ISSN 1881-6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education

www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/journal.html

算数・数学教育におけるオープンエンドアプローチに関する研究

-オープンプロブレムについての考察-

入澤勝利

vol.11, no.5

Feb. 2009

鳥取大学 数学教育学研究室

目次

第1章　本研究の目的と方法

本章では，研究の動機，目的と方法，研究課題について述べる．

1-1　研究の動機

一般的に算数・数学における問題は，教師が提示した問題を学習者がいかにして解くかということが課題であると考えていた．ここでいう問題に対する答えは結果が一様である．学習者において問題は，学習者自身の多様な思考活動が保障されるべきであり，問題に対する多様な見方を育て，これまでの捉え方をより広げるべきであると考える．同時に，問題を解き振り返ることで，その問題の価値付けも行い，どのような問題が数学的によい（価値のあるもの）かという力を育成していくことは非常に重要なことではないかと考えた．そこで，正答がいく通りにも可能になり，多様な思考活動が展開されるオープンエンドアプローチに非常に興味を抱き，本研究に至った．

1-2　研究の目的と方法

本研究では，島田氏の事例を通し，「問題に対する解答は，正答か誤答(不完全解答も含めて)のいずれかであり，正答はひとつしかない，このような型の問題を完結した問題，クローズドな問題と名付け，これに対して，正答が幾通りにも可能になるような条件づけた問題を未完結な問題，結果がオープンな問題，オープンエンドの問題と呼ぶことにする．」[1)]とした上で，それらの違いや，クローズドな問題からオープンエンドな問題にするにはどうすればよいかなどを考察していく．さらに，それらを足がかりに，課題を設定し，多様な解決を奨励しつつも学習者自身が問題の価値の吟味をすることが可能にできないかを考察していく．

1-3　研究課題

本研究の目的は，考察を通して，クローズドな問題からオープンエンドの問題を作成し，より児童の積極的な活動を支援していくことにある．これを達成するために，まずオープンエンドの問題についての定義を明確にし，理解をより深めなければならないために，以下のような課題を設定する．

課題 1　「未完結」「結果がオープン」「オープンエンド」とはどういうことか.
課題 2　「正答がいく通りにも可能になる条件づけ」とはなにか.
課題 3　オープンエンドの問題づくり
課題 4　教材開発の試行的展開

課題 1 に対しては，島田氏のオープンエンドの問題の事例を解き，オープンエンドの問題の特徴を見ながら進めていく.

課題 2 に対しては，オープンエンドの問題とクローズドな問題を比較し，オープンエンドの問題における条件付けがどのようにされているのかみていく.

課題 3 においては，課題 1，2 を基にし，オープンエンドな問題の定義を明確にした上で

問題作成を行う.

課題 4 においては，これまでの従来の問題やオープンエンドな問題を総合的に考察した上で，実際の教材開発のためのモデルを考察していく.

これらの課題を解決するために，主に島田氏のオープンエンドな問題の先行研究を参考にし，筆者の考えるオープンエンドな問題の定義をより明確にし，研究を進めていきたい.

第 2 章　　オープンエンドな問題について

2-1　オープンエンドな問題とはなにか
2-2　オープンエンドな問題における条件付け
2-3　クローズドな問題との比較

本章では，研究課題 1，2 である「未完結」「結果がオープン」「オープンエンド」とはどういうことか,「正答がいく通りにも可能になる条件づけ」とはなにかについて考察し，オープンエンドの問題の定義を明確にし，その考察を述べる.

2-1 では，島田氏の述べるオープンエンドの問題を実際に解く中で，氏が定義したオープンエンドとはどういうものかを考察する.

2-2 では．オープンエンドの問題の共通点や相違点から，オープンエンドとはどういうものか明確に定義しなおす.

2-3 では，オープンエンドな問題，クローズドな問題の比較を行う.

2-1　オープンエンドな問題とはなにか

島田氏はオープンエンドな問題を以下のように定義している.「問題に対する解答は，正答か誤答(不完全解答も含めて)のいずれかであり，正答はひとつしかない．我々はこのような型の問題を完結した問題，クローズドな問題と名付け，これに対して，正答が幾通りにも可能になるような条件づけた問題を未完結な問題，結果がオープンな問題，オープンエンドの問題と呼ぶことにする.」2)

一般的に，算数・数学においては，それぞれの問題について導き出される解答はただ一通りであるという認識である．ここでいうオープンエンドアプローチは，解答を導き出すための多様な解決の過程と，その問題解決の思考の多様さを指していると考える．問題の答えを見出すことを直接の課題とせず，答えを得るための方法を授業の課題とする．上記のようにオープンエンドアプローチを捉え，島田氏の述べる具体的な事例を基に考察していく．3)

（1）問題

プラスチック(透明体)でできた直方体の容器に，水が途中まではいっています．この容器を，底面の一辺を固定して傾けると，傾きに応じて，水面で限られたいろいろな部分の形や大きさが変わってきます．それらの形や大きさの間にある，いろいろなきまりをできるだけたくさん見つけなさい．(AB を a，CD を b，図 1－2 において，c をおき，AM=MC とする．)

