多種多様であり，曖昧さを感じないわけではない．

言い換えれば，児童・生徒が算数・数学の内容や方法を理解するにあたって，どのような算数・数学的活動の展開が理解をもたらすのか．また，そのためには，どのような教師の指導が必要であるのかは，理解という言葉に注目する際，算数・数学教育において今後も検討されなければならない．したがって，以下のような課題を設定する．

研究課題 A：理解そのものの解釈

先行研究に見られる理解の枠組みを捉えることで，数学教育における理解を明らかにする．

研究課題 B：理解を捉えるにあたっての数学的活動の枠組みの構築

Pirie と Kieren（1992）のように理解を可視化するために数

学的活動に着目している．そうであるならば，数学的活動についての解釈が必要となる．そのため，数学的活動の分類を明らかにし，数学的活動の枠組みを構築する必要がある．また，その枠組みから支援も考える必要がある．

研究課題 C：数学的活動と理解との関わりを明らかにする

数学的活動から理解を可視化するにあたって，その関わりどのように解釈すればよいのかを明らかにしなければならない．

1.3. 本研究の方法

本研究は児童・生徒が算数・数学の内容や方法を理解するにあたって，どのような算数・数学的活動の展開が理解をもたらすのか．また，そのためには，どのような教師の指導が必要かを明らかにすることが目的である．そのための研究課題を示したが，それらの課題を解決するための方法を以下に示す．

研究課題 A：理解そのものの解釈

研究課題 A に対する方法：この課題に対しては，まず理解の対象である知識をガニエの主張を基に捉えていく．そして，理解そのものの解釈において，清水の主張から捉えていく．

研究課題 B：理解を捉えるにあたっての数学的活動の枠組みの構築

研究課題 B に対する方法：この課題に対しては，能田に見られる数学的活動の分類を明らかにする．そして，その分類の 2 軸から数学的活動の特徴づけをしていく．さらに，その特徴付けに加え，数学的活動の変容過程を明らかにし，数学的活動の枠組みを構築する．

研究課題 C：数学的活動と理解との関わりを明らかにする

研究課題 C に対する方法：この課題に対しては，調査を行う．研究課題 B で構築された枠組みを基に，調査を行う．その調査における児童の数学的活動を研究課題 A で明らかにした理解の解釈によって，分析するものである

第 2 章

先行研究における理解

本章では，数学教育における理解そのものの解釈について述べていく．

2.1 では，理解の対象である知識について述べる．

2.2 では，数学教育における理解である knowing that と knowing how について述べる．

2.3 では，2.1 と 2.2 を基に理解の対象について明らかにする．

2.1. 宣言的知識と手続き的知識

2.1.1. 宣言的知識と手続き的知識の捉え方

D．ガニエ（1989）は知識を二つに分け，「宣言的知識とはそれが何であるかについての知識であり，手続き的知識とはどのように行うかについての知識である」と述べている．そして，それぞれの知識について具体的述べている．

宣言的知識については「宣言的知識は，互いに関連し合った命題群の巨大なネットワークとしている．その獲得方法は，すでにある知識と新しい知識が連結されるとき，新しい宣言的知識が獲得される。その獲得過程を精緻化と体制化という。」としている．巨大なネットワークとは今までの知識と新たな知識をつなぐことにあると考えられる．言い換えれば，ある知識と新たな知識を関連させ，結びつけなければ，単に新たな知識を知っただけでは宣言的知識とは言えない．その過程になされる精緻化は「倫理的な推論過程においてなされる」と述べている．今までに身に付けた知識から論理的に推論していく過程においてなられるものであるととらえることができ，言い換えれば，既習の知識から新たな知識を導き出すことによりなされるものであると言える．

一方，手続き的知識については，それに関連した命題がさし示しているプロダクションとしている．プロダクションとは「特定の条件下において，特定の行動を行う条件－行為規則」のことである．また，手続き的知識を「パターン認識手続き」と「行為連鎖手続き」に分けている．パターン認識手続きとは，特定の刺激パターンを認識できることである．一方，行為連鎖手続きは，一連の行動についての知識からなっている．パターン認識手続きは，分類・判断するという単一の行動からなるのに対し，行為連鎖手続きは複数の行為からなり，パターン認識手続きの「条件」が行為連鎖手続きの「条件」の中に含まれているものである．手続き的知識は計算のアルゴリズムや問題解決の手順に関する知識と

して捉えてよいのだろうか．つまり，宣言的知識はその事柄そのものの知識であり，手続き的知識はその知っている事柄をどのように活用できるかの知識であると捉えることができる．言い換えれば，学習において宣言的知識は「何を学んだか」という学習の成果を対象とし，手続き的知識は「それをどのように学んだか」という学習の過程を対象とするものと言えよう．

2.1.2. 事例に基づく2つの知識

それでは，それぞれの知識について，二等辺三角形の作図方法を学ぶ学習を事例として検討していく．授業において，以下のような4つの作図方法が導かれた．1つ目は底辺をとり，その両端からコンパスで等距離をとり，その交点と底辺の端を線分で結び，二等辺三角形を描くというものである（図1）．2つ目は等しい2角をとり，二等辺三角形を描くというものである（図2）．3つ目はまず，底辺を描き，その底辺の垂直二等分線を描き二等辺三角形を描くというものである（図3）．4つ目は円を描き，その中心から円周に向かい2つの辺を描き二等辺三角形を描くというものである（図4）．

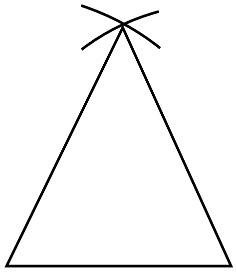


図1

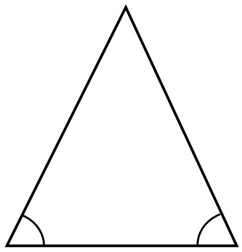


図2

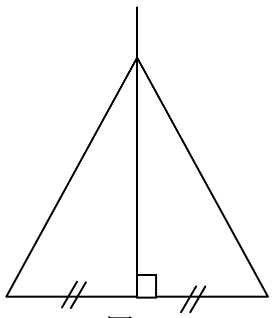


図3

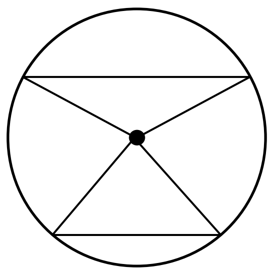


図4

それでは，本学習において宣言的知識とはどのようなものであろう．宣言的知識とするためにはすでにある知識と新しい知識が連結されなければいけない．そうであるならば，二等辺三角形の性質と二等辺三角形の作図が別のものとして考えていれば宣言的知識とは言えない．既習の知識である二等辺三角形の性質を作図する際に考え，性質から作図方法を考え，知識とすることによって宣言的知識であると

言える．1 つ目の作図は「二等辺三角形は 2 辺の長さが等しい」という性質と連結され，2 つめの作図は「二等辺三角形の 2 つの角度は等しい」という性質であり，3 つ目の作図は「底辺の垂直二等分線は頂点を通る」というものである．また，4 つ目の作図は 1 つ目の作図で用いた「二等辺三角形は 2 辺の長さが等しい」という性質と円は一点から等距離にある点の集合を組み合わせ，連結させている．これらの作図方法を導き出すことは，既習の知識から論理的な推論がなされたことと考えられ，このことが精緻化と言える．また，意味を考え理解することでは，作図方法を知り，その作図方法でなぜ二等辺三角形が描けるのか考えることであろう．仮に，一辺とその両端の角度を等しくして作図を行った場合で考える．二等辺三角形は 2 つの角度が等しい三角形である．このことと，一辺と両端の角度を等しくして作図方法を結びつけることで，宣言的知識とすることができるのである．精緻化された知識はその知識のつながりを整理しなければならない．そのことが体制化である．この体制化をすることにより，限られた命題から，推論する際に必要な知識を結びつけることができるようになる．また，「どのように学んだのか」ということで言うならば，二等辺三角形の性質から二等辺三角形の作図を導く学び方であると言える．

一方，手続き的知識は，どのように行うかについての知識であるので，それぞれの二等辺三角形の作図方法で二等辺三角形を描けるというものである．もし，二等辺三角形を描くとした時，作図方法を提示され，その作図方法に従って作図をすることができたとする．最初はうまく描けなくても，その行為を繰り返すことにより，正確に素早く二等辺三角形を描くことができる．このように提示された方法と作図との関係を行為連鎖手続きということができる．また，パターン認識手続きはどのような時にどうすればいいかというパターンを身につけることである．

2.2. knowing that と knowing how

2.2.1. knowing that と knowing how の捉え方

清水（1987）は理解の過程を「knowing that」,「knowing how」の 2 つに分け，さらにこれら両者を協応させる機能として「knowing why」を位置づけている．また，清水（1983）では，その概念に「課題意識」と「既有の知識と方法」が含まれることを指摘している．具体的には，knowing that は「わかろうとしている対象がどのようなものかを知るという理解」を意味し，knowing how は「それをどのように知ったのかという理解」を意味するものとしている．また，knowing that と knowing how の異なる 2 点として,「knowing that が事実性の認識であるという点」と,「knowing how が，alternative である」ということである．knowing that はわかろうとしている対象ということは，何を知るかということである．学習において言い換えるのであれば，授業で明らかになったことであり，学習内容そのものである．一方，knowing how は knowing that をどのように知り得たのかと考えられる．学習において言い換えるのであれば，学習内容をどのような方法で，どのような手続きで学んだのかということである．

2.2.2. 事例に基づく 2 つの理解

このように捉え，宣言的知識，手続き的知識で考察した二等辺三角形の作図を具体例とし，knowing that と knowing how について述べていく．具体的な作図方法は上述した 4 つである．

二等辺三角形の定義・性質は「2 辺の長さが等しい」,「2 つの底角が等しい」などが上述した作図方法を導き出す過程で用いられたと推測される．さらに,「円とその中心を利用した作図」では，二等辺三角形の性質のみではなく，円の性質とも関連させている．本学習において作り上げられた多様な作図方法は学習の成果としての結果であり，どのような作図方法が考えられたかとい

う作図方法そのものの知識であると捉えられる．他方，上述した四通りの作図方法は作図の過程で二等辺三角形の性質がそれぞれの作図方法を導いていると考えられる．

言い換えれば，二等辺三角形の作図方法とは何であるか．どのような方法があるかは knowing that に対応するものであり，二等辺三角形の作図方法をどのように知り得たかということは knowing how に対応するものである．

また，「knowing how が，alternative である」（清水 1983）との指摘が意味するものは，作図方法の過程において二等辺三角形の性質のどの性質を用いるかによってその作図方法は代替的に多様であると解釈できる．

2.3. 理解の対象

理解の対象である知識を2つの分類でみてきた．二等辺三角形の作図で見てきたように，学習において宣言的知識は「何を学んだか」という学習の成果を対象とし，手続き的知識は「それをどのように学んだか」という学習の過程を対象とするものと述べた．

また，理解も2つの分類で見てきた．二等辺三角形の作図で見てきたように，knowing that は作図の方法はどのような方法があるのかということである．一方，knowing how は作図の方法をどのように知り得たのかということになる．そう捉えるならば，knowing how は作図方法を作り出す過程が検討され，knowing that は knowing how によって作り出された成果・結果が検討されなければならない．これらのことから，knowing how は数学的活動の過程（プロセス）が理解の対象となり，プロセスが多様であればあるほど，理解は深くなろう．他方，knowing that は学習の成果・結果が理解の対象となり，その知識は，他の正三角形や一般の三角形の作図と関連するとき，理解がより深まるものと考えられる．

knowing that は学習の成果・結果が理解の対象となり，knowing how は学習の過程が理解の対象となる．また，理解の対象とプロセスが多様にあり，それらを関連させることにより理解が深まると考えられる．

