ISSN 1881-6134

鳥取大学数学教育研究
Tottori Journal for Research in Mathematics Education

www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/journal.html

Freudenthal数学教育論に関する研究

－「基底的観念」に着目して－

塩見拓博

vol.11, no.1
Oct. 2008

鳥取大学 数学教育学研究室

Freudenthal 数学教育論に関する研究

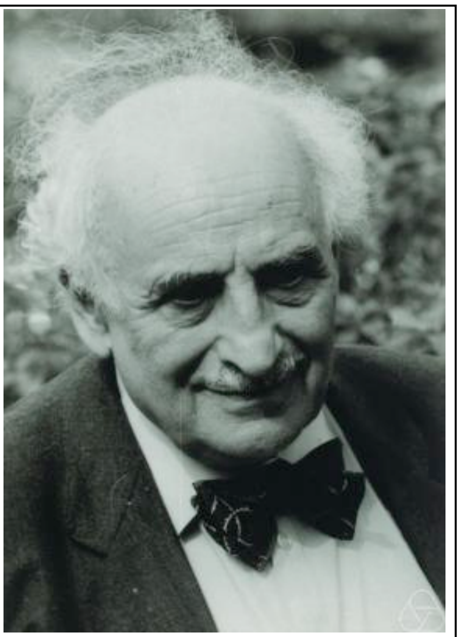
－「基底的観念」に着目して－

塩見拓博
鳥取大学地域学研究科

1. 研究の目的と方法

1.1. 研究の目的

Hans Freudenthal（1905-1990）は優れた数学者であり，優れた数学教育学者でもあった.



Hans Freudenthal (1983)

Freudenthal が数学教育者へ転向するきっかけとなったものが，公理体系を象徴する集合と構造を基礎に教育課程を再構成しようする New Math 運動に対する反動においてである．そのころ氏はオランダの代表者として *ICMI（THE INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICAL INSTRUCTION）* の一員となり，最終的に 1966 年から 1970 年まで会長の職を務めている．その仕事の一環として，1968 年に『*How to teach mathematics so as to be useful*』という論文を伴い，現在，国際的な数学教育における最も権威ある雑誌として知られている『*Educational Studies in Mathematics*』を出版し，その中で一貫して，数学とは活動であるという認識を表明した．そして，1971 年には，*IOWO* の管理者の職にもついている．また，*ICMI* は 2004 年の数学教育国際会議で Freudenthal の名を冠する功績賞を設けていることからも，氏が，世界の数学教育界に残した足跡の大きさを伺い知ることができる.

今日では，氏の数学教育思想に基づいた *Realistic Mathematics Education (RME)* が提唱され，世界的に注目されている．しかも，わが国の学校数学においては伝統的に学習者の活動を重視してきており，Freudenthal による数学教育研究は現在の日本の数学教育を考える上でも示唆に富むと考えられる．しかし，わが国の数学教育研究は「いかに教えるべきか」という教授方法的研究に主たる関心があり，そうした研究では数学教育の根底にある数学の教育的意義まで見通すことは稀である．Freudenthal が見るであろう数学の「陶冶価値」がわが国に即したものであるならば，「数学的な見方・考え方」の育成や，近年強

調されている「生きる力」の育成に対して，例えばFreudenthalの「数学化」という概念や，「再発明」という教授原理から示唆を得ようとする際，それらを用いる意義と共に，それらの内容からも有効な示唆を得ることができると考えられる．特に，今年度改訂された学習指導要領で登場する数学の「活用」という側面に対して，示唆を得ることができると予想する．

そこで，Freudenthal が見るであろう数学の「陶冶価値」が肝要となるわけであるが，先行研究を見てみると，数学の「陶冶価値」ということについて，必ずしも十分な議論がなされているとは言えない．この数学の「陶冶価値」は，Freudenthal 数学教育論と呼ばれるものの中で構造的体系的にとらえられてこそ明確になると考えられる．そのため筆者は，Freudenthalの数学教育論を構造的体系的に組織し，Freudenthalが考えるであろう数学の「陶冶価値」を明らかにすることを目的とする．このとき次の研究課題が要請される．

研究課題Ａ：いかなる枠組みを用い，Freudenthal数学教育論を組織化するか

筆者は，大高（1998）の「基底的観念」を用いた枠組みに着目した．よって次の研究課題が要請される．

研究課題Ｂ：Freudenthal 数学教育論の子ども観・陶冶観では何を語るべきか

研究課題Ｃ：Freudenthal 数学教育論の教授学的数学観（数学観と数学教育観を合わせたものをこう呼ぶ）では何を語るべきか

研究課題Ｄ：Freudenthal 数学教育論の活動観では何を語るべきか

次に，明らかとなったFreudenthal数学教育論の「基底的観念」を踏まえることで，Freudenthal数学教育論における数学の「陶冶価値」を構造的体系的に捉えることができる．したがって次の研究課題が要請される．

研究課題Ｅ：Freudenthal 数学教育論における数学の「陶冶価値」とは何か

本研究では，課題のA～Dをまとめる．

1.2. 研究の方法

研究課題Ａ：大高（1998）の「基底的観念」に基づく枠組みを，Freudenthal 数学教育論を体系化する枠組みとして提案する

研究課題Ｂ： Freudenthal の言明から，どのような人間・子どもを育てたいと考えるか，またそのような子どもはいかに育てるかを論述する

研究課題Ｃ：FreudenthalがBrouwerからどのような影響を受けているかを述べることで，Freudenthal がどのような教授学的数学観に立つか，明らかにする

研究課題Ｄ：「数学化」の概念について，氏の教授原理である「再発明」から，氏がよいとする活動の概要を規定するとともに，氏が立脚する教授学的数学観から「数学化」の活動を特徴づける．そして，「数学化」と「組織化」の関連性を *organization* の意味の明確化を図ることで明らかにする．

2. Freudenthal 数学教育論を構成する枠組

2.1.ヴァーゲンシャイン科学教育論における「基底的観念」に基づく枠組み

大高(1998)は，ヴァーゲンシャインの科学教育論を，ヴァーゲンシャインが「自然科学の陶冶価値をどのように認識したか，これを中核にして，基底的観念(科学観ー特にアスペクト性ー，自然観，人間観・子ども観，陶冶観)—自然科学の陶冶価値認識—科学教授の目的・目標論—科学教授論(教授原理—教授過程の構成と展開—教材研究)の相互関連とそれぞれの意味内容とを明らかにする」ことにより体系付けている．なぜこのようにするかというと，ヴァーゲンシャインの思想を体系化する際の中心的対象になるのは，その科学教授論(注1)である．

そして「教授論は一般に陶冶価値を実現する手段についての理論の総体と理解される」．そうであれば，科学教授論は自然科学の陶冶価値の認識とのかかわりの中で最も根底から理解され，体系化されるからである．そして，「自然科学の「陶冶価値認識」にせよ，「科学教授論」にせよ，その根底には氏の「基底的観念」がある．したがって，「基底的観念」とのかかわりの中ではじめて氏の科学教育論を構成するそれぞれの概念や原理等が正しく理解されうるからである.」(大高，*ibid*)

その「基底的観念」である「科学観」においては，ヴァーゲンシャインが科学教育を語る上でとる基本的立場について述べられている．これは当然，ヴァーゲンシャイン科学教育論を語る上で必要である.

「自然観」においては，物理教授の対象である自然をヴァーゲンシャインがどのように捉えるかについて述べられている.

「人間観・子ども観」においては，ヴァーゲンシャインが人間や子どもをどのように認識しているかが述べられている．このとき，大高氏は，ヴァーゲンシャインが捉える「人間観・子ども観」を「彼の教授実践と相対的なものであり，この実践と切り離されて論じられるべき性格のものではない（大高，1998. p.52)」として締めくくっている．つまり，「人間観・子ども観」では，ヴァーゲンシャインが物理教授において目指すべき人間像・子ども像について述べられているといえよう.

「陶冶観」においては，上述の人間像・子ども像に陶冶していくためには，どのようなプロセスを経る必要があるかという陶冶一般について述べられている.