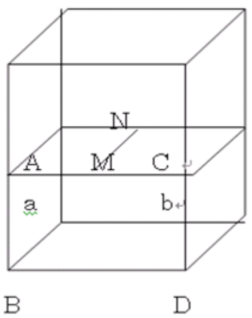


図 1

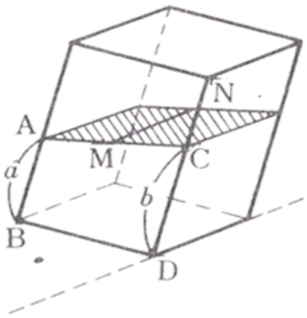


図 1-1

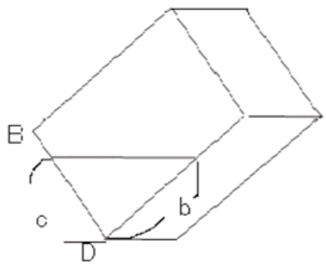


図 1－2

(2)問題解決の多様性

1） 図 1 のように底面に垂直な辺の水面下にある部分の長さを，それぞれ a，b とすると，a＋b は一定となる．

(証明)　直方体に入っている水の体積は同じ(一定)で，側面 ABCD を底面とすると，台形の四角柱と見ることができるので，その高さは一定である．つまり台形の面積は一定．台形の面積＝（上底＋下底）×高さ÷2 から，上底＋下底は一定となるために，a＋b は一定となる．

2） 側面積（s）は変わらない．

(証明)BD を x とし，奥行きを y とする．さらに図 2－１のように A`，B`，C`，D`とそれぞれおく．

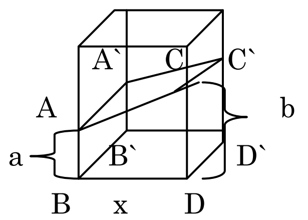


図 1－3

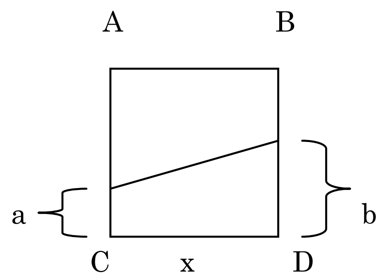


図 1－4

①各面の面積

四角形 ABCD＝$(a+b)\times x\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(a+b)x$

面が反対側にもあるので $\left\{\frac{1}{2}(a+b)x\right\}\times 2=(a+b)x$ となる．

四角形 CC`D`D= b × y，四角形 AA`B`B=a×y となる．

②側面積　$s=(a+b)x+ay+by=(a+b)x+(a+b)y=(a+b)(x+y)$

(a＋b)は一定である．x，y 共に容器の長さであるために一定である．つまり側面積は一定となる．

3)　図 1-2 のようになるまで傾けた場合は，bc は一定となる．

(証明)はいっている水を図 1-6 のような図形として取り出す.

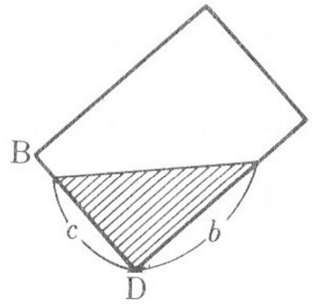


図 1－5

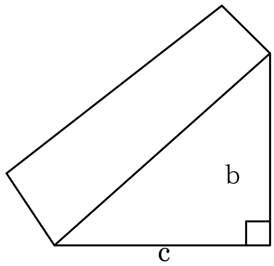


図 1－6

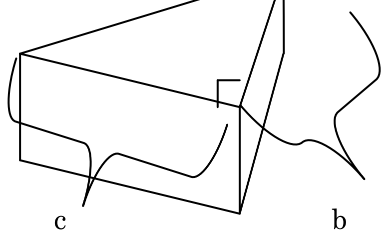


図 1－7

体積は一定であるので，高さは一定となる．となると当然，底面の三角形($\frac{1}{2}\times b\times c$)の面積は一定.

$\frac{bc}{2}$ は一定であることから，bc は一定となる.

4）水面の形は，長方形でかつ，線分 MN は定線分である．

(証明)図 1－1 を上から見た場合を図 1－8 とする．直方体の辺である AA`，CC`の容器の長さは一定であり，かつ平行である．MN は定点より，AM＝MC，　A`N＝NC`となる．さらに MN//AA`//CC`であり，直方体の容器であるため，角度は９０°となる．つまり二組の向かい合う辺が平行で長さが同じ，隣り合う角度が９０°であるために，長方形となる．さらに MN は共に中点であり，長方形であることから，AA`＝MN＝CC`となり，定線分となる．

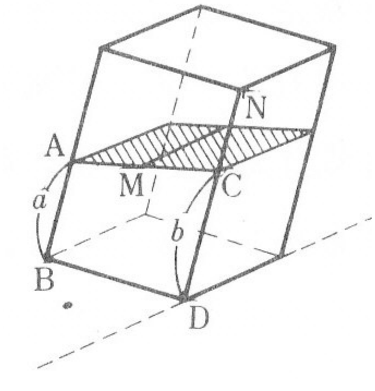


図 1－1

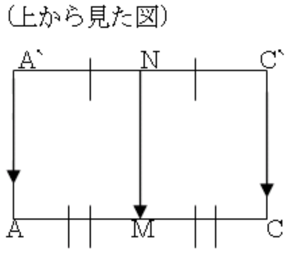


図 1－8

以上のように，この一つの問題に対して上記のように多様な問題の解決の過程と，その問題の解決の思考の多様さが見ることができる．a+b が一定ということであれば，体積の求積公式，台形の面積の求積公式が用いられる．水面の形は，長方形であることを考えるとき，二組の向かい合う辺が平行で，長さが等しく，隣り合う角度が 90° という長方形の性質を考える．それらは，解決の思考の多様さを指しているのではないか．

