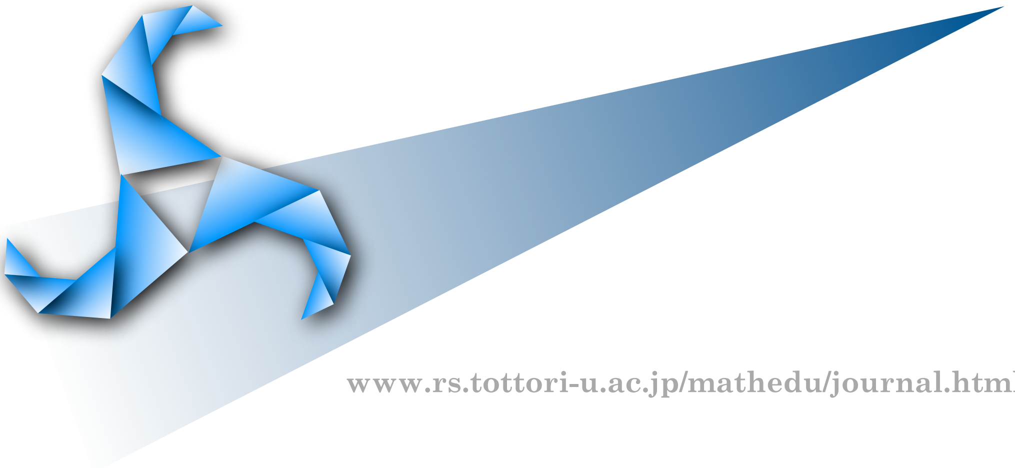
ISSN 1881-6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education



www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/journal.html

Freudenthal 数学教育論に関する研究

–基底的観念に基づく数学の陶冶価値に着目して–

塩見拓博

vol.11, no.4

Feb. 2009

鳥取大学 数学教育学研究室

目次

第１章

本研究の目的と方法

本章では，研究の目的と方法について述べる．

1.1 では，本研究の動機と背景を述べる．1.2 では本研究の目的とその目的を達成するための課題を述べ，1.3 ではその課題の解決の方法を述べる．また，1.4 では本研究の構成を述べる．

1.1. 研究の動機

・数学を理解するとはどういうことか.

・理解過程とはどのようなものであるか.

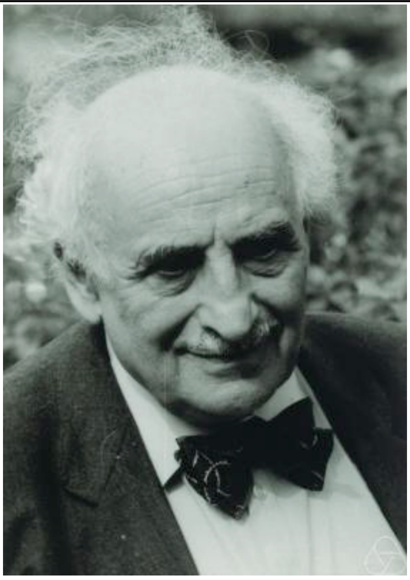
これは，筆者のはじめの関心事である．数学教育において，理解を研究する際，すでに出来上がった知識を脳内に焼き付ける学習を考えることは生産的ではなく，数学を作り上げていく学習を考えなければならないことは周知である．この数学を作り上げていく過程の一方策が数学化という用語に集約され，この数学化を世界的に早期から提唱した数学教育者がオランダの Hans Freudenthal（1905-1990）である.

数学の理解過程，創造的な学習過程，問題解決過程など，わが国では，数学の学習過程に対し，様々な言われ方がされる．しかし，どのような言われ方にせよ，数学を作り上げていく学習過程が要請されるであろう．それは，わが国が伝統として活動を重視してきていることから示唆される[(1)]．そのため，同じく活動を重視している Freudenthal の数学教育論からは，なんらかの示唆が得られることが予想される．このとき，Freudenthal の「数学化」とはどのような概念であり，Freudenthal はどのような教育的価値判断の基，「数学化」を唱導しているのであろうか.

これが，本研究の動機である.

1.2. 研究の目的

Hans Freudenthal は優れた数学者であり，優れた数学教育学者でもあった．Freudenthal が数学教育者へ転向するきっかけとなったものが，「公理体系を象徴する集合と構造を基礎に教育課程を再構成しようする *New Math* 運動に対する反動においてである.」（磯田,2003. p.31）そのころ氏はオランダの代表者として *ICMI (THE INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICAL INSTRUCTION)* の一員となり，最終的に 1966 年から 1970 年まで会長の職を務めている．その仕事の一環として，1968 年に『*How to teach mathematics so as to be useful*』という論文を伴い，現在，国際的な数学教育における最も権威ある雑誌として知られている『*Educational Studies in Mathematics*』を出版し，その中で一貫して，数学とは活動であるという認識を表明した．そして，1971 年には，*IOWO(Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs)*の管理者の職にもついている．また，*ICMI* は 2004 年の数学教育国際会議で Freudenthal の名を冠する功績賞を設けていることからも，Freudenthal が，世界の数学教育界に残した足跡の大きさを伺い知ることができる．今日では，氏の数学教育思想に基づいた Realistic Mathematics Education (RME) が提唱され，世界的に注目されており，Freudenthal の数学的活動論や RME の数学的活動論は，我が国の研究でも度々参照されている(2).


Hans Freudenthal（1905-1990）

現在，Freudenthal の数学教育における諸概念は明らかになってきているものの，それらの諸概念が Freudenthal のどのような観念に基づいた概念であるか，それらの諸概念間はどのような関連を有するか，Freudenthal 数学教育論としてどのようなまとまりを持つかというように Freudenthal の諸概念を構造的体系的に捉える研究は十分議論さ

れているとはいえない．そして，構造的体系的に議論されるべき概念である数学の「陶冶価値」[(3)]についても同様である（第 2 章で詳述する）．そのため筆者は，Freudenthal の数学教育論を構造的体系的に組織し，その体系における数学の「陶冶価値」を明らかにすることを目的とする．

ある人物の教育論の組織化を考えるとき，どのように組織化すれば教育論を構造的体系的に組織することになるかを明らかにする必要がある．したがって，次の研究課題が要請される．

研究課題Ａ：いかなる枠組みを用い，Freudenthal 数学教育論を構造的体系的に組織するか

ある人物の教育論を構造的体系的に組織化している研究として，大高（1998）の研究がある．大高（1998）は，諸概念を明確に捉えるためには，その人物の基底にある観念との関連において諸概念を捉えなければならないと述べ，教育論は一般に陶冶価値を実現する理論の総体であると述べる．これは Freudenthal 数学教育論にも当てはまると考えられることから，Freudenthal 数学教育論における「基底的諸観念」を明らかにするとともに「基底的諸観念」との関連の中で Freudenthal の諸概念を捉える必要がある．したがって次の研究課題が要請される．

研究課題Ｂ： Freudenthal 数学教育論の基底にはいかなる観念が位置づくと想定されるか

このとき，第 3 章で詳述するが，Freudenthal 数学教育論の「基底的諸観念」として，教授学的数学観，活動観，人間観・子ども観，陶冶観が位置づくと考えられ，このような「基底的諸観念」に基づき，諸概念および数学の陶冶価値を明確にし，それらを組織化することで Freudenthal 数学教育論の構造的体系的な組織化が図れると

想定できる．

Fredenthal は自身の教授原理を「再発明」であると表明している（第 4 章）．この「再発明」原理は，文字通り Freudenthal が構想する数学教育過程を貫く原理であるため，「再発明」原理の基底には，Freudenthal の教授学的数学観（数学観，数学教育観を合わせて，教授学的数学観と呼ぶ；第 4 章）が位置づくと考えられる．このような教授学的数学観を明らかにすることで，「再発明」原理を明確に捉えることができると想定される．したがって，次の研究課題が要請される．

研究課題Ｂ－１：Freudenthal 数学教育論における教授学的数学観とは

教授学的数学観が明らかにされたとしても，Freudenthal 数学教育論における学習過程が詳細に述べられるわけではない．この学習過程について，Fredenthal は「数学化」という活動を強調する（第 4 章）．したがって，Freudenthal 数学教育論として，「数学化」とはいかなる活動であり，どのような学習過程（活動過程）が要請されるかが次に述べられなければならない．このことから次のような研究課題を設定する．

研究課題Ｂ－２：Freudenthal 数学教育論における活動観とは

このような研究課題Ｂ，Ｃを解決することにより，Freudenthal 数学教育論における数学教授学的側面が規定される．では，このような数学教授学的側面はどのような陶冶価値を有するか．教育論は一般に陶冶価値を実現する理論の総体であると述べたように，教育論として体系化するためには陶冶価値が述べられなければならない．このとき，Freudenhtal が人間・子どもをどのような存在として認識するだろうか，そして，語「陶冶」をどのような意味で用いるだろ

うかを，数学の陶冶価値を論じる前に明らかにしておく必要がある．したがって次のような研究課題が要請される．

<u>**研究課題Ｂ－３**：Freudenthal 数学教育論における人間観・子ども観とは</u>

<u>**研究課題Ｂ－４**：Freudenthal 数学教育論における陶冶観とは</u>

以上で明らかとなった Freudenthal 数学教育論の「基底的諸観念」を踏まえることで，Freudenthal 数学教育論における数学の「陶冶価値」を構造的体系的に捉えることができる．したがって次の研究課題が要請される．

<u>**研究課題Ｃ**：Freudenthal 数学教育論における数学の「陶冶価値」とは</u>

これらの研究課題を解決することで，本研究の目的は達成される．

1.3. 研究の方法

本研究は，Freudenthal の数学教育論を構造的体系的に組織し，その体系における数学の「陶冶価値」を明らかにすることが目的である．そして，この目的達成のために６つの研究課題を設定した．以下，研究課題ごとの方法を記述する．

ある人物の教育論を構造的体系的に捉え，その人物における教科の「陶冶価値」を明らかにしている研究として大高（1998）の研究がある．これは，目的として，筆者の研究と合致するものである．したがって，研究課題Ａに対する方法は，次のように考えられる．

研究課題Ａ：<u>いかなる枠組みを用い，Freudenthal 数学教育論を構造的体系的に組織するか</u>

研究課題Ａに対する方法：大高（1998）が，いかなる枠組みからヴァーゲンシャインの教育論を構造的体系的に捉えているかを見出し，その枠組みを，Freudenthal 数学教育論を構造的体系的に捉えるための枠組みとして用いる妥当性を検証する．

第 3 章で詳述するが，Freudenthal 数学教育論を構造的体系的に捉えるための枠組みとして，「基底的観念」を用いた枠組みを抽出する．そのため，次に，いかなる「基底的観念」が Freudenthal 数学教育論に位置づくかを考察しなければならない．

研究課題Ｂ：<u>Freudenthal 数学教育論の基底にはいかなる観念が位置づくと想定されるか</u>

研究課題Ｂに対する方法：ヴァーゲンシャイン科学教育論における「基底的諸観念」に対応する Freudenthal 数学教育論に位置づくであろう「基底的諸観念」を Freudenthal の言明から考察する．そして，それらの「基底的諸観念」間の関係を仮説として設定することで本研究の枠組みを規定する．

前節で述べたように，次に，「再発明」原理の基底にある観念として Freudenthal の基本的立場である教授学的数学観について考察する．

<u>**研究課題Ｂ－１**：Freudenthal 数学教育論における教授学的数学観とは</u>

研究課題Ｂ－１に対する方法：Freudenthal は，直接的にも間接的にも Brouwer からの影響を受けている．しかし，Freudenthal は自身で，Brouwer の影響を裏切ることを表明している（第４章で詳述する）．そのため，この真意を Freudenthal の言明から解することで Freudenthal の基本的立場を明確にする．そして，この基本的立場に基づく他の数学観，数学教育観についても Freudenthal の言明から明らかにし，それらを教授原理である「再発明」の基底にある観念として整理する．

続いて，学習過程の詳細について述べていく．このとき，Freudenthal は数学教育の学習過程における活動を「数学化」という用語で表明している．この「数学化」の定義と学習過程を活動観という観念として述べる．

<u>**研究課題Ｂ－２**：Freudenthal 数学教育論における活動観とは</u>

研究課題Ｂ－２に対する方法：「数学化」の定義とその学習過程を教授原理である「再発明」と教授学的数学観から規定される活動として明らかにする．さらに，「数学化」の本質的活動である組織化の意味を systematization から organization への認識の異動として明確にすることで「数学化」の定義を補完する．

以上で Freudenthal 数学教育論における数学教授学的側面を規定する．続いて，陶冶的側面について述べていく．陶冶とは必然的に人間・子どもと関わるものであるため，まず，Freudenthal が人間・

子どもをどのような存在と捉えているかを述べる必要がある.

研究課題B－3：Freudenthal数学教育論における人間観・子ども観とは

研究課題B－3に対する方法：Freudenthalの教授学習と相補的な観念として，達成が必然的に期待される根本的な人間像・子ども像についてFreudenthalが人間・子どもに関して言及している言明を整理する.

そして，Freudenthalが語「陶冶」を用いるとすればどのような意味で用いるかを明らかにすることも，数学の「陶冶価値」を考察する上で不可欠である.

研究課題B－4：Freudenthal数学教育論における陶冶観とは

研究課題B－4に対する方法：Freudenthalの陶冶に関わるであろう言明から，Freudenthalが語「陶冶」を用いるとすれば，どのような認識の基，この語を用いるだろうかを論述する．そして，教授学的数学観，活動観，人間観・子ども観の観念に基づき，陶冶に関する指標を明らかにする.

そして，これらのFreudenthal数学教育論における「基底的諸観念」の考察を踏まえることで，数学の「陶冶価値」を考察する　　　．このとき，Freudenthalは数学を活動ととらえる基本的立場に立つ．そして，この活動とは，活動観で明らかにするが「数学化」である．したがって，「数学化」の「陶冶価値」を明らかにすることは，Freudenthal数学教育論における数学の「陶冶価値」を明らかにする一方策となりえる．このことから研究課題Fに対する方法を以下のように規定する.

研究課題Ｃ：Freudenthal 数学教育論における数学の「陶冶価値」とは

研究課題Ｃに対する方法：Freudenthal 数学教育論における「基底的諸観念」から導かれる内容により「数学化」の「陶冶価値」が数学の活用・活用可能性にあることを論述する．また，その陶冶作用を述べることで，Freudenthal 数学教育論における「数学化」の「陶冶価値」の構造を明らかにする．

これらの研究課題を解決し，以下のように組織化することで本研究の目的を達成する（第 3 章で詳述する）．

まず，研究課題 A を解決することで研究の枠組みを規定する．そして，研究課題 B を解決することで Freudenthal 数学教育論における「基底的諸観念」としての仮説を立てる．これに基づき以下の論を進めていく．Freudenthal は自身の教授原理を「再発明」であると述べることからこの原理について確認し，その基底にある基本的立場を明らかにする（研究課題 B-1）．次に教授原理 である「再発明」と教授学的数学観から規定される活動について明らかにする（研究課題 B-2）．以上で Freudenhtal 数学教育論における学習過程が組織される．これに続き，Freudenthal 数学教育論における陶冶的側面を述べていく．まず，Freudenhtal が人間・子どもをどのように捉えているかを述べ（研究課題 B-3），陶冶をどのように捉えるだろうかという陶冶観について明らかにする（研究課題 B-4）．そして，これらの「基底的諸観念」に基づく数学の「陶冶価値」を明らかにすることで Freudenthal 数学教育論の構造的体系的な組織化が可能となる（研究課題 C）．したがって本研究の目的が達成される．

1.4. 本論文の構成

本論文は第 1 章から第 6 章の 6 つの章から構成されている.

第 2 章では,Freudenthal の諸概念について考察されている先行研究を概観することで，先行研究の知見を整理すると共に，十分に議論されていない Freudenthal の諸概念を明らかにする.

第 3 章では,本研究の枠組みを示す.このとき,3.1 では,大高(1998)が，いかなる枠組みからヴァーゲンシャインの教育論を構造的体系的に捉えているかを見出し，3.2 では，その枠組みを，Freudenthal 数学教育論を構造的体系的に捉えるための枠組みとして用いる妥当性を検証する.

第 4 章では，Freudenthal 数学教育論における「基底的諸観念」について述べる．4.1 では，Freudenthal の教授原理である「再発明」を，先行研究の知見を基に確認する．4.2 では，Brouwer の数学観との相違から Freudenthal の数学観を明確にし，それらを「再発明」原理の基底的観念として整理する．4.3 では,「再発明」原理と教授学的数学観から「数学化」の定義とその学習過程を規定するとともに，組織化という視点から「数学化」の定義を補完する．4.4 では，Freudenthal の教授学習と相補的な観念である根本的な人間像・子ども像について述べる．4.5 では，Freudenthal が語「陶冶」を用いるとすればどのような認識の基，用いるだとうかを述べるとともに，教授学的数学観，活動観，人間観・子ども観の内容から，陶冶を特徴づける.

第 5 章では，Freudenthal 数学教育論における数学の「陶冶価値」とその陶冶作用について述べる．5.1 では，Freudenthal 数学教育論における「基底的諸観念」から導かれる数学の「陶冶価値」である数学の活用・活用可能性について述べ，5.2 では，数学の「陶冶価値」を保障する決定的陶冶作用が，数学を人間の活動と認識できることにあることを示す.

第 6 章では，本研究の結論と今後の課題について述べる.

本論文の構成を図示したものが次ページの図１である.

第１章　：　本研究の目的と方法

本研究の目的：Freudenthal の数学教育論を構造的体系的に組織し，その体系における数学の「陶冶価値」を明らかにすること

第２章　：　先行研究の評価と課題

Freudenthal の諸概念に関する先行研究として，組織化という視点からの「数学化」の解釈と，数学の「陶冶価値」という概念が十分に議論されていないことを示す．
この先行研究から得られた知見が本研究の目的を設定した所以である．

第３章　：　本研究の枠組み

研究課題Ａ：教育論を体系化する枠組みとして基底的観念，陶冶価値という視点を用いた枠組みを抽出する．

研究課題Ｂ：　Freudenthal 数学教育論における「基底的諸観念」として，教授学的数学観，活動観，人間観・子ども観，陶冶観という観念が想定できることを示す．

第４章　：　Freudenthal 数学教育論における「基底的諸観念」

数学教授学的側面

「再発明」原理：先行研究の知見に基づき構成する．

研究課題Ｂ－１：Brouwer の数学観との相違から Freudenthal の数学観を明確にし，「再発明」原理の概念を補完する．

研究課題Ｂ－２：「数学化」の概念を組織化という視点から明らかにし，その学習過程について示す．

陶冶的側面

研究課題Ｂ－３：教授学習と相補的な観念として人間・子どもについて述べる．

研究課題Ｂ－４：Freudenthal が語「陶冶」をどのように用いるだろうかを述べる．

第５章　：　Freudenthal 数学教育論における数学の「陶冶価値」

研究課題Ｃ：数学の「陶冶価値」が数学の活用・活用可能性にあることを示す．

第６章　：　本研究の結論

（図１）

注

（１）磯田(2003)は,「日本の教育課程上,数学的活動が,Dewey(1916)による「生存(life)とは環境に対する活動 (action)を通じての自己更新の過程である(p.2)」という教育学的な意味での活動観と融合し，自己更新の過程と位置づけられたのは，昭和22 年の学習指導要領算数科数学科編（試案）においてである（磯田，1999)」(磯田，2003. p.44) と述べている．そして，このような数学を活動と捉える考え方は，平成 10 年の中学校学習指導要領解説―数学編―でも踏襲されたことを述べていることから，わが国では伝統的に活動を重視してきていると考えられる．また，磯田（2003）は，この考え方が Freudenthal の活動観と重なることも述べている．

（２）Freudenthal の数学教育論を解説した研究

岡田禕雄（ 1977,1978,1979,1981），磯田（2003）

山口潤一郎（1995,1996）,柳本(1997)

伊藤伸也（2003,2004,2005a,2005b,2006,2007a,2007b）

わが国の数学学習過程に対し Freudenthal の数学化からの知見を得ようとする研究

磯田（1984）

我が国の数学学習過程に対し RME からの知見を得ようとする研究

小林（2006,2007）

（３）本研究は，大高（1998）の教育論を体系化する枠組みを参照している．その中で，大高氏は「陶冶価値」という用語をある教科の教育的意義（価値）という意味で用いており，本研究でもこの意味で「陶冶価値」を用いる．

第１章の引用文献

大高泉 (1998). 『ドイツ科学教育論研究』.共同出版.