そして，これらの「基底的観念」間のつながりは，人間観・子ども観，陶冶観で，ヴァーゲンシャインが認識するであろう，高めるべき教育学的側面を規定し，科学観，自然観から導かれる物理教授学的側面が，人間・子どもを陶冶していく際，いかに起因しえるかを述べることで体系化を図っていると考えられる.（資料１の図Ｉ参照）

2.2.Freudenthal 数学教育論における「基底的観念」に基づく枠組み

筆者は，Freudenthal 数学教育論の組織化を目的としている．このとき，上述したように，「教授論は一般に陶冶価値を実現する手段についての理論の総体と理解される」．そうであれば，数学教育論は数学の「陶冶価値」の認識とのかかわりの中で最も根底から理解され，体系化される．そして，「「基底的観念」とのかかわりの中ではじめて氏の科学教育論を構成するそれぞれの概

念や原理等が正しく理解されうるからである」(大高, *ibid*)と述べることは，もちろん Freudenthal 数学教育論にも当てはまる．したがって,「基底的観念」,「陶冶価値」という視点を取り入れることで, Freudenthal の数学教育論を体系化する際にも大域的な組織化が可能になると考える．

では，Freudenthal 数学教育論の「基底的観念」について，教育論を語る上で，人間観･子ども観, 陶冶観は当然必要である．そこで語られる内容についても，ヴァーゲンシャイン科学教育論における人間観・子ども観，陶冶観と同様の内容が語られるべきであると考える．つまり,「人間観・子ども観」では，Freudenthal が教授・学習において目指すべき人間像・子ども像について述べるべきである．

「陶冶観」においては，上述の人間像・子ども像に陶冶していくためには，どのようなプロセスを経る必要があるかという陶冶一般について述べるべきである．

続いて,「科学観」に対する「基底的観念」について．ここでは，Freudenthal の基本的立場について述べる必要がある．Freudenthal は，数学を「人間の活動」として捉える．これは，Brouwer の数学観と同様の数学観であるが，Freudenthal の基本的立場には，様々な数学教育観も含まれる．ゆえに, Freudenthal 数学教育論の「基底的観念」には，数学観に数学教育観を合わせた教授学的数学観とも呼べる観念が位置づくと考えられる．このような基本的立場を述べる必要がある．

自然観は，物理学の対象である自然について述べられていた．上述のように Freudenthal は数学を「人間の活動」として捉える．ここから，数学の対象とは活動である．そして，その活動とは「数学化」であると Freudenthal は述べる．「数学化」は，Freudenthal 数学教育論を語るとき，中心概念であるため，切り離して考えるべきものではない．したがって，活動観（あるいは，数学化観）とも呼べる観念が「基底的観念」として位置づき，その中では，「数学化」とはいかなる活動であるかが述べられなければならない．このような「基底的観念」に基づく枠組みを用いることで数学の「陶冶価値」が考察されうると考える．（資料１の図Ⅱ参照）

3. Freudenthal 数学教育論における「基底的観念」

3.1. 人間観・子ども観

Freudenthal の基本的立場は，数学を人間の活動として学ぶことである．この数学を学ぶ主体はもちろん児童生徒である．そして，そのような教授・学習では,「関係を伴った数学」や「現実とのつながり」が強調されている．

> 「数学の外部のつながり，それは多分，いっそう自然で大切」(Freudenthal, 1973. p.75）である．

> 「関係を伴った数学について話すとき，私は，死んだ偽りの現実性―応用の例として役立つ目的だけで発明された―を伴うよりは，生き抜いた現実性 lived-through reality を伴った関係を強調する．」（Freudenthal, 1973. p.78）

そして，Freudenthal はこうも述べる．

私は，ある生徒が活用数学を学ぶことを勧めない一方，私は彼が，どのように数学を活用するか，学ぶことを望む．（Freudenthal, 1973. p.75）

Freudenthal が，「関係を伴った数学」や「現実とのつながり」を強調する背景には，教授・学習を児童生徒にとって現実性を帯びたものとし，教授・学習が人間の活動として展開されることで，児童生徒の活用・活用可能性を保障する役割があると考えられる．これは，Freudenthl が，自ら学ぶ意欲を持ち，主体的に数学を活用していける子どもへの陶冶を図ろうとしていると考えることができる．ゆえに，Freudenthal 数学教育論において，その基底には，主体性をもった人間という人間観・子ども観が位置づくと考えられる．この観念については，『ドイツ科学教育論研究（大高， 2002)』でも述べられており，それは次のようである．

人間や子どもについて誤った人間学（Anthropologie)が流布している．これは，「人間が生まれつき学習を怠ける」，「嫌悪する」，子どもは生まれつき不十分で受動的で意欲のない存在である」，とか，「子どもは忍耐がない」，というものである．しかしこうした誤った人間学は，ヴァーゲンシャインによればいわば教える側の「不手際」に対する子ども達の健全な抵抗，すなわち教材過剰や多人数学級などの，今日の学校や環境に対する子ども達の健全な抵抗を誤って解釈した結果なのである．(p. 50)

このような主張は，Freudenthal 数学教育論にも当てはまると考えられる．それは，Freudenthal が以下のように述べることに由来する．

子どもはかなり順応性があり，一人の教育芸術家は彼らを型通りに作ることができる．（Freudenthal, 1973. p.65）

学生生徒の能力は，多くが，その教材がどのように組織されるかに依存する．（Freudenthal, 1973. p.67）

つまり，どのような生徒に育てるか，生徒の将来は教師によって決定される．ここから，例えば，児童生徒が，学習を怠けるのであれば，その責任が教師に問われることは自然である．児童生徒の主体性を本来あるがままに用いさせることが教師の課題であると考えられる．これは，Freudenthal（1973）が教授・学習では，聞き入らせることではなく，生徒の活動を奮起させるべきである(p. 84)と述べることからも明らかである．

以上から，Freudenthal は，数学学習は児童生徒主体教師主導でなければならないという数学教育観に立つと考えられる．このことから明らかなように，主体性をもった人間という子ども観は，Freudenthal の数学学習と共に存在する相対的な観念である．

3.2. 陶冶観

では，上述の人間像・子ども像に陶冶していくためには，どのようなプロセスを経る必要があるかという陶冶一般について述べていく．

まず，Freudenthal が，語「陶冶」を用いるとすれば，どのように認識するかを考察する．

我々は，教えている教材が，将来必要とされているかどうかを知りえないと Freudenthal は述べている．つまり，個々の数学的知識を持つことを陶冶的とはみない．このように，直接的な価値を追求しないことは以下の言明に表れている．

> あるパプアの子は，彼が生活，彼の両親と余り多く違わない彼自身の生活，に必要なものをその両親から正確に学ぶ．事実，これは，先進国と発展途上国の間の大きな違いであって，我々の子どもと青少年は，彼らが本当に必要とするものよりずっと多くを学ばなければならないことである．その過剰は常に，学ばれる事柄が強く主張されている形式的な価値によって正当化されることができ，数学では，それは心の鍛錬 discipline of mind として正当化される．
> (Freudenthal, 1973. p.163)

心の鍛錬と Freudenthal が述べることから，数学を学ぶ過程を重視していることがうかがえる．これは，氏の「人間の活動としての数学」という数学観からの当然の帰結である．この数学観は，数学を，神によって与えられるものではなく，人間が構成的な活動として作り上げるものである．このように，数学と人間とが不可分にかかわっているという認識は，陶冶的営みとしての数学教授の可能性をまず指し示す，という意図もあると考えられる．さらに，後述するように，「意識化」と「反省」に重点をおく「学習過程の不連続性」という数学観，「数学では，練り直すことが第二の特徴」と捉え，数学には終わりがなく，その過程である「数学化」を強調することなどから，Freudenthal が明らかに数学を学ぶ過程に陶冶的意味を付与していると考えられる．以上から，Freudenthal が，語「陶冶」を用いるとすれば，その意味は，所有や決して状態ではなく，活動が継続するという過程としての意味を持つと考えられる．これを次の言明で補足する．

> 所有は，もはや一つの状態でなく，所有をしているという連続的な活動である．教育することは，よい意図を持つ贈り物で，手と脳を充たすことよりは，むしろこのプロセスをガイドすることである．
> (Freudenthal,1973. p.58)

このように，Freudenthal は語「陶冶」を，成長するプロセスとしての意味で認識していると考えられ,「教育者として，私は，数学がよい教師のガイダンスの下で，どのように始まるかを知ることを好む」と述べるように，教師は，形成する行為を開始することが肝要であると考えられる．

以上から，主体性をもった人間という子ども像の陶冶を高めていくためには，決して完結しない陶冶を開始しなければならない．そのプロセスとは，上述したように，児童生徒の現実と関連づけられていなければならない．そして，問題を認識し，児童生徒自身の活動の「意識化」と「反省」により，活動が継続しなければならない．そうすることにより，知識や技能が関係を伴った全体として，児童生徒の中に形成される．このように数学が人間の活動として構

成され，その活動を教師が適切に導くことで，多様な視点と数学の活用可能性を保障する．これが，生徒の主体的な活動を深化させ，目指す子ども像である，主体性をもった人間というプロセスをより高めていくことにつながると考えられる．

3.3. 教授原理「再発明」

Freudenthal は活動を「数学化」という用語で表現する．そして，「数学化」の概念を教授・学習過程の中で述べるとき，Freudenthal の教授原理「再発明」に基づくことは当然である．そこで，まず，この「再発明」原理について確認する．

この概念について，伊藤（2006）は，以下のように述べている．

> 発明者の歴史的足跡ではなく，今日の学習者に合わせて修正され，適切な軌跡へと導かれた歴史の解釈に沿って行われる活動である．（p. 627）

これは，数学教授が数学史の順序とまったく同じではなく，歴史上の発見過程における行き止まりや遠回りは取り除かれるべきであったり，その当時知られていなかった知識であっても，今日の数学学習にふさわしいものは用いるべき，という意味である．Freudenthal の「再発明」の概念をこのように解釈できるのは以下の理由による．

Freudenthal は，今日でも教授の基本の一つであるべき方法として，ソクラテスの方法をあげている．そして，Freudenthal はソクラテスの人間観・子ども観，教育観について以下のように述べている．