この問題では，a＋b が一定となるというきまりを見つけ出した児童．側面積が一定であると考えた児童．両者とも，体積が一定ということから証明している．それらを比較すると，体積が一定ということが共通していることから，同じ体積で他の図形(三角柱なら？円柱なら？)ではどうか，他の傾け方ならどんなものが考えられるか．次々に学んだ事に変化を加えることが考えられる．そこからさらに新たに問題意識をもつことができるのではないか．具体的に，以下に問題を記す．

(3)問題

※　三角柱であった場合(ただし傾け方は底面の一辺を固定してする．)

三角柱の容器に水を入れて，この容器の一辺を固定して傾けたとき，そこにかくれている数量的，図形的な諸関係を，できるだけたくさん見つけ，その成り立つ理由も考えなさい．(前提として，三角柱の容器を一辺 10cm，高さ 15cm の目盛りはつけていない正三角柱とする．辺 BC を固定して傾けるものとする．)

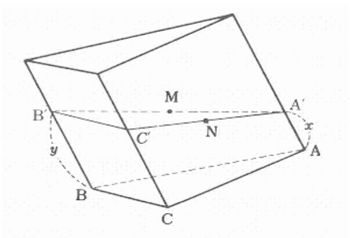


図　2-1

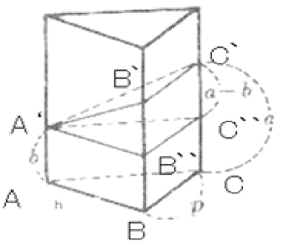


図　2-2

(4)問題解決の多様性

1)　線分 MN は定線分である．

(証明)上から見た水面の図を以下の図 2−3 とした．MN はそれぞれ定点であるから A`M＝B`M，A`N＝C`N である．⊿A`MN，⊿A`B`C において，AM : AB`＝AN : AC`で，∠A`は共通であるから，2 組の辺が等しく，その間の角が等しいので，⊿A`MN と⊿A`B`C `は相似である．これにより，2MN＝B`C`となる．また，B`C`は常に一定であり，M，N はそれぞれ中点である．∠AMN=∠AB`C`より，B`C`//MN となる．よって MN は，定線分となる．

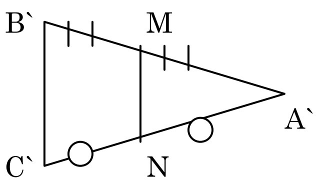


図 2−3

2)　図 2-2 のように各点を A，A`，B，B`，B``，C，C`，C```とおく．さらに，BB`（＝CC`）を a ，AA`(=BB``=CC``)を b とおくとき，2a＋b は一定となる.

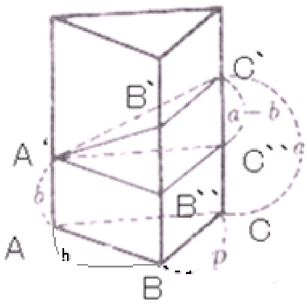


図 2－2

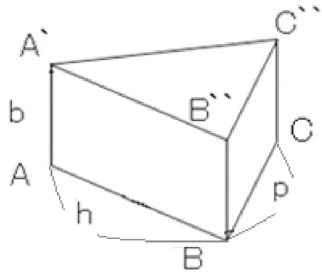


図 2－4

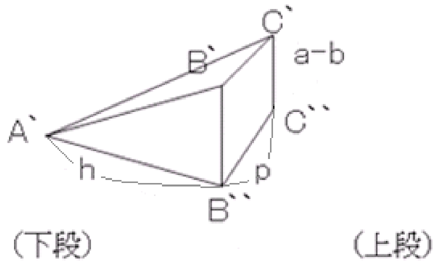


図 2－5

(証明)図 2－2 より，p を底辺とする三角形(底面)の高さを h とする．また A`B``C``で切った形の図形の下段を図 2－4，上段を図 2－5 とする．

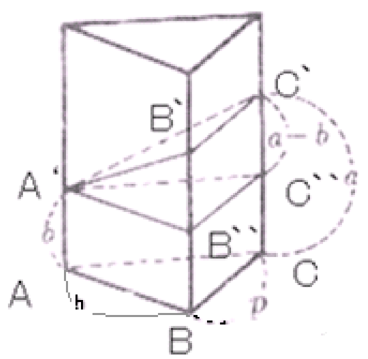
体積は，【下段】底面積 ABC×高さより，$\dfrac{1}{2}\times p\times h\times b=\dfrac{bph}{2}$ となる．

【上段】底面積 B`B``C`C``×高さ h×$\dfrac{1}{3}$ より，$\dfrac{1}{3}\times(a-b)\times p\times h=\dfrac{(a-b)ph}{3}$ となる．

p，h は容器の長さ（＝10cm）であり正三角柱であるため一定である．そのため $\dfrac{a-b}{3}+\dfrac{b}{2}$ が，一定となる．つまり $\dfrac{2a-2b+3b}{6}=\dfrac{2a+b}{6}$ となるため，2a＋b は一定となる．

3)　側面積が一定.