Freudenthal, H. (1968). “Why to Teach Mathematics so as to be Useful”, *E.S.M, 1, 2*.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task* , D.Reidel.

磯田正美（1999）．「数学的活動の規定の諸相とその展開」，『日本数学教育学会誌』．81, 10-16.

礒田正美（2003）．「H.Freudenthal の数学的活動論に関する一考察 —Freudenthal 研究所による数学化論との相違に焦点を当てて—」，『筑波大学教育学系論集』．27, 31-48.

第２章

先行研究における Freudenthal の諸概念

2.1. 教授原理 :「再発明」
2.2.「現実の数学化」と「数学の数学化」
2.3. Freudenthal の数学観
第 2 章の要約

本章では，Freudenthal の諸概念について明らかにされている先行研究を概観することで，Freudenthal の諸概念に対する課題を明らかにすることを目的とする．

2.1 では Freudenthal の教授原理である「再発明」，2.2 では Freudenthal 数学教育論における中心的活動である「数学化」，2.3 では Freudenthal の数学観についてそれぞれ，先行研究における知見を整理する．

Freudenthal の諸概念を明らかにしようとした研究として，以下の研究があり，本章ではこれらの研究を概観することにより， Freudenthal の諸概念に対する課題を明らかにする.

Freudenthal の数学教育論を解説した研究

岡田褘雄（1977,1978,1979,1981），磯田正美（2003），山口潤一郎（1995,1996），伊藤伸也（2005a,2005b,2006）

2.1. 教授原理：「再発明」

伊藤氏は,Freudenthal 数学教授論を組織するという筆者と同様の研究目的に立っており，伊藤（2006）では，Freudenthal の教授原理である「追発明」と，Freudenthal が批判した「発見学習」を支える数学学習の原理との異同を明らかにすることで「追発明」[1] 概念の明確化を図っている．この研究の結論が以下である.

ディーンズの「発見学習」では，数学的構造を具体化したゲームを通じ，それ自体では数学の有用性を求めない抽象化が許容されていた．しかもこうした前数学的な活動に重点をおいている．これに対し，Freudenthal は，発見の対象が子どもにとってまったくなじみのない現代数学の高度な抽象的概念である必要は必ずしもないことを指摘し，自らの数学的活動を反省しない学習過程について批判することを明らかにしている．そして，Freudenthal の「追発明」とは，現実の世界の現象を組織化する，数学の有用性を顧慮した「現実の数学化」を要請しており，さらに，「現実の数学化」のみならず「数学の数学化」をも含めた一連の「数学化」をする追体験的活動を要請することを明らかにしている．さらに，伊藤氏は「追発明」について次のように述べている.

> 発明者の歴史的足跡ではなく，今日の学習者に合わせて修正され，適切な軌跡へと導かれた歴史の解釈に沿って行われる活動である．（伊藤，2006. p.627）

これは，数学教授が数学史の順序とまったく同じではなく，歴史上の発見過程における「行き止まりや遠回り」（伊藤，2006. p.627）は取り除かれるべきであり，その当時知られていなかった知識でも，今日の数学学習にふさわしいものは用いるべき，という意味である．このような意味での追体験的な数学化を実現することがFreudenthalの教授原理であると明らかにしている．

磯田（2003）は，Freudenthal研究所における今日の数学化論とFreudenthal自身による元々の数学的活動論とを比較し，Freudenthalの数学的活動が備える特質を確認することを目的としており，この研究の中でも「再発明」原理が同様に解釈されていると考えられる．

> 数学化はその発明の過程が数学的方法による絶え間ない再組織化によるものであることを象徴しており，その活動を学校数学において実現する指導方法が再発明の指導方法なのである．（磯田，2003. p. 33）

これは，所産（体系）を前提に公理から順に積み上げる再生ではなく，「たぶん起こったであろう」（磯田，1984. p.60）歴史的な発明を児童生徒自身の絶え間ない組織化により再発明するという意味である．

岡田（1978）は，Freudenthalの指導原理を明らかにすることを目的とし，Freudenthalがre-discoveryではなく，re-inventionを用いる所以について明らかにしている．また，re-inventionをvan

Hielesの学習水準論により特徴づけている.具体的に,re-inventionと表現する所以を以下の3点にまとめている.

①discoveryには，誰も発見していないものを発見するというsensationalな意味合いが込められている点

②re-discoveryには，ソクラテスの弁証法を想起させる点

③re-discoveryには，文化遺産の伝達を数学教育の目標とする面があり，この考え方が，歴史上登場しない数学も今日の学習指導上ふさわしいものはもちいるべきとするFreudenthalの数学教育観と矛盾する点

そして，re-inventionという用語で再発明する対象について，学習過程が不連続な水準によって構造化されることから，１つ前の水準において 学習した内容を組織する手段が再発明の対象であると明らかにしている．そしてこの水準は，歴史的考察の中から導かれるとしている.

したがって，先行研究では，Freudenthalの教授原理である「再発明」は一貫して，歴史の解釈に従って行われる児童生徒自身の活動（数学化）を学校数学において実現する教授原理として明らかにしている.

2.2.「現実の数学化」と「数学の数学化」

伊藤（2005a）は，Freudenthal の数学教授学における中心的な教授原理である「追発明」に関連する数学的概念を明確化し，構造的に明らかにすることを目的としている．このとき,「追発明」の数学的構成要素として「数学化による領域の組織化」を抽出し，その意味を明確化し，それが教授に与える方向性と機能の検討の上で，その概念の構造とその基底にある観念について考察している．具体的に伊藤氏は，まず,「数学化による領域の組織化」という概念が,「追発明」原理の数学的な構成要素であるとして，組織化の対象となる「領域」と，その方法にあたる「数学化」を吟味している．

その領域とは,「経験された現実（Wirklichkeit, reality)」である．これは，生活経験，自然科学，社会科学といった，学習者が現実世界において関わり経験したことがらを第一に意味する．そして,「現実」は，現実世界とは直接的に関係しない抽象化された，しかし学習者が十分な数学的経験を経た数学的対象をも意味する．このとき，これらの領域を組織する方法である「数学化」とはどのような活動であるかというと，それは,「数学的な手段で現実を組織化する」という活動である．このことから,「数学化」を，第一の意味の現実の領域を組織する活動と，数学的対象という意味の現実の領域を組織する活動に特徴づけている．そして，これらの活動が別々の活動として位置づけられるわけではなく，岡田（1978）と同様，水準によって構造化される一連の活動として位置づけられている．このとき，一連の活動の例として，すべての定理を包含していない局所的体系から，すべての定理を導出しうる公理系を選び出す活動である「公理化」や，その結果得られる大局的な公理化された数学を，日常語を用いずに形式的言語で表現し直す活動である「形式化」があげられている．

磯田(1984)は，創造的な学習過程を構成する際に，Freudenthal の数学化に着目している．

Freudenthal の数学化とは,「蓄積した経験を数学的方法により組織すること」（磯田,1984. p.61）であり,「意識的に高いレベルで組織する」（磯田,1984. p.61）ことが数学化の本質的側面であると述べている．磯田氏は，この活動の歴史的考察における一例として，測量での経験を図形の性質という数学的方法で組織した古代エジプトの幾何学,それに続き，このような図形の性質を証明という数学的方法で演繹的に組織したユークリッド幾何までの一連の活動としてあげている．そして，この例の解釈を一般化し,「ある理論を構成する際に利用される数学的方法（認識方法）を対象化して新しい理論を構成すること」（磯田,1984. p.61）として数学化を規定している．以上から，数学化の過程において，次のようなおおまかなステップを明らかにしている．

①ある理論の構成
②認識方法の対象化（認識方法の反省と意識化）
③新しい理論の構成

そして，学校数学における数学化として，このような局所的組織化の繰り返し， 一つの授業としての学習過程においても水準によって構造化される活動の連鎖として位置づけている．

さらに，歴史的考察から，数学化の特徴を以下の 5 点にまとめている．

(1) 操作の対象化

認識方法に限らず，操作的な性格を備えた数学的方法ならば，すべて考察の対象となる可能性をもっている．

(2) 再構成

ここでいう再構成とは，数学化される前の理論の領域が数学化により得られる新しい理論の領域に含まれていて，前の理論の内容がすべて新しい理論で説明できる場合のことである．

(3) 概念の翻訳

同じ数学の概念であるとしても，扱われる組織次第で，その概念の位置づけが異なる．

(4)数学化の連鎖

数学化は繰り返し行われる活動であり，その繰り返しが数学化の連鎖と見ることができる．

(5)適用による理論の発展

数学化の連鎖が進むにつれ適用（応用）可能性の増大が認められることはあまり議論を要しない．近世までの数学は主に実在に適用されるが，今日の数学は，実在に限らず数学に対する適用もされる．適用されたり適用したりすることを通して数学の理論は発展する．

Freudenthal の「数学化」に関する先行研究では，水準論に基づく活動であるということは述べられているにせよ，そこでの本質的活動である組織化とはいかなる活動であるかが十分議論されていない．

2.3. Freudenthal の数学観

2.3.1. Freudenthal の「教育的視点」

岡田(1977)は，Freudenthal が数学教育論を構想する基本的な考え方について明らかにしている．それは，Freudenthal が数学教育に関する心理学的研究や実践研究の成果についてほとんど関心をはらわないということである．なぜなら，そのような研究が教材をいつ，どこで提示したか，また，指導方法に関するデータが多くの場合ないからである．そして，そのような研究では，主に局所的な研究しか行われておらず，それが，学校数学という全体にどのように適合するかが述べられていないことを問題視している．

以上から，Freudenthal は，「数学の何を教えるべきか」ではなく，「数学をどのように教えるべきか」を強調していると考えられる．岡田(1977)は，この「どのように教えるべきか」ということを「教育的視点」という用語で表現している．それが以下の2点である．

①operational でなければならない

岡田氏は，この言葉を，子どもが操作しやすいという意味を含み，後の学習に利用できるように知識を構成しなければならず，全体によりよく適合するようなカリキュラムを構想しなければならないという意味で用いている．

②発見的でなければならない

これは，数学が児童生徒の主体的な活動により，発見的に数学が構成されなければならないという意味である．

岡田（1979）は，Freudenthal が，数学を単に観念，概念，判断の集合ではないと認識していると考え，特に概念について，Freudenthal が概念形成という用語を嫌い，それに代わるものとして知的対象という用語を好んで用いることを述べている．その理由について，岡田氏はこう述べる．

概念は操作的，活動的でなければならないのである．子供の脳裏に諸概念を焼き付けただけでは数学的な価値は少ない．それらが生きて活動しなければならないのである．そのためには諸概念が生きて活動できるような方法で概念を身につけさせなければならない．知的対象という用語はこのような考え方に基づいて，いわゆる概念形成の過程に焦点をあて，数学的概念は操作的，活動的でなければならないという数学的価値判断のもとに用いられる用語である.（岡田，1979. p.82）

これは，後述する基本的立場である，数学とは活動であるという認識に支えられ た言明であると考えることができ，「教育的視点」という目でこの記述を見てみると，上述の operational でなければならない，発見的でなければならないという「教育的視点」を概念形成において説明したものであると考えられる．この言明に加え，岡田（1979）はさらに，Freudenthal の人間観を引き合いに出し，別の「教育的視点」についても述べている．

学習することのできる生物の学習は，そんなにもまずくしくまれており，非効率的であるので学習には多数例が必要である，という考えはあり得るはずがない．生物の学習は少数の例で十分であるというように，あらかじめしくまれている.（岡田，1979. p.82）（Freudenthal，1978. p.194）

このことから，Freudenthal は，一般的観念，概念，判断が多くの例からの帰納によって得られるという信念に疑問を投げかけており，観念，概念，判断の習得について，comprehension による習得と apprehension による習得が考えられることを岡田氏は指摘する．前者は多数例の帰納による習得の方法を示し，後者は一つの例の学習から直接に習得する方法を示している．このとき，apprehension の場合に取り上げる一つの例を paradigm と呼び，実際，Freudenthal は paradigm の探究に努力している．しかし，すべて apprehension によ

って習得しようと試みているのではない．それは，「概念や態度の習得について apprehensive にできるものと，comprehensive にできるものと領域をはっきり分離する教育学は，学習の進め方をもっと容易にするであろう」（岡田，1979．p.82）（Freudenthal，1978．p.200）という Freudenthal の発言に裏付けられている．

③概念や態度の習得について apprehensive にできるものと，comprehensive にできるものと領域をはっきり分離しなければならない

また，岡田氏は「教育的視点」として，教授学的逆転（didactical inversion）でないか検討しなければならないということをあげている．これは，指導系列に関する問題である．指導内容 A から指導内容 B へという指導系列が，教授学的にみて正しい系列であるかどうかという問題である．正しい指導系列が B から A であるのに，実際の授業では A から B へという系列がとられているとき，これを教授学的逆転と呼ぶ．これは，指導系列を公理論的観点から構成することが，必ずしも教育的な指導系列とはならないということである．そして，教育的な指導系列の検討には，学習過程の観察・分析が重要であることを述べ，集合，数，数概念の関係についての例をあげている．より一般的には，教師と数学の内容を第一次的に重要な要素と考え，子ども自身は第二次的な立場におかれる誤答分析ではなく，子どもの数学の学習過程，子どもと教師との相互作用を第一次的に重要な要素と考え，子どもの学習過程そのものの中に指導原理を見出すような学習過程の観察・分析が重要であると述べている．

④指導系列が教授学的逆転でないか判断しなければならない

岡田（1977，1979）は以上４つの「教育的視点」を明らかにしている．

2.3.2. 学習過程の不連続性

Freudenthal は,活動を「数学化」という用語で表す.そして,磯田(1984)は,その活動は水準によって構造化され,その水準は,van Hiele の思考水準論に基づいていることを述べている.その中で幾何の水準を以下のようにまとめている.

<幾何の水準>

第 0 水準:事物(対象)を形(認識方法)で認識する活動を進める.

第 1 水準:形を対象として形の性質(認識方法)で探る活動を進める.

第 2 水準:形の性質を対象として形の性質間の関係を論理的に順序付けた命題(認識方法)を構成する活動を進める.

第 3 水準:命題を対象として命題間の関係を証明(認識方法)する活動を進める.(例:ユークリッド幾何の構成はこの水準である)

第 4 水準:証明を対象として形式的推論(認識方法)による体系を構成する.(例:ヒルベルトの幾何の構成はこの水準にある)

この思考水準は子どもが考察可能な事柄を示しており,それに対応した学習過程は,子どもが自ら考え創造することを通じての学習活動を保障するものである.このとき,van Hiele は,水準の移行が,生物学的順序での発達ではなく,教育の過程によるものとし,教師が成熟を助長し,促進することが望ましいとしている.このとき,例えば,思考の第 1 水準の子どもに対し,教師が思考の第 2 水準である形の性質を論じたなら,子どもは教師の言葉を理解することはできない.よって,教師は子どもと同じ思考水準で教授活動を進めるという前提が必要である.では,水準間の関係はというと,Freudenthal は,ある水準と次の水準の関係が,前水準の認識方法が次の水準で対象となることを指摘している.つまり,磯田氏は水準を上昇させるためには「認識方法の対象化」が必要であると述べる.

「認識方法の対象化」: それは認識方法を利用した活動を反省することによるものである．その反省を通して認識方法は対象化され，それとともに次の水準の認識方法が意識化される．

このことから水準の上昇方法は，自身の活動を「意識化」し,「反省」を行い，次の水準の認識方法を「意識化」することで図られることを磯田氏は明らかにした．

岡田（1978）は，Freudenthal が考える学習過程について，水準上昇における中心的概念を「中心転換」という用語で表している．そして，この数学観を「学習過程の不連続性」という用語で表している．これは，子どもが以前に無意識に経験してきたことを意識化することであり，この意識化が水準上昇の必要性ともなるというものである．子ども自身が意識的に学習の対象を見つけ出していかなければならない．そして自身の活動を「反省」することで学習の対象を捉える観点が変更される．これにより水準上昇が図られるわけであるから，述べていることの本質は磯田氏と同様である．

いずれにせよ，Freudenthal の数学観である「学習過程の不連続性」とは，学習過程を水準によって構造化し,「意識化」と「反省」を契機に水準上昇が図られる観念であることが先行研究で明らかにされている．

2.3.3. 「教授学的現象学」

岡田（1981）は，Freudenthal の発言を整理し,「教授学的現象学」を説明している．その Fruedenthal の発言が以下である．

数学的概念，数学的構造，数学的観念の現象学とは，私の場合次のことを意味している．すなわち，現象に関する本質，これは現象の整理手段であるが，それを記述すること，本質はどのような現象に対して整理手段として役立つか，を述べること、本質はそれらの現象に対

してどのように整理手段として働くか，またいろいろな現象に対してどのような力をわれわれに与えるかを述べることである．このような本質と現象のうち，教授学的要因を強調するとき，すなわち，これらの関係が教授－学習過程の中でどのように獲得され使用されるかに注目するとき，われわれはこれらの本質の教授学的現象学を語ることになる．（岡田，1981．p.53）

これは，例えば，形という現象は，三角形，平行四辺形，ひし形，正方形などの幾何学的図形によって整理される，量現象は数によって整理される，ということである．ここでいう「現象」とは，実際の教授における問題場面を指し，「本質」とは，その現象を組織する数学を指す．そして，現象と本質の関係は絶対的な関係にあるのではなく，「学習過程の不連続性」という数学観から明らかなように，ある水準では本質であったものが，より高次の水準ではそれらが現象としてとらえられるというような相対的な関係にあることを示している．岡田氏は，この教授学的現象学の役割を以下のようにまとめている．

（１）１つの水準における役割
・本質が整理手段として働くような現象の追究
・概念の知的対象物の構成の条件の追求
概念は，他のことがらと孤立してとらえられるのではなく，それが生きて働くようにとらえられることこそ，現象の本質たるゆえんである．
（２）学習水準の移行の場面における役割
・１つの水準から次の水準へ移行する必要性の追究
例）直観的水準からアルゴリズム的水準へ移行するときの必要性

この概念を山口（1995,1996）と伊藤（2005b）はさらに詳しく分析している．このとき，伊藤（2005b）で述べられている内容は，山口（1995,1996）の内容を内包した研究であると筆者がとらえたため，以下では，伊藤(2005b)について概観する.まず,伊藤氏はFreudenthalが用いる「現象学」の記述内容を次の４つのことがらの具体化，明確化であると述べている.

①「本体」(これは岡田の「本質 nooumenon」と同義）による組織化の対象となる「現象」
②「本体」の拡張可能性
③「現象」に対する「本体」の作用の様相
④「現象」に関して「本体」がもつ機能

そして，この「現象学」の内容を教授・学習場面における学習者の獲得の仕方に重点をおいて記述するとき,「教授学的現象学」であると述べる．この点は岡田（1981）と同様の解釈である．しかし，伊藤氏はより詳細に「現象学」と「教授学的現象学」の関連について述べている.「現象学」は,「教授学的現象学」が基づく概念や用語の枠組みを作りだすために,「教授学的現象学」にしばしば先立ってなされ,「教授学的現象学」の基礎となる.