> 前世から，魂は全ての知識を所有する．その弟子はそれを呼び戻すだけである．彼を助けるのは親方の義務である．教授プロセスは，学生が忘れたものを思い出すよう，導くことにある．知識を獲得することは，むしろ，私の魂がイデア界に留まっていたときに私自身が知っていたものを（私以前に他者が知っていたものではなくて）再発見することである．（Freudenthal，1973. p.102）

つまり，われわれが住む現実とは別にあるイデア界（本質界）に，ある学生がいたとき，その学生が知っていたものを現実の世界において再発見することが学習であるとソクラテスはとらえている．これに対して Freudenthal はこう述べる．

> 我々は，ソクラテスを最後の一切れまでむさぼり食う必要はないし，前世で彼の信念を共有する必要はない．そのとき残っているのは，再発明による学習であり，そこでは，今や「再（re)」は，学習者の前史ではなくて，人類の歴史を意味する．まるで，学習者が，彼らが知っていたものを再発見する際に，彼の祖先の発達を繰り返しているかのようである．それゆえ，私は，それを，再発明と呼ぶことを選んだろう．
>
> （Freudenthal，1973. p.102）

つまり，Freudenthal は，ソクラテスのような想起説という教育観には立たず，先人が築いてきた発達の歴史を再発明することを要請している．なぜ，このような立場に立つかというと，伊藤氏によれば，『悪魔と深海の間の幾何学』の中で，Freudenhtal

は,「数学史における順序と生徒が数学を発明しうる順序が同じであることを例示し,生徒が数学を発明しうる順序で数学が教授されるべきとする見解を表明している」(伊藤, 2004. P.592) ことによる.

しかし, Freudenthal は, 歴史の足跡を追うことが数学学習であるととらえていない. これについて, Freudenthal は以下のように述べる.

> もし彼らがそれらを発明する前に, 発明した後と同じように利口だったなら, 彼らはどのようにその結果を発明しただろうかを明かす. これらの著者は, 私が思考実験と呼んだものを練習する. 彼らは幾分かいっそう利口なもう一人の自分 *Alter Ego* を想像し, 実際の自分が使った方法よりは, いっそう確信を与え, いっそう有用で, いっそう知的な方法で, 彼にその教材を新しく発明させる. それは, 我々が従っていくべき発明者の足跡ではなく, ある改善されたいっそうよい歴史の筋道である.
> (Freudenthal, 1973. p.103)

つまり, Freudenthal は, 歴史の足跡ではなく, 歴史上の発明の際に用いられなかったものであっても, いっそう有用であるものは今日の学習指導に用いるべきと考える. ゆえに, 歴史上の発明過程において経られた行き止まりや遠回りは, それが, 思考実験(注2)上で有用でないなら取り除かれ, よりよい知識や方法によって歴史を改善した学習指導として構想されることを主張すると考えられる.

以上から, 伊藤氏は Freudenthal の教授原理「再発明」を上述したように解釈していると考えられる. この原理は, 磯田(2003)においても同様に解釈されている.

> 数学は数学化によって構成されてきたものであり, それを学ぶ最良の方法は数学化することなのである.
> 数学化はその発明の過程が数学的方法による絶え間ない再組織化によるものであることを象徴しており, その活動を学校数学において実現する指導方法が再発明の指導方法なのである.
> (p. 33)

筆者もこの解釈に従う. そして, この解釈に従うと, 学習過程を構想する際に, Freudnthal が, どのような観点から歴史の改善を行うかが肝要となる. これを述べることで, 氏がよいとする活動がどのようなものか, 規定できると考える.

3.4. 教授学的数学観

3.4.1.「人間の活動としての数学」

歴史解釈の視点には, Freudenthal の教授学的数学観が起因していると考えられる. ゆえに, 以下で, 氏の教授学的数学観について確認し, そこから, 歴史解釈の視点を規定する.

何回も登場しているように, Freudenthal の基本的立場は,「人間の活動としての数学」である.

そして, この観念は, 伊藤(2003)が, 直観主義と共通の前提であると述べていると共に, 伊藤(2007)は, この観念を Brouwer の直観主義の影響からも検討している. また, 伊藤 (2007) と同様の考察(注3)を筆者自身も同時期に行っている.

伊藤(2003)は, 再発明原理が Freudenthal

のどのような数学観から導きだされたかを明らかにすることを目的とし，直観主義の数学観が Freudenthal の数学観の主要な位置を占めており，それが数学教授論にも影響しているということを明らかにした．

具体的には，Freudnethal が立つ基本的立場である「人間の活動としての数学」という数学観は,「数学を意味のある建設的な精神の創造的活動（佐々木，2001． p. 77)」とみる直観主義と共通の前提であり，発明という用語も直観主義の影響を看取できることを述べている．

しかし,「活動」という用語が，直観主義の数学観においては，数学的対象の直観による構成を意味するのに対し, Freudenthal においては，直観主義とは限らない一般の数学者が用いるような数学的方法を行うことを意味する点で違いがみられることも明らかにしている．

そして，この数学観における Brouwer の影響について，伊藤(2007)は次のように明らかにしている．

①Freudenthal が直接的および間接的に Brouwer に関わっていたこと

②数学の人間的側面：

Brouwer の数学観として，数学の基礎を「原直観」という人間の思考作用においたことが Freudenthal の人間の活動を強調する認識に影響を与えているということ

③数学の活動的側面：

Brouwer の数学観として，数学を「精神の創造的活動」とみることが，Freudenthal の活動を強調する認識に影響を与えていること

Freudenthal は Brouwer からこのような影響を受けていると考えられ, Freudenthal の基本的立場である「人間の活動としての数学」とは，不完全な人間による有限な営みとして数学を基礎づけるような有限的構成主義という Brouwer と共通の立場であると考えることができる．

しかし,「活動」という面に関しては, Brouwer を裏切っているともとれる態度を示しており, この理由を明らかにすることで Freudenthal の基本的立場を特徴づけることができると考えられる．

3.4.2.「関係を伴った数学」

上述のように，Freudenthal は数学を活動と見るわけであるが，学校数学という文脈で考えたとき，数学をただ単に創造する活動さえ行っていればよいとは考えない．それは，氏が数学指導の目的をどのようにとらえるかという点に関連する．まず，人間観・子ども観から明らかなように，数学指導の目的は，数学的知識を情報として伝達することではない．そして，目的と関連して，Freudnthal は以下のように述べている．

> 我々全てが理解するのは，数学が数多くの活用を認めること，かつてよりいっそう多くの児童生徒が数学を活用しなければならないことである．(Freudenthal， 1973． p. 67)

このように，Freudenthal は数学を活用する必要性について述べるが，児童生徒が将来何を活用するかを知りえないということも述べている．では，児童生徒の活動は自由でよいかというとそうは考えない．そ

れは以下の言明に表れている.

どんなアプリオリの制限を定めることもなしの数学指導においてさえ，無視できない優先性がある．たとえ，孤立して両方が教授可能であるとしても，この主題は，あれよりも，多かれ少なかれ重要であるかもしれない．例えば，それが他の主題よりいっそうよく全体に適合するなら，この主題はあれに優る.
(Freudenhtal, 1973. p.68)

つまり，Freudenthal は，学習過程を構想する際に，歴史の発展過程を参考にするが，それは，学校数学という全体に適合する形で解釈しなければならないことを主張していると考えられる．では，どんな全体性を有している必要があるだろうか．一つ考えられるのは，氏が「システム(*system*)」と述べる，数学者によって用いられる演繹的な全体性である．Freudenthal はこのような全体性をよいとしない．なぜなら，氏は，数学の演繹的構造のみに従って数学を教授することを「反教授学的逆転(*antididactic inversion*)」と呼び問題視している．なぜなら，そのような教授は，児童生徒にとって馴染みがなく,「自然な傾向に非常に強い程度で矛盾するので，それが数学への嫌悪を刺激させるだけである」(Freudenthal, 1973. p.70)と述べることに起因する．ゆえに，演繹的構造のみの全体性をよいとはせず,「多くの関係を持った(*multi-related*)数学」をよいとしている．それは，以下の言明による.