両者の主張より，理解の対象は学習の成果としての結果と学習の過程としての数学的活動であると言える．

第 3 章

数学的活動の分類

本章では，数学的活動の分類を明らかにし，数学的活動の枠組みを構築する．

3.1 では，先行研究における数学的活動の分類から，その分類の軸を明らかにしていく．

3.2 では，その分類を他の事例に対応させ，解釈していく．

3.3 では，3.1，3.2 で明らかにした軸から数学的活動の特徴づけを行い，さらには，数学的活動の枠組みを構築する

3.4 では，3.3 の枠組みに対して，事例を基に分析していく．

3.5 では，数学的活動の枠組みでの差を knowing that と knowing how によって，明らかにしていく．

3.1. 数学的活動の分類

3.1.1. 先行研究における数学的活動の分類

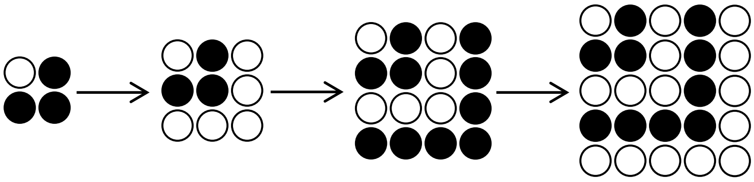
理解という不可視な対象に対して，Pirie と Kieren（1992）の超越的再帰モデルは生徒の内部に生起する理解を，可視化するため学習者の理解の過程を水準化しており，学習者の活動の様子や活動記録などを通して学習者の理解過程を表現している．そのようにすることで，学習者の理解過程が可視化され，教授的示唆を得ている．このことから，理解を可視化するにあたり，数学的活動に着目し，理解を捉えていくことが有効であると言える．本研究では，数学的活動の分類として能田（1983）を基に数学的活動を分類していく．その分類のされ方は，表 1 のように 2 つの軸に分けている．1 つ目の軸は一般性についてであり，その中で低い,高いと 2 つに分類している．2 つ目は構造についてであり，その中で単純と複雑の 2 つに分けている．2 つの軸とそれぞれの 2 つの分類により，数学的活動を 4 つに分類している．その 4 つの分類は，一般性が低く構造が単純なⅠ，一般性が高く構造が単純なⅡ，一般性が低く構造が複雑なⅢ，一般性が高く構造が複雑なⅣである．

表 1 数学的活動の分類

構造＼一般性	低い	高い
単　純	Ⅰ	Ⅱ
複　雑	Ⅲ	Ⅳ

能田（1983）は以下の問題で数学的活動の分類を行っている．

赤と白のおはじきを，下の図のように，正方形の形にならべていきます．



1つの辺のおはじきの数が10になるまでならべると，赤と白のおはじきの数のちがいは何こになるでしょう．

・1つの辺のおはじきの数が，2こ，3こ，……のときどうなるか，順に調べてみましょう．

＊問題は白と赤であるが，以下では白と黒(赤のかわり)で議論を展開する．

そして，本問題における児童の解決として，4つの解決の様相が予想される．1つ目（様相 1）は，特定の場合について具体的に総数を求めるものである．2つ目（様相 2）は1辺の数と総数の変化のきまりを用いての総数を求めるものであり，3つ目（様相 3）は特定の場合について具体的に白と黒の差を求めるものである．最後の4つ目（様相 4）は奇数と偶数に分けながらも，差と1辺の数が等しくなることを用いて白と黒の差を求めるというものである．具体的な方法は以下のようになる．この4つの様相をもとに，一般性が低い，高い，構造が単純，複雑とはどのように解釈するか述べていく．

<u>様相 1</u>　特定の場合について具体的に総数を求める

1+3+5+7+9=25　　答　25個

<u>様相 2</u>　1辺の数と総数の変化のきまりを用いての総数を求める

1辺が10個のとき　10×10　　答　100個

<u>様相 3</u>　特定の場合について具体的に白と黒の差を求める

白：1+5+9=15　　黒：3+7=10　　違い　15-10＝5

答　白が 5 個多い

<u>様相 4</u>　奇数と偶数に分けながらも，差と 1 辺の数が等しくなることを用いて白と黒の差を求める

1 辺が 10 個のとき，多いのは黒で違い　10 個

答　黒が 10 個多い

3.1.2. 一般性が低い，高いとは

様相 1 と様相 2 の間にある解決に用いる手続きの違いについて考える．様相 1 は特定の場合について具体的におはじきの数を数えることで総数を求める手続きである．一方，様相 2 は 1 辺の数と総数の変化のきまりを用いて総数を求める手続きである．どちらも，おはじきの黒と白の差ではなく，総数を求めているというところは同じである．様相 1 と様相 2 の間の違いは，その総数を求める方法である．様相 1 は具体的におはじきの総数を求めているのに対し，様相 2 は具体的に総数を求めるのではなく，一辺の数×一辺の数でおはじきの総数になるというきまりを用いて求めている．このことから，この 2 つの様相での差はきまりや法則への着目であると言える．そして，この違いから，様相 1 は一般性が低く，様相 2 は一般性が高いと捉えることが出来る．

次に，様相 3 と様相 4 の間にある解決に用いる手続きの違いについて考える．様相 3 は特定の場合について具体的に白と黒の数を数え，その差を求める手続きである．一方，様相 4 は 1 辺の数が奇数と偶数に分けながらも，差と 1 辺の数のきまりを用いて白と黒の差を求める手続きである．様相 3 は具体的におはじきを白と黒の数を数えているのに対し，様相 4 はきまりを用いて差を求めている．様相 1 と様相 2 での間にも見られたように，きまりや

法則への着目という違いがみられる．これらのことからも一般性における低い，高いとは「きまりや法則への着目」であると言える．

3.1.3. 構造が単純，複雑とは

上述では，様相1と様相3は一般性が低く，様相2と様相4は一般性が高いと言えた．ここでは，様相1と様相3，様相2と様相4の間から構造について解釈していく．

様相1と様相3の間にある解決に用いる手続きの違いについて考える．様相1はおはじきが全て白であり，図に表すと図5のようになる．また，様相1のおはじきの数については表2のように表すことができる．一方，様相3のおはじきは白と黒の二色であり，図で表すと図6のようになる．また，様相3の白と黒のおはじきの差については表2のように表すことができる．それぞれの様相の図や表を比べてみると，様相3の方が問題を構成する要素が多くある．そして，児童が解決するにあたって考えなければならないことが多くある．ここに構造の差を見ることができる．

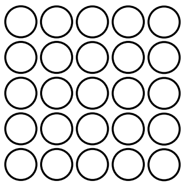


図5

表2

1辺の数	1	2	3	4	5
総数	1	4	9	16	25

表3

1辺の数	1	2	3	4	5
白の数	1	1	6	6	15
黒の数	0	3	3	10	10
総数	1	4	9	16	25
白と黒の差	1	2	3	4	5

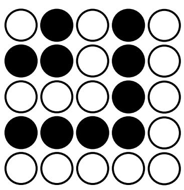


図6

様相2と様相4の間にある解決に用いる手続きの違いについて考える．様相2は1辺の数と総数の変化のきまりを用いて総数を

求める手続きである．一方，様相 4 は 1 辺の数が奇数と偶数に分けながらも，差と 1 辺の数が等しくなることを用いて白と黒の差を求める手続きである．様相 4 は様相 2 よりきまりの数が多い．ここに構造の差を見ることができ，構造の差は「きまりや法則の数」にあると考えられる．

3.2. 他の事例への適応

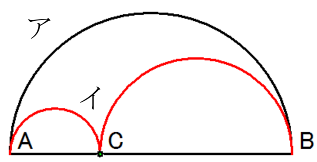
3.2.1. 円周の問題とその様相

3.1 における数学的活動の分類の軸である一般性と構造によって，他の事例において有効であるのか検討していく．問題は円周の長さを求めるものである．

問題

右の図で，A から B へ行きます．B へ行くには AB(10cm) を直径とする半円の道（ア）と，AC（3cm），CB をそれぞれ直径とする半円をつなげた道（イ）の 2 つの道があります．

どちらの道が短いでしょう？



本問題は，1 つの円における円周とその円の直径を 2 つに分け，それぞれの線分を直径とする円における円周の和との関係を考えるものである．解決法としては，具体的に円周を求め比較する様相から，アとイの直径は共通していることを用いての解決が予想される．そして，イを 2 つの円だけではなく，3 つの円から構成する問題へと発展させることが可能であろう．これらの解決は具体的には以下の 3 つである．

<u>様相 1</u>　特定の場合について具体的に長さの違いを求める

ア　$10 \times 3.14 \div 2 = 15.7$　　イ　$3 \times 3.14 \div 2 = 4.71$

$7 \times 3.14 \div 2 = 10.99$

$4.71 + 10.99 = 15.7$

答　アとイは同じ長さ

様相 2　アとイの直径のきまりに着目してアとイの長さの違いを求める

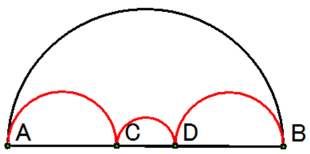
ア　AB×3.14÷2　　　イ　(AC×3.14＋CB×3.14)÷2

(AC＋CB)÷3.14

AC＋CB=AB　　AB×3.14÷2

答　アとイは同じ長さ

様相 3　イを 3 つの半円にわけながらも，アとイの直径のきまりに着目してアとイの長さの違いを求める



ア　AB×3.14÷2

イ　(AC×3.14＋CD×3.14＋DB×3.14)÷2

＝(AC＋CD＋DB)×3.14÷2

AC＋CD＋DB＝AB　　AB×3.14÷2

3.2.2. 数学的活動の分類

様相 1 から様相 3 を分類の 2 つの軸である一般性及び，構造について検討していく．

まず，一般性について考える．様相 1 は特定の場合について具体的にアの半円とイを作る 2 つの半円の長さの違いを求め，様相 2 はアの半円とイを作る 2 つの半円の直径のきまりに着目してアとイの長さの違いを求めている．また，様相 3 はイを 3 つの半円で作りながらも，アとイの直径のきまりに着目してアとイの長さの違いを求めている．様相 1 は特定の場合について具体的な手続きを用いているのに対し，様相 2 と様相 3 はアとイの直径のきまりに着目する手続きを用いている．3.1 において，一般性の低い，高いは「きまりや法則への着目」であったことから，様相 1 は一般性が低く，様相 2 と様相 3 は一般性が高いと考えられる．

次に，構造について考える．様相 1 と様相 2 はアの半円とイを作る 2 つの半円の長さの違いを求める手続きを用いているのに対し，

様相3はイを3つの半円で作りながらも，アとイの直径のきまりに着目してアとイの長さの違いを求める手続きを用いている．このことから，様相1と様相2は構造が単純で，様相3は構造が複雑だと考えることができる．

上記のことからそれぞれの様相を数学的活動の分類である表1のⅠからⅣに分類する．まず様相1は一般性が低く，構造が単純な活動であるⅠ，様相2は一般性が高く，構造が単純であるⅡ，様相3は一般性が高く，構造が複雑であるⅣだと考えられる．それぞれの様相を表1にあてはめてみると表4のようになり，上記の様相の中にはⅢの数学的活動が行われていないことが言える．

表4　数学的活動の分類

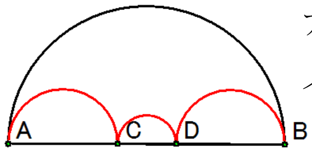
構造＼一般性	低い	高い
単　純	様相1	様相2
複　雑		様相3

3.2.3. 新たな様相

それぞれの様相を分類した際，Ⅲの数学的活動が行われていないことが言えた．それでは，どのような数学的活動を行えばよいのだろうか．Ⅲの数学的活動は，一般性が低く，構造が複雑である．一般性が低いので，一般性は様相1と同等であるということは，特定の場合について具体的な手続きを行う活動である．また，構造が複雑であるので，構造は様相3と同等であるということは，イを3つの半円で作り，アとイの違いを求める手続きである．これらのことから，本問題で行われるⅢの数学的活動の様相は「特定の場合について具体的にイを3つの半円で作り長さの違いを求める」である．例えると以下のようになる．

新たな様相

ＡＣ＝５cm，ＣＤ＝１cm，ＤＢ＝４cm



ア　$10 \times 3.14 \div 2 = 15.7$

イ　$5 \times 3.14 \div 2 = 7.85$　　$1 \times 3.14 \div 2 = 1.57$

$4 \times 3.14 \div 2 = 6.28$

$7.85 + 1.57 + 6.28 = 15.7$

上述した３つの様相に加え，この新たな様相を行うことによって，４つの分類の数学的活動を行うことができる．この２つの軸を基に数学的活動を分析することによって，新たな数学的活動を導き出すことができた．それでは，この２つの軸を基にこれからは数学的活動の枠組みはどのようになるだろうか．

3.3. 数学的活動の特徴付けと枠組み

3.3.1. 数学的活動の特徴付け

3.1 では，構造の差を「きまりや法則，解決に用いる手続き」とし，一般性の差を「特定の具体的な場面ではなく，きまりや法則への着目」と述べてきた．そして，3.2 では，その 2 つの軸で数学的活動を分類する有効性を述べてきた．そこで，数学的活動を「一般性や構造の変容によって，全体として構成される活動」と定義し，数学的活動を特徴付けていく．

一般性は特定の具体的なものから同等の構造である他の問題への適応であり，数学的活動の広がりを横軸にとると図 7 になる．なぜならば，特定の具体的な問題の解決は，同じ構造をもった問題への適応によって図られると考えるからである．その際，一般性の低い数学的活動は，一般性の高い数学的活動に統合され，広がっていくと推測される．一方，構造は単純なものから複雑なものへと深まっていくものであり，数学的活動の深まりを縦軸にとると図 8 になる．なぜならば，特定の具体的な問題の解決は，その構造を複雑にしたものに取り込まれていくことによって図られると考えられるからである．