ではこのような内容の検討はいかにして行うか．Freudenthal は，この検討方法を「教授学的思考実験」という用語で表現している．そして，この用語で意味する分析方法が『論理的分析と批判的調査』の中でとり上げられている「論理的分析」である．その中身は 2 つの分析方法で成り立っており，それが以下の 2 点である．

①「既成の成果としての分析」:

言語や数学に対して，それらが作られた過程や実際に用いられる状況からではなく，分析，演繹といった「論理」に従ってなされる，教科内容の分析.「既成の成果としての分析」に従えば，言語は，構成

要素から，文法の項目ごとに，数学は，演繹的に教授されることになる．

②「活動としての分析」:

教科内容そのものよりも，内容を発明する過程に関係するものであり，van Hiele の水準論により説明される階層構造を示す．すなわち，「低い水準で操作的なことがらが，高い水準における題材になる」という水準間の関係に基づいて，各水準で学習者が行うべき活動を教科内容ごとに具体的に導き出す分析である．

これは，Freudenthal の「学習過程がある水準から次の水準へと進む諸段階を見出すために我々は論理的分析を用いることができる」という発言に基づき構成されている．

Freudenthal は当然，「活動としての分析」を行わなければならないとする．このとき，Freudenthal は，「論理的分析」に類似する数学の分析方法である，「ポリアの思考実験の方法」（あるいは単に「思考実験」）の概念を『論理的分析と批判的調査』の中で表明している．

> それ（思考実験）を用いることは，およそはっきりと限定された一人の生徒を思い描くこと，その生徒に何らなの数学的アイデアを発明させること，その生徒のふるまいを観察することを意味する．（伊藤，2005b．p.52）

つまり，Freudenthal における「ポリアの思考実験の方法」とは，数学的対象の“re-invention”を実現するために，教授者が，ある生徒を思い描き，その生徒が発明へと至るふるまいを心的に観察することで，発明に必要な前提要件を求める心的実験である．そして，Freudenthal は，この「ポリアの思考実験の方法」という概念を『公理主義とは何か，そしてそれはどのような陶冶価値をもちうるか』において，「教授学的思考実験」と言い換えている．以上から，伊藤氏

は，「教授学的現象学」を「教授学的思考実験」を体系化したものとして解釈している．さらに，「教授学的現象学」が，教授原理である「追発明」に基づく学習過程を具体化するためになされる，数学的対象の分析方法を提起することも明らかにしている．

2.3.4. 人間の活動としての数学

Freudenthal の数学観は数学を「人間の活動としての数学」とみることである．

Wittmann(2005)は，Freudenthal が「数学を我々の文化にしっかりと根ざし，外在的要因（「応用的」）と内在的要因（「純粋的」）によって定められる一つの知識領域として見ること」を明らかにし，そのような豊富な関係性（Beziehungshaltigkeit）を，児童生徒が自らの言葉でもってそれを能動的に再構成することで意味づけたときに限って，その児童生徒にとって生きたものとなることを述べている．

そしてそのような活動を「人間の活動」とする所以は，柳本（1997）が「数学を神がつくり給ふた絶対的なものと考え，それを教えていく教育，そのような教育から子どもたちが自らの手で数学をつくり上げていくことによって数学を学ぶことができるような新たなる教育への転換」（柳本，1997. p.673）という，Freudenthal の言明により明らかにしている．

そして，この基本的立場は，本章であげた先行研究で一貫して，Freudenhtal の基本的な認識の立場として扱われている．

以上，Freudenthal の概念，観念ごとに先行研究を概観した．このとき，岡田氏と伊藤氏は，Freudenthal 数学教育論として，概念，観念を明らかにすることを目的としている．

岡田（1977,1978,1979,1981）は，一連の研究において Freudenthal の基本的な考え方（「教育的視点」）を明らかにし，Freudenthal の指

導原理として「再発明」が位置づくことを明らかにした．そして，岡田（1979）は，この「再発明」における活動が「数学化」であることを明らかにし，「数学化」の学習過程を分析，検討する概念として，「教授学的現象学」を位置づけている．しかし，「教育的視点」と諸概念との関係が明確ではなく，岡田自身も「氏の数学教育論を構想すると思われる小部分をいくつか検討したにすぎなかった」（岡田，1979. p.86）と述べるように，Freudenthal 数学教育論として構造的体系的に諸概念を捉えたものではない．

伊藤氏は，一連の研究において諸概念を明らかにする際，一貫して，教授原理である「再発明」との関連において考察している．しかし，諸概念間の関係について詳述しているわけではない．

このことから，Freudenthal 数学教育論は，先行研究において，構造的体系的に十分検討されているとはいえない．また，数学の「陶冶価値」は，上述の先行研究では議論されていない点である．以上のような先行研究の考察が，本研究の目的を次のように設定した所以である．

本研究の目的：Freudenthal の数学教育論を構造的体系的に組織し，その体系における数学の「陶冶価値」を明らかにすること．

第 2 章の要約

第 2 章では, Freudenthal の諸概念について明らかにされている先行研究を, Freudenthal の教授原理である「再発明」, Freudenthal 数学教育論における中心的活動である「数学化」, Freudenthal の数学観という概念ごとに先行研究の知見を概観した.

その結果, Freudenthal の教授原理である「再発明」は一貫して, 歴史の解釈に従って行われる児童生徒自身の活動として明らかにされている.

Freudenthal 数学教育論における中心的活動である「数学化」は, 水準論に基づく絶え間ない組織化という反省的活動であると明らかにされているが,「数学化」の本質的活動である組織化とはいかなる活動であるかが詳述されているわけではない.

そして, Freudenthal の数学観として, 岡田 (1977, 1978, 1979, 1981) は４つの「教育的視点」を明らかにしているが, これが,「数学化」や「再発明」とどのような関わりをもつか詳述しているわけではない. また, Freudenthal の数学観の一つである「学習過程の不連続性」は, 学習過程は水準によって構造化され, 児童生徒自身の活動の「反省」を契機として進行する「数学化」の過程であることが明らかにされている. そして, 先行研究では一貫して, このような学習過程を「現象」と「本質」という観点から検討する概念として「教授学的現象学」が位置づけられている. 最後に, 数学とは活動であると捉える数学観は, Freudenhtal の基本的な認識の立場として扱われていることを概観した.

以上, Freudenthal 数学教育論について考察している先行研究, あるいは, Freudenhtal の諸概念について明らかにしている先行研究の知見を整理した結果, Freudenthal 数学教育論は, 先行研究において, 構造的体系的に十分検討されているとはいえず,「組織化」に基づく「数学化」の解釈, 数学の「陶冶価値」は, 本章であげた先行研究では議論されていない点であることを明らかにした.

注

（１）伊藤（2006）は Fredenthal の教授原理について，Freudenthal が，1960 年代前半の原理を「再発見(Wiederentdeckung)」と表現し,1970 年代以降の教授原理を「追発明(Nacherfindung)」と表現していることをあげ，それぞれの意味内容を明らかにしている．このとき，筆者の研究では Freudenthal の教授原理を「再発明(re-invention)」と表現しているが，その意味内容は伊藤（2006）の「追発明」と同義に用いる．

第２章の引用文献

伊藤伸也(2005a)．「H.フロイデンタールの数学教授学における「数学化による領域の組織化」の概念」．『日本科学教育学会』，20，127-133.

伊藤伸也(2005b)．「H.フロイデンタールの「教授学的現象学」における教授原理「追発明」の位置」．『 筑波数学教育研究』，24，47-56.

伊藤伸也（2006）．「H.フロイデンタールの教授原理「追発明」と「発見学習」の異同」．『数学教育論文発表会論文集』，39，625-630.

磯田正美(1984)．「数学化の見地からの創造的な学習過程の構成に関する一考察：H.Freudenthal の研究をふまえて」．『筑波数学教育研究』，3，60-71.

礒田正美（2003）．「H.Freudenthal の数学的活動論に関する一考察―Freudenthal 研究所による数学化論との相違に焦点を当てて―」，『筑波大学教育学系論集』．27，31-48.

岡田禕雄 (1977)．「H.Freudenthal の数学教育論(Ⅰ)」．『広島大学教育学部紀要』，3(26)，1-9.

岡田禕雄 (1978)．「H.Freudenthal の数学教育論(Ⅱ)」．『広島大学教育学部紀要』，2(1)，103-111.

岡田禕雄 (1979)．「H.Freudenthal の数学教育論(Ⅲ)」．『広島大

学教育学部紀要』, 2(2), 81-86.
岡田褘雄 (1981).「H.Freudenthal の教授学的現象学の概念」.『数学教育学研究紀要』, 7, 53-55.
山口潤一郎（1995)「H.Freudenthal の教授学的現象学に関する内容学的研」.『中国四国教育学会教育学研究紀要』第 2 部, 42, 178－183.
山口潤一郎（1996)「H.Freudenthal の教授学的現象学に関する内容学的研（2)」.『中国四国教育学会教育学研究紀要』第 2 部, 42, 178－183.
Wittmann, Erich Ch.（真野祐輔訳）(2005). 現実的数学教育の過去と現在.
柳本成一 (1997). Freudenthal の数学教育の問題（major problems）を考えるための思考活動について. 第 30 回数学教育論文発表会論文集, 673-674

第３章

Freudenthal 数学教育論を構成する枠組み

3.1. ヴァーゲンシャイン科学教育論における「基底的諸観念」を用いた枠組み
3.2. Freudenthal 数学教育論における「基底的諸観念」とその枠組みの構想

本章では，Freudenthal 数学教育論を構造的体系的に構想する枠組みを示すことが目的である．

そのため 3.1 で，大高（1998）が，いかなる枠組みからヴァーゲンシャインの教育論を構造的体系的に捉えているかを見出す．そして 3.2 では，その枠組みに基づき，Freudenthal 数学教育論を構造的体系的に捉えるための枠組みを導出する．

3.1. ヴァーゲンシャイン科学教育論における「基底的観念」を用いた枠組み

大高(1998)は，ヴァーゲンシャインの科学教育論を，ヴァーゲンシャインが「自然科学の陶冶価値をどのように認識したか，これを中核にして，基底的観念(科学観－特にアスペクト性－，自然観，人間観・子ども観，陶冶観)—自然科学の陶冶価値認識—科学教授の目的・目標論—科学教授論(教授原理—教授過程の構成と展開—教材研究)の相互関連とそれぞれの意味内容とを明らかにする」(大高, *ibid.* p.23)ことにより体系付けている. 大高氏は, 以下の３つの理由から, このような構造で体系的にヴァーゲンシャインの科学教育論を　捉える必要があると述べる.

①「自然科学の　陶冶価値の認識にせよ，科学教授論にせよ，その根底には彼の科学観，自然観，人間観・子ども観，陶冶観等々の基底的諸観念がある．したがって，こうした彼の基底的諸観念とのかかわりの中ではじめて彼の科学教育論を構成するそれぞれの概念や原理等が正しく理解されうるからである.」(大高, *ibid.* p.23)

②「ヴァーゲンシャインの思想を体系化する際の中心的対象になるのは，その科学教授論である．そして教授論は一般に陶冶価値を実現する手段についての理論の総体と理解される．そうであるならば，科学教授論は自然科学の陶冶価値の認識とのかかわりの中で最も根底から理解され, 体系化される, と思われるからである.」(大高, ibid. p.24)

③ヴァーゲンシャインは自身で, 「『アスペクト性』の承認は私の立場の基本である」(大高, ibid. p.24)と基本的立場を明言している. したがって, このアスペクト性のテーゼとのかかわりの中で, 「科学教育論の様々な概念の意味を解明し，その相互関係を明らかにし，科学教育論全体を構造的体系的に捉える」(大高, ibid. p.24)べきであるためである.

したがって，大高氏は，教育論を体系的に捉える上で，「基底的観念」，基本的立場，「陶冶価値」を重要視していることがわかる．これらの相互関連に 基づきヴァーゲンシャインの諸概念を検討することで，諸概念が明確にな る．そして，基本的立場に基づき「基底的観念」を導き，「基底的観念」に基づき「陶冶価値」を導く，このようにヴァーゲンシャインの 自然科学の陶冶価値認識 を中核に置く ことで諸概念や「基底的観念」を体系的に組織しているのである．

このとき，上述の引用文のように，大高氏はヴァーゲンシャインの「基底的観念」を科学観，自然観，人間観・子ども観，陶冶観に分類している ．それぞれにおいて，述べられている内容が以下である．

「科学観」においては，ヴァーゲンシャインが科学教育を語る上でとる基本的立場である物理学の「アスペクト性」(1)について述べられている．これは③の理由から当然，ヴァーゲンシャイン科学教育論を語る上で必要である．

「自然観」においては，物理教授の対象である自然をヴァーゲンシャインがどのように捉えるか，ということについて述べられている．これは，物理学の教授学習に関連した観念として必要である．

「人間観・子ども観」においては，ヴァーゲンシャインが人間や子どもをどのように認識しているかが述べられている．このとき，大高氏は，ヴァーゲンシャインが捉える「人間観・子ども観」を「彼の教授実践と相対的なものであり，この実践と切り離されて論じられるべき性格のものではない」（大高，1998. p.52）として締めくくっている．このとき，例えば，「人間は生まれつき学習を怠ける」というような人間学をあげ，これは，「教える側の不手際に対する子どもたちの健全な抵抗」（大高，1998. p.50）であるとも述べている．つまり，「人間観・子ども観」では，ヴァーゲンシャインが教授学習において達成が必然的に期待される根本的な人間像・子ども像について述べられているといえる．

「陶冶観」においては，　　ヴァーゲンシャインが　科学教育論において語「陶冶」を用いるとき，どのような認識の基，この語を用いているかという陶冶一般について述べられている　　．そしてその中で，陶冶観を特徴づけるいくつかの指標についても述べられている．

そして，これらの「基底的観念」の内容を踏まえることで自然科学の陶冶価値が検討されている．このとき，大高（1998）は「陶冶価値」という用語の他に「陶冶作用」という用語も用いている．そこで，これらの用語について述べておく．大高氏は，「陶冶価値」という用語の基，自然と人間の変容について述べており，ある人がその変容を認識することが人間として豊かな状態になることを論述している．つまり，「陶冶価値」という用語において，物理学がどのように人間を変容させるかという物理学の教育的意義について述べられている．そして，「陶冶作用」という用語において，「陶冶価値」に高めていくためのプロセスについて述べられている．

3.2. Freudenthal 数学教育論における「基底的観念」を用いた枠組み

筆者は，Freudenthal 数学教育論(2)を構造的体系的に組織することを目的としている．このとき，上述したように，「教授論は一般に陶冶価値を実現する手段についての理論の総体と理解される」(大高，*ibid*)．そうであれば，数学教育論においても数学の陶冶価値認識とのかかわりの中で最も根底から理解され，体系化される．そして，「自然科学の「陶冶価値認識」にせよ，「科学教授論」にせよ，その根底には彼の「基底的観念」がある．したがって，「基底的観念」とのかかわりの中ではじめて彼の科学教育論を構成するそれぞれの概念や原理等が正しく理解されうるからである」(大高，*ibid*)と述べることは，もちろん Freudenthal 数学教育論にも当てはまる．したがって，「基底的観念」，「陶冶価値」という視点を取り入れることで，Freudenthal の数学教育論の組織化が可能になると考える．このとき，Freudenthal (1968) は，『*Why to Teach Mathematics so as to be Useful*』で，数学とは活動であると，自身の基本的立場について言及しており，Freudenthal の数学教育研究は一貫してこの立場に基づき構成されている．したがって，Freudenthal 数学教育論は，この基本的立場とのかかわりの中で捉えられるべきである．そして，この基本的立場とのかかわりの中で Freudenthal 数学教育論を構成する「基底的諸観念」を捉え，この「基底的諸観念」とのかかわりの中で数学の「陶冶価値」を捉える．こうすることで Freudenthal 数学教育論を構造的体系的に組織することが可能になると考えられる．

では，Freudenthal 数学教育論の基底にはいかなる観念が位置づくかを検討していく．

教育論を語る上で，人間観・子ども観，陶冶観は当然必要である．そこで述べるべき内容についても，ヴァーゲンシャイン科学教育論における人間観・子ども観，陶冶観と同様の内容が述べられるべきであると考える．

つまり，「人間観・子ども観」では，Freudenthal が教授学習にお

いて達成を必然的に期待すると考えられる根本的な人間像・子ども像について 述べるべきである.

「陶冶観」においては,Freudenthal が語「陶冶」を用いるとすれば,どのような認識の基,この語を用いるだろうかという陶冶一般について述べるべきである.そして,陶冶観を特徴づける指標があるならば,それについても述べる必要がある.

続いて,「科学観」に対する「基底的観念」について.ここでは,ヴァーゲンシャインの基本的立場について述べられていた.このとき,上述したように,Freudenthal も自身の基本的立場を表明しており,Freudenthal の数学教育研究は数学とは活動であるという基本的立場に基づき構成されている.ゆえにこ のような基本的立場について述べる必要があることに疑いはない.この基本的立場は,Brouwer の数学観と同様の数学観と捉えられるものもあるが,Freudenthal の基本的立場には,様々な数学教育観も含まれる.ゆえに,Freudenthal 数学教育論の「基底的観念」には,数学観に数学教育観を合わせた教授学的数学観とも呼べる観念が位置づくと考えられる.このような基本的立場を述べる必要がある.

「自然観」では,物理学の対象である自然について述べられていた.このことから,数学教授の対象について考えたとき,上述のように Freudenthal は数学を活動として捉える.そして,次章で述べるが,Freudenthal 数学教育論における学習過程は活動の「反省」を契機に進行する活動の連鎖である.このことから,数学の対象とは活動であると考えられる.そして,その活動とは「数学化」という用語に集約される.したがって,数学の対象が活動であることから,活動観と呼べる観念が Freudenthal 数学教育論の基底に位置づき,その中では,「数学化」とはいかなる活動であるかが述べられなければならない.

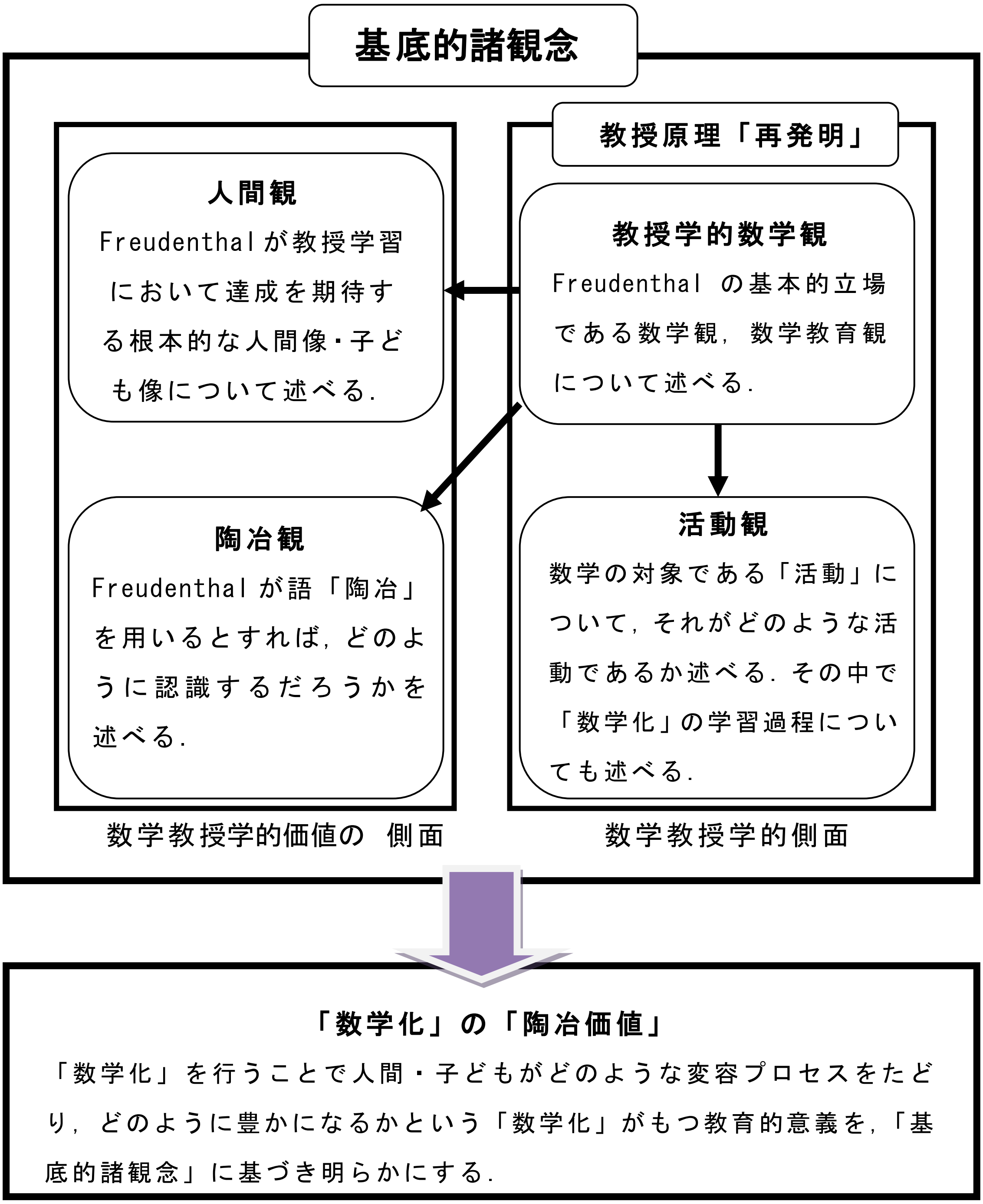
このとき,自然科学の場合は,主体とは別に,対象である自然が存在することから,　大高氏は 「基底的観念」の一つである自然観とヴァーゲンシャインの教授原理やその学習過程を別に述べている.

しかし, Freudenthal 数学教育論の場合, 数学の対象である活動と主体を分離して考えることはできない. したがって, Freudenthal が数学を活動と捉える際の活動とはどのようなものであるかを検討することは, Freudenthal 数学教育論の基底にある観念を検討すると同時に, Freudenthal 数学教育論における数学学習過程を検討することに相当する.