私は，ある児童生徒が活用数学を学ぶことを勧めない一方，彼がどのように数学を活用するかを学ぶことを望む.
(Freudenthal, 1973. p.75)

つまり，ある活用に合わせて組織された数学を学ぶような活用数学ではなく，児童生徒が数学を活用していくような数学教育をよいとする．この数学を活用する領域は,「必ずしも，直接的で数学内である必要はなく」(Freudenthal, 1973. p.76)，いっそう自然で大切なつながりとして，現実とのつながりをあげている．なぜなら，児童生徒の「現実」と関係のない様態で学ばれた数学がいつまでも活動的でありえると考えるのは教師だけであり，それは，すぐに忘れられる学び方である．このような児童生徒の現実に関連付けて数学を学ぶことで，数学も現実性を帯び，数学の活用可能性を保障することにつながるからである．もし，数学が活用可能性を準備しないなら，教室は空虚な空間となってしまう．これは，教育的にみて自明にナンセンスである．ゆえに，Freudenthal は，活用可能性を持つ全体性，つまり，多くの関係を持った全体性をよいとし，そこでの関係は，数学内に留まらず, 現実との関係に重きを置いている.
また，数学内のつながりに関しても，演繹的構造のみを指すわけではなく,「例えば，類比はずっと論理的な関係である」(Freudenthal, 1973. p.78)と述べるように，演繹的関係に制限されない，多様な論理的関係を持った全体性が学習過程として要請される．これは，演繹的関係をまったく扱わないことを意味しない．このような理由から，Freudenthal は，Brouwer が忌避する方法による知識の拡張についても部分的に認めていると考えられる．Brouwer は「活

動」を，数学的対象の直観による構成と意味し，論理的推論に知識を拡張する役割を与えていない．

しかし，Freudenthal の場合，知識の拡張の役割を直観のみにおいているわけではない．

例えば，「帰納的外挿法」である．

３＋２＝５	３－２＝１	３・２＝６
３＋１＝４	３－１＝２	３・１＝３
３＋０＝３	３－０＝３	３・０＝０
3＋(-1)＝□	3－(-1)=□	3・(-1)＝□

それは，規則性により子どもが直観を離れても計算の答えを発見できることであり，数学者が数学を研究する姿勢の一つでもある．これも，児童生徒にとって現実的であり，数学の関係を保障する役割があると考えられる．このように，様々な観点から数学を見ることができ，学校数学という全体に適合することが Freudenthal にとって肝要なのである．この点が Brouwer との違いである．

3.4.3. 児童生徒主体・教師主導

では，実際の教授場面はどのようになるかというと，Freudenthal は数学を活動とみなすと述べたように，人間の活動として学ばれなければならない．つまり，人間の活動として，上述したような豊富な関係性を持った数学を作り上げていかなければならない．この作り上げるとはどういうことか．それは，児童生徒にとって発見的でなければならないということである．なぜなら，「自己に依拠する発見ほど極めて確信をあたえるものはなにもない」(Freudnthal, 1973. p.141)と氏が述べるように，児童生徒自らが数学を発見することによって，発見した数学が児童生徒にとって現実性を帯びたものとなり，その数学を活用すること，さらには，活用可能性を準備することにつながるからである．

この発見過程は，児童生徒一人だけで達成できるものではない．それは，「主導権は，教師の側だけにある」(Freudenthal, 1973. p.102)と Freudnthal が述べるように，児童生徒の発明を教師が導いていかなければならない．ただ，児童生徒の心には，自分自身で発明したという感覚は残されるべきである．このような発見過程を氏はよいとする．

4.4.4.「学習過程の不連続性」

では，児童生徒の発見過程は，いかなる特徴を有するか．Freudenthal は，van Hiele の再発明の解釈がよいとして，その学習プロセスについて以下のように述べている．

> 実際，思考することは，連続して行為することであるが，相対的なレベルがある．いっそう高いレベルでは，いっそう低いレベルの行為は分析の対象となる．
>
> (Freudenthal, 1973. p.121)

Freudnthal は，考えることと行為することについて，「どこで一方が始まり，他方が終わるか」(Freudenthal, 1973. p.112)，区別することができるのか疑問視しており，考えることと計画することは行為することであると述べている．このような意味で，思考するとは，連続的な行為であるが，学習過程を考えたとき，不連続な移行であると主張している．それは，１つの水準から

次の水準に移行するときに，学習の対象が全く変わってくることに起因する．なぜ，学習の対象が変わらなければならないかというと，同じ対象で行為し続けるとは，言い換えれば，児童生徒にとっての課題が変わらないということであり，より高い水準で意識的に学ぶことが数学の特徴であると捉える Freudnthal の考えには沿わないからである．ゆえに，「学習過程の不連続性」という数学観が Freudenthal がよいとする活動の特徴として位置づくと考えられる．

では，この不連続な移行は，何を契機として進行するのであろうか．Freudenthal は次のように述べる．

> 必要が感じられない限り，次のレベルへ移るよう彼を強要することは無用である．
> (Freudenthal, 1973. p.124)
> その子が自身の活動を反省できない限り，いっそう高いレベルはアクセス不可能のままである． (Freudenthal, 1973. p.130)

つまり，児童生徒が，今行っている活動では不十分，もしくは，よりよい活動を考察しようとする必要を感じさせることが肝要である．これは，児童生徒自身の活動を「意識化」することであり，さらに，その「意識化」に基づき，活動を「反省」することで，次のレベルへの課題が明らかとなる．これが契機となり，水準上昇が図られる．

以上の要因を踏まえて，歴史の解釈を行わなければならず，そのように解釈した活動を Freudenthal はよいとすると考えられる．そして，それを実際に検討する概念が「教授学的現象学」である．

> 「教授学的現象学」とは，「学習者が人類の学習過程へと足を踏み入れることができるかもしれない場所を教師に示す仕方」(Freudenthal, 1983. p.iv)である．

4.4.5.「教授学的現象学」

伊藤(2005)は Freudenthal が用いる「現象学」の記述内容を次の４つのことがらの具体化，明確化であると述べている．

①「本体」（これは岡田（1981）の「本質 nooumenon」と同義）による組織化の対象となる「現象」
②「本体」の拡張可能性
③「現象」に対する「本体」の作用の様相
④「現象」に関して「本体」がもつ機能

そして，この「現象学」の内容を教授・学習場面における学習者の獲得の仕方に重点をおいて記述するとき，「教授学的現象学」であると述べる．この点は岡田（1981）と同様の解釈である．しかし，伊藤氏はより詳細に「現象学」と「教授学的現象学」の関連について述べている．「現象学」は，「教授学的現象学」が基づく概念や用語の枠組みを作りだすために，「教授学的現象学」にしばしば先立ってなされ，「教授学的現象学」の基礎となる．

ではこのような内容の検討はいかにして行うか．Freudenthal は，この検討方法を「教授学的思考実験」という用語で表現している．そして，この用語で意味する分析方法が『論理的分析と批判的調査』の中でとり上げられている「論理的分析」である．その中身は 2 つの分析方法で成り立っており，それが以下の 2 点である．

①「既成の成果としての分析」:

言語や数学に対して，それらが作られた過程や実際に用いられる状況からではなく，分析，演繹といった「論理」に従ってなされる，教科内容の分析.「既成の成果としての分析」に従えば，言語は，構成要素から，文法の項目ごとに，数学は，演繹的に教授されることになる.

②「活動としての分析」:

教科内容そのものよりも，内容を発明する過程に関係するものであり，van Hiele の水準論により説明される階層構造を示す．すなわち，「低い水準で操作的なことがらが，高い水準における題材になる」という水準間の関係に基づいて，各水準で学習者が行うべき活動を教科内容ごとに具体的に導き出す分析である.

これは，Freudenthal の「学習過程がある水準から次の水準へと進む諸段階を見出すために我々は論理的分析を用いることができる」という発言に基づき構成されている.

Freudenthal は当然，「活動としての分析」を行わなければならないとする．このとき，Freudenthal は，「論理的分析」に類似する数学の分析方法である，「ポリアの思考実験の方法」（あるいは単に「思考実験」）の概念を『論理的分析と批判的調査』の中で表明している.

それ（思考実験）を用いることは，およそはっきりと限定された一人の生徒を思い描くこと，その生徒に何らなの数学的アイデアを発明させること，その生徒のふるまいを観察することを意味する.（Freudenthal, 1962. p.24）

つまり，Freudenthal における「ポリアの思考実験の方法」とは，数学的対象の“re-invention”を実現するために，教授者が，ある生徒を思い描き，その生徒が発明へと至るふるまいを心的に観察することで，発明に必要な前提要件を求める心的実験である．そして，Freudenthal は，この「ポリアの思考実験の方法」という概念を『公理主義とは何か，そしてそれはどのような陶冶価値をもちうるか』において，「教授学的思考実験」と言い換えている．以上から，伊藤氏は，「教授学的現象学」を「教授学的思考実験」を体系化したものとして解釈している．さらに，「教授学的現象学」が，教授原理「追発明」に基づく学習過程を具体化するためになされる，数学的対象の分析方法を提起することも明らかにしている.

3.5. 活動観

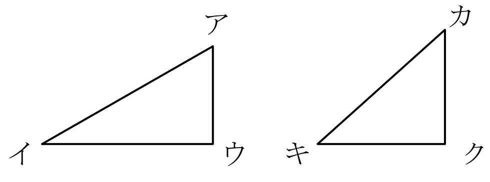
3.5.1.「現実の数学化」と「数学の数学化」

では，上述した制約を受ける「活動」とはどのような活動であるか.

与えられた角の大きさから共通単位を設定し，できる角，できない角を論証することがねらいである授業で考える.