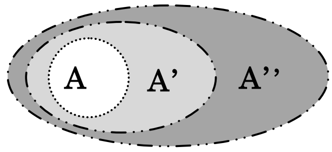


図 7

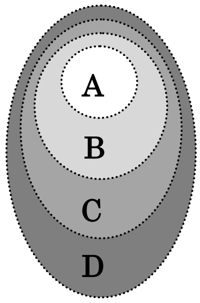


図 8

数学的活動の一般性は，図 7 が示すように，同じ構造をもった同程度の問題への適応によって広がると考えられる．一方，数学的活動の構造は，図 8 が示すように，単純な構造を統合しながら複雑な構造へと深まると考えられる．また，より複雑な構造の数学的活動は，一般性が高く，かつ単純な構造の数学的活動をも含むものである．これらのことを示したものが図 9 の「数学的活動の特徴付け（第 1 次的な階層モデル）」である．

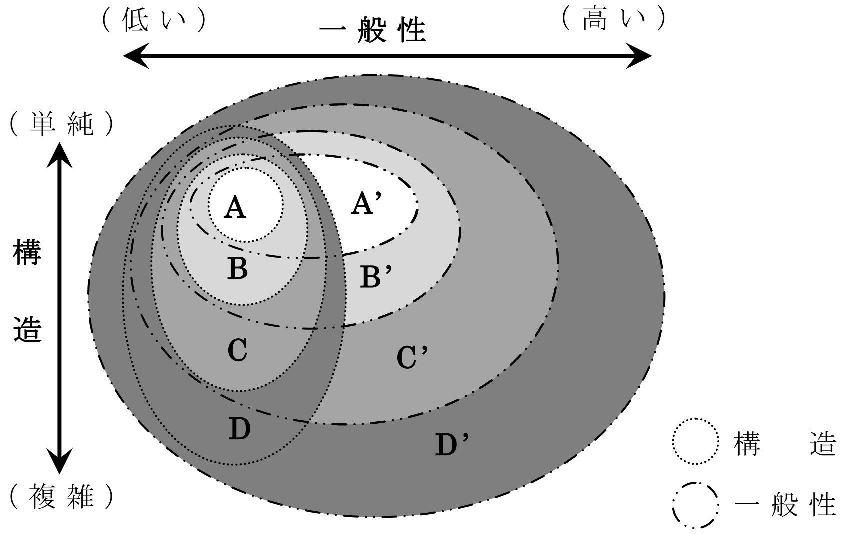


図 9　数学的活動の特徴付け

第 1 次的な階層モデル

図 9 は，横軸に一般性の高い，低いをとり，縦軸に構造の単純，複雑をとる．例えば，ある構造 A に対し，その同等の構造である A’に適応することで数学的活動が広がると考える．また，A（A’，A’’，…）よりも構造の複雑な B の活動することは A の活動を含めて深まっていくと考える．言い換えれば，より複雑な B の数学的活動は，A のみでなく A’をも含むと考えるものである．

3.3.2. 数学的活動の枠組み

第 1 次的な階層モデルは数学的活動の階層を示したものであり，ここでは，数学的活動の変容過程の枠組みについて述べていく．

A の活動から一般性を広げるとき，数学的活動は横軸の変容であり，A から A’，A’から A’’へと広がると考える．そして，その数学的活動の広がりは，特定の具体的な場面の数学的活動のみではなく，同等の構造の問題へと適応できるような数学的活動になると考える．また，A より複雑な構造である B へと進む数学的活動の変容過程は，A から B のみではなく，A’から B，A’’から B への変容が考えられる．そのことを示したものが図 10 である．A から A’へと数学的活動が広がったように B から B’の間にも数学的活動の広がりが考えられる．

あるいは，より複雑な変容においては，Aから B，Bから B’のみではなく，A’から B，A’から B’への変容も考えられうるものである（図 11）．この数学的活動の変容過程を経ることでより一般性が高く，かつ，より構造の複雑な数学的活動につながるものである．

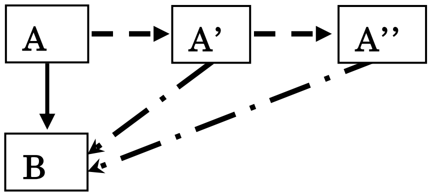


図 10

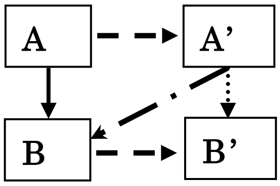


図 11

しかし，必ずしもすべての数学的活動の変容が今述べたこの過程を経るわけではない．また，この順序で変容していくものでもない．それは，実際の問題解決において，学習者によって多種多様であると推測される．例えば，Aから A’，A’’と一般性を広げ，B，Cへと構造を深めていく．この後に，C’へと一般性を広げる際に困難となり，B’へ変容し，C’へと変容することが考えられる（図 12）．以上の議論を示すと数学的活動の枠組みである図 13（次ページ）になる．

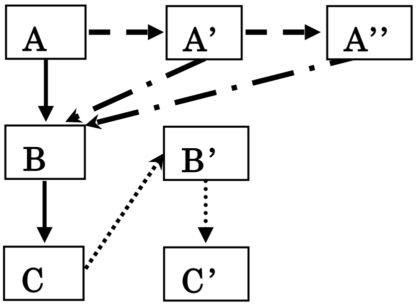


図 12

図 13は図 9と同様に横軸に一般性の広がりをとり，縦軸に構造の深まりをとる．Aの活動は a_1 の問題にとってなされると考えられる．そして，同等の構造であり，類似の問題である a_2，a_3，a_n によって A’へと一般性を広げるものである．

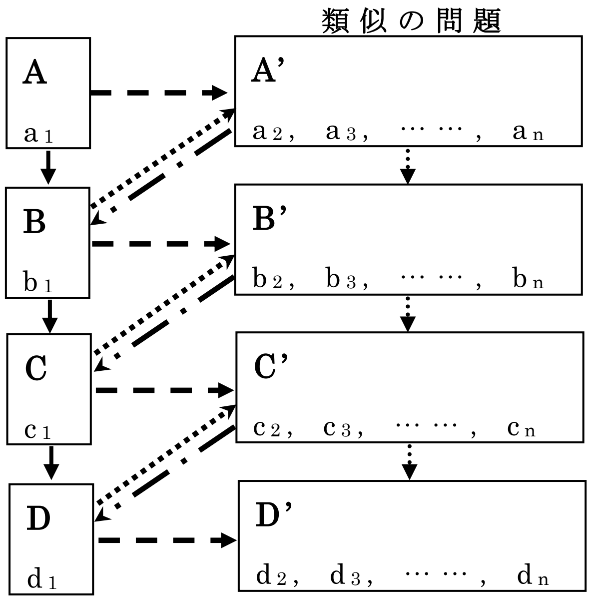


図 13　数学的活動の枠組み

同等の構造の中での一般性の低い活動から一般性の高い活動

一般性の低い単純な構造の活動から一般性の低いより複雑な構造の活動

一般性の高い単純な構造の活動から一般性の高いより複雑な構造の活動

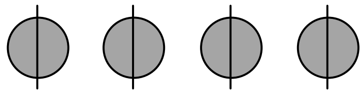
一般性の高い単純な構造の活動から一般性の低いより複雑な構造の活動

一般性の低い複雑な構造の活動から一般性の高いより単純な構造の活動

3.4. 数学的活動の特徴付けと枠組みの検討

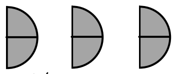
3.4.1. 事例の構成

第1次的な階層モデルについて具体例を基に検討していく．問題はわり算を異分母の単位分数の和で表現していくものである．例えば，$4\div5=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$で表され，この解決の1つの手続きは以下の通りである．



4を二等分すれば8になるので，5で分けられる．

$4\div8=\frac{1}{2}$・・・一人分



3つの$\frac{1}{2}$をそれぞれ二等分にすれば6になるので，5で分けられる．

$\frac{1}{2}\div2=\frac{1}{4}$・・・一人分

残りの$\frac{1}{4}$を五等分にすれば，5で分けられる．

$\frac{1}{4}\div5=\frac{1}{20}$・・・一人分

よって，$4\div5=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$

検討していくためのそれぞれの活動の展開は以下のものである．

活動1　$3\div5=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$

活動2　$5\div9=\frac{1}{2}+\frac{1}{18}$

活動3　$3\div8=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$

活動4　$4\div5=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$

活動5　$5\div7=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{168}$

構造と一般性について考えるなら，表現の仕方は2つの単位分数の和から，3つ，4つ……と続いていく．同じ2つ，3つの単位分数の和であっても最初が$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$と変化することによって，

子どもたちの数学的活動には違いがあると考えられる．そこで，活動 1 から活動 5 までを展開していく．

3.4.2. 数学的活動の特徴付けの検討

活動 1 と活動 2 はどちらも 2 つの単位分数の和であり，最初が $\frac{1}{2}$で表わされている．このことから，活動 1 と活動 2 は同等の構造である．同等の構造であるので，どちらも同じ手続きを用いることで解決できる．しかし，活動 1 を解決できたとしても，その手続きを活動 2 へ適応させるということは別の数学的活動である．本構造は割る数と割られる数の 2 倍の数との差が 1 となっている．そのような問題を多く解くこと，適応させることで数学的活動の一般性が広がるというものではない．なぜならば，それは特定の具体的な場面をしているからである．単に解くだけではなく，解決の共通点を導き出し，同様の問題を作ることで数学的活動の一般性が広がる．このようにすることで，ある問題から一般性が広がると考える．この数学的活動を第 1 次的な階層モデルに対応させるならば，活動 1 が A であり，活動 2 が A'である．

活動 3 は活動 1，2 と同様に 2 つの単位分数の和で表わされているが，最初が $\frac{1}{3}$である．ここに今までの活動との構造の差を見ることができる．最初を $\frac{1}{3}$にするためには，割る数と割られる数の 3 倍の数との差が 1 になるわり算でなければならない．最初が $\frac{1}{2}$や $\frac{1}{3}$ になるのは割る数と割られる数の数量関係によって変わっていく．そのことを理解し，解決したならば，最初が $\frac{1}{4}$や $\frac{1}{5}$になっても，そこに子どもたちにとっての大きな構造の差はない．その時，今まで別であった活動 1，2 は活動 3 の特殊の場合であり，活動 3 の数学的活動の中に統合される．この数学的活動を第 1 次的な階層モデルに対応させるならば，活動 3 は B である．

活動 4 は 3 つの単位分数の和で表わされている．ここに構造の差を見ることができる．3 つの単位分数の和で表わすためには，割られる数を一度分けるだけでは残りを 1 つにすることができな

い．残りを1つにするために繰り返し行わなければならない．この数学的活動において，最初の単位分数がいくつであっても構造の差はない．なぜならば，活動3において活動1，2が統合されているからである．構造が複雑になっているので活動4を第1次的な階層モデルに対応させるとCである．

活動5は4つの単位分数の和で表わされている．ここに構造の差を見ることができる．この段階の数学的活動にまで達すれば，この後に5つ，6つと単位分数の数が増えても，子どもにとっての構造の差はない．活動5を第1次的な階層モデルに対応させるとDである．

これまでに活動1から活動5までを第1次的な階層モデルに対応させた．モデルに適応させると図14である．図14では，上記した5つの活動だけでなく，一般性を広げる活動や，同等の構造での活動も加えてある．