本研究では, 第一章で述べたように数学の「陶冶価値」を明らかにする一方策を「数学化」の「陶冶価値」を明らかにすることであるとしている. このとき, Freudenthal の指導原理である「再発明」を体現した活動が「数学化」である. よって,「再発明」との関連の中で活動観は捉えられるべきであり,「数学化」あるいは「再発明」の基底には Freudenthal の基本的立場が位置づくと考えられる. したがって, Freudenthal の基本的立場を述べる教授学的数学観,「数学化」の活動について述べる活動観に先行して教授原理である「再発明」について確認しておく必要がある.「再発明」は「基底的観念」ではないが, このような理由で「基底的諸観念」を考察する次章の中に位置づける.

そして, 人間観・子ども観では, 活動観で考察する教授学習と相補的な概念であるが, そもそも Freudenthal が人間・子どもをどのような存在であると捉えているかを述べる. これは当然, 数学教育を行うことで目指される人間像・子ども像とも考えられるが, これが,「数学化」の「陶冶価値」に当たるわけではなく, あくまでも根本的なものについて述べる. 次に, 陶冶観において, Freudenthal が語「陶冶」を用いるとすればどのような意味で用いるだろうかを Freudenthal の言明から論述する. このような「基底的諸観念」の考察を踏まえることで, Freudenthal が数学の教育的意義をどのように認識するだろうか, という「数学化」の「陶冶価値」を述べる. 上述の人間観・子ども観で述べる根本的な人間像・子ども像と「数学化」の「陶冶価値」との違いは,「数学化」を行うことで人間・子どもがどのような変容プロセスをたどり, どのように豊かな状態になるか, という「数学化」がもつ教育的意義を明らかにする点である.

以上から，これらの関係は図２のように表すことができ，図２のように組織化することで, Freudenthal 数学教育論の構造的体系的な組織化が可能になると考えられる．次章以降でこの仮説を検証する．



（図２）

第 3 章の要約

本章では，Freudenthal 数学教育論を構造的体系的に構想する枠組みを示すため，大高（1998）がヴァーゲンシャイン科学教育論を体系化するために用いる枠組みを抽出し，その枠組みに基づき，Freudenthal 数学教育論を構造的体系的に捉えるための枠組みを導出した．

その結果，大高氏は，ヴァーゲンシャインの基本的立場とのかかわりでヴァーゲンシャインの「基底的諸観念」を捉えるべきであり，そのような「基底的諸観念」とのかかわりの中でヴァーゲンシャインの諸概念を明確にしていることを抽出した．そして，物理学の「陶冶価値」を中核に組織化を図ることで，ヴァーゲンシャイン科学教育論を構造的体系的に捉えていることを明らかにした．物理学の「陶冶価値」を中核に組織化を図る所以は，「教授論は一般に陶冶価値を実現する手段についての理論の総体と理解される」（大高， *ibid*）からであり，この点は Freudenthal 数学教育論にも適応される．そして，ヴァーゲンシャインが基本的立場を表明するように，Freudenthal も自身の基本的立場を「数学とは活動である」と表明しており，Freudenthal の諸概念の基底にもこの基本的立場を含む何がしかの観念が位置づくと考えられる．実際，ヴァーゲンシャイン科学教育論における「基底的諸観念」に対応する Freudenthal 数学教育論における「基底的諸観念」を考察した結果，教授学的数学観，活動観，人間観・子ども観，陶冶観という観念が基底に位置づくことが想定され，このような「基底的諸観念」とのかかわりの中で，Freudenthal の諸概念が明確になると考えられる．そして，「基底的諸観念」に基づき数学の「陶冶価値」を導く．このように Freudenthal の数学の陶冶価値認識を中核に置き，諸概念と「基底的諸観念」を組織化することで Freudenthal 数学教育論を構造的体系的に組織することが可能であることを明らかにした．

注

（１）Aspekt：観方

物理学は人間と不可分に結びついているということであり，物理学を物理学として教授することを求めている．つまり，物理学が自然を見る一つのアスペクトにすぎないということである．さらに，この用語には，アスペクトの結果である物理学の自然像が本来的な自然の模写ではないという命題も含まれている．このように物理学を自然に対する一つのアプローチの方法とみる基本的立場がヴァーゲンシャインの基本的立場としてあげられている．

（２）大高（1998）は，教授論という用語と教育論という用語を用いている．教授論は，学校教育における理論という意味で，教育論は，学校教育に限らず教育全般についての理論という意味で用いている．筆者の研究では，このような区別を行っておらず，学校数学における理論を教育論と呼び，本研究を構成している．

第３章の引用文献

大高泉 (1998). 『ドイツ科学教育論研究』. 共同出版.

Freudenthal, H. (1968). “Why to Teach Mathematics so as to be Useful”, *E.S.M*, *1*, *2*.

第４章

Freudenthal 数学教育論における「基底的諸観念」の検討

本章では，Freudenthal 数学教育論の基底にある観念を明らかにすることを目的とする．

4.1 では，Freudenthal の教授原理である「再発明」を，先行研究の知見を基に確認する．4.2 では，Brouwer の数学観との相違から Freudenthal の数学観を明確にし，それらを「再発明」原理の基底的観念として整理する．4.3 では，「再発明」原理と教授学的数学観から「数学化」の定義とその学習過程を規定するとともに，組織化という視点から「数学化」の定義を補完する．4.4 では，Freudenthal の教授学習と相補的な観念である根本的な人間像・子ども像について述べる．4.5 では，Freudenthal が語「陶冶」を用いるとすればどのような認識に基づき用いるかを述べるとともに，教授学的数学観，活動観，人間観・子ども観の内容から，陶冶の特質を明らかにする．

4.1. Freudenthal 数学教育論における教授原理：「再発明」

Freudenthal の教授原理は「再発明」として知られ，その概念は第 2 章で述べたように，先行研究において考察されている．それは，歴史上の発明を今日の数学学習において再発明する，数学化の過程としてとらえる教授原理であった．このとき，数学学習は数学史の順序とまったく同じではなく，歴史上の発見過程における行き止まりや遠回りは取り除かれるべきであり，その当時知られていなかった知識であっても，今日の数学学習にふさわしいものは用いるべき，という意味で解されている．

本節では，Freudenthal の教授原理である「再発明」をこのように解釈できる 所以を，筆者が改めて Freudenthal の言明から構成することで確かめる．

Freudenthal は，今日（1973）でも教授の基本の一つであるべき方法として，ソクラテスの方法をあげている．そして，Freudenthal はソクラテスの人間観・子ども観，教育観について以下のように述べている．

> 前世から，魂は全ての知識を所有する．その弟子はそれを呼び戻すだけである．彼を助けるのは親方の義務である．教授プロセスは，学生が忘れたものを思い出すよう，導くことにある．知識を獲得することは，むしろ，私の魂がイデア界に留まっていたときに私自身が知っていたものを（私以前に他者が知っていたものではなくて）再発見することである．（Frudenthal, 1973. p.102）

つまり，われわれが住む現実とは別にあるイデア界（本質界）に，ある学生がいたとき，その学生が知っていたものを現実の世界において再発見することが学習であるとソクラテスはとらえている．これに対して Freudenthal はこう述べる．

> 我々は，ソクラテスを最後の一切れまでむさぼり食う必要はないし，前世で彼の信念を共有する必要はない．そのとき残っているのは，再

発明による学習であり，そこでは，今や「再（re)」は，学習者の前史ではなくて，人類の歴史を意味する．まるで，学習者が，彼の祖先の発達を繰り返しているかのようである．それゆえ，私は，それを，再発明と呼ぶことを選んだろう．（Freudenthal, 1973. p.102）

つまり，Freudenthal は，ソクラテス（プラトン）のような想起説という立場には立たず，先人が築いてきた発達の歴史を再発明する学習過程を要請している．なぜ，このような立場に立つかというと，伊藤（2004）によれば，『悪魔と深海の間の幾何学』の中で，Freudenhtal は，「数学史における順序と児童生徒が数学を発明しうる順序が同じであることを例示し，児童生徒が数学を発明しうる順序で数学が教授されるべきとする見解を表明している」(伊藤，2004. P.592）ことによる．

しかし，Freudenthal は，歴史の足跡を忠実に追うことが数学学習であるとは捉えていない．

もし彼らがそれらを発明する前に，発明した後と同じように利口だったなら，彼らはどのようにその結果を発明しただろうかを明かす．教授の才能が与えられている著者は，私が思考実験と呼んだものを練習する．彼らは幾分かいっそう利口なもう一人の自分 *Alter Ego* を想像し，実際の自分が使った方法よりは，いっそう確信を与え，いっそう有用で，いっそう知的な方法で，彼にその教材を新しく発明させる．それは，我々が従っていくべき発明者の足跡ではなく，ある改善されたいっそうよい歴史の筋道である．（Freudenthal, 1973. p.103）

つまり，Freudenthal は，歴史の足跡ではなく，歴史上の発明の際に用いられなかったものであっても，いっそう有用であるものは今日の学習指導に用いるべきと考える．ゆえに，歴史上の発明過程において経られた行き止まりや遠回りは，それが，思考実験上で有用でないなら取り除かれ，よりよい知識や方法によって歴史を改善し

た学習過程が要請される．このとき，Freudenthal は数学の歴史上の発明過程を次のように述べる．

　科学が単なる経験の集積から脱却するや否や，科学は経験の組織化を必然的に含むこととなる.・・・中略・・・数学的手段によって現実を組織化することは今日数学化と呼ばれる．しかしながら，数学者は，論理的なつながりがいっそう早い進歩の見込みがあるとすぐ，現実を無視する傾向がある．数学的経験が蓄積される．その蓄積の一部が組織されるよう求める．この要求に対し，どのような方法が使えるか．もちろん再び数学的方法である．これが数学自身の数学化のはじまりである．(Freudenthal,1973. p.44)

つまり,数学の歴史上の発明過程とは数学化の過程である.そのため,Freudenthal の教授原理である「再発明」は，歴史上の発明を今日の数学学習において再発明する,数学化の過程として捉えられる.このとき,上述したように，数学学習は数学史の順序とまったく同じではなく，歴史上の発見過程における行き止まりや遠回りは取り除かれるべきであり，その当時知られていなかった知識であっても，今日の数学学習にふさわしいものは用いるべき，ということが付言される．

このように，Freudenthal の教授原理である「再発明」は先行研究と同様に捉えることができる．では，このような「再発明」原理の基底には，どのような観念が位置づくか．つまり，改善された歴史の道筋は，いかなる観念から構想されるか．これを次節で述べていく．

4.2. Freudenthal 数学教育論における教授学的数学観

4.2.1.「人間の活動としての数学」

まず，Freudenthal の基本的立場は，幾度も述べているように数学を人間の活動とみなす立場である．この「人間の活動としての数学」とは，数学が神から与えられるものではなく，人間の活動として創造されるものであり，人間に密接に関連した活動として数学を学ばなければならないということである．

そして，この観念は，伊藤(2003)が，直観主義と共通の前提であると述べていると共に，伊藤(2007)は，この観念を Brouwer の直観主義の影響からも検討している．また，筆者も伊藤（2007）と同時期に Brouwer からの影響を検討しており(1)，これらを踏まえて，以下この基本的立場について述べていく．

伊藤（2007）は，Freudenthal が直接的にも間接的にも，Brouwer の影響を受けてきたことを以下のように明らかにしている．

> 直接的な影響は，Freudenthal が，Brouwer による直観主義の集中講義に積極的に参加し，これをきっかけに，Brouwer から彼の助手への誘いを後に受けたことである．間接的な影響は，Freudenthal が，直観主義の立場の数学研究が当時盛んであったベルリン大学で主に学び,Brouwer が開拓した位相幾何学に関する論文を提出し学位を授与されたことにみられる．（伊藤，2007. p.49）

Freudenhtal は Brouwer からこのような影響を受けているにもかかわらず，Freudenthal は自身で次のように述べている．

> 私の数学についての教育的解釈は，L.E.J.Brouwer の数学観（教育についてではないが)の影響を裏切っている.(Freudenthal,1973. p.Ⅸ）

Freudenhtal があえてこのように述べることからも，Brouwer の影

響の大きさをうかがい知ることができる一方,裏切りの真意を解することで Freudenthal 数学教育論における基本的立場を明確に捉えることができると考えられる.

Brouwer に代表される直観主義は，古典的集合論の矛盾という危機的状況を皮切りにした数学基礎論論争における一学派である．こうした学派には他に，Russell に代表される論理主義，Hilbert に代表される形式主義がある．この論理主義とは，数学が論理学に還元されるとする立場であり，これに対し Brouwer の高弟である Heyting は，論理的推論の一つである排中律についてあげ，次のように批判する．

> 答えがあらかじめ存在するとみなすことは，カルナップ流の表現で言えば,「神学者」の発想であって，問題に挑んでいる数学者がとってよい態度ではない．なかんずく排中律を使って問題が解決されているかのように議論を進めることは許されない．（佐々木,2001.p.45）

排中律とは，例えば次のような論理的推論である．

命題：<u>a^b は有理数であるという命題を満たす，２つの無理数 a と b があることを証明する．</u>

$\sqrt{2}$ が無理数であることは知られている．そこで，次のような数を考える．

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$$

排中律に基づくと，明らかにこの数は有理数か無理数かのどちらかである．これが有理数なら証明が完了する．もし無理数なら，次のような数を考える．

$a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ および $b = \sqrt{2}$

すると

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\right)} = \sqrt{2}^2 = 2$$

2 は明らかに有理数である. 従って証明が完了する.

このように,排中律は問題がすでに解決されてしまっていることを前提としている.この意味で,論理学は数学に従属しているのであり,論理学者のように,論理学から数学が導き出されると考えることは本末転倒であると直観主義者は批判する. では, Brouwer は数学の基礎をどこにおくか. これについても Heyting が述べている.

> 直観主義数学者の目標は次のようである. 彼（Brouwer）は, 知性の自然な機能, 思考の自由で生き生きした活動として数学を行う. 彼にとって数学は人間精神の産物なのである. 彼は日常言語も形式主義的言語も伝達のためだけに用いる, すなわち彼の数学思想を他人あるいは自分に追思考させるためである. そのような言語的随伴者は数学のイメージではないし, 況や数学それ自体ではない.（佐々木, 2001. p.42）

つまり,Brouwer は数学の基礎を,人間自体の活動として捉えている.このように, 論理学に基礎をおくわけではなく, 形式主義のように,「記号化された体系的記述」(伊藤,2007. p.52) を基礎とするわけでもない.人間との関わりが肝要なのである.このような Brouwer の認識が Freudenthal の基本的立場である数学を人間の活動としてとらえる認識に影響を及ぼしていると考えることができる.しかし,上述の Freudenthal 自身の引用文から明らかなように, Freudenhtal は Brouwer の認識を踏襲しているわけではない.

Brouwer にとって活動とは「直観」を指す. これは, Brouwer にと

って活動の一方策ではなく絶対的な権力を指す．それは，以下の言明に表れている．

ブラウワーに従うと，数学は本質的には内省的で構成的な活動または経験の一形式である．したがってその成長や発展が（古典的認識論者が主張するように）その内容の論理的外挿を媒介にして進行するようなことはありえず，むしろそうした活動や経験の現象学的ないし経験的展開—すなわち，認識的に同じ種類の，別の経験への拡張によってのみ可能なのである．内容の論理的外挿—つまり論理的推論—は，ブラウワーの言うところでは，決して「数学的な事態を演繹」できない．（飯田,1995. p.200）

このようにBrouwerは，知識の認識，拡張において論理的推論に役割を与えていない．しかし，後述するが，Freudenthalにとって活動とは「数学化」という用語に集約され，それは，「再発明」原理からも明らかなように，歴史上の数学者が行ってきた活動を意味する．このような数学者の活動は，Brouwerのような直観主義的数学者における活動だけを指すわけではない（伊藤,2003）．したがって，Freudenthalにおいては，直観主義とは限らない一般の数学者が用いるような数学的方法を用いることも部分的に容認する．この点は,「言語なり記号的なもの一般を忌避する」（佐々木,2001. p.62）記号嫌いとでもいうべきBrouwerにとっては，裏切りと映るかもしれない．このことから，Freudenthal自身で「Brouwerの影響を裏切っている」と述べていると考えられる．

このようにBrouwerを裏切るような立場に立つのは，Freudenthalが数学教育を考えるとき，Brouwer 的直観主義に固執すべきでない，もっと正確には，数学教育という文脈において，ある一つの数学的方法に限定した学習過程を構想することは適切ではないと認識しているからであると考えられる．それは，Freudenthal(1973)が,「多くの関係を持った(multi-related)数学」という表現を用いていることに

起因する．これに関連し Freudenthal は次のように述べる．

数学指導においては，どんなアプリオリの制限も定めることはできない．しかし，無視できない優先性がある．たとえ，孤立して両方が教授可能であるとしても，この主題は，あれよりも，多かれ少なかれ重要であるかもしれない．例えば，それが他の主題よりいっそうよく全体に適合するなら，この主題はあれに優る．

(Freudenhtal, 1973. p.68)

このように Freudenthal における活動とは，学校数学という全体に適合する活動でなければならないということである．その全体性の一つとして考えられるのは，数学者によって用いられる演繹的な全体性である．Freudenthal はこのような全体性を学校数学における全体性として肯定しない．実際 Freudenthal は，数学のある演繹的構造に従って数学を教授することを「反教授学的逆転 (*antididactic inversion*)」と呼び問題視している．そのような教授は，児童生徒にとって馴染みがなく，「自然な傾向に非常に強い程度で矛盾するので，それが数学への嫌悪を刺激できるだけである」(Freudenthal, 1973. p.70) と Freudenhtal は述べる．ただこれは，演繹的推論自体を否定するものではないが，演繹的構造のみの全体性をよいとはせず，「例えば，類比はずっと論理的な関係である」(Freudenthal, 1973. p.78) と述べている．このように，演繹的推論に制限されない多様な論理的推論により構成される全体性が学習過程として要請される．これを Freudenthal は，「多くの関係を持った数学」とよぶ．そして Freudenthal は次のようにも述べる．

私は，ある児童生徒が活用数学を学ぶことを勧めない一方，彼がどのように数学を活用するかを学ぶことを望む． (Freudenthal, 1973. p.75)

つまり，ある活用に合わせて組織された数学を学ぶような活用数学ではなく，児童生徒が自身で数学を活用していくような数学教育をよいとする．この数学を活用する領域は,「必ずしも，直接的で数学内である必要はなく」(Freudenthal, 1973. p.76)，いっそう自然で大切なつながりとして，現実とのつながりをあげている．なぜなら，児童生徒の「現実」と関係のない様態で学ばれた数学がいつまでも活動的でありえると考えるのは教師だけであり，それは，すぐに忘れられる学び方である．このような児童生徒の現実に関連付けて数学を学ぶことで，数学も現実性を帯び，数学を活用する可能性を保障することにつながるのである．伊藤(2005a)も,「十分な経験によって，数学的なことがらもまた現実となりえる」(伊藤,2005a. p.129）と Freudenthal の認識を述べており，この「現実」は，静的な意味ではなく,「数学をする各人においても時々に変化する個別的,動的なもの」(伊藤,2005a. p.129）であると述べる．つまり，数学をする各人において，現実性を帯びる推論方法も異なってくるのである．したがって，このような現実性を帯びた人間の活動として数学をとらえる認識が Freudenthal の基本的立場である．これは，もし，数学が活用可能性を準備しないなら，教室は空虚な空間となってしまい，これは，教育的にみて自明にナンセンスであるからである．ゆえに，Freudenthal は，活用可能性を持つ全体性，つまり，現実との関係，現実性を帯びた数学内の多様な論理的関係という「多くの関係を持った数学」を学習過程として要請しており，このような数学教育的立場から Freudenhtal は Brower の数学観を裏切るのである．

4.2.2. 児童生徒主体・教師主導

では，実際の教授 学習場面において，児童生徒の現実性はどのように保障されうるか ．Freudentahl は,「自己に依拠する発見ほど極めて確信をあたえるものはなにもない」 (Freudnthal, 1973. p.141) と述べる．つまり，児童生徒自身の活動によって数学が発明されると

き,その数学は児童生徒にとって現実性を帯びたものになる.しかし,Freudenthalは,「主導権は,教師の側だけにある」(Freudenthal, 1973. p.102)とも述べる.つまり,児童生徒の主体的な発明を教師が導いていかなければならない.ただ,児童生徒の心には,自分自身で発明したという感覚は残されるべきである.このような発明過程が実際の教授学習場面において要請される.