(証明)図 2－2 において，この図形は正三角柱より，AB＝AC＝BC＝10cm となる．



・　AA`C`C の面積　(b＋a) ×10×$\dfrac{1}{2}$　＝5(a＋b)

・　AA`B`B の面積　(b＋a) ×10×$\dfrac{1}{2}$　＝5(a＋b)

・BB`C`C の面積　10×a＝10a

・側面積　s＝10(a＋b)＋10a＝10(2a＋b)となる．2a＋b は一定であることから，側面積は一定である．

図 2－2

4) 水面の形が二等辺三角形.

(証明)図 2－2 において，正三角柱の容器であることから，AC＝AB，A`C`＝A`B`，また CC`=BB`となる．さらに，辺 AA`は共通であることから，AA`C`C と AA`B`B は合同である．つまり，A`C`=A`B`となり，BC の辺を固定して動かしているために，水面の形は二等辺三角形である．

以上のように，長さや面積，水面の形などに着目することで，この問題は正答がいく通りにも可能になる．線分 MN は定線分である，2a＋b は一定，側面積が一定，水面の形が二等辺三角形など，前回の問題と同様に，多様な問題の解決の過程と，その問題の解決の思考の多様さが見ることができる．例えば，2a＋b は一定であることを考えるとき，底面積の求積公式，三角柱の体積，三角錐の体積の公式を考える．これがこの問題の解決の思考の多様さを指すと考える．

さらに，これまで解いた問題を比較し，解く中で，体積が一定ということから，側面積も一定であるということが，どちらでもいえることが明らかとなった．つまり少なくとも，直方体と，三角柱においては，体積が一定なら，側面積が一定というきまりが，児童の考えがでてきたわけである．多様な処理や表現をとおし，既習の知識(台形の面積・体積の求め方)を総合的に用いることで，新たなきまりが導きだされた．五角柱ならどうか，三角錐ならどうか，という考えが次々とでてくるだろう．従来の一つの問題に対する解答が一つしかないものと異なり，複数の解答が得られるものをオープンエンドな問題と呼ぶことができる．

また従来の問題のように答えを見出すことを直接の課題とするのでなく，答えを得るための方法を授業の課題としているため，従来の問題は答えを見出すことで「完結」となる．一方，多様な解決の過程を経て，また思考の多様さが伺われるオープンエンドアプローチは，その問題に対する答え，つまり結果が多様になるためオープンとなり，発展の要素を含み，答えを見出すことで「完結」とはならない．では，なぜオープンエンドな問題は多様な解が得られるのだろうか．

2-2　オープンエンドな問題における条件付け

「正答がいく通りにも可能になるような条件づけた問題を未完結な問題，結果がオープンな問題，オープンエンドの問題と呼ぶことにする．」1) とあるが，なぜオープンエンドの問題は多様な解がえられるのか．そもそも正答がいく通りにも可能になる条件付けとは何か．

これらを考える前に，そもそも正答がいく通りにもなることでオープンエンドな問題としてよいのかをまず検討していく．次の問題は氏がオープンエンドな問題として定義しているものである．4)

（1）問題

次の表は，ある虫がみぞにそって歩いたときの時間と動いた距離を調べたものです．「？」のところは調べるのを忘れました．

時間(分)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
距離(cm)	12	24	36	48	60	72	84	？	？	120

① 8の下？は，どんな数だったと考えられますか．その求め方を式で書きなさい．

②その他の求め方があったら，あるだけ書きなさい．

（2）予想される児童の反応

Ⅰ，「一方が1増える(減る)と，他方は，12増える(減る)」

○ 12＋12＋12＋12＋12＋12＋12＋12

○ 84＋12，72＋(12＋12)，72＋12×2，60＋(12＋12＋12)，60＋12×3…

○ 120－(12＋12)，120－12×2

Ⅱ，「一方が2倍，3倍，4倍…になるにつれて，他方も2倍，3倍，4倍…になる.」

○ 12×8，24×4，48×2，24÷2×8，36÷3×8…

○ 24×4，48×2

○ $120\times\frac{8}{10}$

Ⅲ，「いつも(距離)÷(時間)は12になる.」

○ 12×8

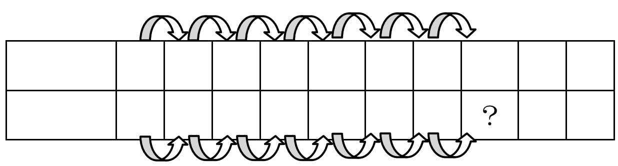
(3)多様な解決の過程

・　Ⅰの反応が出てくる表の見方

(Ⅰ－Ⅰ)表を見る起点がはじめで，解を導き出す

（例）12＋12＋12＋12＋12＋12＋12＋12

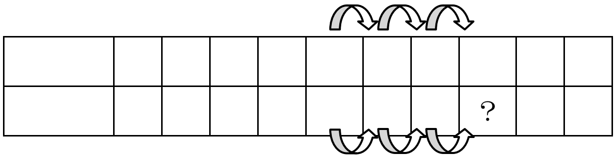
・時間が1分増えるごとに，12cmずつ増えることを，表の一番初めの1分目から見て考える．最初の起点は，はじめの1分目のところになる．