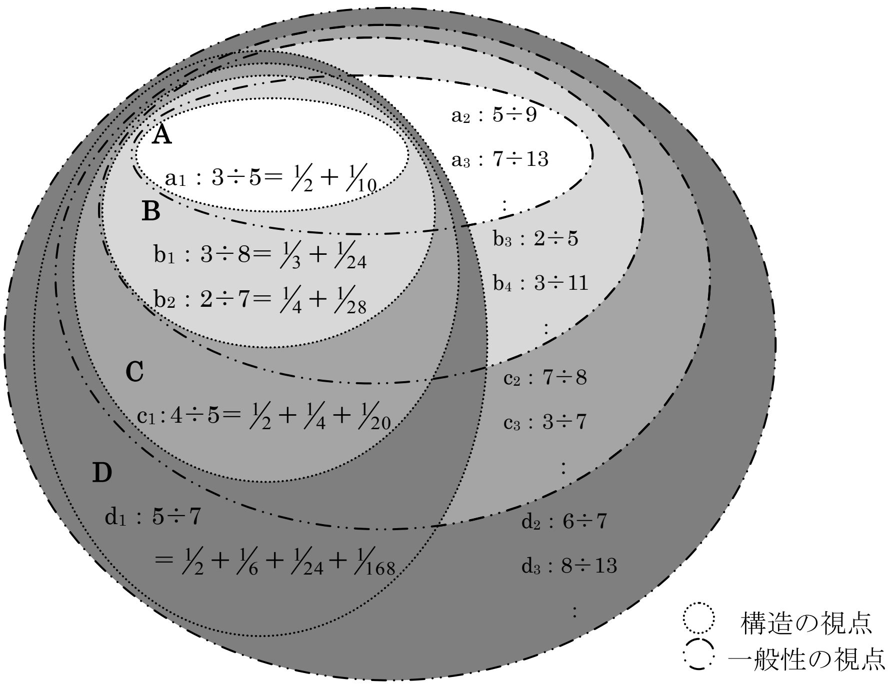


図14　具体例を適応させた第1次的な階層モデル

3.4.3. 数学的活動の枠組みの検討

上記の事例を基に数学的活動の変容の過程を検討していく．活動 1，活動 2 はそれぞれ A，A’であった．一般性を広げる A から A’の変容は横軸である．活動 3 は B であり，構造を複雑にしている．ここでは縦軸への理解の深まりである．さらに，活動 4，活動 5 はそれぞれ C，D であり，B 以降は一般性を広げることなく，構造を深める数学的活動の変容をしている．

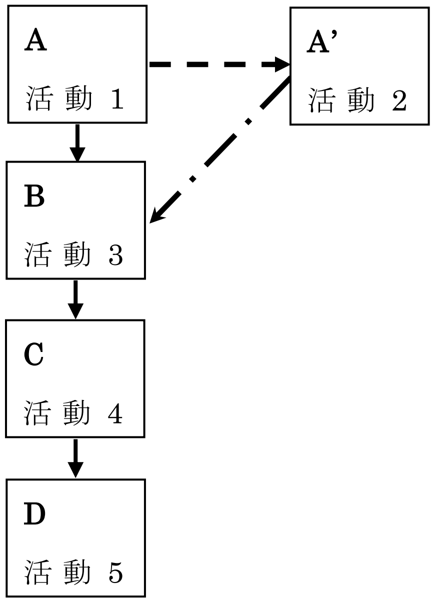


図 15 事例に基づく数学的活動の変容過程

数学的活動の変容を図 13 に対応させたものが図 15 である．構造 A の段階で一般性を広げることにより，それぞれの違いと共通点から，B，C，D では一般性を広げなくとも，構造を深めるのみでの数学的活動である．

3.5. 数学的活動の枠組みと knowing that, knowing how

枠組みにおける数学的活動の理解を knowing that と knowing how の 2 つの理解を基に検討していく.

knowing that は学習の成果・結果である解であるので，図 14 に書いてある式と解である. knowing that の理解は，それぞれの数学的活動の階層を区別することにある. なぜならば，解によって，数学的活動の違いを見ることができるからである. 数学的活動の活動を区別することにより，理解の深まり，広がりを見ることができ，次への学びを見出すことができる. また，knowing that から，解決に用いた手続きを読み取ることができると推測される.

knowing how は解決に用いる手続きである. 活動 1 と活動 2 は同じ構造であった. 活動 1 の解決は行えるが，活動 2 の解決が行えない時，活動 1 の手続きを理解させることにより，活動 2 の解決が可能になる. ここでの手続きとは割られる数を 2 つに分け，割る数より大きくすることである. 割る数より割られる数を大きくすることで解決できる. このことを理解することで，活動 2 の解決を導出することができる. 活動 3 は割られる数を 3 つに分ける. この活動を作出するためには活動 1，2 でなぜ割られる数を 2 つに分けるのか. 行った手続きの理解から作出できる. 活動 4 は割られる数を一度分けるだけでは残りを 1 つにすることができない. 残った数を今までと同様に割る数より大きくすることで解決できる手続きを作出することができる. 活動 5 も同様に今までの knowing how から新たな knowing how を作出することができる.

knowing that は数学的活動の枠組みである第 1 次的な階層モデルの区別を行うことができ，どの階層の数学的活動を行っているのかを判断することが可能になる. そして， knowing how は手続きのふり返りであり，そのことによって新たな階層への解決の手続きを導き出すことができる.

第3章の要約

本章では，数学的活動の分類を行い，その分類の軸を基に数学的活動を特徴付け，数学的活動の枠組みを構築した．

数学的活動の分類として，能田（1983）の数学的活動の軸を基に検討した．能田（1983）は数学的活動を2つの軸によって分類し，その1つ目の軸は一般性についてであり，その中で低い，高いの2つに分類していた．そして，2つ目の軸は構造についてであり，その中で単純と複雑の2つに分けていた．2つの軸とそれぞれの2つの分類により，数学的活動を4つに分類していた．その2つの軸について，具体例を基に検討することで，構造の差を「きまりや法則，解決に用いる手続き」と示せ，一般性の差を「特定の具体的な場面ではなく，きまりや法則への着目」と示した．

そして，数学的活動を2つの軸で捉え，その軸である一般性と構造を基に数学的活動を特徴付けてきた．構造は単純なものから複雑なものへと深まっていくものであり，数学的活動の深まりを縦軸にとり，一方，一般性は特定の具体的なものから同等の問題への適応であり，数学的活動の広がりを横軸にとることで，第1次的な階層モデルを構成した．ある構造Aに対し，その同等の構造であるA’に適応することで数学的活動が広がり，A（A’，A’’，…）よりも構造の複雑なBの数学的活動を行うことはAの数学的活動を含めて深まっていくと考えられた．また，事例の分析を通して，上述の数学的活動の特徴づけ，およびそれによって構築される数学的活動の変容の様相を捉える枠組みは有効であることが示された．

さらに，事例を基に数学的活動の枠組みについて，理解，特にknowing thatとknowing howで検討した．そこでは，knowing thatは第1次的な階層モデルの区分を行うものであり，knowing howは解決の手続きをふり返るものであり，新たな数学的活動を導き出すものであると考えられた．

第 4 章

数学的活動の枠組みに基づく調査

本章では，第 3 章で構築した枠組みの有効性について，調査結果を基に述べていく．

4.1 では，調査を行うための方法と調査問題の設定について述べる．

4.2 では，調査でみられた数学的活動を数学的活動の枠組みに対応させて述べる．

4．3 では，調査で行った支援と数学的活動の変容について述べる．

4.1. 調査の設定

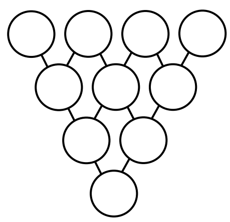
4.1.1. 調査の方法と調査問題の設定

上記で示した枠組みの有効性について検討するため，実際の児童の活動でどのように展開されるのかを取り上げ，述べていく．そして，その枠組みの検討と数学的活動の考察から理解を明らかにしていく．そのために調査を行う．本調査は小学 6 年生を対象に行う．その方法としては，授業形式ではなく，まず，問題を提示し，20 分程度問題を解決してもらう．その際，数学的活動の変容を促すため，調査者は支援を行う．解決後には，問題を解決した児童に対し，きまりや法則を認識しているのかを確かめるために，一人ずつインタビューを行う．このインタビューでは，まず，数学的活動で行っていたきまりが認識しているかを明らかにしなければならない．また，そのきまりなどに気付いた数学的活動を明らかにしなければならない．きまりを気付いた際には，そのきまりの信頼性を高めるための数学的活動が行われているかも明らかにしなければならない．さらに，その数学的活動をどのように導き出したのか，きまりに見通しをもった数学的活動であるのかを明らかにしなければならない．

調査では，数学的活動の分類である「第一次的な階層モデル」ならびに数学的活動の枠組みを考察するものである．「第一次的な階層モデル」,「数学的活動の枠組み」は一般性と構造が軸となっている．そのため，一般性を高めたり，低くしたり，構造を複雑にしたり，単純にしたりできる問題でなければならない．よって，以下の問題で行う．

問題

右図があります.最上段の列にはそれぞれ 3 ～7 の数字が入ります．隣あう 2 つの数の和が下の段に入ります.最下段を 40 にするには，最上段をどのように並べればよいでしょう？



ただし，同じ数字は一度しか使えません．

本問題に文字をあてはめ考えると，図 16 のようになり，最下段は a+3(b+c)+d と表わすことができる．このことから，外側（a，d）に大きな数を並べれば最下段は小さくなり，内側（b，c）に大きな数を並べれば合計は大きくなる．また，外側の数と内側の数をそれぞれ入れ替えても最下段は同じになる．さらに，最下段の式からわかるように，内側の二数は三度足されているのに対し，外側は一度しか足されていない．そして，a+b が 10 であったとき，a と b の組み合わせを本問題の数の範囲で考えるならば(3,7)，(7,3)，(4,6)や（6,4）のように，あてはまる組み合わせを導き出すことができる．これらのことは一般性を高める横軸の広がりである．

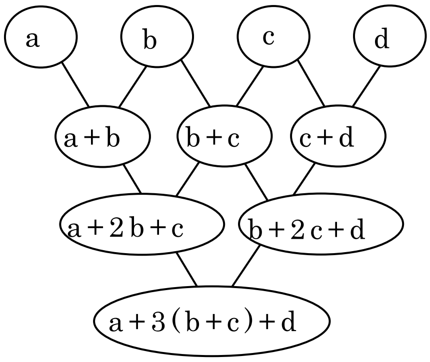


図 16

構造については，最上段を 4 つから 5 つ，6 つと増やしていくことが考えられる．小学生の段階において，本問題の構造を高めた際，解答を導き出すことは困難ではないかと考えられるので，本調査では横軸である一般性の広がりについて重きを置く．

4.1.2. 予想される数学的活動

本問題におけるきまりは上述してきたが，それぞれを $\alpha \sim \gamma$ として今後，議論を展開するために以下のように整理しておく．

α ：外側に大きな数を並べると合計が小さくなること（内側に大きな数を並べると合計が大きくなること）．

β ：外側同士，内側同士を並び変えても同じ合計になること．

γ ：外側は一度しか足されず，内側は三度足されること．

本問題では，まず試行錯誤すると考えられる．その後，きまり

を見つけ，そのきまりを用いて解決していくと考えられる．試行錯誤からきまりを発見する活動，また，活動を分類したものが以下に示すものである．

<u>活動1</u>：丸の中にランダムに数をあてはめる．

<u>活動2</u>：4つの数の位置と大小関係

外側に大きな数を並べると合計が小さくなること（内側に大きな数を並べると合計が大きくなること）に気づく．

<u>活動3</u>：4つの数の位置と等しい合計

外側同士，内側同士を並び変えても同じ合計になる場所があることに気づく．

<u>活動4</u>：位置による足す数の違い

外側は一度しか足されず，内側は三度足されることに気づく．上記の 2 つのきまりは試行錯誤から導き出したものであるが，そのような事象がなぜ起こるのかということに関しては未知である．一般性を高めるためにその理由を探求することが必要である．そのために最上段の足す回数を数えることで解決できる．

<u>活動5</u>：組み合わせを作る

外側の和と内側の和で組み合わせとして考える．組み合わせとして考えることで，まずは最上段から1つずつ計算をしていく必要はなくなる．また，組み合わせとして考えることで，分類わけをしていき，最上段を求めることが可能となる．

これらの活動を推し進めるためには，調査者の支援が必要である．支援は試行錯誤からきまりを発見する際や，きまりを用いるような活動の変容場面に必要である．その場面へ支援を行い，調査を実施する．

4.1.3. 調査における数学的活動の枠組み

ここでは，上述した5つの活動を数学的活動の枠組みに対応させるとどのように捉えられるか議論していく．まず，それぞれの活動ときまりの関係であるが，きまりαは活動 2，βは活動 3，γは活動 4に対応するものである．それではそれぞれの活動の位置関係について述べる．

活動 1はきまりを導き出したものではなく，単に最上段を入れ替え，40を作ろうとしている．そのため，一般性は低いと考えられる．活動 2は最上段と最下段を比較して，きまりを導き出したものである．この活動は活動 3でも同様であり，その違いは，児童の着眼点であり，一般性の変容としては同等にあるのではないかと推測される．活動 4は活動 2・3のきまりがなぜなるのか説明を可能にするものである．今までの活動を説明することのできる活動ということは，一般性が高くなった活動であると推測することができる．最後に活動 5は活動 4でのきまりを用いている．そのことから，一般性がより高くなったと推測することができる．それらのことから，数学的活動の枠組みに対応させたものが図 17である．