なお,本項の内容については,本章 4 節である人間観・子ども観で詳述する .

4.2.3. 学習過程の不連続性

では,発明過程として児童生徒は何を発明するか.これを述べるために,学習過程の詳細を述べる.Freudenthal(1973)は,van Hielesの思考水準論に基づき,以下のように述べている.

> 実際,思考することは,連続して行為することであるが,相対的なレベルがある.高いレベルでは,低いレベルの行為は分析の対象となる.(Freudenthal, 1973. p.121)

Freudnthalは,考えることと行為することについて,「どこで一方が始まり,他方が終わるか」(Freudenthal, 1973. p.112)区別することができないと述べており,考えることと計画することは行為することであると述べている.このような意味で,思考するとは,連続的な行為であるが,学習過程を考えたとき,不連続な移行であると主張している.それは,1つの水準から次の水準に移行するときに,学習の対象が全く変わってくることからである.なぜ,学習の対象が変わらなければならないかというと,同じ対象で行為し続けるとは,言い換えれば,児童生徒にとっての課題が変わらないということであり,より高い水準で意識的に学ぶことが数学の特徴である(2)と捉えるFreudnthal の考えには沿わないからである.ゆえに,学習過程は不

連続性を有する．では，水準間は何を契機として進行するか．

必要が感じられない限り，次のレベルへ移るよう彼を強要することは無用である． (Freudenthal, 1973. p.124)

その子が自身の活動を反省できない限り，いっそう高いレベルはアクセス不可能なままである． (Freudenthal, 1973. p.130)

つまり，児童生徒に，今行っている活動では，ある目的に対して不十分であると感じさせることが肝要である．これは，児童生徒自身の活動を「反省」することであり，活動を「反省」することで，次の水準における対象 の認識方法が「意識化」されるのである (3)．これが契機となり，水準上昇が図られる．

4.2.4. <u>教授学的現象学</u>

では，このような学習過程は，いかなる観念から構想されるか．Freudenthalは次のように述べる．

「教授学的現象学」とは，「学習者が人類の学習過程へと足を踏み入れることができるかもしれない場所を教師に示す仕方」(Freudenthal, 1983. p.ⅳ)である．

このように，Freudenthalは学習過程を構想する概念を「教授学的現象学」という用語で表す．そして，Freudenthal は，「教授学的現象学」について次のように述べる．

数学的概念，数学的構造，数学的アイデアの現象学が意味するのは，・・・中略・・・「本体」が組織化する手段であるところの「現象」との関係で，その本体を記述すること，すなわち，どの現象を

組織化するために本体が作り出されるか，本体は何にまで拡張されうるか，本体が組織化の一手段としてこの現象にどのように作用するか，本体はこの現象に関してどんな力を我々に与えるかを記述することである．このような本体と現象のうち，教授学的要因を強調するとき，すなわち，これらの関係が教授学習過程の中でどのように獲得され使用されるかに注目するとき，我々は教授学的現象学を語ることになる．（Freudenthal,1983. p.28）

このように，Freudenthal は，学習過程を構想する際，「現象」と「本体」が肝要であると述べる．この「現象」と「本体」について，伊藤（2005b）は次のように明らかにしている．

「現象」とは，何らかの数学的対象（数学的概念，構造，アイデア）を手段として組織化される，物質的，社会的，精神的世界において観察される現われであり，具体的世界の現象に加え数学的な現象をも含むものである．他方，「本体」とは，そうした「現象」を組織化するために作り出される数学的対象を指す．（伊藤，2005b. p.50）

つまり，学習過程を構想する際，生徒の身近にある現実の現象あるいは，現実性を帯びるであろう数学の現象と共に，それらの現象を組織する数学的方法を検討しなければならない．そして，このような考察は，「現象」と「本体」の関係を数学史における考察と子どもの活動の観察からしなければならないことを山口（1995）は明らかにしている．しかし，Freudenhtal は，「数学の最大の美徳は柔軟性である」（Freudenhtal,1968. p.5）と述べるように，ある「現象」と「本体」の関係は一通りではない．そのため，様々な「現象」と「本体」の関係を考察した上で，子どもの主体的な活動として展開できる学習過程が採用される のである．このようにして学習過程を構想する概念が「教授学的現象学」である．そして，この「教授学的現象学」は Freudenthal の次の認識から導きだされたものである．

我々の数学的概念，構造，アイディアは，物質的，社会的そして心的世界の現象を組織化するための道具として，考察されてきた．
（Freudenthal,1983. p.ⅳ）

この記述から明らかなように，児童生徒の発明の対象は，ある現象を組織するための数学的方法である．そして，先述（本節 3 項）した，学習水準の考え方から言えば，ある水準において考察した現象をさらに（次水準で）組織する際の数学的方法が，児童生徒の発明の対象である．

以上の観念から，歴史の道筋の改善が図られ，これらの観念に基づく活動が，次節で述べるように，「数学化」という用語に集約される．

本節のまとめ

本節では，「再発明」原理の基底に，どのような観念が位置づくか．つまり，改善された歴史の道筋は，いかなる観念から構想されるかを明らかにした．それが以下の観念である．

観念：「人間の活動としての数学」

数学は神から与えられるものではなく，人間の活動として構成されなければならない．このとき，人間の活動は，ある一つの論理的推論を行う対象として狭隘化されるべきではなく，児童生徒にとって現実的である推論方法が学習過程として要請される．このような，現実性を帯びた人間の活動として数学をとらえる認識が「再発明」原理の基底にある．

観念：児童生徒主体・教師主導

数学の学習過程は，児童生徒自身の活動の中で達成される発明によって構成されなければならないが，主導権は教師の側だけにあり，児童生徒の主体的な活動を教師が導いていかなければならない．（後述するが，「教授学的現象学」によって構想された「数学化」過程として導いていかなければならない．）

観念：学習過程の不連続性

学習過程は水準によって構造化され，ある水準における組織の方法は次水準において考察の対象となる．そして，ある水準における活動を「反省」することで次水準の組織の方法を「意識化」し，水準上昇が図られる．このような水準ごとに学習の対象が変化するという意味での不連続な学習過程が要請される．

観念：「教授学的現象学」

このような学習過程は，数学史における歴史的考察あるいは子どもの観察から，様々な「現象」と「本体」を考察しなければならず，その中で子どもの主体的な活動として展開できる学習過程を採用しなければならない．そして，この観念から，児童生徒の発明の対象は，「現象」を組織するための「本体」，つまりある現象を組織するための数学的方法であると考えられる．

4.3. Freudenthal 数学教育論における活動観

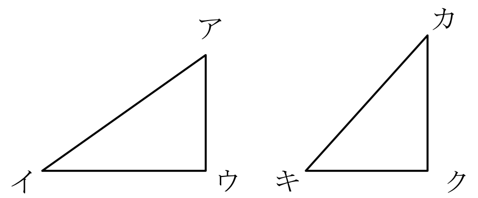
4.3.1.「数学化」の定義と学習過程

では，上述した「再発明」原理と教授学的数学観に基づく「活動」について述べていく．

Freudenthal は，「再発明」原理から明らかなように，学習者と数学者を，数学を学ぶ者として同等の存在とみなし，学習者も数学者が行った活動を行う権利があるとする数学教育観に立つ（次節で詳述する）．その数学者の活動とは，現実の現象を数学的対象にする活動が出発点であった．そして，学習過程は水準によって構造化されることを述べた．この観念からも，学習過程の出発点が，現実の現象を数学的対象にする活動であると考えられる(4)．では，教育的に見て，なぜこの活動が学習過程の出発点である必要があるか．それは，「何の関係もない様態で数学を学んだ児童生徒は，ごく一部の児童生徒を除いて，何の有用性も見出せない」(Freudenthal,1973. pp.74-80) と Freudenthal 自身で述べており，児童生徒にとっての強い関係を考えたとき，児童生徒の生活経験や身の回りにある現実が児童生徒にとっての強い関係であると考えられるからである．したがって，学習過程の出発点として現実を数学的対象にする活動が位置づき，このような現実から学習過程が出発することにより，「人間の活動としての数学」が保障されると考えられる．そして，このような活動を Freudenthal は「現実の数学化」と呼び，その活動を次のように述べる．現実の数学化とは，「(現実の現象を)数学的な洗練にアクセス可能な構造に組織すること」(Freudenthal, 1973. p.133)である．つまり，現実の現象をただ記号の世界へ導けばよいというわけではなく，数学的な洗練にアクセス可能な構造に組織しなければならないと述べる．例えば，様々な角の大きさを作成する学習過程を考える．

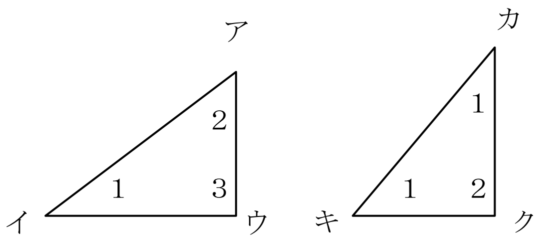
一組の三角定規を使って，どんな角ができるだろう[5]（図３）

（溝口，2007. pp.45-46）



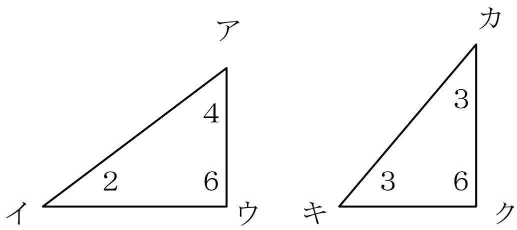
（図３）

まず，三角形のそれぞれの角の大きさが相対的に見てどのような量であるかを捉えさせたい．はじめは，一つの三角形においてその相対的な角の大きさを考えるであろう（図４）．



（図４）

しかし，このままでは，直角である∠ウと∠クが違う数で表現されることになる（図４）．それは，双方の三角形の角の大きさの組み合わせ（加法，減法）を考える際に不都合が生じる．このままでは，組み合わせにおける角の大きさを適切に表現できないことを児童に「意識化」させ，別々の三角形で角の大きさを考えていた自身の活動を「反省」させることで，等しい角を同じ数で表現しなければならないことを「意識化」させる．このように，児童の主体的な活動を教師が導いていくことで，以下のように２つの三角形に共通する角の大きさが表現されるのである（図５）．



（図５）

図５のような双方に共通する角の大きさの表し方を発明することにより，数の組み合わせを考えるという数学的な洗練にアクセス可

能となる．これが「現実の数学化」であり，この三角定規の角についての問題では，数値化が「現実の数学化」の方法である．

これに続く活動として，上述のFreudenthalの言明（Freudenthal,1973. p.133）から明らかなように，数学的な洗練活動が続き，ここでの活動は，記号の世界における（数学的対象に対する）活動である．それは，現実を数学化し，そうしてできた数学的対象を操作することで，数学的な概念，手法を発明していく活動である．そして，この活動も，上述した教授学的数学観の一つである学習過程の水準構造から明らかなように，前水準における組織の方法を次水準で対象とし，次水準では新たな方法により組織されるという反省的思考(6)の繰り返しで達成される．例えば，上述の三角定規の角についての問題では，図４を対象とし，三角定規の角の大きさの加減という方法により，角の大きさを表す単位という数学的な概念や（基礎的な）論証という数学的手法の発明へ至る．

では，これに続く活動について述べていく．

Freudenthal(1973)は，数学化について以下のように述べる．

> 数学では，経験を組織することが数学化と呼ばれる（Freudenthal,1973. pp. 44-46）

> 数学的経験の蓄積が形成される．それはその部分が組織されるよう求める．どんな種類の手段がこの目的に役立つか．もちろん，数学的な手段である．（Freudenthal,1973. p.44）

上記の数学的概念，手法を発明していく活動を「数学的経験の蓄積」と見るならば，この経験を組織する活動が次に位置づくと考えられる．上述の三角定規の角についての問題では，度数法による組織が考えられる．

さらに，これに続く活動としてFreudenhtal(1973)は次のように述べる．

数学を数学化することは，数学者の主要な関心事の一つである．他のどんな科学でも，数学が持っているように，練り直すことが第二の本性になるという習慣を持たない．（Freudenthal,1973. p.45）

つまり，再組織化という活動が位置づく．上述の三角定規の角についての問題では，道路勾配を表すときなどのパーセントを用いた再組織化や孤度法による再組織化などが考えられる．このとき，Freudenthal(1973. p.45)が述べるように，一度再組織化しても，更なる再組織化が続く，少なくとも数学がそのような可能性を備えた対象であることを付言しておく．

以上から，Freudenthal の「数学化」の定義とその過程は，次のようになる．

「数学化」の定義：経験を組織する反省的活動
「数学化」の学習過程

① 現実を数学的対象に組織する活動
（数学的洗練にアクセス可能な構造に組織されるまで，組織化の繰り返しが要請される）
② 数学的な概念や手法を発明する活動
（経験を蓄積する活動）
③ 数学的経験の領域を組織する活動
④ 再組織する活動
⑤ さらなる再組織化

このとき，Freudenthal は，本節の引用文からわかるように「数学化」を「現実の数学化」と「数学の数学化」に分類している．そして，Freudenthal は，現実の現象を記号の世界へ導くことを「現実の数学化」と呼び，記号の世界における活動を「数学の数学化」と呼ぶ(7)．しかしこの区別は，教材ごとに決定される静的なものではな

く，児童生徒や文脈などによって変化する動的なものである．それは，「人間の活動としての数学」という基本的立場に起因する．この基本的立場から，学習過程は人間の活動として構成されるため，児童生徒それぞれにおいて違った活動が想定される．このことから，ある人には記号の世界のことであっても，またある人には生活の世界のことと捉えられる場合もあるからである．

このような，動的な分類として Freudenthal は「現実の数学化」と「数学の数学化」を用いる．

4.3.2. 「組織化（organization)」による「数学化」の解釈の補完

上述の「数学化」の定義と「数学化」の学習過程から明らかなように，Freudenthal は，数学化の本質的活動を組織化であると捉える．そして，学習過程の各段階における組織の方法は，領域や教材の種類，文脈で変わる．本稿では，例証的な各段階における組織の方法ではなく，どの段階にも当てはまる組織化とはいかなる活動かを述べることで「数学化」の解釈を補完する．

Freudenthal は，「人間の活動としての数学」という基本的立場に立つ．これは，既成の数学の対極に活動としての数学があり，活動としての数学に基づく立場である．そして，この立場は『Mathematics as an Educational Task』の第 6 章内の節である「READY-MEDE AND ACTED-OUT MATHEMATICS」の中で述べられていることから，「人間の活動としての数学」という基本的立場は，数学を *ready-made* 数学の学び方の対極に *acted-out* 数学の学び方があり，*acted-out* 数学の学び方に基づく立場であると換言できる．さらに，「READY-MEDE AND ACTED-OUT MATHEMATICS」の中では，*acted-out* 数学の学び方を体現したものが「再発明」であると読み取れる記述がみられる(8)．ゆえに，活動としての数学という基本的立場において Freudenthal が強調する「数学化」，その本質的活動である「組織化」とは，*acted-out* 数学の学び方を解釈する中で現れる活動であると考えられる．

このとき，Freudenthal(1973)は，数学化の文脈において *organization* を用いる．

> 数学的活動は，経験の場を組織する（*organizing*）一つの活動である．（Freudenthal,1973. p.123）

しかし，Freudenthal（1968）は，数学化の文脈において *systematization* を用いる．

> 組織化（*systematization*）は数学の大きな美徳であり，できることなら，生徒もまた，この美徳を学ばなければならない．しかし，私はそのとき，組織化された結果ではなく，組織する（ *systematizing*）活動を意味する．組織された結果はシステム，美しく閉じられたシステム，入り口も出口もない閉じられたシステムである．最も高い完成において，システムは，機械においてさえ使うことができる．・・・中略・・・人間が学習しなければならないことは，閉じられたシステムとしての数学ではなく，活動としての数学である．そのような活動とは，現実を数学化するプロセスであり，可能ならば，数学を数学化するプロセスでさえある．（Freudenthal,1968. p.7）

この引用文における，「閉じられたシステムとしての数学」と「活動としての数学」は，1973 年における「*ready-made* 数学」と「*acted-out* 数学」に対応する概念であると考えられる．そのため，Freudenthal は，1968 年では，「数学化」の本質的活動を *systematization* と考えており，1973 年では，「数学化」の本質的活動を *organization* と捉えているとみなせる．これは，認識の変化であるか，それとも，双方の活動を肯定するものであるか．

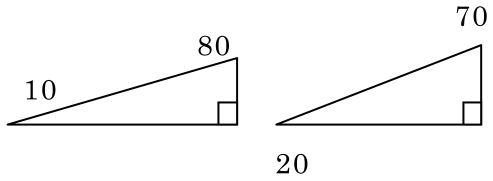
結論から述べると，これは，認識の変化と考えられる．

なぜなら，Freudenthal(1973. p.103)は，「再発明」の方法に対し，もう一つの極めて異なる方法として組織的（*systematic*）な指導をあげ，それを反教授学的逆転（*antididactic inversion*）と呼び問題視しているからである．

この「反教授学的逆転」とは，数学とは演繹構造であるという論理分析に立ち，「教師または教科書著者が信仰する特定の演繹的システムに従って実行される」（Freudenthal,1973. p.103）指導方法である．このとき指導の順序が，歴史的な発明の過程とは逆転した順序で進行する．つまり，公理から順に積み上げてみせることが活動とみなされることから Freudenthal は「反教授学的逆転」と呼ぶ．1968 年の時点では，上述（1968. p.7）の引用文で Freudenthal が「活動の結果出来上がるものが閉じられたシステムである」と述べていることから，このような「反教授学的逆転」に基づく活動が容認されていたと考えられる．しかし，1973 年の時点では，「反教授学的逆転」を問題視しているため，「数学化」の本質的活動に対する認識が *systematization* から *organization* へ変化したと考えることができる．

では，この *organization* とはどのような活動であるか．それは，「反教授学的逆転」に基づく，所産を伝達する上での活動でないことを明らかにした．そして，*ready-made* 数学の学び方ではなく，*acted-out* 数学の学び方であると換言できることも述べた．この *ready-made* 数学の学び方とは，すでに数学としてあるものを学ぶ学び方（「反教授学的逆転」に基づく学び方）であり，*acted-out* 数学の学び方とは，まさにその言葉の通り，活動をすること（*act*）によって数学を浮き彫りにする（*out*）学び方である．この浮き彫りにするとはどういうことか．上述の三角定規の角についての問題では，三角定規という現実の現象から出発し，組み合わせという活動を経ることで任意単位である 1（15°）を基準とした角の大きさを作成するという活動を行った．この問題場面は，三角定規である必要はなく，例えば，図６のような一組の直角三角形を基に考えると，任意単位として 1

（10°）の大きさが採用されるだけであり，相対的な角の組み合わせを考えるという活動は同様に行われる．



（図６）

ここで重要であるのは，どのような一組の直角三角形を持ってきたとしても，学習過程は大きく変わらないということである．それは，一組の直角三角形という現象が任意単位，あるいは普遍単位ですべての角を表現することができるという仕組みを含んでいるからである．つまり，児童生徒に「再発明」させたい数学の仕組みを含んでいる現実の現象から数学学習が始められなければならない．「再発明」とは，歴史の解釈であると述べたように，Freudenthal は，まだ誰も発見していない新しい数学を発見させることを期待しない．そして，数学の学習過程は教師主導でなければならないと述べたように，児童生徒は，教師が「教授学的思考実験」において構想した，仕組みが負荷された数学を学ぶのである．ゆえに，平らな板であった現実の現象を児童生徒の活動で削っていくが如く，問題が本来持っている仕組み（構造）を浮かび上がらせていくことこそ，*acted-out* 数学の学び方であり，「数学化」の本質的活動である organization であると考えられる．

このとき，「数学化」とは，経験を組織する反省的活動と定義できると前節で述べたように，ある水準における児童生徒自身の活動を「反省」することで，次水準における対象の認識方法が「意識化」され，水準上昇が図られる．これは，無意識に（数学の仕組みを意識することなしに）行っていた児童生徒自身の活動を「反省」することで，児童生徒自身の活動が，何らかの仕組み（構造）に基づいた活動であったことが「意識化」され，次水準における活動の対象

となりえる．そして，考察の対象が「意識化」されることで，その対象に対する組織の方法が「意識化」されると見ることもできる．したがって,「数学化」の本質的活動である organization とは，水準を上昇させるために行う，自身の活動の「反省」を伴った数学の仕組み（活動）を浮き彫りにする活動と考えられる．ゆえに,「数学化」の定義は，経験を組織する反省的活動を行うことで数学の仕組み（構造）を浮き彫りにしていく活動であると解釈できる．

4.4. Freudenthal 数学教育論における人間観・子ども観

本節では,Freudenthal が教授学習において達成を期待する根本的な人間像・子ども像について述べる. この根本的とはどういうことか. 大高氏は ヴァーゲンシャイン科学教育論における人間観・子ども観の中で次のように述べている.