（Ⅰ－Ⅱ）表を見る起点が途中で，解を導き出す①

（例）84＋12，72＋(12＋12)，72＋12×2…

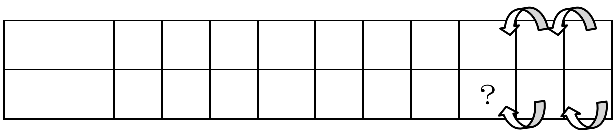
・最初のところから見て，12 cm ずつ増えている規則性を見出した前提で考える．時間が 1 分増えるごとに，12cm ずつ増えることを，表の途中から考えることで解を導く．



（Ⅰ－Ⅲ） 表を見る起点が途中で，解を導き出す②

（例）120－12－12，120－12×2，120－(12＋12)

・表を右から見て，1 分減るごとに 12cm ずつ減ることから考え解を導く．問題の時間が 8 分で終わらなかった意図として，一方が 1 減ると，他方は，12 減るという解答を生み出すためであると考える．1 分減ると 12cm ずつ減るという規則性から，求める．

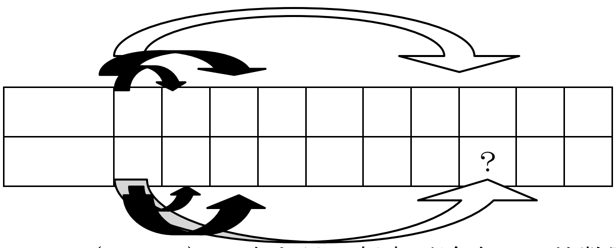


・Ⅱの反応がでてくる表の見方

（Ⅱ－Ⅰ）　表を見る起点がはじめで，倍数関係から導き出す

（例）　12×8　24÷2×8，36÷3×8…

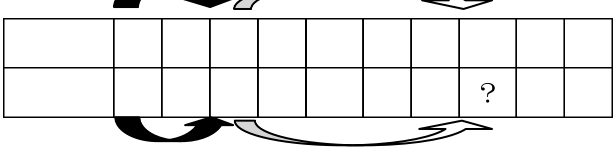
・時間が 2 倍，3 倍になるにつれて，距離も 2 倍，3 倍になることに着目し，求める数の 8 倍より，距離も 8 倍であると考えた.



（Ⅱ―Ⅱ）　表を見る起点が途中で，倍数関係から導き出す①

（例）　24×4　48×2

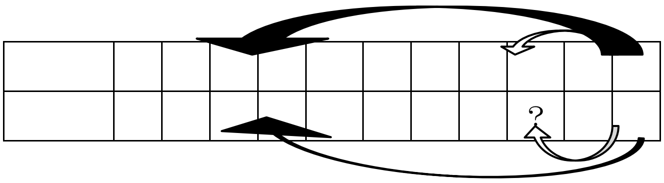
・時間が 2 倍，3 倍になるにつれて，距離も 2 倍，3 倍になることを前提に，起点を途中のところに着目し，倍数関係から求める.



（Ⅱ—Ⅲ）　表を見る起点が途中で，倍数関係から導き出す②

（例）$120\times\frac{8}{10}$

・時間が$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$倍…になるにつれ，距離も$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$倍…になる関係に着目し求める．

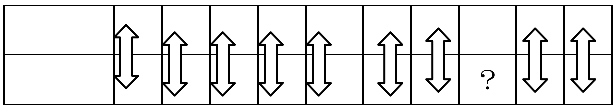


・　Ⅲの反応が出てくる表の見方

(Ⅲ)上下の関係を調べることによって導き出す

（例）12×8（□÷8＝12）

・表を縦に見て，常に(距離)÷(時間)は 12 になることに着目し，24÷2＝12，36÷3＝12，48÷4＝12…より，□÷8＝12→□は 12×8 という考えで求める．



以上のように，解答は「12+12+12+12+12+12+12+12」などのように，増加や減少の大きさに着目したもの，「12×8」(表を横にみる)，「48×2」などのように，増加の割合や減少の割合に着目したもの，「12×8」（表を縦にみる）のように，ともなって変わる 2 量の割合に着目したものが挙げられる．あてはまる数「96」を求める過程を課題にしているために多くの解答がでる．その点では，前回の水槽の問題と同様である．

しかし，水槽の問題との決定的な違いがある．それは，この問題において問題を解く児童自身が数値や，変化の割合などの条件を決めてないこと，そのため多様な解答が得られてないことである．水槽の問題においては，水の傾け方から，水面の変化，水位の位置のきまりなど，問題を解く児童自身が自由に条件を決めていくために，多様な解が得られた．一方で，この問題においては，あらかじめ決められた表にある数値から読み取っていく．表の数値の変化のきまりなど，既に問題自体が学習者に対し制限をし，問題の条件づけをしている．そのため，多様な解が得られない．

つまり，この 2 つの問題の違いというのは，問題における条件付けが自由にできるように，問題が，問題を解く児童に対し開かれている（=open）か否かという点の違いである．オープンエンドの問題における条件付けは，問題自体が学習者に開かれ，未完結な問題に学習者自身が条件付けをすることにより，思考や数学的な活動が多様になるように行われるのである．