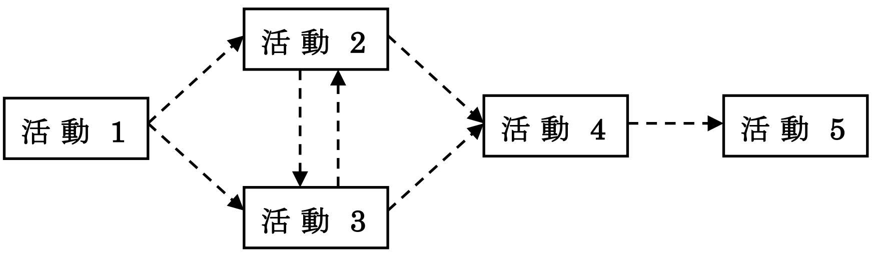


図 17　調査問題における数学的活動の変容過程

調査では，数学的活動を広げるために，支援が必要であると考えられる．支援は数学的活動の変容を促すものであるので，それぞれの矢印にその支援を行う必要があると考えられる．図 17に支援を行う場を対応させたものが図 18であり，具体的な支援内容は以下のものである．

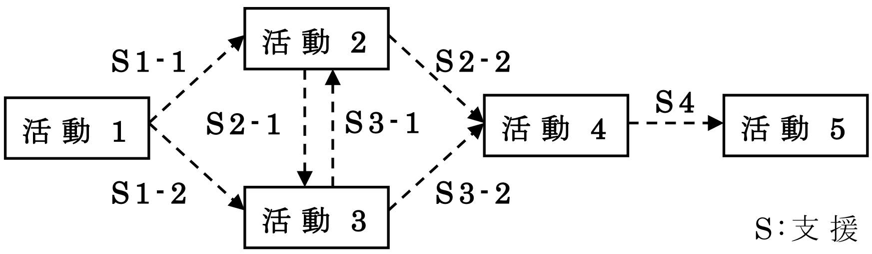


図 18

<u>S1-1</u>**：同じ 4 つの数でも，置く位置によって合計が変わらないのか，変わるのか．**

S1-1 は活動 2 へと促すために最上段を 4 つの数で入れ替えさせる必要がある．また，同じ 4 つの数であっても最上段の並び方を変えると最下段の数が変化していることに着目させなければならない．着目させるためにも，活動 1 での試行錯誤は必要なものである．

<u>S1-2</u>**：並び方によっては合計が変わらないならば，それはどこを並び変えた時だろう．**

S1-2 では，最上段の並びが違うにも関わらず，最下段が等しくなっていることに着目させなければならない．

<u>S2-1</u>**：左側の 2 つを入れ換えると合計は小さく（大きく）なるが，真ん中の 2 つを入れ換えると合計はどうなるのか．**

S2-1 は活動 2 において，きまり α を発見した児童に対し，活動 3 へと促す支援である．そのため，ここでは最下段の並びが異なるにも関わらず，最下段が等しくなっていることに着目させたい．

<u>S3-1</u>**：入れ換えると合計が変わることもあるが，どうすると合計が変わるのだろうか．**

S3-1 は活動 3 において，きまり β を発見した児童に対し，活動 2 へと促す支援である． ここでは，最上段の並び方によっ

て最下段の数が変化していることに着目させたい．

S2-2，***S3-2***：**外と内を入れ換えると，合計はどれだけ変わるのだろうか．**

S2-2は活動2から，S3-2は活動3から活動4へと促す支援である．S2-2，S3-2はそれぞれ違う活動であるが，同様の支援で活動4へと促すことができると考えられる．なぜならば，それぞれの活動がなぜそうなるかという根拠を探求するものであり，また，最上段の足す回数であるので，きまりα，βを使うものではないからである．

S2-2'，***S3-2'***：**最上段をすべて1にした時と，一か所を2にした時では合計がどれだけ変わるのだろうか．**

この支援は，S2-2，S3-2で変容しない児童に対して行う具体的な支援である．この支援を行うことで，児童は最下段の変化を捉えやすくなると考えられる．

S4：**4つを別々で考えなくてもいい方法はないだろうか．**

：最上段から一つずつ計算しなくてもいい方法はないかな．

今までは，最上段から計算してきたが，ここでは，きまりγを用いて最下段を求めるように促したい．そのためには，今までのきまりを用いるような支援を行う必要がある．

問題を解決した児童に対し，きまりを認識しているのかを確かめるために，一人ずつインタビューを行う．このインタビューでは，まず，数学的活動で行っていたきまりが認識しているかを明らかにしなければならない（Q1）．また，そのきまりを気付いた数学的活動を明らかにしなければならない（Q2）．きまりを気付いた際には，そのきまりの信頼性を高めるための数学的活動が行われているかも明らかにしなければならない．さらに，その数学

的活動をどのように導き出したのか，きまりに見通しをもった数学的活動であったのかを明らかにしなければならない（Q3）．そのための具体的な質問内容は以下である．

Q1：**どんなきまりがありましたか？**

Q2：**どの活動で，きまりに気づきましたか？**

Q3：**なぜその活動をしようと思ったのですか？**

4.2. 調査における数学的活動の変容

問題の解決において，児童はそれぞれの解決を行い，インタビューでその解決について話してもらった．ここでは，それぞれの導き出したきまり及び，その導き出した過程を述べていく．

A 児は 2 つのきまりを発見している．それは，α と β である．この 2 つのきまりでは先に，β を発見している．A 児はまず，最上段に 5 つの数をランダムに入れ，試行錯誤している．そして，偶然的に最下段が 40 になる並び方である「⑥⑤④⑦」を作った．その後，「他にない？」という支援によって，再度，5 つの数をランダムに入れていく．そして，試行錯誤する中で，最上段に当てはめる数が同じで並び方が違うのに，最下段が同じになっているものがあるのに気付き，一度できた「4，5，6，7」をランダムに並び替え，新たな並び方である「⑥④⑤⑦」を作った．そして，A 児は「4 と 5 と 6 と 7 の数字を必ず使う」とメモをとり，4 つの数で試行錯誤を行い，「⑦④⑤⑥」を作り，できた 3 つの並び方を見るとすぐに「⑦⑤④⑥」を作った．A 児は 3 つ目までは試行錯誤を行い，40 のできる並び方を導き出しているが，4 つ目の並び方は今までにできたもの見ることで導き出している．このことから，A 児は 3 つの並び方を比較することで β を発見したのではないかと推測される．この後，「入れ換えると合計が変わったね．どうすると合計が大きくなるだろう.」と支援を行い，A 児は「4，5，6，7」をランダムに並び替え，「④⑥⑦⑤」という並び方で最下段を 50 にする．他の並び方を 1 つ作った後，「⑤⑥⑦④」を作り，「一番大きい数を真ん中の 2 つ」と書いている．このメモから，A 児は α を発見したと推測される．この A 児の数学的活動の変容を枠組みに対応させたものが図 19 である．

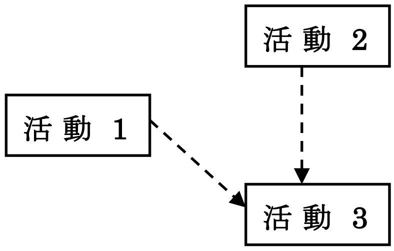


図 19

A 児の数学的活動の変容過程

B児はβとγまでは到達していないが，そのきまりの基盤となるものを発見している．まず，5つの数をランダムに入れて40を作ろうとする．そして，偶然に最下段が40になる「④③⑦⑥」という並び方を作る．その後も今までと同じように試行錯誤していき，偶然ではあるが，「④⑤⑥③」と「⑥⑦③④」という並び方で40を作った．そこで，「④③⑦⑥」と「⑥⑦③④」という2つの並び方を見て，使っている4つの数が同じであることに気づき，疑問を持った．疑問は「同じ4つでも並び方が違うのに最下段が同じ40」ということである．そして，「③⑥⑤④」という並び方で40を作っている．この並び方を導く際，B児は試行錯誤することなく導き出している．B児は自らでその理由を探求し，「並び方は違うけど，隣同士なので同じものをたしているから．」と書いている．この時，B児は新たな並び方を作っていない．そのことから，B児は足している回数に着目したのではないかと推測される．B児の調査用紙には図20のように「真ん中は2回足す」と書かれていることからもそのことが推測できる．B児はβのように入れ替えの関係をすべて発見することはできなかったが，「最上段を反対にしても最下段が等しい」ということを発見し，その過程において，最上段ではなく，二段目での「位置による足される回数」を発見している．

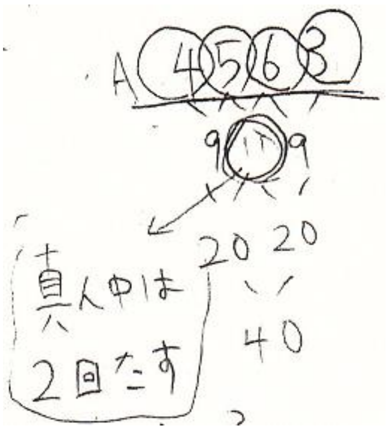


図 20

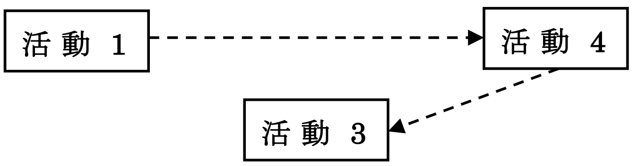


図 21

B児の数学的活動の変容過程

C児はβを導き出している．C児は，まず5つの数をランダムに入れ，試行錯誤を行っている．その偶然に40を作ることができる「⑥⑦③④」という並び方を導き出した．そして，「他にはな

い？」という支援によって，5 つの数をランダムに入れる試行錯誤を再開する．その後，40 を作ることができないため，一度できた「⑥⑦③④」を並び替える試行錯誤を行う．それにより，「⑥③⑦④」という並び方で 40 を作ることができ，この 2 つの並び方を比較する．そして，図 22 のように「いれかえる」と書いている．C 児は β の一部である「内側同士を並び変えても同じ合計になる」というきまりを発見している．

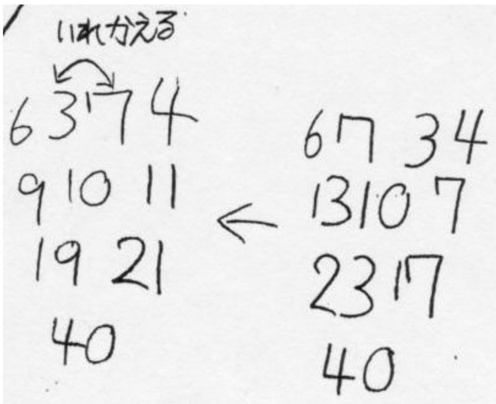


図 22

活動 1 → **活動 3**

図 23

C 児の数学的活動の変容過程

D 児は γ までは到達していないが，そのきまりの基盤となるものを発見している．D 児はまず，5 つの数をランダムに入れて試行錯誤する．しかし，それではなかなか 40 にならないため，最下段に 40 を当てはめ，40 を分解していき，最上段を導き出そうとするが，最上段が問題の範囲から出てしまうため，再度 5 つの数をランダムに入れて試行錯誤する．試行錯誤によって，偶然に 40 のできる並び方を作り出す．その後，再度 5 つの数をランダムに入れて試行錯誤，一度できた並び方を入れ替える試行錯誤をするが 40 を作ることはできなかった．D 児はインタビューにおいて，以下のようなことを述べている．

---

d2：適当にやってたら，ここ（図 24）で 39 が作れて，40 より，1 小さいから，サイドは 1 回しか足されないから，片方を 1 つ大きくしていった．でも，7 までしかないからなかなかできなかった．

Qd3：数字が 7 までじゃなくて，9 まで使ってよかったら？

d3：7 を 8 にする．

Qd4：5 の方を 8 にしちゃダメ？

d4：たぶんだめ．

Qd5：なんで 7 の方を 8 にするの？

d5：7 は 1 回しか足さないから，7 を 8 にすれば 1 増えるから．1 しか影響ないから．

Qd6：こっち（5）は何回足されるん？

d6：一回．

Qd7：こっち（内側）は？

d7：二回

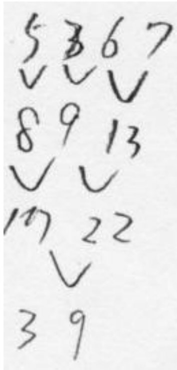


図 24

d：D 児の発言　　Qd：調査者

このやりとりから，D 児は γ そのものではないが，「位置によって足される回数が違うこと」を発見している．

活動 1 → 活動 4

図 25

D 児の数学的活動の変容過程

E 児は，上から二段目に着目し，きまりを導き出そうとしたが，α ～ γ のきまりを導き出すことはできなかった．E 児は二段目において，40 を作るためのいくつかのパターンを導いていたが，そこから最上段をどのように処理すればよいのか明らかにすることはできなかった．