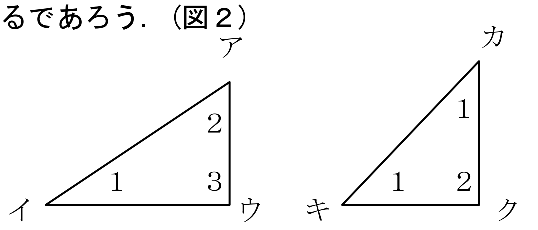
一組の三角定規を使って，どんな角ができるだろう（注４）（図１）

（溝口，2007. pp.45-46）



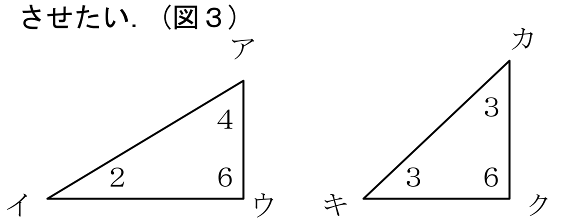
（図１）

まず，三角形のそれぞれの角度が相対的に見て，どのような量であるかを捉えさせたい．はじめは，それぞれの三角形で考えるであろう．（図２）



（図２）

しかし，このままでは，直角である∠ウと∠クが違う数値になってしまう．それは，双方の三角形の組み合わせ（加法，減法）を考える際に不都合が生じる．このままでは，不都合であることを児童に「意識化」させ，自身の活動を「反省」させることで，以下のようにそれぞれの相対的な量を捉えさせたい．（図３）



（図３）

Freudenthal は，人間の活動として数学を学ばれなければならず，先述（cf. pp.7-9）の「再発明」の解釈から明らかなように，学習者と数学者を，数学を学ぶ者として同等の存在とみなし，学習者も数学者が行った活動を行う権利があるとする数学教育観に立っている．その数学者の活動とは，「現実の数学化」がその出発点であった．これは，何の関係もない様態で数学を学んだ児童生徒は，ごく一部の児童生徒を除いて，何の有用性も見出せないと自身で述べていることに裏付けられる．したがって，問題場面として(図 1)が考えられる．

では，「現実の数学化」とはどのような活動であるかというと，それは，「(現実の現象を)数学的な洗練にアクセス可能な構造に組織すること」(Freudenthal, 1973. p.133)であると述べている．つまり，生活経験や，自然科学などの現実を数学的対象にすること，生活の世界から記号の世界へ導くことである．（図 3)のような双方に共通する角度の表し方を発明することにより，それぞれの数の組み合わせを考えるという数学的な洗練にアクセス可能となる．これが「現実の数学化」である．この問題では，数値化が「現実の数学化」の方法である．

Freudenthal は「現実の数学化」に続く活動として，「数学の数学化」を位置づけている．それは，「現実の数学化」を個別に教授していくだけでは，現実の断片をおっているだけで，活動が関係を伴っておらず，児童生徒が将来どのような数学を活用するかを知りえないからである．現実を数学化し，そうしてできた数学的対象を操作することで，数学的な概念，手法を発明していく．今度はそれらの数学的知識を用いて，別の現実を数学化していく．こうすることで，諸活動が，様々な関係を伴った知識として構成されるのである．

先ほどの具体例でいえば，(図 3)に基づき，組み合わせで作ることができる角度を考えるという活動に移行する．このとき，児童は，それぞれの数の組み合わせで，様々な作成可能な数を作ると考えられる．ここで，全ての組み合わせを考えることができたか，ということを「意識化」させたい．これにより，組み合わせを組織的に考えるという活動に移行できる．つまり，0～24 の整数列

がすべてできるかという課題に変更される．その具体的な活動の結果が表１，表２である．

＋	0	2	3	4	6	12
0		2	3	4	6	12
2	2		5	6	8	14
3	3	5		7	9	15
4	4	6	7		10	16
6	6	8	9	10	12	18
12	12	14	15	16	18	24

（表 1）

―	0	2	3	4	6	12
0		×	×	×	×	×
2	2		×	×	×	×
3	3	1		×	×	×
4	4	2	1		×	×
6	6	4	3	2	0	×
12	12	10	9	8	6	0

（表 2）

このように組み合わせを組織的に見ることで，できる角度とできない角度について，一通りの解決を行うことができる．しかし，11 の角度は本当にできないのであろうか．1 を加えて表を再組織化すると以下(表３，表 4) のようになる．（表 1，表 2 と同じところは省略する）

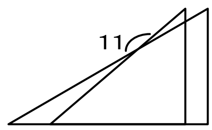
＋	0	1	2	3	4	6	12
0							
1			3	4			13
2		3					
3		4					
4							
6							
12		13					

（表 3）

―	0	1	2	3	4	6	12
0							
1			×	×	×	×	×
2							
3		2					
4		3					
6							
12		11					

（表 4）

この表を「反省」することで，12―1 で 11 の大きさを作成するという課題へ移行する．その結果が図 4 である．



（図 4）

また，6―1 は，表の中での組み合わせを基にすると 5 と表現できるが，実際の操作ではできないことから，できる操作とできない操作について確認させたい．そして，補角という考え方をさせることにより，0～12 の大きさができれば，必然的に 13～24 の大きさも作成可能であるという考え方までもっていきたい．

今は１の大きさを単位としているため，例えば１と２の間の大きさを表現することができない．このような「意識化」を図ることで，はじめて普遍単位を導入する必然

性を児童は感じることができるのである．ここで，直角は90°と表すことを示すことで，今まで自分たちが用いていた１という大きさは度数表示で15°を表していたことに気づき，1°という普遍単位へと「数学化」されると考えられる．

以上は，児童にとって現実的である三角定規という現実から出発し，角という量を数値化する，つまり，「現実の数学化」を行っている．そして，その活動の「意識化」と「反省」により，水準上昇が図られている．また，その学習過程は教師主導で児童主体であるように，教師の支援により児童生徒の「意識化」と「反省」が促され，児童生徒にとって発見的に構成されている（資料２，参照）．さらに，このような「数学の数学化」で作り上げられた数学的知識で，別の現実を数学化することで，「関係で満ちた数学」の建設へつながるのである．

しかし，Freudenhtal がよいとする活動である「数学化」の説明は，これで終わりではない．それは，「科学は単に集めることを脱するや，経験の組織化に携わる」のであり，とりわけ数学においては，「経験の領域を組織化すること」に数学的活動の本質があると Freudenthal が述べることによる．つまり，この「組織化」について述べなければ，「数学化」という活動を特徴付けたことにはならないと考えられる．

3.5.2.「組織化 organization」

Freudenthal は，組織化について以下のように述べている．

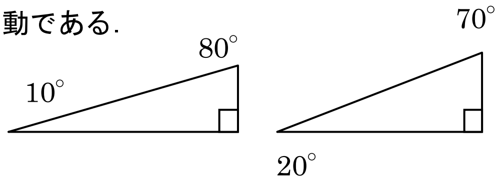
> 数学的手段によって現実を組織することは今日，数学化することと呼ばれる．
> (Freudenthal,1973. p.44)
>
> 数学的経験の蓄積が形成される．それは，その部分が組織されるよう求める．どんな種類の手段がこの目的に役立つか．もちろん再び，数学的な手段である．この出発点は，数学自身の数学化である．(Freudenthal, 1973. p.44)

Freudenthal は，現実を組織することが数学化であると述べており，数学を組織する活動についても数学化であると述べている．つまり，氏は「組織化」によって「数学化」を特徴づけようとしている．

ここで，組織化の辞書的な意味（注５）を述べておく．組織化には，*systematization* と *organization* があり，その辞書的な違いは，*systematize* が，ある基準となる組織が先にあり，その基準に従って整える，様々な要因を配列することを意味するのに対し，*organize* は，ある *organic structure*（有機的な構造）を与えること，ある基準となりえるであろう組織を作り上げていくことを意味する．

氏は，「人間の活動としての数学」という基本的立場に立つことを述べた．これは，氏が *ready-made* 数学の学び方ではなく，*acted-out* 数学の学び方をよいとする趣旨のものである．この *ready-made* 数学の学び方とは，すでに数学としてあるものを学ぶ学び方であり，*acted-out* 数学の学び方とは，まさにその言葉の通り，活動をすること(*act*)によって数学を浮き彫りにする(*out*)学び方である．この浮き彫りにするとはどういうことか．先述(cf. pp.13-15)の角の具体例では，三角定規という現実の現象から出発し，組み合わせという活動を経ることで任意単位である１（15°）を基準とし

た角の大きさを作成するという活動を行った．この問題場面は，三角定規である必要はなく，例えば，図 6 のような一組の直角三角形を基に考えると，任意単位として 1（10°）の大きさが採用されるだけであり，学習過程として行われる活動の質は同じ活動である．