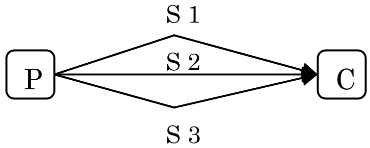
2-3　クローズドな問題との比較

これまで見てきた事例と，オープンエンドな問題，クローズドな問題を整理していく．以下に図式化したものを記す．

P:問題　(problem)　S:解決（solution）

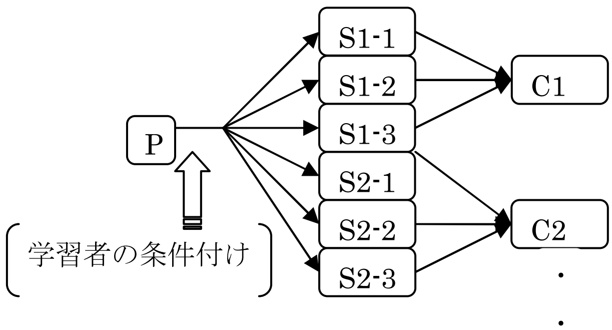
C:解答（conclusion）

≪クローズドな問題≫



・一つの問題に対し答えはひとつしかない．それが従来の問題である．しかし解決の過程は多様にある場合も含む．島田氏の述べる**「問題に対する解答は，正答か誤答(不完全解答も含めて)のいずれかであり，正答はひとつしかない．」**[1)] という定義にのっとれば，この図式はクローズドな問題といえる．また，オープンエンドな問題の事例としてあった表の問題もこれにあたると考えられる．

≪オープンエンドアプローチ≫



・ある一つの問題に対し，多様な解決の過程があり，正答がいく通りにもなる．これがオープンエンドアプローチである．これは問題を解く学習者自身が，問題に対し自由に条件をつけるために正答がいく通りにも可能になる．

オープンエンドな問題では学習者の条件付けにより正答がいく通りにも可能になった．これは，問題を解く中で学習者が自由に条件付けをおこなった結果であると考えられる．また両者の共通点は，多様な解決の過程が生じるという点である．ただし，上記にあげたオープンエンドの問題では，学習者の条件づけにより正答がいく通りにも可能になるが，そのねらいに全くそってない解答もでてくる場合もある．また問題を解く学習者を教師が評価できない．加えて，多様に得られた解答について，どのように収束していくか，時間の制約の問題など不十分なところがある．

第 2 章のまとめ

本章では，研究課題 1，2 である，オープンエンドな問題とはどのようなものかということを島田氏の具体的な事例をもとに考察してきた．

2-1 では，オープンエンドな問題とされる水槽の問題を実際に解く中で，氏が定義したオープンエンドとはどういうものかを考察した．

2-2 では，さらに次のオープンエンドな問題を解き進める中で，それらの共通点や相違点から，オープンエンドとはどういうものか明確に定義しなおした．多様な解決が水槽の問題，表の問題，両者にある一方で，厳密には問題に対する答えが後者はひとつしかなく，氏の定義するオープンエンドな問題には矛盾が生じることがわかった．

2-3 では，まずオープンエンドな問題，クローズドな問題を整理した．そして問題を解く上で学習者が自由に条件付けをすることにより，多様な解決が得られることを奨励すべきと考えた．次章では，これまでのことを踏まえた上で，オープンエンドからさらによりよいものを目指して新たな提案をし，問題作成に臨む．

第 3 章　オープンエンドアプローチから
オープンプロブレムへ

本章では，研究課題 3 であるオープンエンドの問題づくりについての考察を述べる．

3-1 では，島田氏の述べる「具体的な場面」に対し，どのような場面が学習者にとって「具体的な場面」かということに関しての考察をおこなう．

3-2，3-3 では，「具体的な場面」の理解のために学習者にとっての「問題」，問題を構成するための「問題状況」についての定義づけを行う．

3-1　「具体的な場面」とはなにか

これまでの考察を元に，問題をつくることにおいて，「結果が一意にならないために，問題を解く児童自身が条件をつけることが可能であること」に考慮して問題を作ってみる．実際の教科書で使われている問題を元に，児童の多様な解決を促せるような問題作成を行う．

1）問題

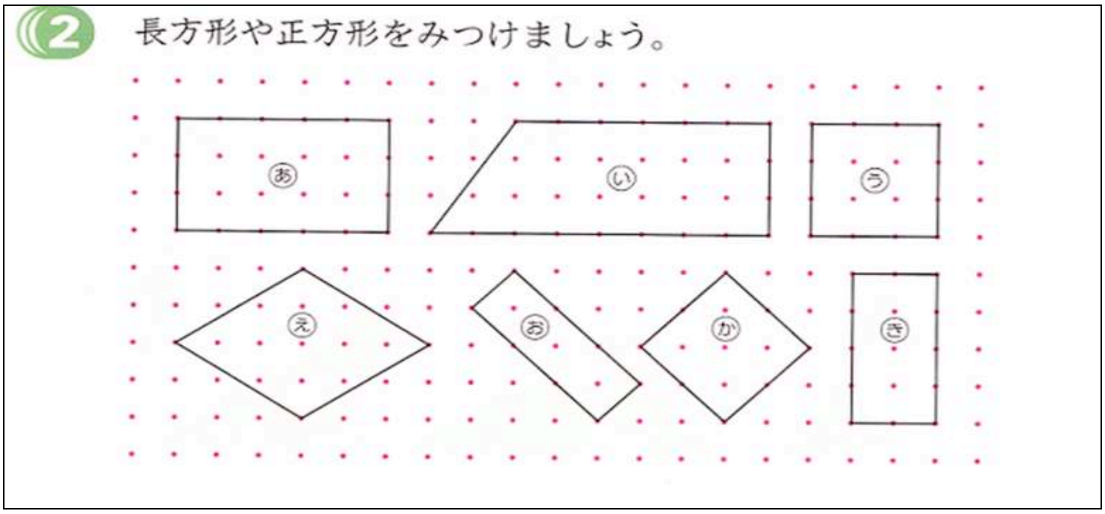
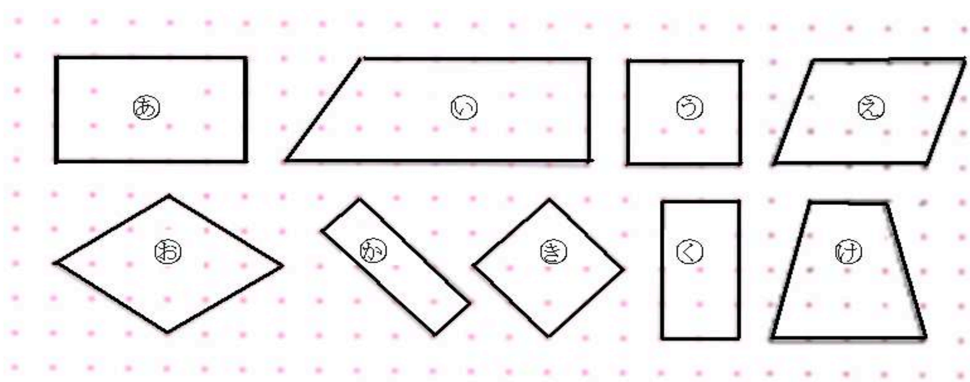