活動 1

図 26

E 児の数学的活動の変容過

このように児童によって導き出したきまり及び，その解決方法は様々であったが，数学的活動の枠組みにあてはめるとそれぞれの数学的活動の変容を見ることができた．また，活動 1 から活動 2，活動 3 へと変容する過程も考えられるにも関わらず，そのような変容過程は見られなかった．このことを明らかにすることができた．これらのことから，前章で述べた，数学的活動の枠組みが有効であることが言える．

4.3. 支援と数学的活動

上記のような児童の数学的活動の変容は，子ども自身が展開したものもあるが，調査者による支援により促されたものもあると考えられる．問題設計の際には，数学的活動と数学的活動をつなぐ矢印の場面で支援を設定している．

実際に行われた児童の数学的活動とその際に行った支援をA児とC児を取り上げ述べていく．A児はまず5つの数をランダムに入れ替える試行錯誤を行っている．そして，偶然的に最下段が40になる並び方である「⑥⑤④⑦」を作った．その後，「他にない？」という支援によって，再度，5つの数をランダムに入れていく．調査者はここで，「同じ4つの数でも，置く位置によって合計は変わらないかな？変わるかな？」という支援を行った．そこで，A児は最上段に当てはめる数が同じ時，最下段が同じになっているものがあるのに気付き，最初にできた「⑥⑤④⑦」という並び方を入れ替えて40を作ろうと試行錯誤する．そして，偶然的に「⑥④⑤⑦」を作った．A児は「4と5と6と7の数字を必ず使う」とメモをとり，4つの数で試行錯誤を行い，「⑦④⑤⑥」を作り，できた3つの並び方を見るとすぐに「⑦⑤④⑥」を作った．ここで，調査者はβを発見したと推測し，きまりαである活動2へ変容を促すため，「入れ換えると合計が変わったね．どうすると合計が大きくなるだろう．」と支援を行った．A児は「4，5，6，7」をランダムに並び替え，「④⑥⑦⑤」という並び方で最下段を50にする．他の並び方を1つ作った後，「⑤⑥⑦④」を作り，「一番大きい数を真ん中の2つ」と書いている．

一方，C児はA児と同様に，まず5つの数をランダムに入れ替える試行錯誤を行っている．しかし，なかなか40を作ることができないため，「同じ4つの数でも，置く位置によって合計は変わらないかな？変わるかな？」と支援を行った．そのことによって，C児は今までは5つの数で行っていた試行錯誤を4つの数で行うようになった．そして，偶然に40を作ることができる「⑥

⑦③④」という並び方を導き出した．そこで，「他にはない？」と支援を行った．そのことによって，C 児は再び 5 つの数での試行錯誤を行う．その後，40 を作ることができないため，「同じ 4 つで，並び方が違うのに一番下は同じ数のがあるね．」と最初の試行錯誤でできたものを指さす．すると，C 児は 40 になる並び方である「⑥⑦③④」を並び替える試行錯誤を行う．それにより，「⑥③⑦④」という並び方で 40 を作ることができ，この 2 つの並び方を比較する．そして，「いれかえる」と書いている．C 児は β の一部である「内側同士を並び変えても同じ合計になる」というきまりを発見している．

A 児，C 児のどちらの児童に対しても「他にない？」と「同じ 4 つの数でも，置く位置によって合計は変わらないかな？変わるかな？」という 2 つの支援を行っている．A 児は先に「他にない？」という支援を行い，C 児には先に「同じ 4 つの数でも，置く位置によって合計は変わらないかな？変わるかな？」という支援を行っているが，その差は，A 児が試行錯誤で偶然に早く 40 を作ることができたからである．「他にない？」という支援は，調査者の意図として，問題における答えは一通りではなく，他の並び方があることを含んでいる．また，児童はそのことによって，40 を作る並び方を 1 つ見つけて満足することなく，他の並び方を作ろうとした．そのことにより，数学的活動の変容を促すことができたと考えられる．一方，「同じ 4 つの数でも，置く位置によって合計は変わらないかな？変わるかな？」という支援は，単に数学的活動 2 に向かわせるだけではなく，4 つの数に固定し，並べ変えさせることで，最上段の並び方と合計に何かきまりがあるのではないかと着目させたかった．そのことにより，児童の活動は 4 つの数に固定し，単に 40 を作るだけではなく，きまりを考えながら 40 を作ろうとしたと推測される．A 児には「入れ換えると合計が変わったね．どうすると合計が大きくなるだろう．」という支援を β のきまりを発見した後に行っている．この支援では，

αを発見する活動2へと児童の活動を変容させるために行っている．この支援を受けたA児は「4，5，6，7」を並び替えて，最下段を大きな数を作ろうとした．そして，「④⑥⑦⑤」という並び方で最下段を50にする．他の並び方で最下段が48になる並び方を1つ作った後，「⑤⑥⑦④」を作り，「一番大きい数を真ん中の2つ」と書いている．調査者がこの支援を行ったことによって，A児は最下段の変化の仕方と最上段の並び方を着目することができたと考えられる．また，C児に行った「同じ4つで，並び方が違うのに一番下は同じ数があるね．」という支援は，「同じ4つの数でも，置く位置によって合計は変わらないかな？変わるかな？」という支援をより具体的に言ったものである．抽象的な支援ではC児に効果がなかったと判断し，具体的な支援を行い，数学的活動の変容を促した．

A児，C児は40を導き出してからきまりを発見している．このことは他の児童もそうであった．しかし，40を導き出さなくてもきまりを発見することは可能である．最下段が40ではなく，他の数であったとしてもきまりを発見することは可能であり，40でなければいけない必然性はない．そのため，40の並び方を導いているA児と導いていないC児に対し，同じ支援である同じ4つの数でも，置く位置によって合計は変わらないかな？変わるかな？」を行っている．並び方に着目すればA児は導き出しているが，きまりをどちらも発見していないという意味では，同様の活動であるためである．それにも関わらず40を作ってからということは，きまりを導き出すことは問題の解答ではなく，解答を導き出すことが児童にとって重きが置かれているからだと推測される．また，本調査においては，活動2を行い，活動3へと変容する児童は見られなかった．しかし，本調査問題では，活動2から活動3への変容は可能である．言い換えれば，きまりβからαへの変容のみではなく，きまりαからβへの変容が可能であるということである．活動2はきまりαを発見するもので，そのきまりは，外側に

大きな数を並べると合計が小さくなる（内側に大きな数を並べると合計が大きくなる）というものである．一方，きまりβは外側同士，内側同士を並び変えても同じ合計になるというものである．αは最上段が変化することによって観察される．児童の解決では，同じ 4 つの数を使って，最下段が同数になることはまれであり，違う数になるほうが多くみられた．変化する事象が自らによって導き出されているにも関わらず，児童はその変化を観察し，αを先に発見することはなかった．それは，40 を作るということに意識が向けられていたからではないだろうか．児童は最下段が 40 にならなければ，その並び方は破棄されてしまう可能性がある．いくつか行った最下段の変化と並び方によって，きまりを導き出し，40 を作ろうとする活動は見られなかった．一方，最下段を 40 にするため，40 にできた並び方を比較することによってβが先に発見されることになったと考えられる．

第 4 章の要約

本章では，第 3 章で構築した数学的活動の枠組みの有効性を明らかにするための調査について述べてきた．

調査にあたって，まず，調査問題とその問題を解決する児童の予想される活動から数学的活動の枠組みへの適応を行った．調査問題については，一般性を高めたり，低くしたり，構造を複雑にしたり，単純にしたりできる問題を設定した．そして，本問題では，一般性に焦点をあて，問題における 3 つのきまりに着目し，児童の 5 つの数学的活動を述べた．さらに，その数学的活動を「数学的活動の枠組み」に対応させた．また，数学的活動の変容を促すための支援についても述べてきた．その支援は，数学的活動の枠組みから導き出したものであった．

実際の調査では，児童によって導き出したきまり及び，その解決方法は様々であった．しかし，それぞれの数学的活動を数学的活動の枠組みにあてはめるとそれぞれの変容を明らかにすることができた．また，本問題では，活動 1 から活動 2，活動 3 へと変容する過程も考えられるにも関わらず，そのような変容過程は見られなかった．数学的活動の枠組みは，それぞれの数学的活動の位置づけを示すのみではなく，数学的活動の変容過程をも明らかにすることができた．これらのことから，前章で述べた，数学的活動の枠組みが有効であることを示すことができた．

また，調査者の支援によって，数学的活動の変容を促すことができた．この支援は，数学的活動の枠組みへの適応から導き出されたものであった．そのことからも数学的活動の枠組みの有効性を明らかにした．

第 5 章

数学的活動から理解へ

本章では，数学的活動と理解との関わりを明らかにする．

5.1 では，数学的活動の分類の軸である，一般性と数学的活動の変容について述べる．

5.2 では，数学的活動の変容と第 2 章で明らかにした理解の関わりについて述べる．

5.3 では，調査問題における構造について述べる．

5.1. 数学的活動の変容と一般性

本調査において，すべての児童が試行錯誤から行っている．そして，それぞれの様々な多様な解決を行っている．最初の試行錯誤の際，「何かきまりがあるだろうと見通しを持っていない児童」と「何かきまりがあるのではないかと見通しを持った児童」がいるだろう． 前者は問題通りに単に数をランダムに入れ替え，40を作ろうとする．しかし，後者は活動としては数をランダムに入れ替えているが，その活動は単に 40 を作ろうとするものではなく，きまりを発見する手段として用いている．後者はきまりがあると見通しを持っていても，そのきまりがどのようなものであるのかはまだわからない．また，そのきまりをどのようにすれば発見することができるのかわからない．そのため，第一の方法として，ランダムに数を入れているのだと推測される．見通しを持った活動を行うことで，最上段と最下段のきまりなどに着目する可能性が開かれると推測される．最初の試行錯誤ではないが，A 児はαのきまりを発見する過程について，「大きいのを作る時に大きい順や小さい順に並べていったら，大きくしようとしているのに小さくなったりした.」とインタビューで述べている．このように活動を行う際に見通しを持つことで，きまりを発見する手段を導いたり，きまりを発見したりすることができると推測される．

また，試行錯誤の仕方はさまざまである．規則的に並び方や使う数を変えたり，不規則に並び方や使う数を変えたりする．後者は単に 40 になるかならないかとのみであり，単に数を並び替えるのみである．一方前者は，並び方を左端とその隣を変えたり，内側同士を変えたり，外側同士を変えたりする．また，並び方を反対にするようなこともあるであろう．この並び方を反対にするということは，内側と外側を同時に入れ替えているというようにも捉えることが出来る．試行錯誤の中も多種多様であり，その方法によって，それからの活動，理解と違いがみられると推測され

る．

E 児は調査の中で最上段と最下段の関係にあるきまりを導き出すことはできなかった．しかし，多くの試行錯誤を行い，解答を導き出すために問題を分析している．E 児は 5 つの数を入れ替える試行錯誤を行ったが，40 のできる並び方を導き出すことができないので，最下段に 40 を入れ，その 40 を分解することで，最上段の並び方を導き出そうとする．その時，下から二段目の範囲を 19～21 と設定している．その理由は，試行錯誤していく中で，その範囲を超えると最上段が 3～7 の範囲から出てしまうからとしていた．また，上から二段目を 8～12 と述べている．問題は四段であるが，E 児は二段，三段と段の数を減らし，きまりを見つけようとしている．問題を解決する方法として問題状況を簡単にし，解決できる状況を作ることは有効なことであり，数学教育において重要な数学的な見方である．E 児はきまりを発見することはできなかったが，他の児童とは違う着眼点から問題の解決を図っている．試行錯誤においても段ごとの範囲を設定しているなど，試行錯誤という同じ活動であっても，理解のされ方は多様であると言える．

B 児の活動において，「④③⑦⑥」と「⑥⑦③④」という 2 つの並び方を見て，使っている 4 つの数が同じであることに気づき，「同じ 4 つでも並び方が違うのに最下段が同じ 40」という疑問を持った．そして，並び方がどのように変わったのか比較している．そのことにより，「並び方を反対にしても最下段の数は同じ」というきまりがあるのではないかと推測し，最下段が 40 である「④⑤⑥③」から「③⑥⑤④」という並び方を作った．この時，B 児は試行錯誤で偶然的にできたのではなく，きまりを用いて並び方を導き出している．一方，「④③⑦⑥」と「⑥⑦③④」，「④⑤⑥③」という並び方は試行錯誤で偶然的にできたものである．はじめに作った 3 つの並び方と最後に作った並び方を導き出す過程に違いがみられる．また，B 児が発見したきまりである「並び方を

反対にしても最下段の数は同じ」というものは，きまりβである「外側同士，内側同士を並び変えても同じ合計になる」の一部に位置すると考えられる．反対にするということは，内側，外側を同時に並び替えているというものである．B児の理解をより広げるとするならば，反対にするということはどのようなことを行っているのかふり返ることにより，きまりβの理解へと広がる可能性があると考えられる．