> 人間や子どもについて誤った人間学（Anthropologie）が流布している. これは,「人間が生まれつき学習を怠ける」,「嫌悪する」, 子どもは生まれつき不十分で受動的で意欲のない存在である」, とか,「子どもは忍耐がない」, というものである. しかしこうした誤った人間学は, ヴァーゲンシャインによればいわば教える側の「不手際」に対する子ども達の健全な抵抗, すなわち教材過剰や多人数学級などの, 今日の学校や環境に対する子ども達の健全な抵抗を誤って解釈した結果なのである.（大高, 1998. p.50）

つまり, ヴァーゲンシャイン科学教育論では, ヴァーゲンシャインの教授学習と相補 的な観念として人間観・子ども観が扱われている. これは, ヴァーゲンシャインが「誤った人間学」について自身で問題を指摘しているため, このような記述が人間観・子ども観で扱われている面もあるが, 教育論を体系化する際に, 教える側の「不手際」に対する人間像・子ども像を取り上げても教育論において何も機能しないだろうことが当然予想される. そのため, Freudenthal 数学教育論においても,Freudenthal の教授学習と相反する観念を扱うのではなく, Freudenthal の教授学習と相補的な観念, つまり, Freudenthal 数学教育論において当然達成されるであろう人間像・子ども像について述べる必要がある. このような意味での根本的な人間像・子ども像について以下で述べていく.

先述（pp.46-47）したように, Freudenthal はソクラテスが立つ人間観・子ども観について述べており, その中で Freuenthal 自身の人間観・子ども観についても述べている.

前世から，魂はすべての知識を所有する．その弟子はそれを呼び戻すだけである　．彼を助けるのは親方の義務である．教授プロセスは，学生が忘れたものを思い出すよう，導くことにある．知識を獲得することは，むしろ，私の魂がイデアの領域に留まったときに私自身が知っていたものを－私以前に他者が知っていたものではなくて－発見しなおすことである．我々は，ソクラテスを最後の一切れまでむさぼり食う必要はないし，前世で彼の信念を共有する必要はない．そのとき残っているのは，再発明による学習であり，そこでは今や「再 re」は，学習者の前史でなくて，人類の歴史を意味する．(Freudenthal,1973. p.102)

このように Freudenthal はプラトンの想起説という立場に立たない．そうではなく，Freudenthal は，人間・子どもを文化の創造者あるいは再創造者ととらえている．これは伊藤（2007b）も指摘している点である．このような観念が，当然，教授原理である「再発明」の基底にある．また，この観念から，児童生徒と数学者を，数学を学ぶものとして同等の存在とみなしている人間観・子ども観が読み取れる．なぜなら，人類の歴史において数学を作り上げてきた人物が数学者であり，Freudenthal は，今日における人間・子どもに対しても数学を作り上げる学習過程を要請しているためである．しかしこれは，児童生徒を数学者に育てることを目指しているというわけではなく，Freudenthal が「生徒の将来として，数学者にはならないことが予測される」(Freudenthal,1973. p.68) と述べるように，数学の活動として，数学者が行ったような活動を児童生徒も行う権利があるとする人間観・子ども観であると考えられる．

このとき， Freudenthal は，次のように述べる．

教授法で，私が思考実験によって意味するのは，教師あるいは教科書の著者が，一人の児童生徒または一群の児童生徒を想像し，前もって彼らの反応を予想し，彼らの思考で彼らを教えることである．

想像上の 児童生徒は能動的で，彼らの活動は，教師が彼らの仕方を決めるのを可能にする．(Freudenthal,1973. p.100)

このようにFreudenhtalは，人間・子どもを能動的に活動する対象であると捉えている．これは，先述（pp.53-54）したように，数学を人間の活動と認識する基本的立場に立ち，現実とのつながり，現実性を帯びた数学の連鎖を強調していることからも，児童生徒自身の現実の中で活動が展開され，主体的に数学を活用していけるような，能動的な人間像・子ども像を認識していると考えられる．しかし，このような能動的な人間像・子ども像は，教師側の不手際があると達成されない．それは，Freudenthalが次のように述べることに関連する．

子どもはかなり順応性があり，一人の教育芸術家は彼らを型通りに作ることができる．(Freudenthal,1973. p.65)

学生生徒の能力は，多くが，その教材がどのように組織されるかに依存する．(Freudenthal,1973. p.67)

このようにFreudenthalは，人間・子どもを，教師が自由に作ることができる対象であると認識していると考えられる．先述（pp.54-55）したように，教授学習において「主導権は，教師の側だけにある．」これは，教授学習の上での主導権のみならず，人間像・子ども像に関わる主導権も教師が握っているという認識であると考えられる．そのため，もし能動的な人間像・子ども像が達成されないならばそれは教師の不手際による必然の結果であると考えることができる．

このように，人間・子どもは能動的な対象であるが，さらにFreudenthalは数学化を能動的に行う人間像・子ども像も想定していると考えられる．なぜなら，Freudenthalにとって能動的な活動とは「数学化」であるからである．そして，この人間像・子ども像も児童生徒の能動的な活動を教師が，数学者が行った「数学化」という

活動へと適切に導いていくことで達成される．これは,「数学化」を反教授学的に児童生徒の脳に焼き付ける意味での導きではなく，次のような意味での導きである．

> 教授では，聞き入らせることではなく，生徒の活動を奮起させるべきである．(Freudenthal,1973. p.109)

児童生徒の主体的な活動を奮起させることで,教師が仕組みを付加した数学，あるいは数学的な考え方を再発明させる．さらに,「児童生徒の行為は,成功に有利な条件の下でなされるべき」(Freudenthal, 1973. p.110)であり，教師は先述（pp.56-58）した「教授学的現象学」という観念により，成功に有利な条件を整備しなければならない．Freudenthal は，このような教授学習と 相補的な観念として,「数学化」を能動的に行うことができる人間像・子ども像を想定していると考えられる．なお，この点については次章で詳述する．

また Freudenhtal は，人間・子どもについて次のように述べている．

> 考えることと行為することの間に，人工的な境界を持つことは，どんなに奇妙に見えることか．(Freudenhtal,1973. p.112)

つまり Freudenhtal は,考えることと行為することを分離することができないという人間観・子ども観に立つ．例えば,「化学者がある蛋白質を分析または合成するなら，どこで行為することが始まるか．試験管においてか．または，論文上でか．そして，それはどこで終わるか.」(Freudenhtal,1973. p.113) このように Freudenthal は，思考と行為を分離できないものであると捉えており,「思考は心的に連続した行為にすぎない」　(Freudenhtal,1973. p.111) と述べている．また，Freudenthal は水泳の例をあげ，次のように述べている．

泳ぐことを学んでいる人は誰も，水泳の例も理論も必要としないが，理論は，彼に泳ぐことを教えている人の心の中で働いているか，あるいは，働いているべきである．彼は（その下で）水に入れられた誰かある人が，正しく泳ぐ運動をする条件を知るべきである．（Freudenhtal,1973. p.111）

これを学校数学の文脈に置き換えてみると，ある児童生徒が何か行為しているとき，はじめのうちは，ただの行為だけであるかもしれないが，それは教師の中で，理論を伴う行為であるべきであり，Freudenthal はそれを「教師の活動から生徒の活動へと変更されなければならない」（Freudenhtal,1973. p.111）と述べる．つまり，学習過程は反省的思考により展開されると述べたように，児童生徒は自分が行為していることを振り返り，その中に理論を見い出したり，あるいは，ある理論に基づいて行為を行うことができる人間像・子ども像を想定していると考えることができる．これについても次章で詳述する．

以上の観念が Freudenthal 数学教育論の基底にある人間観・子ども観であり，それをまとめたものが以下である．

Freudenthal 数学教育論における人間観・子ども観

①人間・子どもを文化の創造者あるいは再創造者ととらえている．
②数学の活動として，数学者が行ったような活動を児童生徒も行う権利がある．（学習者と数学者を，数学を学ぶものとして同等の存在とみなす）
③人間・子どもは，教師が自由に作ることができる対象である．
④人間・子どもは能動的に活動する対象である．
⑤さらに，人間・子どもは「数学化」を能動的に行うことができる対象である．
⑥人間・子どもは，思考と行為を分離することができない対象である．

4.2. Freudenthal 数学教育論における陶冶観

では，Freudenthal が，語「陶冶」を用いるとすれば，どのように認識するだろうかを述べていく．

辞書的（広辞苑）に陶冶とは，人間天賦の性質を円満完全に発達させることを意味する．ここでの陶冶は完結するプロセスであるが，Freudenthal はどうとらえるのであろうか．Freudenthal は「問題を解決することさえ，数学的活動のひとつの局面に過ぎず，それは過大評価されるべきではない」(Freudenthal,1973. p.96）と述べており，先述（p.63）した活動観で「数学では練り直すことが第二の特徴である」と述べたように，数学には終わりがない．したがって，Freudenthal が語「陶冶」を用いるとすればそれは，完結するプロセスではなく，決して完結しないプロセス という意味で用いると考えられる．このとき Freudenthal は，我々は，教えている教材が，将来必要とされているかどうかを知りえないと述べている．つまり，個々の数学的知識を所有することを陶冶的とはみない．このように，直接的な価値を追求しないことは以下の言明に表れている．

> 所有は，もはや一つの状態でなく，所有をしているという連続的な活動である．教育することは，よい意図を持つ贈り物で，手と脳を充たすことよりは，むしろこのプロセスをガイドすることである．
> (Freudenthal,1973. p.58)

つまり，個々の数学的知識を静的に所有することを陶冶的とは考えず，数学を動的な活動の連鎖，あるいは練り直しという活動の連鎖というプロセスとしてとらえることが陶冶的であると認識していると考えられる．これは，人間の活動として数学が構成されなければならないという基本的立場，そして，そのような人間の活動を数学者の活動である「数学化」とみる人間観・子ども観からの当然の帰結である．
このように，陶冶は決して完結しないプロセスであり，活動観で述べたように「数学化」の過程は高いレベルへと高めていかなければなら

ないことから，Freudenthal は語「陶冶」を用いるとすれば，成長するプロセスとしての意味でも認識するだろうと考えられる．そして，「教育者として，私は，数学がよい教師のガイダンスの下で，どのように始まるかを知ることを好む」と述べるように，学校数学という文脈において は，「数学化」を開始することが陶冶に対して 肝要なのである．

また，このような陶冶は，「ある活動を学ぶための最良の方法は，それを成し遂げることである」（Freudenthal,1973. p.110） と Freudenthal が述べることから，そして，「人間の活動としての数学」という基本的立場から，当然，自己活動の中で実現される．この自己活動とは能動的な「数学化」過程であり，人間・子どもを文化の創造者あるいは再創造者と捉える人間観・子ども観から明らかなように，陶冶は，文化の再発明過程の中で実現される．また，「数学化」の活動は，児童生徒の「現実」と関係を伴っていなければならない．したがって，児童生徒の「現実」に付随する活動のみが陶冶的な意味を持つ．さらに，この「数学化」の活動は，活動観で述べた学習過程から明らかなように，児童生徒自身の活動を「反省」することによって図られる．ゆえに，陶冶は，「反省」を契機に進行するのである．

第 4 章の要約

本章では，Freudenthal の教授原理である「再発明」の意味とともに，Freudenthal 数学教育論における「基底的観念」について明らかにした．それが以下である．

「再発明」とは，歴史上の発明を今日の数学学習において再発明する，数学化の過程として捉えられる教授原理である．しかしこの概念は，数学学習が数学史の順序とまったく同じ順序で進行するわけではなく，歴史上の発見過程における行き止まりや遠回りは取り除かれるべきであり，その当時知られていなかった知識であっても，今日の数学学習にふさわしいものは用いるべき，という改善された歴史の再発明である．では，この改善された歴史の道筋は，いかなる観念から構想されるか．それを考察した結果，以下の教授学的数学観に基づいて構想されなければならないことを明らかにした．

観念：「人間の活動としての数学」

数学は神から与えられるものではなく，人間の活動として構成されなければならない．このとき，人間の活動は，ある一つの論理的推論を行う対象として狭隘化されるべきではなく，児童生徒にとって現実的である推論方法が学習過程として要請される．このような，現実性を帯びた人間の活動として数学をとらえる認識が「再発明」原理の基底にある．

観念：児童生徒主体・教師主導

数学の学習過程は，児童生徒自身の活動の中で達成される発明によって構成されなければならないが，主導権は教師の側だけにあり，児童生徒の主体的な活動を教師が導いていかなければならない．そしてそれは「教授学的現象学」によって構想された「数学化」過程として導いていかなければならない．

観念：学習過程の不連続性

学習過程は水準によって構造化され，ある水準における組織の方法は次水準において考察の対象となる．そして，ある水準における活動を「反省」することで次水準の組織の方法を「意識

化」し，水準上昇が図られる．このような水準ごとに学習の対象が変化するという意味での不連続な学習過程が要請される．

観念：「教授学的現象学」

このような学習過程は，数学史における歴史的考察あるいは子どもの観察から，様々な「現象」と「本体」を考察しなければならず，その中で子どもの主体的な活動として展開できる学習過程を採用しなければならない．そして，この観念から，児童生徒の発明の対象は，「現象」を組織するための「本体」，つまりある現象を組織するための数学的方法であると考えられる．

そして，このような教授原理である「再発明」と教授学的数学観に基づく活動とを考察した結果，「数学化」の定義とその学習過程を以下のように明らかにした．

「数学化」の定義：経験を組織する反省的活動を行うことで数学の仕組み（構造）を浮き彫りにしていく活動

「数学化」の学習過程

① 現実を数学的対象に組織する活動
（数学的洗練にアクセス可能な構造に組織されるまで，組織化の繰り返しが要請される）

② 数学的な概念や手法を発明する活動
（経験を蓄積する活動）

③ 数学的経験の領域を組織する活動

④ 再組織する活動

⑤ さらなる再組織化

このとき，Freudenthal は，「数学化」を「現実の数学化」と「数学の数学化」に分類している．そして，Freudenthal は，現実の現象を記号の世界へ導くことを「現実の数学化」と呼び，記号の世界における活動を「数学の数学化」と呼ぶ．しかしこの区別は，教材ごとに決定される静的なものではなく，児童生徒や文脈などによって変化する動的な分類であることを明らかにした．

そして，Freudenthal 数学教育論における人間観・子ども観として，

以下の点を明らかにした.

①人間・子どもを文化の創造者あるいは再創造者ととらえている.

②数学の活動として，数学者が行ったような活動を児童生徒も行う権利がある.

（学習者と数学者を，数学を学ぶものとして同等の存在とみなす）

③人間・子どもは，教師が自由に作ることができる対象である.

（教授学習における主導権だけでなく,子どもの陶冶に対する主導権も教師が握っている）

④人間・子どもは能動的に活動する対象である.

⑤さらに，人間・子どもは「数学化」を能動的に行うことができる対象である.

⑥人間・子どもは，思考と行為を分離することができない対象である.

そして,Freudenthal 数学教育論における陶冶観として,Freudenthal が語「陶冶」を用いるとすれば，それは，決して完結しないプロセスであり,さらに成長するプロセスとしての意味で用いるだろうことを明らかにした. また，このような陶冶は，次のような特徴を持つことも明らかにした.

①陶冶は， 自己活動の中で実現される.

②陶冶は，文化の再発明過程の中で実現される.

③児童生徒の「現実」に付随する活動のみが陶冶的な意味を持つ.

④陶冶は,「反省」を契機に進行する.

注

（１）塩見（2008）において，Freudenthal の数学観を Brouwer の数学観の影響から検討した.

（２）Freudenthal は，数学に限らない科学一般の発展が，経験の組織化からなるとしたが，「唯一の違いは，数学者が，組織するのに，いっそう意識意的に，また，いっそう高いレベルでかかわることである」(Freudenthal, 1973. p.46)と述べている.

（３）磯田（1984）は，思考水準に基づく学習過程として，幾何の水準と代数の水準を分析しており，その中で，水準間の移行が「反省」と「意識化」にあることを述べている.

「例えば，物の形を認識する活動において，実際には物の形の特徴をとらえて認識している．物の形を認識する活動を反省することにより，形を認識するとはどのようなことだったのか問う形式で，形という認識方法は第 1 水準の考察対象となる．同時に，反省により，形の特徴をとらえていたことが意識化され，形の特徴は形のもつ性質として第 1 水準の認識方法となる.」(磯田,1984. p.65)

（４）Freudenthal(1973)は，幾何の水準の出発点を以下のように述べる.

「幾何は空間での諸現象を数学的に組織することで出発し，その活動によって，対象 gestalts は幾何図形になる．」（Freudenthal,1973. p.124）

そして，磯田(1984)は，幾何の水準の他に代数の水準についても考察しており，そこでも学習過程の出発点は，現実の現象を数学的対象にする活動が位置づけられている.

（5）

・本時は，小学校第 4 学年，「角とその大きさ」（啓林館）の単元の導入場面である．

・直角については，第 3 学年で学んでいる．

・割合の考え方の素地経験として，関係する数量の一方を 2 倍すれば他方も 2 倍する考え方や，ある数量を１とみたときに他の数量は２と表すことができるという考え方について学んでいる．（松下，2007）

このような児童に対する授業を考える．

本時のねらいは，与えられた角の大きさから共通単位を設定し，できる角，できない角を論証することである．このとき，複数の三角形間に等しい角の大きさがなければ，他の角の大きさを相対的に表現することは難しいと考えられる．そして，直角は既習であり，数学学習の出発点として，児童にとって現実的である現象が採用されなければならないことから，本時の問題として図３を用いる．

（６）学習過程が，児童生徒自身の活動の「反省」を契機に進行することから．

（７）Treffers の影響から，用語は変わっているものの「現実の数学化」「数学の数学化」と同一概念である「水平的数学化」「垂直的数学化」について Freudenthal(1991)は次のように述べる．

「水平的数学化では，生きる世界から記号的世界へ人を誘う．・・・中略・・・他方，記号世界で，記号が構成され，再構成され，機械的に，有意に，反省的に扱われる．それこそ垂直的数学化である．」（Freudenthal,1991. pp.41-42）

（８）「数学は，それぞれの度に新しく，それを創造することによって活用される．この活動は，数学を既成の所産として学ぶことによっては決して達成できない．・・・中略・・・今日我々が必要性を力説す

るのは，それがスタイル化されたもの（ある組織に基づいたもの）よりは，真の誕生である．その児童生徒が自身で数学を発明し直すべきである.」(Freudenthal,1973. p.118)

第4章の引用文献

大高泉 (1998). 『ドイツ科学教育論研究』.共同出版.

Freudenthal, H. (1968). "Why to Teach Mathematics so as to be Useful", *E.S.M*, 1, 2.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*, D.Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, D.Reidel.

Freudenthal, H.(1991). *Revisiting Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers.

伊藤伸也(2003).「H.フロイデンタールの再発明原理を支える数学観」.『日本科学教育学会年間論文集』, 27, 277-278.

伊藤伸也(2004).「H.フロイデンタールの数学教授論における"re-invention"の概念について」.『日本科学教育学会年間論文集』,28, 591-592.

伊藤伸也(2005a). 「H.フロイデンタールの数学教授学における「数学化による領域の組織化」の概念」.『日本科学教育学会』, 20, 127-133.

伊藤伸也(2005b). 「H.フロイデンタールの「教授学的現象学」における教授原理「追発明」の位置」.『筑波数学教育研究』, 24, 47-56.

伊藤信也(2007a).「H.フロイデンタールの数学観とその背景」.『筑波数学教育研究』, 26, 47-56.

伊藤伸也(2007b).「H.フロイデンタールの教授原理「追発明」を支える人間観」.『日本教育方法学会』, 53

岡田禕雄 (1978). 「H.Freudenthal の数学教育論(Ⅱ)」. 『広島大学教育学部紀要』, 2(1), 103-111.

磯田正美(1984).「数学化の見地からの創造的な学習過程の構成に関する一考察：H.Freudenthal の研究をふまえて」.『筑波数学教育研究』, 3, 60-71.