図 1

この問題はこの学習の前に，「かどがみんな直角になっている四角形を長方形といいます.」「かどがみんな直角で，辺の長さがみんな同じ四角形を正方形といいます.」と，長方形と正方形の学習を行っており，その確かめも兼ねた問題であると考えられる．長方形や正方形の性質を理解することが，この問題のねらいと考える．これを以下のような問題にしてみた．

（1）領域【図形】

下の中にある図形と，同じなかまの図形を見つけましょう．またそれがなぜ同じなのかも簡単に説明しなさい．



（2）問題解決の多様性

2-1　図形の形によって仲間分けをする．

あ，か，く（長方形）　う，き（正方形）　い，え，お，け（長方形でも正方形でもない図形）

2-2　辺の長さによって仲間分けをする．

う，お，き（全部の辺が同じ）

あ，え，か，く，け（一組ずつ辺の長さが同じ）

2-3　直角の数によって仲間分けをする．

あ，う，か，き，く（直角の数が 4 つ）

い（直角の数が 2 つ）　け（直角がひとつもない）

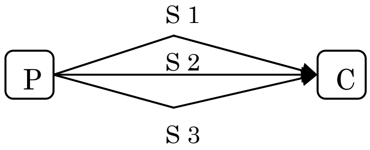
2-4　その他

お，か，き（図形が斜めになっている）

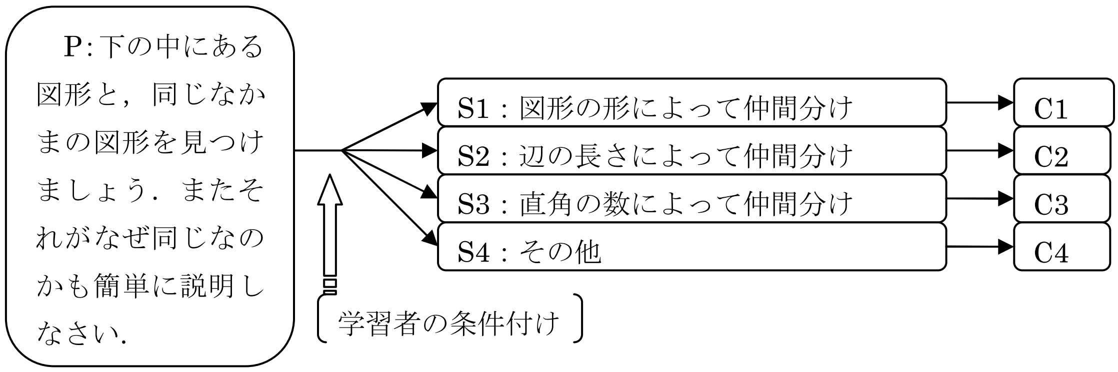
い，え，お，け（斜線がある図形）

以上のように，“おなじなかま”といっても，どの観点からみて同じかということが問題を解く児童自身によってかわってくる．角度や辺の長さ，大きさなど，総合的に図形を分析することもできる．このように児童自らが“おなじ”という定義を決めることで，つまり，この未完結な問題に対しいろいろな条件をつけることにより，ものの見方・考え方を拡げて，多様な見方や解が可能になる．最初に取り上げた問題のように長方形・正方形の図形選びで終わるのでなく，自分がみつけた共通項から，それらを分類・整理していくことで，図形の性質に気づけるものができると考える．また平行四辺形や，台形はこの学年以降で学ぶものであるが，その素地を学べることもできる．

教科書の本来の問題



オープンエンドアプローチな問題



以上のようにクローズドな問題からオープンエンドアプローチな問題にすることによって正答がいく通りにも可能になった．従来の問題と，このオープンエンドな問題が共通するのは，教師が提示した問題を学習者が解くということである．さらにオープンエンドアプローチでは，問題を解く中で学習者が自由に条件付けをおこなった結果，多様な解決が生じるということである．