5.2. 数学的活動の変容と knowing that, knowing how

上述してきたようにA児は4つの並び方で最下段を40にする並び方を導き出してきた．その導き方は，まず，はじめに試行錯誤によって偶然的に「⑥⑤④⑦」で40になる並び方を導き出す．その後，その4つの数を並び替える中で偶然的に「⑥④⑤⑦」,「⑦④⑤⑥」という並び方を導き出した．そして，最後に「⑦⑤④⑥」という並び方をきまりβである「外側同士，内側同士を並び替えても同じ合計になる」を用いて導き出している．4つの並び方は全て40になる並び方である．しかし，その導き出される手続きはさまざまである．手続きがさまざまということは，knowing how に違いがあるということである．それでは，40になった並び方では，どのような knowing how の違いがあるのであろうか．まず，1つ目の「⑥⑤④⑦」は，試行錯誤による偶然的なものであった．ここでの knowing how は試行錯誤ということになるであろう．2つ目と3つ目の並び方は，始めにできた並びで使った「4，5，6，7」という4つの数を入れ替えることで偶然的にできたものである．ここでの knowing how も試行錯誤であると考えられる．なぜならば，この並び方を導き出したのは偶然的なものであるからである．ここで，1つ目の並び方試行錯誤を「試行錯誤1」とし，2つ目，3つ目での試行錯誤を「試行錯誤2」としたとき，この2つの試行錯誤は同様の knowing how であろう．どちらも試行錯誤であり，偶然的に40となる並び方を導き出したということでは同等かもしれない．しかし，この2つの試行錯誤の間には質的な違いがあると推測される．試行錯誤1では，5つの数から4つを選び行っている．一方，試行錯誤2は「4，5，6，7」という4つの数での試行錯誤である．なぜ4つの数で行ったのかは，最上段に当てはめる数が同じで並び方が違うのに，最下段が同じになっているものがあるのに気付いたからである．試行錯誤2は試行錯誤1より見通しを持ち，4つにした根拠を持っているからである．

そのことから，knowing how の差を見ることができる．

4 つ目の並び方においては，試行錯誤することなく，導き出している．それは，今までにできた 3 つの並び方を観察することによって，きまり β を導き出し，そのきまりを用いて 40 を作ることのできる並び方を導き出しているからである．そのことから，ここでの knowing how は 3 つの並び方の比較とそこから発見されたきまり β である．今までの数学的活動での knowing how は 2 つの試行錯誤であったのに対し，ここでの knowing how ではきまりを用いている．ここに理解の差を見ることができる．

その後，A 児はきまり β から α の発見へと変容していく．そのための数学的活動として，新たな試行錯誤を行う．そして，試行錯誤でできたいくつかの並び方を比較し，きまり α を発見する．ここでの knowing how は試行錯誤でできた並び方の比較であろう．今までの試行錯誤では，最下段に対して 40 であるか，それともそれ以外の数であるかというものであった．しかし，ここでは最下段がどのような数になるかということに着目している．そのため，今までの比較では，並び方のみであったが，ここでは並び方に加え，最下段の数の変化も比較している．ここに knowing how の違いを見ることができる．

また，A 児はきまり β を発見し，B 児はきまり β と達成しなかったが，そのきまりに近いものを発見している．その違いはどこにあるのであろう．そこにもそれぞれのきまりを発見するための knowing how の違いがあるからである． A 児は並び方を一か所ずつ変えていた．そのことによって，A 児は内側同士，外側同士を入れ替えてよいというように，内側と外側を別々に考えている．一方，B 児は並び方を入れ替える際，一度に複数個所の入れ替えを行っている．並び方を反対にするということは，内側，外側を同時に入れ替えているということである．ここにも knowing how である試行錯誤の違いを見ることができる．

そして，knowing how によって違ったきまりであるが，きまり

を発見する knowing how ではすべて帰納的に発見している．伊藤（1993）は『「帰納」は，いくつかの「場合」について認められた「結果」があるとき，そのことから「規則」を推論する』と述べている．本問題に関して言い換えるならば，最上段にいくつかの数をあてはめて，それぞれの最下段の数があるとき，そこからきまりを推測していく活動であろう．また，Polya（1959）は「帰納は物事の観察に始まることが多い」と述べている．例えば，B児がきまりを発見した際，最上段が「④③⑦⑥」と「⑥⑦③④」であるとき，どちらも最下段が 40 である．その 2 つの並び方を観察し，比較することで「並び方を反対にしても最下段の数は同じであろう」というきまりを発見したと推測される．

5.3. 数学的活動の変容と構造の関わり

本研究において行った調査は数学的活動と一般性についてであった．本調査問題における構造についてここでは述べる．構造については，最上段を4つから5つ，6つと増やしていくことが考えられる．また，最上段に入る数の範囲を制限するようなことも考えられる．

最上段を5つにした場合について考える．その時の最上段に左からそれぞれa～eを入れると最上段は「ⓐⓑⓒⓓⓔ」となる．その時の最下段は「a+4(b+d)+6c+e」となる．このことから，4つの場合と同様に内側に大きな数を入れる方が最下段は大きくなる．この場合，最下段を一番大きくするためには，6倍されるcを一番大きくする必要がある．そして，bとdにそれぞれ次に大きな数を入れることで，最下段が大きくなる．また，4つの場合は内側同士，外側同士を入れ替えても最上段は変わらなかったことは，5つの場合は入れ替える場所はaとe，bとdである．cは固定したままとなる．さらに，最下段の数を仮に偶数とする場合，a+eは偶数でなくてはならない．このように数の組み合わせを制限していくことも可能となる．

構造を複雑にするということは，最上段を4つから5つ，6つと増やしていくことであり，そのような活動へと変容させていくことで理解の変容の可能性があると考えられる．

第５章の要約

本章においては，調査を基に，数学的活動の分類から理解について述べてきた．

まず，数学的活動の変容と一般性における理解について述べた．児童は問題を解決するにあたって，まず試行錯誤から行っている．その試行錯誤では，見通しを持っていないか，見通しを持っているかという2つの立場から議論を行った．前者は問題通りに単に数をランダムに入れ替え，40を作ろうとしているのに対し，後者はきまりを見つけるための手段であった．また，試行錯誤の仕方は児童によって様々であり，規則的に並び方や使う数を変たり，不規則に並び方や使う数を変えたり，着眼点が異なったりする．試行錯誤の中も多種多様であり，その方法や視点によって，それからの活動，理解と違いがみられると推測された．さらに，B児の活動を取り上げ，理解について述べた．B児は40を作るために試行錯誤を行い，40の並び方を三通り導き出した．そして，その並び方を比較することできまりを発見し，そのきまりを用いて新たな並び方を導き出した．まず，ここに理解の変化が見られた．発見したきまりは「並び方を反対にしても最下段の数は同じ」というものでβには至らなかったが，「並び方を反対にする」ということがどういうことなのか，自らの活動をふり返ることにより，新たな理解へと変容する可能性があると述べた．

次に，数学的活動の変容とknowing howについて述べてきた．A児において，最初のknowing howは試行錯誤であった．その後，40の並び方を試行錯誤せずに導き出した時には，knowing howが試行錯誤でできた3つの並び方の比較とそこから発見されたきまりβへと変容していた．そして，A児は数学的活動3から2へと変容するが，その際にもknowing howの違いがみられた．ここでの違いは，並び方に加え，最下段の数の変化の比較であった．

最後に，数学的活動の構造を複雑にするためには，最上段を4つから5つ，6つと増やすことであると述べた．

第 6 章

本研究のまとめと今後の課題

本章では，研究から得られた結論，さらに本研究を考える中で明らかとなった今後の課題について述べる。

6.1. 本研究のまとめ

本研究は児童・生徒が算数・数学の内容や方法を理解するにあたって，どのような算数・数学的活動の展開が理解をもたらすのか．また，そのためには，どのような教師の指導が必要かを明らかにすることが目的であった．そして，以下の 3 つの研究課題を解決することで，その目的の達成を図った．

研究課題 A：理解そのものの解釈
研究課題 B：理解を捉えるにあたっての数学的活動の枠組みの構築
研究課題 C：数学的活動と理解との関わりを明らかにする

このような研究課題を考察した結果，以下のことを明らかにした．

まず，理解の解釈についてである．二等辺三角形の作図の事例で検討したように，学習において宣言的知識は「何を学んだか」という学習の成果を対象とし，手続き的知識は「それをどのように学んだか」という学習の過程を対象とするものであった．また，理解について，knowing that は作図の方法はどのような方法があるのかということで，一方，knowing how は作図の方法をどのように知り得たのかということである．そう捉えるならば，knowing how は作図方法を作り出す過程が検討され，knowing that は knowing how によって作り出された成果・結果が検討されなければならなかった．これらのことから，knowing how は数学的活動の過程が理解の対象となり，プロセスが多様であればあるほど，理解は深まる．他方，knowing that は学習の成果・結果が理解の対象となり，その知識は，他の正三角形や一般の三角形の作図と関連するとき，理解がより深まるものと考えられた．両者の主張より，理解の対象は学習の成果としての結果と学習の過程としての数学的活動であると言えた．

次に，数学的活動の枠組みを構築した．そのために，数学的活動を 2 つの軸で捉え，その軸である一般性と構造を基に数学的活動を特徴付けられた．構造は単純なものから複雑なものへと深まっていくものであり，数学的活動の深まりを縦軸にとり，一方，一般性は特定の具体的なものから同等の問題への適応であり，数学的活動の広がりを横軸にとることで，第 1 次的な階層モデルを構成した．ある構造 A に対し，その同等の構造である A'に適応することで数学的活動が広がり，A（A'，A''，…）よりも構造の複雑な B の数学的活動を行うことは A の数学的活動を含めて深まっていくと示された．

実際の調査では，児童によって導き出したきまり及び，その解決方法は様々であった．しかし，それぞれの数学的活動を数学的活動の枠組みにあてはめるとそれぞれの変容を明らかにすることができた．数学的活動の枠組みは，それぞれの数学的活動の位置づけを示すのみではなく，数学的活動の変容過程をも明らかにすることができた．また，調査者の支援によって，数学的活動の変容を促すことができた．この支援は，数学的活動の枠組みへの適応から導き出されたものであった．これらのことから，数学的活動の枠組みの有効性を明らかにした．

さらに，数学的活動の変容と一般性における理解について述べた．試行錯誤では，見通しを持っていないか，見通しを持っているかという 2 つの立場から議論を行った．前者は問題通りに単に試行錯誤するのみであるのに対し，後者はきまりなどを見つけるための手段であった．また，試行錯誤の仕方は児童によって様々であり，規則的に並び方や使う数を変たり，不規則に並び方や使う数を変えたり，着眼点が異なったりする．数学的活動との分類としては，同じ試行錯誤であっても，その理解のされ方は多様にあると言えた．

最後に，数学的活動の変容と knowing how について述べた．A 児において，最初の knowing how は試行錯誤であった．その後，

40 の並び方を試行錯誤せずに導き出した時には，knowing how が試行錯誤でできた 3 つの並び方の比較とそこから発見されたきまり β へと変容していた．そして，A 児は数学的活動 3 から 2 へと変容するが，その際にも knowing how の違いがみられた．

これらのことが，本研究から得られた示唆である．

6.2. 今後の課題

本研究において，調査を基に行った理解の展開は，一般性のみである．一般性と構造から数学的活動の枠組みが構成されていることから，構造を深める活動における理解は，一般性を広げる活動における理解とは異なるものと考えられる．そのこで，構造を深める活動における理解の考察が必要である．この点が，今後の課題であるとして残されている．

資料

1. 調査における児童の解決と行った支援

A児の活動

a：A児の数学的活動　　pa：A児へ行った支援

a1：試行錯誤 1

最上段に 3～7 をランダムにあてはめて 40 を作ろうとする．

a2：ランダムにあてはめて 40 を作れる．「⑥⑤④⑦」

pa1：「他にない？」

a3：試行錯誤 2

3～7 をランダムにあてはめて 40 を再度作ろうとする．

pa2：「同じ 4 つの数でも，置く位置によって合計は変わらないかな？変わるかな？」

a4：試行錯誤 3

「4，5，6，7」の 4 つの数を使って 40 を作ろうとする．

a5：試行錯誤によって，「⑥④⑤⑦」という並び方を作る．

a6：「4 と 5 と 6 と 7 の数字を必ず使う」とメモする．

a7：試行錯誤 4

a8：試行錯誤で「⑦④⑤⑥」という並び方を作る．

pa3：「入れ替えると合計が変わったね．どうすると合計が大きくなるだろう．」

a9：試行錯誤 5

4，5，6，7 を入れ替えて大きな数を作ろうとする．

a10：「④⑥⑦⑤」と「⑤⑥⑦④」という並びを作る．

a11：きまりへの着目

内側に大きな数を置いた方が大きくなることに気づく．

B児の活動

b：B児の数学的活動　　pb：B児へ行った支援

b1：試行錯誤 1

3～7 をランダムにあてはめて 40 を作ろうとする.