礒田正美（ 2003）. 「H.Freudenthal の数学的活動論に関する一考察 —Freudenthal 研究所による数学化論との相違に焦点を当てて—」,『筑波大学教育学系論集』. 27, 31-48.

山口潤一郎(1995)「H.Freudenthal の教授学的現象学に関する内容学的研」.『中国四国教育学会教育学研究紀要』第 2 部, 42, 178－183.

山口潤一郎（ 1996)「H.Freudenthal の教授学的現象学に関する内容学的研（2)」.『中国四国教育学会教育学研究紀要』第 2 部, 42, 178－183.

飯田隆（1995).「Readings in the Philosophy of Mathematics : After Godeled」.勁草出版

佐々木力(2001). 「二十世紀数学思想」. みすず書房.

溝口達也(2007).『算数・数学学習指導論』. 鳥取大学数学教育学研究室

松下裕之（2007).「6 年間を見通した『割合』の学習指導の一貫性 - 割合の見方を生み出す教材開発と単元構成を通して - 」.『鳥取大学数学教育研究』,10 , 14-17

第５章

Freudenthal 数学教育論における数学の「陶冶価値」

5.1. 数学の活用・活用可能性
5.2. 数学の陶冶作用

本章では，Freudenthal 数学教育論における数学の「陶冶価値」とその陶冶作用について明らかにすることを目的とする．
5.1 では，Freudenthal 数学教育論における「基底的諸観念」から導かれる数学の「陶冶価値」である数学の活用・活用可能性について述べ，5.2 では，数学の「陶冶価値」を保障する決定的陶冶作用が，数学を人間の活動と認識できることにあることを示す．

ここでは，数学を行うこと，つまり，「数学化」を行うことの教育的意義について述べていく．これは，当然，人間観・子ども観で述べた内容を内包するものであるが，本章では，とりわけ「数学化」によって人間・子どもがどのように豊かな状態になっていくかを述べていく．このとき，数学が人間と分離され，人間を何も変容させない過程であるならば，数学に「陶冶価値」は存在しない．しかし，Freudenthal の基本的立場は数学を人間の活動とみなすという立場である．このようにFreudenthalは，数学と人間が不可分にかかわっていると認識しているため，この基本的立場に基づく Freudenthal 数学教育論は当然，数学の「陶冶価値」を有すると考えられる．このように，人間・子どもが数学によってどう変容し，どう豊かになるかを以下で述べていく．

5.1. 数学の活用・活用可能性

Freudenthal は，「数学は，それが多くの問題を解決する手段であるという理由で，高い尊敬を得ている」(Freudenthal,1973. p.94) と述べる．これは，当然学校数学の文脈の中での問題を解決する手段に始まり，将来においても数学的手段を用い，問題を解決していける人間像・子ども像への陶冶を図ろうとしていると捉えることができる．それは，Freudenthal が次のように述べることに起因する．

> 貴方は，数学が我々の社会である一つの役割を演ずること，数学が教えられる教室が空虚な空間に漂うことなく，過去，現在，未来の 児童　生 徒を伴って社会に属することを否定できない．
> (Freudenthal,1973. p.74)

このように，学校数学と未来の社会における児童生徒は分離されられるべきではなく，それゆえ，Freudenthal は，人生において数学を用いていける人間像・子ども像を想定していると考えられる．しかしこれは，人間観・子ども観の中で述べたように児童生徒を数学者にするよう訓練するという意味ではない．

貴方の学生 100 人の中の一人が数学者になるかもしれないが，99 人は数学を活用（apply）するだろう．(Freudenthal,1973. p.153)

このように Freudenthal は，人生において数学を用いることを活用という用語で表す．この数学を用いるとはどういうことか．Freudenthal 数学教育論における学習過程は，「現実の数学化」がその出発点であった．そしてこの活動は，「(現実の現象を)数学的な洗練にアクセス可能な構造に組織すること」(Freudenthal, 1973. p.133)である．この活動について Freudenthal は次のように も述べる．

問題は状況（用語「状況」は，現実の小さな孤立した断片が数学化されるよう意図されること，つまりある数学的モデルを与えられることを明かす）から成長して脱皮するべきであり，その子はその状況における問題を認識することを学ぶべきである．問題を提起することもまた数学である．(Freudenthal,1973. pp.134-135)

このような，ある現実の状況から問題を提起するという「現実の数学化」が数学の活用としてまず考えられる．そして，ある現実の状況を数学的対象にし，その数学上の問題を解決することで現実の状況の解決が図られるのである．そこでは，様々な論理的推論を用い，問題の解決が図られる．そのため，例えば，類比的推論や帰納的推論，演繹的推論 のような数学的な考え方を現実の状況から提起された問題に対して用いることも数学の活用の一つとして考えられる．

以上で述べた数学の活用は，直接的な数学の活用，つまり，学校数学において一度学んだ問題場面に対して用いられるであろう数学の活用としてあげた．ここで，Freudenthal 数学教育論における学習過程について，活用という側面からさらに述べる．

数学の最大の美徳はそれの柔軟性である．いくらかの活用に合わ

された数学は，そのしるしの傍らで石化する．私は生徒が活用数学を学ぶことを勧めない一方，私は彼が，どのように数学を活用するかを学ぶことを望む．(Freudenthal,1973. p.75)

つまり，Freudenthal は，例えばプログラマーを訓練するためにコンピュータ数学を唱導し，統計家を育てるために確率を唱導するような，ある一つの数学の活用を目指す活用数学にはあまり価値を置かない．そうではなく，学習過程は多様な論理的全体性が要請されると先述したように，数学の柔軟性を活かした，組織する活動，再組織する活動により，数学を多様に幾度となく活用していく学習過程が要請される．そのような学習過程の中で扱われる数学が児童生徒の将来において直接活用されるかもしれない．しかし，それがどのような学習過程であれど，すべての児童生徒の将来の直接的なニーズに答えられるはずがない．そのため，Freudenthal 数学教育論にける数学の教育的意義は活用ではないと考えられるかもしれないがそうではない．Freudenthal は「活用」という用語の他に「活用可能性（applicability)」という用語を用いる．

Freudenthal 数学教育論における学習過程では上述のように，ある問題を解決することさえ数学的活動の一つの局面に過ぎず，幾度も組織化が繰り返される．このとき Freudenthal は，獲得した知識に熟達するために，組織しなければならないと述べる．つまり，数学教育では熟達した知識にすることが肝要である．この熟達した知識とはどのようなものか．これはまず，記憶により少なく依存することを必然的な結果として伴う．それは次の言明に起因する．

記憶されたものは，利益よりは，むしろ重荷であり得る．しかし，心が成熟すると，知識のその蓄積は，次第にいっそうの相互関係を持つようにされ，それが，意図的な記憶に次第により少なく依存するようになることを，必然的な結果として伴う．(Freudenthal,1973. p.79)

だからといって，はじめから関連付けられた知識を覚えればよいというわけではない．それは，すべての児童生徒にとって現実的であるとは言えず，児童生徒それぞれが，人間の活動として数学を構成していくことではじめてこのような結果を伴うからである．そして，Freudenthal は次のようにも述べる．

> ある数学者が生涯に学んだ全ての数学の 90%は最終的に余剰として除外されるけれども，それは不可欠である．何故なら，いっそうよい数学によって取り替えられるべきことがその運命であるからである．(Freudenthal,1973. p.79)

このように，組織化をしていくことで，よりよい知識体（活動体）として構成していく術を学ぶのである．このとき肝要であるのは，陶冶観において陶冶とは所有や状態でないことを述べたように，ある知識が忘れられないことではなく，「効力がある *operative* こと」である．これは，活動的であり続けるとも言い換えることができ，活動的であり続けるからこそある蓄積された数学的経験に対して，数学的な考え方に基づき，別の数学へと創りかえていくことが可能となる．このような再組織化 も数学の活用の一つであると考えられる．これは，自己更新という数学の活用と言い換えることができ，自己更新していけるからこそ，まだ経験していない現実の問題状況に直面したとしても数学の活用可能性が保障されるのである．

このような数学の活用･活用可能性が Freudenthal 数学教育論における数学の「陶冶価値」であると考えられる．それは，陶冶観において，陶冶とは成長するプロセスであると述べたように，数学の活用が自己更新という人間・子どもを変容するプロセスであるとともに，数学を常に再組織化し，自分にとってよりよい関係を伴った知識を構成していける人間像･子ども像という決して完結しないプロセスが数学の学習過程（数学化）により要請されるからである．これは，よりよ

く生きる人間像・子ども像とでも言えるが，このように常に自己更新していけることが人間・子どもとして豊かな状態であるからである．したがって，Freudenthal 数学教育論における数学の「陶冶価値」は，ある現実場面の状況に数学が活用されることに留まらず，究極的には，「数学化」ができることが数学の「陶冶価値」であると考えられる．

5.2. 数学の陶冶作用

では，このような数学の活用・活用可能性を保障するためにはどのようなプロセスを経る必要があるか．それは，活動観から当然明らかであり，前節でも述べたように「数学化」過程の中で保障されうる．

> もし数学が活用されるべきなら，数学を活用することが教えられ，学ばれるべきである．数学は，それぞれの度に新しく，それを創造することによって，活用される．(Freudenthal,1973. p.118)

このように，実際の学習過程において数学を活用していくことが数学の活用・活用可能性を保障するのである．この数学の活用とは前節で述べたように以下である．

①現実の状況を数学的対象にするという数学の活用
②現実の状況から提起された問題を解決するために数学的考え方を用いるという数学の活用
③終わりない再組織化，つまり児童生徒自身の活動を反省することで活動が継続するという意味での自己更新という数学の活用

このような数学の活用を実現する学習過程が要請される．それは，Freudenthal の基本的立場として述べたように，数学の活用が児童生徒自身の活動として経験されなければならず，これは，児童生徒の「現実」と関係づけられてこそ可能となる．そして，人間観・子ども観で主導権は教師の側だけにあると述べたように，ある児童生徒が何か行為しているとき，はじめのうちは，ただの行為だけであるかもしれないが，それは教師の中で，理論を伴う行為であるべきである．しかし，それを「教師の活動から生徒の活動へと変更しなければならない」（Freudenhtal,1973. p.111）．つまり，学習過程は反省的思考により展開されると述べたように，児童生徒は自分が行為していることを振り返り，その中に理論を見い出したり，あるいは，ある理論に基づい

て行為を行うことができるようにならなければならない.そのためには上述したように児童生徒の「現実」と関係づけられて活動しなければならず,それはFreudenthalが次のように述べることに起因する.

自己に依拠する発明ほど,極めて確信を与えるものはない(Freudenthal,1973. p.141)

そしてFreudenthalは,次のようにも述べている.

細事に注意が行き届きすぎるくらい整えられた証明に向かい合うよりは,むしろ,その学生が粗雑な証明を考案し,それを彼自身で整えなければならない.そのような活動によって,彼は,局所的な問題解決から,数学における自己を信頼するシステム建設への第一歩を踏んでいることになる.(Freudenthal,1973. p.96)

つまり,児童生徒自らの活動を継続し,現象に潜む秩序を持った数学を浮き彫りにすることで,その活動の結果としてうまれたものに対する信頼が芽生える.そして,そのような信頼がおけるものをうみだすことができる自分自身に対しての信頼が強化される.このように自己および数学 を信頼できるからこそ数学を活用することが保障され,自己に依拠する発明が現実性を帯びるのである.そして,このような「現実」の中での活動を,反省的思考によって何度も再組織化していく.このような「数学化」過程を経ることで,数学の活用・活用可能性に関して 「効力がある」知識体(活動体)を構成していける.したがって,Freudenthal数学教育論における数学の「陶冶価値」を保障するためには,人間の活動として「数学化」を行っていくことが肝要となる.それは,児童生徒自身が行った活動は,信頼できる活動(数学)であり,数学は活用できる活動であると認識すること,また,数学はある一つの区切りでしかなく,まだ途上のもの,あるいは,別の視点での再組織化が残されていると認識できること,つまり数学は一つでは

なく必要に応じて変容する活動であると認識すること，それぞれの観点にはその観点ごとの価値があると認識することを指し，このように，数学を人間の活動という終わりがなく成長するプロセスと認識できることがFreudenthal数学教育論における決定的陶冶作用であると考えられる．そしてそれは，Freudenthal 数学教育論における「数学化」過程の中で実現されるのである．

第5章の要約

本章では，Freudenthal 数学教育論における「基底的諸観念」から導かれる数学の「陶冶価値」とその陶冶作用について考察した．

その結果，Freudenthal は数学の「陶冶価値」を，数学を活用することであると認識していると考えられ，その数学の活用として次のものが位置づくことを明らかにした．

①現実の状況を数学的対象にするという数学の活用
②現実の状況から提起された問題を解決するために数学的考え方を用いるという数学の活用
③終わりない再組織化，つまり児童生徒自身の活動を反省することで活動が継続するという意味での自己更新という数学の活用

そして，このような数学の活用は，他ならぬ「数学化」の過程であることから，ある現実場面の状況を解決することに留まらず，究極的には，「数学化」を行っていけることが Freudenthal 数学教育論における数学の「陶冶価値」であることを明らかにした．

では，このような数学の「陶冶価値」をいかにして保障するかというと，それは「数学化」を実際に行っていかなければならないことを明らかにした．そしてこの「数学化」過程では，児童生徒自身が行った活動は，信頼できる活動（数学）であり，数学は活用できる活動であると認識すること，また，数学はある一つの区切りでしかなく，まだ途上のもの，あるいは，別の視点での再組織化が残されていると認識できること，つまり数学は一つではなく必要に応じて変容する活動であると認識すること，それぞれの観点にはその観点ごとの価値があると認識すること，このように，数学を人間の活動という終わりがなく成長するプロセスと認識できることが Freudenthal 数学教育論における決定的陶冶作用であることを明らかにした．

第５章の引用文献

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task* , D.Reidel.

第６章

本研究の結論

6.1.　研究の結論と意義
6.2.　今後の課題

本章では，本研究で得られた成果とその意義を 6.1 で示し，本研究で考察ができなかった課題を 6.2 で述べる．

6.1. 研究の結論と意義

本研究は，Freudenthal の数学教育論を構造的体系的に組織し，その体系における数学の「陶冶価値」を明らかにすることを目的とし，以下の研究課題を解決することでその達成を図った．

研究課題Ａ：いかなる枠組みを用い，Freudenthal 数学教育論を構造的体系的に組織するか

方法：大高（1998）が，いかなる枠組みからヴァーゲンシャインの教育論を構造的体系的に捉えているかを見出し，その枠組みを，Freudenthal 数学教育論を構造的体系的に捉えるための枠組みとして用いる妥当性を検証する．

研究課題Ｂ： Freudenthal 数学教育論の基底にはいかなる観念が位置づくと想定されるか

方法：ヴァーゲンシャイン科学教育論における「基底的諸観念」に対応する Freudenthal 数学教育論に位置づくであろう「基底的諸観念」を Freudenthal の言明から考察する．そして，それらの「基底的諸観念」間の関係を仮説として設定することで本研究の枠組みを規定する．

研究課題Ｂ－１：Freudenthal 数学教育論における教授学的数学観とは

方法：Freudenthal は，直接的にも間接的にも Brouwer からの影響を受けている．しかし，Freudenthal は自身で，Brouwer の影響を裏切ることを表明している（第４章で詳述する）．そのため，この真意を Freudenthal の言明から解することで Freudenthal の基本的立場を明確にする．そして，この基本的立場に基づく他の数学観，数学教育観についても Freudenthal の言明から明らかにし，それらを教授原理である「再発明」の基底にある観念として整理する．

研究課題Ｂ－２：Freudenthal 数学教育論における活動観とは

方法：「数学化」の定義とその学習過程を教授原理である「再発明」と教授学的数学観から規定される活動として明らかにする．さらに，「数学化」の本質的活動である組織化の意味を systematization から organization への認識の異動として明確にすることで「数学化」の定義を補完する．

研究課題Ｂ－３：Freudenthal 数学教育論における人間観・子ども観とは

方法：Freudenthal の教授学習と相補的な観念として，達成が必然的に期待される根本的な人間像・子ども像について Freudenthal が人間・子どもに関して言及している言明を整理する．

研究課題Ｂ－４：Freudenthal 数学教育論における陶冶観とは

方法：Freudenthal の陶冶に関わるであろう言明から，Freudenthal が語「陶冶」を用いるとすれば，どのような認識の基，この語を用いるだろうか を論述する．そして，教授学的数学観，活動観，人間観・子ども観の観念に基づき，陶冶に関する指標を明らかにする．

研究課題Ｃ：Freudenthal 数学教育論における数学の「陶冶価値」とは

方法：Freudenthal 数学教育論における「基底的諸観念」から導かれる内容により「数学化」の「陶冶価値」が数学の活用・活用可能性にあることを論述する．また，その陶冶作用を述べることで，Freudenthal 数学教育論における「数学化」の「陶冶価値」の構造を明らかにする．

このような研究課題を考察した結果，以下のことを明らかにした．

教育論を構造的体系的に組織している研究として大高（1998）の研究がある．大高氏は，ヴァーゲンシャインの基本的立場とのかかわりでヴァーゲンシャインの「基底的諸観念」を捉えており，その

「基底的諸観念」とのかかわりの中でヴァーゲンシャインの諸概念を明確にしている．そして，物理学の「陶冶価値」を中核に組織化を図ることで，ヴァーゲンシャイン科学教育論を構造的体系的に捉えている．物理学の「陶冶価値」を中核に組織化を図る所以は，「教授論は一般に陶冶価値を実現する手段についての理論の総体と理解される」(大高，*ibid*)からであり，この点は Freudenthal 数学教育論にも適応される．そして，ヴァーゲンシャインが基本的立場を表明するように，Freudenthal も自身の基本的立場を「数学とは活動である」と表明しており，Freudenthal の諸概念の基底にもこの基本的立場を含む何がしかの観念が位置づくと考えられる．実際，ヴァーゲンシャイン科学教育論における「基底的諸観念」に対応する Freudenthal 数学教育論における「基底的諸観念」を考察した結果，教授学的数学観，活動観，人間観・子ども観，陶冶観という観念が基底に位置づくことが想定され，このような「基底的諸観念」とのかかわりの中で，Freudenthal の諸概念が明確になると考えられる．そして，「基底的諸観念」に基づく陶冶価値を明らかにし，数学の陶冶価値認識を中核に置き，諸概念と「基底的諸観念」を組織化することで Freudenthal 数学教育論を構造的体系的に組織することが可能になると考えられる．なぜなら，陶冶価値を実現する理論の総体が教授論であるからである．

このとき，本研究では数学の「陶冶価値」を明らかにする一方策を「数学化」の「陶冶価値」を明らかにすることとしている．そして，Freudenthal の指導原理である「再発明」を体現した活動が「数学化」である．したがって，「再発明」原理との関連の中で「数学化」は捉えられるべきであるため，まず「再発明」について確認する．

教授原理である「再発明」とは，歴史上の発明を今日の数学学習において再発明する，数学化の過程として捉える教授原理である．しかしこの概念は，数学学習が数学史の順序とまったく同じ順序で進行するわけではなく，歴史上の発見過程における行き止まりや遠回りは取り除かれるべきであり，その当時知られていなかった知識であっても，今日の数

学学習にふさわしいものは用いるべき，という改善された歴史の再発明である．では，この改善された歴史の道筋は，いかなる観念から構想されるか．それを考察した結果，以下の教授学的数学観に基づいて構想されなければならないことを明らかにした．

観念：「人間の活動としての数学」

数学は神から与えられるものではなく，人間の活動として構成されなければならない．このとき，人間の活動は，ある一つの論理的推論を行う対象として狭隘化されるべきではなく，児童生徒にとって現実的である推論方法が学習過程として要請される．このような，現実性を帯びた人間の活動として数学をとらえる認識が「再発明」原理の基底にある．

観念：児童生徒主体・教師主導

数学の学習過程は，児童生徒自身の活動の中で達成される発明によって構成されなければならないが，主導権は教師の側だけにあり，児童生徒の主体的な活動を教師が導いていかなければならない．そしてそれは「教授学的現象学」によって構想された「数学化」過程として導いていかなければならない．

観念：学習過程の不連続性

学習過程は水準によって構造化され，ある水準における組織の方法は次水準において考察の対象となる．そして，ある水準における活動を「反省」することで次水準の組織の方法を「意識化」し，水準上昇が図られる．このような水準ごとに学習の対象が変化するという意味での不連続な学習過程が要請される．