（図 6）

ここで重要であるのは，どのような一組の直角三角形を持ってきたとしても，学習過程は大きく変わらないということである．それは，一組の直角三角形という現象が任意単位，あるいは普遍単位ですべての角を表現することができるという仕組みを含んでいるからである．つまり，児童生徒に「再発明」させたい数学の仕組みを含んでいる現実の現象から数学学習が始められなければならない．「再発明」とは，歴史の解釈であると述べたように，Freudenthal は，まだ誰も発見していない新しい数学を発見させることを期待しない．そして，数学学習は教師主導でなければならないと述べたように，児童生徒は，教師が「教授学的思考実験」において構想した，仕組みを持った数学を学ぶのである．ゆえに，平らな板であった現実の現象を児童生徒の活動で削っていくが如く，問題が本来持っている仕組み（構造）を浮かび上がらせていくことこそ，氏がよいとする数学学習であると考えられる．このことはともすれば，組織化の辞書的な解釈からすると，*systematization* の意味での活動に近しいと解釈されるかもしれない．しかし，数学学習は，児童生徒主体でなければならないと述べたように，実際の学習過程は，あたかも児童生徒が，数学の仕組みを発明したかのように進められる．このような活動こそ氏がよいとする組織化であると考えられる．そして，児童からすると，1 を単位にして角の大きさを組織化することを自身で発明することから，そこでの活動は本質的に *organization* の意味での活動であると考えられる．ゆえに，Freudenthal は組織化を語るとき *organization* を用い，この活動は，数学を作り上げていくという「数学の数学化」を特徴づける活動であると考えられる．「現実の数学化」についても，単に記号の世界へ導くことという意味ではなく，数学的な洗練にアクセス可能な構造に組織するという，*organization* の意味での活動として特徴づけることができる．

以上から，

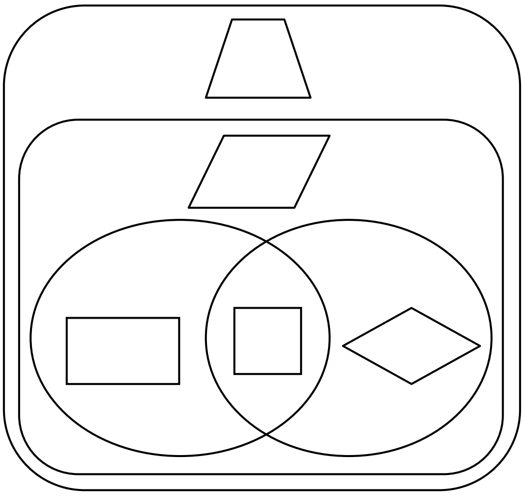
ready-made 数学の学び方＝*systematization*

acted-out 数学の学び方＝*organization*

と解釈されるかもしれないが，単純にそういうわけではない．確かに，*acted-out* 数学の学び方は，*organization* と表現することができるが，Freudenthal は，よくない活動である *ready-made* 数学の学び方と *systematization* を対応させてはいないと考えられる．なぜなら，「関係を伴った数学」で，多様な論理的関係を持った全体性が学習過程として要請される，と述べたように，ある組織にしたがって整える活動もそれが，生徒の活動として展開されるならよいと考えられる．上述の具体例でいえば，1 組の直角三角形が作成可能な 1 という大きさに基づいていることが *organize* された後，そ

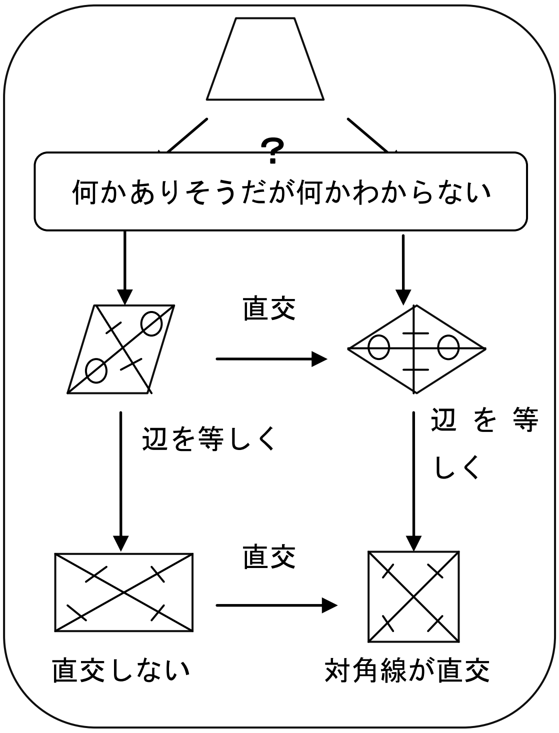
の１も含めた表で演繹的に分析することは *systematization* であると考えられる．そして，実際に表で表現できるが操作上不可能な大きさがあることを認識することや，さらに細かい大きさを表現する必要性を意識化できるとき更なる構造（普遍単位）へと *organize* されると考えられる．このように，*organization* の過程には，*systematization* が深く関連しており，どちらの活動がよいというわけではなく，Freudenthal は，双方を関連させた組織化として *organization* を用いているにすぎないと考えられる．ただ，*systematization* の場合の構造は，児童生徒の活動から構成されたものでなければならないことを付言しておく．

Freudenthal は，自身がよいとする活動について 2 点述べている．その一つは数学をすることである．これは，以上で述べた一つの仕組みを再発明していくという，一連の「組織化」を意味する．そして，もう一つの活動が「練り直す」という活動である．これは，一度作り上げたしくみを別の観点から再組織化する活動である．なぜなら，数学は「人間の活動」として学ばれなければならず，数学の活用可能性を保障しなければならないことから，様々な観点により数学を組織する活動が数学学習で取り扱われなければならないからである．このような再組織化の場合も「教授学的現象学」という概念に基づいて事前検討が行われなければならないことはもちろんであるが，実際の授業では，児童生徒にとっての全体の中で，例えば，どれを定義として選ぶか，ある定理をどのように配列するかを児童生徒自身で決めさせたい．このとき，ある一つの全体性しか扱わないのであれば，練り直すということの説明として不十分である．例えば，中学校までで取り扱う平面図形の定義の仕方を例として述べる．平面図形の包含関係は，一般的に（図 7）のように表される．



（図 7）

これは，平行，辺の相等，直角という観点により定義された包含関係であり，実際の教授では，図 7 の様々な形を与え，その性質の中から *organization* される．このとき，図形の性質の中で，対角線という性質は使われていない．そのため，「対角線は使われてないけど，対角線でこの図の関係を考え直してみても同様の関係になるのだろうか」ということを意識化させることにより，対角線という構造により組織する，*systematization* の活動へ移行すると考えられる．この活動を経ることで，例えば，正方形は，対角線が直交し，対角線がそれぞれの中点で交わり，その線分の長さが全て等しい形として定義でき，平行四辺形は，対角線がそれぞれの中点で交わる形として定義できる．このような対角線という構造で，上記の包含関係を見直してみると，（図 8）のようになる．



（図 8）

このような全体性で組織し直すことで，今まで見つけていなかった形によって（？）の場所がうまく組織されるのではないかと推測できる．この意識化を図ることで，たこ形やくさび形といった形の発明が期待できる．これは，たこ形やくさび形の構造を *organize* したとも言え，ここでも，Freudenthal が *organization* と *systematization* の双方を関連させた組織化として *organization* を用いているにすぎないことがうかがえる．

そして，この練り直すという活動は，その中で行われる数学的な見方・考え方はもちろんのこと，その前後にどのような現象との関連を教師が構想するかによって，どのような全体性を採用するかが変わってくるはずである．要点は，「どの関係が育成され，強化されるべきかを知ることである」．(Freudenthal, 1973. p.75)

今後の課題

Fruedenthal は児童生徒集団の機能についてどのようにとらえるか検討することが残されている．

注

（注１）大高（1998）では，「科学教育論」を，自然科学をその中心的な内容とする教科の教育についての理論を意味するのに対し，「科学教授論」は，そうした教科の教授を主たる対象にした理論や考えをいう意味で用いている．

（注２）Freudenthal の「思考実験」とは，「再発明」に基づく教授に先立ってなされる，教授者の教授に関する思考上の実験であることを伊藤(2005)が明らかにしている．そして，「思考実験」では，予想される学習者の疑問や，それに対する解決策や助言の仕方といった，発明に至るまでの教授のあり方や，長期的な学習過程の水準構造が検討される．

（注３）塩見拓博(2008)．Freudenthal 数学教育論における数学観 ―Brouwer からの影響に焦点をあてて―．鳥取大学数学教育研究，10

（注４）まず，具体的な事例を述べる前に児童の既習事項を確認しておく．

・本時は，小学校第４学年，「角とその大きさ」（啓林館）の単元の導入場面である

・直角については，第３学年で学んでいる

・割合の考え方の素地経験として，関係する数量の一方を２倍すれば他方も２倍する考え方や，ある数量を１とみたときに他の数量は２と表すことができるという考え方について学んでいる（松下，2007 鳥取大学数学教育研究，10 pp14-17）

このような児童に対する授業を考える．

本時のねらいは，与えられた角の大きさから共通単位を設定し，できる角，できない角を論

証することである．このとき，複数の三角形間に等しい角の大きさがなければ，他の角の大きさを相対的に表現することは難しいと考えられる．そして，直角は既習であり，数学学習の出発点として，児童にとって現実的である現象が採用されなければならないことから，本時の問題は（図１）のように提起される．

（注５）『WEBSTER’S NEW WORLD DICTIONARY』では次のように述べられている．

組織化する（Systematize）：（p. 1445）

ある組織の中に形成する（整列する），組織に従って整える

to form into a system; arrange according to a system

組織化する（Organize）：(p. 1002)

ある organic structure(有機的な構造）を与える（もたらす，生じる）こと

a) orderly（きちんとした）方法で整えること．（会議資料を組織する）

b)統一され（統合され），筋の通った関係を持った全体をつくること．（随筆を組織する）

To provide with an organic structure

a) to arrange in an orderly way [to organize office records]

b) to make into a whole with unified and coherent relationships [to organize an essay]

引用参考文献

大高泉（1998）．ドイツ科学教育論研究．共同出版．

Freudenthal, H.（1962）. Logical Analysis and Critical Survey, In H.Freudenthal(Ed), Report on the Relations between Arithmetic and Algebre, J. B. Wolters.