b2：試行錯誤で 40 を作る.「④③⑦⑥」

pb1：「他にないかな？」

b3：試行錯誤 2

5 つの数で試行錯誤を行う.

b4：試行錯誤で「④⑤⑥③」で 40 を作る

b5：きまりえの着目

上から二段目の真ん中の数に着目し,「真ん中は 2 回たす」とメモをとる

b6：試行錯誤で「⑥⑦③④」で 40 を作る.

b7：事象への疑問

「④③⑦⑥」と「⑥⑦③④」の合計が同じことへの疑問

b8：きまりへの着目

反対にすれば作れる.

pb2：「40 より大きな数は作れる？」

C児の解決

c：C児の数学的活動　　pc：C児へ行った支援

c1：試行錯誤 1

3～7 をランダムにあてはめて 40 を作ろうとする.

pc1：「同じ 4 つの数でも, 置く位置によって合計は変わらないかな？変わるかな？」

c2：試行錯誤 2

5 つの数で試行錯誤する.

pc2:「同じ 4 つで, 並び方が違うのに一番下は同じ数のがあるね.」

c3：試行錯誤で「⑥⑦③④」で 40 を作る.

pc3：「他にはない？」

c4：試行錯誤 3

5つの数で試行錯誤する

c5：試行錯誤 4

3，4，6，7の4つで試行錯誤する．

c6：試行錯誤で「⑥③⑦④」で40を作る．

c7：きまりへの着目

内側を入れ替えても同じ合計になることに気づく．

D児の解決

d：D児の数学的活動　　pd：D児へ行った支援

d1：試行錯誤 1

3～7をランダムにあてはめて40を作ろうとする．

d2：試行錯誤 2

最下段から最上段へ向かっていく．

pd1：（1や13を使っていたので）なんでその数使ったの？

D児「あっ」範囲を忘れていただけだった．

d3：試行錯誤 3

13，1，7，3を基に最上段の修正を行う

d4：試行錯誤 4

5つの数で試行錯誤する．

pd2：「同じ4つの数でも，置く位置によって合計は変わらないかな？変わるかな？」

d5：試行錯誤で「③④⑥⑦」40を作れる

pd3：「他にないかな？」

d6：d5を使って並び変え，40を作ろうとする．

pd4：「同じ4つなのに40にならない．どう並び変えたら，どう変わるのかな.」

E児の解決

e：E児の数学的活動　　pe：E児へ行った支援

e1：試行錯誤 1

3～7 をランダムにあてはめて 40 を作ろうとする.

pe1：「同じ 4 つの数でも，置く位置によって合計は変わらないかな？変わるかな？」

e2：試行錯誤 2

4 つの数を並び変えて 40 を作ろうとする

pe2：「どう並び変えたら，どう変わるのかな.」

e2’：試行錯誤 2’

試行錯誤 2 の活動を続ける.

e3：試行錯誤で「⑥⑤④⑦」の並びで 40 を作る

pe3：他にはないかな？

2．インタビュー

A児とのやり取り

Aa：A児の発言　　Qa：調査者の発言

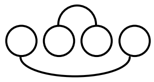
Qa1：どんなきまりがありましたか？

Aa1：4と5と6と7を絶対使っていて，入れ替えると合計が同じになるとこがある．

Qa2：どこのこと？

Aa2：こことここ（内側の2つ），こことここ（外側の2つ）です．

Qa3：（○を4つ書いて）この4つがあったらどこを入れ替えたらいい？

Aa3：（右図のように書く） 

Qa4：そのきまりにはいつ気付きましたか？どんなことをして気付いたのかな？

Aa4：同じ数だとわかったから，適当に入れ替えて，入れ替えていると全然違う答えになっていたから．

Qa5：他にはきまりありましたか？

Aa5：数を大きくする時に，隣を一番大きい数のときと小さい数のときに

Qa6：隣ってどこ？

Aa6：こことここ（両端とそのとなり）が一番小さい数と大きい数が隣同士で，これ（「⑤⑥⑦④」）だったらこれとこれ（4と7，5と6）で，（2段目が）11，13，11になったら大きくなる．

Qa7：「⑥⑤④⑦」だったらだめ？

Aa7：それは………

Qa8：この組み合わせになっているよね？

Aa8：それだと，こっち（真ん中）が9とかになるから駄目だと思う

Qa9：ここが4，6，7，3の並び方がしかないんかな？

Aa9：それとこっちが6と7だったらいい．それで5と4が入れ

替わればいい．こっち（内側）に大きな数を入れたらいい．
Qa10：それにはなぜ気付いた？
Aa11：大きいのを作る時に大きい順や小さい順に並べていったら，大きくしようとしてるのに小さくなったりしたから，大きいのと小さいののグループでやりました．

B 児とのやり取り

Ab：A 児の発言　Qb：調査者の発言
Qb1：どんなきまりがありましたか？
Ab1：並び方を反対にしたらいい．
Qb2：いいっていうのは？
Ab2：左右を反対にしても一番下は同じになります．
Qb3：それにはどこで気付きましたか？
Ab3：適当に書いて，最初にできて，その後に，この組み合わせで他のをしてみようと思って．そしたら 40 ができました．
Qb4：できたのを並び変えていたら作れたみたいだけど，なんでできたのを並び変えようと思ったん？
Ab4：並び方が違うのに下が同じのがあったから．
Qb5：なるほど．ここの「真ん中は 2 回たす」って書いてあるのはどういうこと？
Ab5：こうなってて（9，11，9），9 と 9 で 20 になったから，11 は二回使うから．
Qb6：ここがポイントになるんじゃないかと思ったんだ．他にはあった？
Ab7：これくらい．

C 児とのやり取り

Ac：C 児の発言　Qc：調査者の発言
Qc1：難しそうだったね．40 作れていたけど，作っているときに

何かきまりがありましたか？

Ac1：できたのの，ここところ（内側の 2 つ）を入れ換えると 40 になった．

Qc2：内側同士を入れ換えると 40 になったと．それには，なぜ気付きましたか？

Ac2：順番をいろいろ替えていたら，いつの間にか．

Qc3：これ（⑥⑦⑧⑨）とこれ（⑥⑧⑦⑨）は答えは一緒になりますか？

Ac3：一緒になる．

Qc5：なんで入れ替えようと思ったん？

Ac5：ほのかの数字を入れてやってみたけどなかなかできなくて，今度は入れ換えることにした．

Qc6：一度違うのをしようとしたけど，できないから入れ替えたと．他には何かありましたか？

Ac6：特に．

D 児とのやり取り

Ad：D 児の発言　　Qd：調査者の発言

Qd1：どんなきまりがありましたか？

Ad1：特に．

Qd2：40 は作れましたか？

Ad2：適当にやってたら，ここで 39 が作れて，40 より，1 小さいから，サイドは 1 回しか足されないから，片方を 1 つ大きくしていった．でも，7 までしかないからなかなかできなかった．

Qd3：数字が 7 までじゃなくて，9 まで使ってよかったら？

Ad3：7 を 8 にする．

Qd4：5 の方を 8 にしちゃダメ？

Ad4：たぶんだめ．

Qd5：なんで 7 の方を 8 にするの？

Ad5：7は1回しか足さないから，7を8にすれば1増えるから．1しか影響ないから．

Qd6：こっち（5）は何回足されるん？

Ad6：一回．

Qd7：こっち（内側）は？

Ad7：二回

Qd8：他にはなにか使おうとした？

Ad8：あとは適当にやった．

Qd9：足したり，引いたりしてたのは？

Ad9：数がこれ意外だったから，足したり引いて，問題の数でしようとした．でもできなかった．

Qd10：それでこの一回や二回足すのがひらめいた？

Ad10：はい．

E児とのやり取り

Ae：E児の発言　　Qe：調査者の発言

Qe1：最後にきまりが見えそうって言ってたけど，何かきまりみえた？

Ae1：きまりというか，簡単な求め方で，答えから求めていって，ここ（下から2段目）からで，ここが離れていたら上が合わなくなるから，19～21を入れて，ここにも（上から2段目）入りそうな数を入れて，8～12が入りそうで

Qe2：なんで8～12？

Ae2：ここに7を入れたら合わなくなるから．他にもあるかもしれないけど，8～12を入れて，それをここ（2段目）にいれてきまってきました．

Qe3：それにはどの辺でそうしたらいいと思った？

Ae3：3枚目くらいかな．何個かできてから気付きました．

Qe4：なんでそうしたらいいってわかったんかな？

Ae4：答えが決まっていて，上には色々はいるものが決まっているから．

参考・引用文献

エレン・D・ガニエ（1989）．赤堀侃司・岸学訳．「学習指導と認知心理学」．壮光舎出版．pp.66－69

G. Polya：柴垣和三雄訳（1959）．「数学における発見はいかになされるか 1　帰納と類比」．丸善．p.2

伊藤説朗（1993）．「数学教育における構成的方法に関する研究[上]」．明治図書．p.49

能田伸彦（1983）．「算数・数学科　オープンアプローチによる指導の研究―授業の構造と評価―」．東洋館出版．pp.59－69

Pirie, S. and Kieren, T（1992）．“Watching Sandy’s Understanding Grow”．*Journal of Mathematical Behaviour*．11．pp.243－257

清水克彦（1983）．「問題解決と児童の理解についての一考察－問題解決教授における方略指導に関して（Ⅱ）－」．筑波数学教育研究第2号．pp.30－31

清水克彦（1987）．「数学教育における Process-Oriented Learning の研究」．筑波大学教育学博士学位論文．pp.180－190

謝辞

本論文の作成にあたり，多くの方々の御指導，御鞭撻を頂くことができましたことを，大変感謝しております．

数学教育に対する専門的な知識のないままでしたが，数学教育と真剣に向き合いたいという気持ちのみで，矢部研究室の門を叩きました．それから，4年もの長い間，御指導していただいたことに大変感謝しております．矢部先生には，研究をするということに対する本当の意味を教えていただきました．「誰からでも何からでも学ぼうと思えば学べる．」これは，私の心に強く残っている，矢部先生からいただいた言葉です．学ぶということは，自らどれだけ考え，身につけることが出来るのかということだと学びました．また，私の拙い意見に対しても，価値を高めてくださる矢部先生の姿を見ると，自分の小ささを感じることができ，学ぶ姿勢を教えていただきました．矢部先生の御指導によって学んだことは研究のみだけではなく，人としての考え方も学ぶことができました．卒業研究を通し，矢部敏昭先生から学んだことは，私にとって大変かけがえのない財産となりました．

溝口達也先生にも，厳しく，かつ温かくご指導いただきました．授業や日頃の御指導，御助言を通して，大変貴重なお話を御伺いすることができました．「研究には厳しく，人間関係はあたたかく．」溝口先生からいただいたこの姿勢は今や私の姿勢になっています．研究では，常に厳しく，的確な指摘をしていただき，学ぶということ，学び合うという集団のあり方を教えていただきました．

4年間を振り返れば，お二方の先生には人として，研究者としての範を示していたでき，この上ない環境で生活できたのでと感じています．その中で，少しは成長することができたのではないかと思っています．

調査では，鳥取大学附属小学校の新家先生にご協力いただきました．6年生の皆さんにも休み時間にも関わらず，問題を解いて

いただきました．先生，児童の皆さんのお陰で卒業論文を完成することができました．ここに感謝の意を表したいと思います．
数学教育研究室の皆さんにも大変お世話になりました．國政先生には，調査での記録や，現場での授業や子どもの姿を教えていただきました．田中光一さんには，研究に対し，厳しく指摘いただき，さらに，研究に限らず，親しくしていただきました．また，後輩である早田透さんには，パソコンやその周辺機器のメンテナンスをしていただき感謝しております．

学部生の常友さん，前田さん，山中さん，小村さん，柏木さん，安井さんにも様々な面で助けられました．また，地域教育専攻の院生の皆さんにも日々の研究室での生活を居心地のよいものにしていただきました．大変感謝しております．

この卒業論文は，上でお名前を挙げた方々，また，ここにお名前を挙げることのできなかった多くの先生，先輩，同輩，後輩の方々の支援があってようやく形にすることができました．皆様に対し，ここに厚く御礼申し上げます．

最後に，私のわがままな生き方を今もなお見守り，応援してくれている両親に大変感謝しております．

2010 年 1 月
地域教育専攻院生室にて

鳥取大学数学教育研究　ISSN 1881–6134

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。

- 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
- 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
- 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
- その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/