観念：「教授学的現象学」

このような学習過程は，数学史における歴史的考察あるいは子どもの観察から，様々な「現象」と「本体」を考察しなければならず，その中で子どもの主体的な活動として展開できる学習過程を採用しなければならない．そして，この観念から，児童生徒の発明の対象は，「現象」を組織するための「本体」，つまりある現象を組織するための数学的方法であると考えられる．

そして，教授学的数学観を基底に持つ「再発明」原理を体現する活動を考察した結果，「数学化」の定義とその学習過程を以下のように明らかにした．

「数学化」の定義：経験を組織する反省的活動を行うことで数学の仕組み（構造）を浮き彫りにしていく活動

「数学化」の学習過程

① 現実を数学的対象に組織する活動
（数学的洗練にアクセス可能な構造に組織されるまで，組織化の繰り返しが要請される）

② 数学的な概念や手法を発明する活動
（経験を蓄積する活動）

③ 数学的経験の領域を組織する活動

④ 再組織する活動

⑤ さらなる再組織化

このとき，Freudenthal は，「数学化」を「現実の数学化」と「数学の数学化」に分類している．そして，Freudenthal は，現実の現象を記号の世界へ導くことを「現実の数学化」と呼び，記号の世界における活動を「数学の数学化」と呼ぶ．しかしこの区別は，教材ごとに決定される静的なものではなく，児童生徒や文脈などによって変化する動的な分類であることも明らかにした．そして，「数学化」の本質的活動である「組織化」について，その活動を systematization から organization への認識の異動として明らかにし，organization という視点から「数学化」を明らかにした点は，本研究の意義の一つである．

では，このような教授学習と相補的な観念として Freudenthal はどのような人間像・子ども像を想定しているか．それを以下のように明らかにした．

①人間・子どもを文化の創造者あるいは再創造者ととらえている．
②数学の活動として，数学者が行ったような活動を児童生徒も行う権利がある．
（学習者と数学者を，数学を学ぶものとして同等の存在とみなす）
③人間・子どもは，教師が自由に作ることができる対象である．
（教授学習における主導権だけでなく，子どもの陶冶に対する主導権も教師が握っている）
④人間・子どもは能動的に活動する対象である．
⑤さらに，人間・子どもは「数学化」を能動的に行うことができる対象である．
⑥人間・子どもは，思考と行為を分離することができない対象である．

そして，Freudenthal 数学教育論における陶冶観として，Freudenthal が語「陶冶」を用いるとすれば，それは，決して完結しないプロセスであり，さらに成長するプロセスとしての意味で用いるだろうことを明らかにした．また，このような陶冶は，次のような特徴を持つことも明らかにした．

①陶冶は，自己活動の中で実現される．
②陶冶は，文化の再発明過程の中で実現される．
③児童生徒の「現実」に付随する活動のみが陶冶的な意味を持つ．
④陶冶は，「反省」を契機に進行する．

このような「基底的諸観念」から導かれる数学の「陶冶価値」とその陶冶作用について考察した．

その結果，Freudenthal は数学の「陶冶価値」を，数学を活用することであると認識していると考えられ，その数学の活用として次のものが位置づくことを明らかにした．

①現実の状況を数学的対象にするという数学の活用
②現実の状況から提起された問題を解決するために数学的考え方を用いるという数学の活用
③終わりない再組織化，つまり児童生徒自身の活動を反省すること

で活動が継続するという意味での自己更新という数学の活用

そして，このような数学の活用は，他ならぬ「数学化」の過程であることから，ある現実場面の状況を解決することに留まらず，究極的には，「数学化」を行っていけることが Freudenthal 数学教育論における数学の「陶冶価値」であることを明らかにした．

では，このような数学の「陶冶価値」をいかにして保障するかというと，「数学化」を実際に行っていかなければならないことは当然である．そしてこの「数学化」過程では，児童生徒自身が行った活動は，信頼できる活動（数学）であり，数学は活用できる活動であると認識すること，また，数学はある一つの区切りでしかなく，まだ途上のもの，あるいは，別の視点での再組織化が残されていると認識できること，つまり数学は一つではなく必要に応じて変容する活動であると認識すること，それぞれの観点にはその観点ごとの価値があると認識すること，このように，数学を人間の活動という終わりがなく成長するプロセスと認識できることが Freudenthal 数学教育論における決定的陶冶作用であることを明らかにした．以上のように，Freudenhtal の教授原理である「再発明」の基底にある諸観念を考察し，それら「基底的諸観念」の中で諸概念の明確化を図った．そしてこのような「基底的諸観念」から数学の「陶冶価値」を導くことで Freudenhtal 数学教育論を構造的体系的に組織した．

本研究で明らかにした数学の「陶冶価値」は Freudenthal の諸概念として十分に議論されていない点であり，Freudenthal 数学教育論として構造的体系的に組織することも十分に議論されていない点である．このような点を明らかにしたことが本研究の意義である．

ではさらに，わが国への示唆という側面から本研究の意義を述べていく．わが国では，本年に新学習指導要領が告示された．その目標が以下である．

目標（小学校）

算数的活動を通して，数量や図形についての基礎的・基本的な知識及び技能を身に付け，日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考え，表現する能力を育てるとともに，算数的活動の楽しさや数理的な処理のよさに気付き，進んで生活や学習に活用しようとする態度を育てる．

目標（中学校）

数学的活動を通して，数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則についての理解を深め，数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとともに，数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し，それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる．

新学習指導要領は，中央教育審議会における「新しい時代の義務教育を創造する（答申）」，「審議経過報告」，「幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について（答申）」に基づき告示された．この「審議経過報告」について，松尾（2006）は次のようにまとめている．

教育課程部会「審議経過報告」によれば，確かな学力の育成という観点から，基礎的・基本的な知識・技能の確実な定着を図ることが重視されている．・・・（中略）・・・また，PISA調査などの結果を受けて，数学的活用能力が低下傾向にあるため，身に付けた知識や技能を実生活に具体的に活用することができるようにしなければならないことも指摘されている．さらに，基礎的・基本的な知識・技能の育成（いわいる習得型の教育）とともに，自ら学び自ら考える力の育成（いわいる探究型

の教育）が重要であり，この習得と探究との間に，知識・技能を活用するという過程を位置づけ重視していくことで，これらの育成が相乗的に行われると述べられている．（松尾，2006．p.47）

このような，新学習指導要領上の目標や「審議経過報告」によると，基礎的・基本的な知識・技能の育成（いわいる習得型の教育）と，自ら学び自ら考える力の育成（いわいる探究型の教育）とは別に，数学を活用する活動が位置づけられているように読みとれる．これは，中学校学習指導要領解説－数学編－でも，「数学を適切に活用するためには，方程式を立てたり説明や証明の構想を練ったりするなど数学をどのように活用するのか，その方法を身に付ける必要がある」(p.21)，「学んだ数学を活用したいと感じるためには，その必要性や有用性を伴って理解していることが重要である」(pp.21-22)というように，ある数学的な考え方や知識，方法を学ぶことと数学を活用することは別の活動であると感じられる．小学校学習指導要領解説－算数編－でも，「今回の改訂では，算数の授業の中で，基礎的・基本的な知識及び技能を確実に身に付けることと，身に付けた知識及び技能を活用していくことを重視している」（p.28）と述べられていることからも同様の印象を受ける．これらは，別の活動として位置づけられるものであろうか．

ここで，わが国の数学の活用というときの数学とは何を指すかということについて中学校学習指導要領解説－数学編－では次のように述べられている．

「数学」は，数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則，数学的な表現や処理の仕方，事象を数理的に考察し表現する能力を指す．（p.21）

このような数学を活用するためには，上述したように，わが国ではその必要性や有用性を伴って理解することが重要とされている．この必要性や有用性は，実際に数学を活用してみないことには体感できないであろ

う. それは, 中学校学習指導要領解説ー数学編ーでの次の表現に起因する.

数学のよさを実感できるようにするためには, 数学を学ぶ過程で, 数学的な知識及び技能, 数学的な見方や考え方などを用いることによって能率的に処理できるようになったり, 簡潔かつ明瞭に表現できるようになったり, 事柄を的確にとらえることができるようになったりしたことを, その過程を振り返るなどして明確に意識できるようにすることが大切である. (p.21)

数学の活用も当然, 数学のよさの一つとして考えられるため, 数学を実際に活用していくことが, 数学の活用を保障するためには必要である. したがって, 数学を学ぶ出発点から数学を活用することが要請されるため, ある数学的な考え方や知識, 方法を学ぶことと数学を活用することは同様の活動であると考えられ, わが国の新学習指導要領上では, 活用とは学んだ数学を教科書における応用問題や数学を学んだ後に別の数学や現実場面, あるいは他教科などで数学を用いることというような, 誤解を招きかねない表現がされていると考えられる.

松尾(2006)は, 数学を活用することはこれまでにも重視されてきているにも関わらず, その達成状況が必ずしも十分でない理由を, 数学を活用しているという意識を子どもがもっていないことが問題であると指摘し, 「子ども自身が活用できたことを意識し, その素晴らしさを実感できるようにすることが大切である」(松尾, 2006. p.47)と述べている. つまりこれは, 教師が数学を活用することを適切に捉える必要があり, そのような認識の基で教師が子どもに活用を意識させることが, わが国が目指す活用という数学の価値に関して肝要であると考えることができる. そのため, わが国で数学の活用を目標とするとき, それは学習過程全般に関わる活動であると広義に捉えることが必要と考えられる. これは, Freudenthal 数学教育論における活用と同義である. そして, わが国の学習過程について, 中学校学習指導要領解説ー数学編ーでは次のように述べられている.

小学校算数科では，日常の事象に関連して数量や図形についての学習が行われるが，中学校数学科では，日常的なものに止まらず，様々な事象を数理的にとらえ，考察し，表現したり処理したりする能力を高めることをねらいとした指導が行われる．（p.19）

この事象を数理的に考察することについて次のように述べられている．

事象を数理的に考察することは，主に二つの場面で行われる．一つは，日常生活や社会における事象を数学的に定式化し，数学の手法によって処理し，その結果を現実に照らして解釈する場合である．またもう一つは，数学の世界における事象を簡潔な処理しやすい形に表現し適切な方法を選んで能率的に処理したり，その結果を発展的に考えたりすることである．（p.19）

このようにわが国の学習過程においては，日常あるいは数学における問題を解決するために数学を用いたり，あるいは数学を発展的に考えたりすることが強調されている．これはまさしくFreudenthal数学教育論で述べた学習過程である「数学化」の学習過程と同様である．したがって，わが国の実践に対して，例えば，数学学習はどのように進めていけばよいかと問われれば，児童生徒自身の活動の反省を契機として進めていかなければならないと答えられる．数学の学習過程はどのように構想するかと問われれば，数学の歴史的考察及び児童生徒の観察から現象とそれを組織する数学をいく通りも考え，その中で児童生徒に主体的な活動として展開できる学習過程を採用する必要がると答えられる．数学の活用をどのように保障するかと問われれば，Freudenthal数学教育論における陶冶作用で述べたように，数学を人間の活動として認識させることで保障されうると答えられる．

このように，わが国が目標とするところの活用に対して，示唆が得られる点が本研究の実践への意義として考えられる．

6.2. 今後の課題

本研究において「数学化」は,「再発明」原理に基づく活動であるとともに,「数学化」ができることが数学の「陶冶価値」でもあった. しかし, 本研究では「数学化」を大きく特徴付けることにとどまっている. したがって, その中で行われることが予想される, 一般化や拡張などの具体的な活動, あるいはそれら個別の活動における組織の方法について検討することでより具体的な数学の「陶冶価値」について考察できると予想する. この点が今後の課題として残されている.

第6章の引用文献

松尾七重（2006).「学んだことの活用のための内容と時間の充実を」.『日本数学教育学会誌』, 88, 47.

中学校学習指導要領ー数学編ー（平成20年). 文部科学省

小学校学習指導要領ー算数編ー（平成20年). 文部科学省

中学校学習指導要領解説ー数学編ー（平成20年). 文部科学省

小学校学習指導要領解説ー算数編ー（平成20年). 文部科学省

引用・参考文献

大高泉 (1998). 『ドイツ科学教育論研究』. 共同出版.

Freudenthal, H. (1968). “Why to Teach Mathematics so as to be Useful”, *E.S.M*, *1*, *2*.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*, D.Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, D.Reidel.

Freudenthal, H.(1991). *Revisiting Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers.

岡田禕雄 (1977). 「H.Freudenthal の数学教育論(Ⅰ)」. 『広島大学教育学部紀要』, 3(26), 1-9.

岡田禕雄 (1978). 「H.Freudenthal の数学教育論(Ⅱ)」. 『広島大学教育学部紀要』, 2(1), 103-111.

岡田禕雄 (1979). 「H.Freudenthal の数学教育論(Ⅲ)」. 『広島大学教育学部紀要』, 2(2), 81-86.

岡田禕雄 (1981). 「H.Freudenthal の教授学的現象学の概念」. 『数学教育学研究紀要』, 7, 53-55.

磯田正美(1984).「数学化の見地からの創造的な学習過程の構成に関する一考察:H.Freudenthal の研究をふまえて」. 『筑波数学教育研究』, 3, 60-71.

磯田正美 (1999). 「数学的活動の規定の諸相とその展開」, 『日本数学教育学会誌』. 81, 10-16.

礒田正美 (2003). 「H.Freudenthal の数学的活動論に関する一考察 —Freudenthal 研究所による数学化論との相違に焦点を当てて —」,『筑波大学教育学系論集』. 27, 31-48.

山口潤一郎(1995)「H.Freudenthal の教授学的現象学に関する内容学的研」. 『中国四国教育学会教育学研究紀要』第 2 部, 42, 178−183.

山口潤一郎 (1996)「H.Freudenthal の教授学的現象学に関する内容学的研(2)」. 『中国四国教育学会教育学研究紀要』第 2 部, 42, 178−183.

伊藤伸也(2003).「H.フロイデンタールの再発明原理を支える数学観」.『日

本科学教育学会年間論文集』, 27, 277-278.

伊藤伸也(2004).「H.フロイデンタールの数学教授論における”re-invention”の概念について」.『日本科学教育学会年間論文集』,28, 591-592.

伊藤伸也(2005a). 「H.フロイデンタールの数学教授学における「数学化による領域の組織化」の概念」.『日本科学教育学会』, 20, 127-133.

伊藤伸也(2005b). 「H.フロイデンタールの「教授学的現象学」における教授原理「追発明」の位置」.『 筑波数学教育研究』, 24, 47-56.

伊藤伸也 (2006). 「H.フロイデンタールの教授原理「追発明」と「発見学習」の異同」. 『数学教育論文発表会論文集』, 39, 625-630.

伊藤信也(2007a).「 H.フロイデンタールの数学観とその背景」.『 筑波数学教育研究』, 26, 47-56.

伊藤伸也(2007b).「H.フロイデンタールの教授原理「追発明」を支える人間観」.『日本教育方法学会』, 53

小林廉 (2006).「「数学化すること」を重視した授業設計に関する研究:Realistic Mathematics Education を手がかりとして」.『 数学教育論文発表会論文集』, 39, 721-726.

小林廉(2007).「現実的な文脈を取り入れた数学科授業の設計に関する研究―Realistic Mathematics Education を手がかりに―」.『学芸大学教育研究』, 19, 101-110.

Wittmann, Erich Ch.(真野祐輔訳)(2005).現実的数学教育の過去と現在.

柳本成一(1997). Freudenthal の数学教育の問題(major problems)を考えるための思考活動について. 第 30 回数学教育論文発表会論文集, 673-674

飯田隆 (1995).「Readings in the Philosophy of Mathematics : After Godeled」.勁草出版

佐々木力(2001). 「二十世紀数学思想」. みすず書房.

溝口達也(2007).『算数・数学学習指導論』. 鳥取大学数学教育学研究室

松下裕之 (2007).「6 年間を見通した『割合』の学習指導の一貫性 -割合の見方を生み出す教材開発と単元構成を通して-」.『鳥取大学数学教育研

究』,10 , 14-17
松尾七重 (2006).「学んだことの活用のための内容と時間の充実を」.『日本数学教育学会誌』, 88, 47.
中学校学習指導要領－数学編－（平成 20 年). 文部科学省
小学校学習指導要領－算数編－（平成 20 年). 文部科学省
中学校学習指導要領解説－数学編－（平成 20 年). 文部科学省
小学校学習指導要領解説－算数編－（平成 20 年). 文部科学省
塩見拓博（ 2007).「Freudenthal の数学教育論における一考察 —基底的観念の検討を通して—」.『第 40 回数学教育論文発表会論文集』,869-870
塩見拓博 (2008).「Freudenthal 数学教育論における数学観 —Brouwer からの影響に焦点をあてて—」.『鳥取大学数学教育研究』, 10(11),1-16

謝辞

本研究を進めるにあたり，多くの方々に御指導・御鞭撻をいただきましたことを感謝しております．

まず，溝口達也先生には，学部・大学院と 3 年半もの長い間御指導をしていただいたことに大変感謝しております．溝口先生には，研究に対して本当の意味での優しさを教えていただきました．また，溝口先生から教えていただいた言葉として，「無知の知」という言葉が印象的に残っています．今思えば，自分の無知さを痛感したのが卒業論文作成に奮起していた学部生のときでした．授業設計や学習指導論の講義で数学教育に触れてはきているものの，溝口先生が話された文脈を私が後から再生できないため勝手な解釈で納得したり，局所的な授業設計で満足していました．そのような学部生活の中で数学教育について自らの活動として取り組み，「専門家とは専門的な用語を適切に使える人のことをいう」という意味での無知さを卒業論文作成における 1 年半の間に知りました．このような無知さを溝口先生に感じさせていただいたからこそ大学院への進学も決意しました．

大学院では，学会という大勢のプロの研究者の方々の前で発表させていただく機会を与えて下さいました．幾度かの学会発表を経て，自分の研究の拙さ，人に伝えることの難しさを知りました．その中で序々に，論理的に物事を考えられるようになり，自分の発表の拙さを痛感できたことが成長だと思っています．さらに，学会において最先端の研究者の方々と話をさせていただいた経験は，私にとってかけがえのないものとなりました．特に，私の発表に対して質問・意見を述べていただきました國本景亀先生には研究を篤く見守っていただき，Wittman の資料を送っていただくなどのご尽力賜りましたこと，非常に感謝しております．

また，私生活において，至らない点も多く，溝口先生に御迷惑をおかけしました．そのような不甲斐ない自分を決して見捨てることなく，常に暖かく接していただけたことを非常に感謝しております．

矢部敏昭先生にも，やはり厳しく，かつ優しく御指導いただきました．矢部先生には，講義において私の拙い発言の中から何かいいものを拾い出し，常に評価してくださいました．「学ぼうと思えば誰からでも何からでも学べる」．矢部先生から学んだこの姿勢は今や私の姿勢にもなっています．さらに，何か気になることや学べることがあればすぐにメモをとられ，常に学ぶことを体現されており，プロには休みがないということも教えていただきました．このような矢部先生との関わりの中で教えは乞うものではなく，自ら学ぶものであることを学ばせていただいたことを非常に感謝しております．

3 年半を振り返れば，お二方の先生には人として，研究者として常に範を示していただき，この上ない環境で生活できたと感じております．その中で少しは成長できたのではないかと思っています．

研究室のメンバーにも，大変お世話になりました．川口卓己さんには，研究の方法論から細かな用語の使用に至るまで，厳しく指摘していただき，さらに研究に限らず親しくしていただきました．また，後輩である田中光一さん，尾崎正和さんには，研究に対して多様な視点を提供していただいただけでなく，日々の研究室の生活を居心地のよものにしてくれたことに感謝しております．

学部生の早田さん，入澤さん，山中さん，常友さん，前田さんたちにも様々な面で助けられました．大変感謝しております．

また，「Lapin の会」の先輩方，先生方には，学校現場で培われた豊富な知識と考え方，研究を実践に活かす態度を学ばせていただき非常に感謝しております．特に，田中慎一さんには在学中から卒業後もお世話になりました．そして，真野祐輔さんにも学会や夏合宿の度に助言をいただき感謝しております．

このように，本論文を書き上げるまでにこれほど多くの方々の支援をいただけたことはとても幸いなことであると感じます．私は，鳥取の地を離れ教壇に立つため，お世話になった方々へ直接的に恩返しできる機会は少なくなりますが，夏合宿などの機会に顔を見せ，自ら学ぶととも

に私が学んだことを伝えられるように努力致します．

最後に，大学院進学を快く承諾していただき，支援していただいた家族に感謝致します．

2008年　12月

学習科学コース院生室にて

鳥取大学数学教育研究　　**ISSN 1881! 6134**

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/journal.html

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。
  - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
  - 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
  - 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
  - その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/