Freudenthal, H.（1968）. Why to Teach Mathematics so as to be Useful, *E.S.M, 1*(1/2)

Freudenthal, H.（1970）. 数学を鑑賞する. 平凡社.（矢野健太郎訳）

Freudenthal, H.（1971）.Geometry Between the Devil and the Deep Sea, *E.S.M, 3*(3/4)

Freudenthal, H.（1973）. Mathematics as an Educational Task , D.Reidel.

Freudenthal, H.（1978）. Weeding and Sowing: Preface to a Science of Mathematical Education, D.Reidel.

Freudenthal, H.（1983）. Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, D.Reidel.

Wittmann,E.C.(2005).Realistic Mathematics Education- Past and Present, *Nieuw Archief voor Wiskunde, 6*(4), 294-296.(真野裕輔訳)

岡田禕雄（1977）. H.Freudenthal の数学教育論(Ⅰ). 広島大学教育学部紀要，3(26)，1-9.

岡田禕雄（1978）. H.Freudenthal の数学教育論(Ⅱ). 広島大学教育学部紀要，2(1)，103-111.

岡田禕雄（1979）. H.Freudenthal の数学教育論(Ⅲ). 広島大学教育学部紀要，2(2)，81-86.

岡田禕雄（1981）. H.Freudenthal の教授学的現象学の概念. 数学教育学研究紀要，7，53-55.

礒田正美（2003）．「H.Freudenthal の数学的活動論に関する一考察―Freudenthal 研究所による数学化論との相違に焦点を

当てて—」『筑波大学教育学系論集』27巻, pp.31-48.

磯田正美(1984). 「数学化の見地からの創造的な学習過程の構成に関する一考察：H.Freudenthalの研究をふまえて」『筑波数学教育研究』3巻, ｐｐ. 60－71

伊藤伸也(2003). H.フロイデンタールの再発明原理を支える数学観. 日本科学教育学会年間論文集, 27, 277-278

伊藤伸也(2005). Ｈ. フロイデンタールの数学教授学における「思考実験」. 日本科学教育学会年間論文集, 29, 447-448

伊藤伸也(2004). H.フロイデンタールの数学教授論における”re-invention”の概念について. 日本科学教育学会年間論文集, 28, 591-592

伊藤伸也(2005). Ｈ. フロイデンタールの数学教授学における「数学化による領域の組織化」の概念. 日本科学教育学会

伊藤信也(2005). H.フロイデンタールの「教授学的現象学」における教授原理「追発明」の位置. 筑波数学教育研究, 24, 47-56

伊藤伸也 (2006). H.フロイデンタールの教授原理「追発明」と「発見学習」の異同. 数学教育論文発表会論文集, 39, 625-630.

伊藤伸也 (2006). H.フロイデンタールの教授原理「追発明」と「発見学習」の異同. 数学教育論文発表会論文集, 39, 625-630.

伊藤信也(2007). H.フロイデンタールの数学観とその背景. 筑波数学教育研究, 26, 47-56

飯田隆 (1995). Readings in the Philosophy of Mathematics : After Godeled.勁草出版

高橋等(2003). 子どもの算数・数学的活動を大事にする, 湧き出させる. 上越数学教育研究, 18

柳本成一 (1997). Freudenthalの数学教育の問題 (major problems) を考えるための思考活動について. 第30回数学教育論文発表会論文集, 673-674

小林廉 (2006).「数学化すること」を重視した授業設計に関する研究:Realistic Mathematics Educationを手がかりとして. 数学教育論文発表会論文集, 39, 721-726.

哲学・思想事典. 岩波書店

佐々木力 (2001). 二十世紀数学思想. みすず書房

溝口達也(2007). 算数・数学学習指導論. 鳥取大学数学教育学研究室

Goffree, F. “HF: Working on Mathematics Education,” Educational Studies in Mathematics, 25, 1993, pp.21-49

Gravemeijer, K. & Terwel, J. “Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory,” Journal of Curriculum Studies, 32(6), 2000, pp.777-796.

山口潤一郎 (1995)「H.Freudenthalの教授学的現象学に関する内容学的研」『中国四国教育学会教育学研究紀要』第2部, 42, pp. 178－183

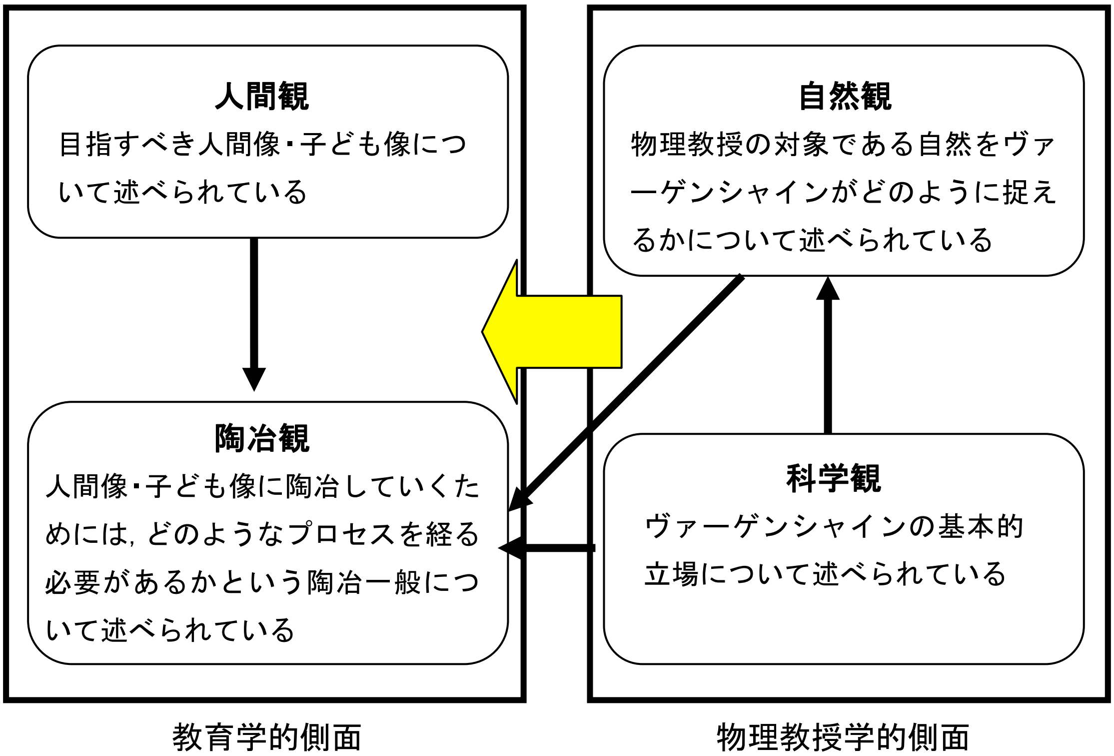
山口潤一郎 (1996)「H.Freudenthalの教授学的現象学に関する内容学的研 (2)」『中国四国教育学会教育学研究紀要』第2部, 42, pp. 178－183

塩見拓博 (2007). Freudenthalの数学教育論における一考察 —基底的観念の検討を通して—. 第40回数学教育論文発表会論文集

塩見拓博(2008). Freudenthal 数学教育論における数学観 —Brouwerからの影響に焦点をあてて—. 鳥取大学数学教育研究, 10

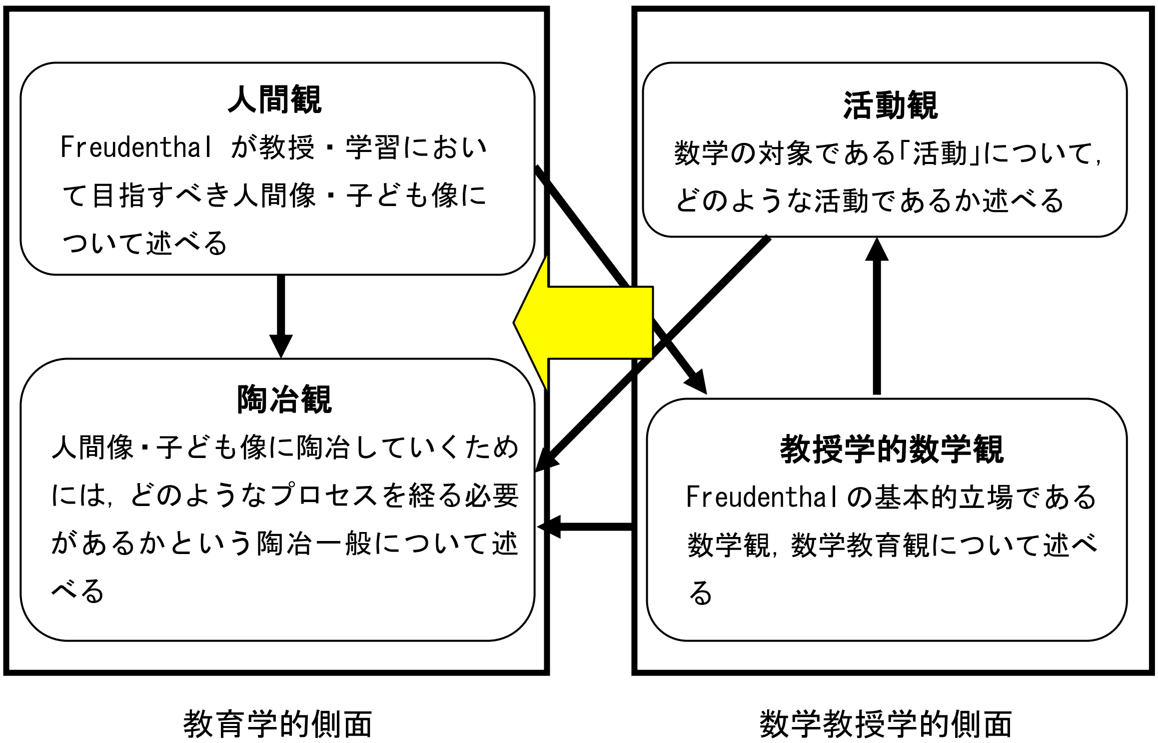
資料１

ヴァーゲンシャイン科学教育論における「基底的観念」



図Ⅰ

Freudenthal 数学教育論における「基底的観念」



図Ⅱ

Freudenthal 数学教育論における子ども観，陶冶観

子ども観：（目指す子ども像）
主体性を持った人間

Freudenthal にとって語「陶冶」とは，何かを学ぶ過程である

学ぶことを開始し，活動を継続する必要がある

関係を伴った全体として形成される

数学教育観：児童生徒主体・教師主導

多様な視点を数学の活用を保障する

Freudenthal 数学教育論における教授学的数学観

「人間の活動としての数学」：
数学は人間の活動として学ばなければならない

具体的にどのような活動がよいか

関係を伴った数学：
現実とのつながりを強調し，数学内のつながりについても演繹的関係に制限されない多様な論理的関係が要請される

このような学習過程はいかなる特徴を有するか

児童生徒主体・教師主導：
学習は，児童生徒が主体であるが，教師が適切に児童生徒の活動を導いていかなければならない

学習過程の不連続性：
学習過程は水準によって構造化され，水準間は，生徒が必要性を認識し，自身の活動の「意識化」と「反省」により水準上昇が図られる

そのような学習過程をどのように構想するか

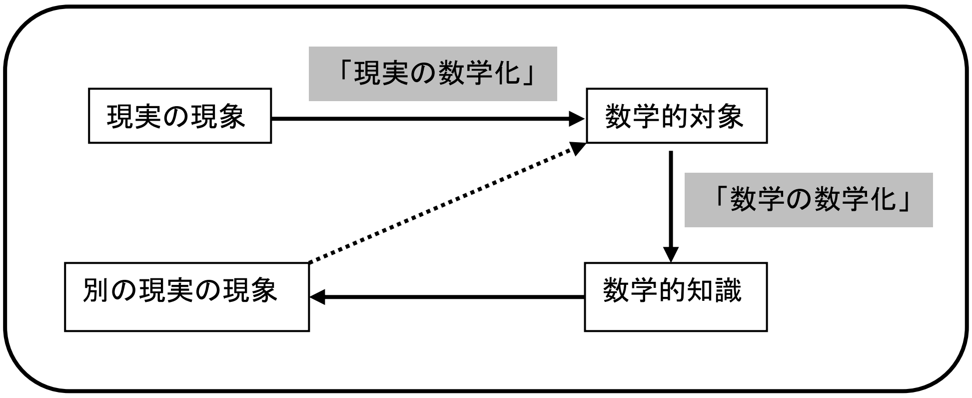
「教授学的現象学」：
数学的対象の“re-invention”を実現するために，教授者が，ある生徒を思い描き，その生徒が発明へと至るふるまいを心的に観察することで，発明に必要な前提要件を求める心的実験を行わなければならない

Freudenthal 数学教育論における活動観

数学化

「現実の数学化」: 生活経験や，自然科学などの現実を数学的対象にすること，生活の世界から記号の世界へ導くことである

「数学の数学化」: そうしてできた数学的対象を操作することで，数学的な概念，手法を発明すること



関係を伴った数学

組織化

・「経験の領域を組織化すること」に数学的活動の本質がある．つまり，Freudenthal は「数学化」を「組織化」によって特徴づけようとしている．

○一つの数学を作り上げる活動

「現実の数学化」の本質的活動

「(現実の現象を)数学的な洗練にアクセス可能な構造に組織すること」(Freudenthal, 1973. p.133)

「数学の数学化」の本質的活動

教師が思考実験において構想した，仕組みを持った数学を *acted-out*（浮き彫り）にする活動．数学に，ある *organic structure*（有機的な構造）を与えること，ある基準となりえるであろう組織を作り上げていくこと，あるいは，その組織にしたがって活動を整えることを意味する．

○一つの数学を作り上げる活動から継続する活動

「練り直す」という活動：また別の観点から組織する．

この場合も *organization* と *systematization* の双方を関連させた組織化が要請される

資料２：学習過程の詳細
鳥取県　山の上小学校教員　久城達也氏が作成した指導案をもとに，筆者が補足を加えて作成した．

（枠内に書いている内容が水準である）

現実の現象（三角定規）

児童の活動：三角定規の頂角を組み合わせて，様々な大きさを作ろうとするが，それがどのような大きさであるか表現できない

教師の支援：今のままでは角を組み合わせてもどのような大きさかわからないね．それぞれの角は他と比べてどのような大きさなのかな．（生徒が自由に使えるよう，紙製の三角定規を配布する）

発見的構成の視点：このような教師の支援により，三角定規のそれぞれの頂角を数値で表現しなければならないと「意識化」させ，生徒の加え足すという活動を「反省」させることで，次の活動を行うことができる．このことから，生徒は次の水準を発見できる

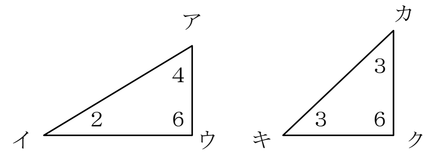
児童の活動：三角形を重ね合わせるという操作的活動によって，角の相対的な大きさを表現する

一つの三角定規の相対的な角の大きさを簡単な数値で表現できる

教師の支援：同じ直角が別の数値になっていると，組み合わせるときに大変そうだね．２つの三角定規に共通する表し方を考えよう

発見的構成の視点：このような教師の支援により，角を組み合わせる際の不都合を「意識化」させ，同じ直角の大きさを別の数値で表している活動を「反省」することにより，次の活動を行うことができる．このことから生徒は次の水準を発見できる

児童の活動：直角に着目し，相対的な角の表現をよりよくしようとする



このように表現することができる

児童の活動：ランダムに組み合わせる

教師の支援：１の大きさは作れないの．12以上の大きさは作れないの

児童の活動：より多くの角度を作ることができる

教師の支援：できる角は本当にこれだけ．全部調べたことを説明できるようにしよう

発見的構成の視点：このような教師の支援により，ランダムに組み合わせるだけでは不十分であることを「意識化」させ，そのような活動の「反省」を行うことで，組織的に考えるという活動を行うことができる．このことから生徒は次の水準を発見できる

児童の活動：一つの角度を固定し，足し引きを考える．表のマトリクスで考える．

組織的に調べることができる

教師の支援：11 の大きさは本当にできないの．１という大きさを加えて表を作り直すとどうなる

発見的構成の視点：このような教師の支援により，一度作成した角を用いることでまだできる角がありそうだということを「意識化」させ，一度組織的に考えた活動を「反省」することにより，より多くの要素をもった表を作成するという活動を行うことができる．このことから生徒は次の水準を発見できる

児童の活動:1 を含めて表を再組織化する．また，今までできなかった角を作ろうとする

一度できた角も含めて，再び組織的に調べることができる

教師の支援：表にでてくる組み合わせは本当に全部できるの．例えば６－１は作れるの．

児童の活動：表の数値だけで考えた組み合わせをもう一度三角定規で考えることで，できる組み合わせとできない組み合わせがあることに気づく

教師の支援：0～24 の大きさは全部作れるのかな．例えば 2 の大きさの余っている部分（補角）の大きさって何かな．全部できるなら，その説明を考えよう

発見的構成の視点：このような教師の支援により，今までできないとしていた大きさが補角という考え方を用いるとできるかもしれないと「意識化」させ，表に表した数値を「反省」することで，再びすべての大きさを作成するという活動を行うことができる．このことから生徒は次の水準を発見できる

0～24 の大きさを作成でき，0～12 の大きさが作成できれば，13～24 の大きさも作成できることを説明することができる

鳥取大学数学教育研究　　**ISSN 1881-6134**

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/journal.html

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。
  - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
  - 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
  - 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
  - その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/