ここでいま一度，オープンエンドアプローチの意義について考察したい．
島田氏は，オープンエンドアプローチの研究の動機を以下のように述べている．

「当初，われわれの取り上げた問題は，算数・数学科の高次の目標に対する子どもの到達度をどのように評価したらよいかということであった．算数・数学科では，数学に関するいろいろな知識・技能，ないし概念・原理・法則等が次から次へと教えられていく．それはその一つ一つがそれ自身重要であるからというのでなく，それらがよく消化され，子どもの中で一つの知的な組織になって，子どもの人間としての能力や態度の一側面となることを期待してのことである．個々の知識・技能は重要な成分ではあるが，本来の目標は，それらが一つの人格に統合されたことにある．
したがって，算数・数学科の教育が本来のねらいをどの程度に到達しているかを知るには，具体的な場面において，その子どもが，どんな風に既習の知識・技能を活用し，また既習のもので事がすまぬ場合に，その困難にどう対処していくかを見なくてはならない．」5)

算数・数学科の教育が児童に対し，本来のねらいをどの程度到達しているか，それらを調べる一つの手段として，本研究がはじまるきっかけとなったとある．しかし，その評価という観点からでは，児童が具体的な場面での困難な克服の対処をみなければならない．では，「具体的な場面」とはどのようなものか．氏は以下のように続けている．

「しかし，このことはいうべくして行いがたいことである．ここで述べている具体的な場面というのは，一方で自然な場面のことであり，評価のために外のものが設定した人為的な場面を意味しないからである．教室や子どもの日常生活においてそのような場面が出現したとしても偶発的なことが多い．」6)

氏が指し示す具体的な場面は，「評価のために外のものが設定した人為的な場面を意味しない」とある．そう考えるならば，一般に「教師が提示する問題を学習者が解く」ということは，「学習者が具体的な場面において既習の知識・技能を活用し対処している」といえるのだろうか．　オープンエンドアプローチは，教師が提示する問題から多様な解決ができるように自由に条件付けを行い解答に至るが，提示された問題を解決していく過程の中だけで学習者は「具体的な場面」に直面しているとは必ずしもいいきれない．学習者が「具体的な場面」に直面するとはどういうことか．また児童が具体的な場面での困難な克服の対処をみるためにはどうすればよいか．これらについての考察を考える前に，まず学習者にとっての「問題」とはなにかを考える．

3-2　「問題」とはなにか

まず，学習者にとっての「問題」について考察をする．R・チャールズ/F・レスター氏らは問題について以下のようなことを述べている．

「問題というのは次のような性格をもっているもの（task）である．

1，それに当面している人が，1つの解を見出すことを欲しているか必要としている．

2，その人が，その解を見出すのに，いつでも使えるようになっている手法をまだもっていない．

3，その人が解を見出すために何か試行をしなくてはならない．」7)

また，問題解決指導ハンドブックの著書においてS・クルーリック/J・Aルドニック氏らは問題について以下のようなことを述べている．

「問題とは，個人また集団に立ち向かい，解決を要求している状況のことであり，しかも，その個人が，その解決を得るための明白な手段あるいは道筋を知らないような状況のことであって，それは数量的であったり，あるいはその他であったりする．」8)

両氏の主張の共通点は，学習者が解決を欲していること，そしてその解決を得る手法をまだもっていないという点である．

つまり問題というのは，**「学習者にとって解きたくなるようなものであり，かつ，解を見出すための有効な手段をもっていない状況で，既習の内容を生かし未知なるものへの試行錯誤することを含む」**と考えることができる．

従来のクローズドな問題，オープンエンドアプローチの問題共に，教師が提示された問題の解決が学習者の課題となっている．このとき学習者にとっての「問題」は単に目の前にある課題の一つに過ぎず，本来学習者にとって「問題」とはさきほど定義した「学習者にとって解きたくなるようなもの」であることが望ましい．学習者自身が解決を欲し，既習の知識・技能を活用し対処するような場面，つまり具体的な場面で，問題自体を学習者が作りだすようなものとなれば学習者にとってそれは自らの「問題」になりうり，幾分か解消されるのではないだろうか．

そこで教師が提示する「問題」を解くことだけでなく，その「問題」自体を学習者が構成し，条件付けによる多様性を得ることを提案する．問題を構成することを通して，問題がいかにして作り上げられるのか，どのような問題が数学的によい（価値のあるもの）かという力をつけていきたい．この学習者が問題を構成するための要素を，仮に「問題状況」とした上で，その定義を行う．

3-3　「問題状況」とはなにか

問題を構成するための要素となる「問題状況」を定義する．改めてR・チャールズ/F・レスター氏らの定義を見てみる．氏は問題について以下のようなことを述べている．

「問題というのは次のような性格をもっているもの（task）である．
1，それに当面している人が，1つの解を見出すことを欲しているか必要としている．
2，その人が，その解を見出すのに，いつでも使えるようになっている手法をまだもっていない．
3，その人が解を見出すために何か試行をしなくてはならない．」7)

そもそも“状況”とは，そのもののあり様，様子をさす．つまり問題状況とは，その問題そのもののあり様，様子と考えられる．

氏の定義している1より，問題が「1つの解を見出すことを欲しているか必要としている．」ことから問題状況というのは，1つの問題から解答にいたるような状況を作り出す過程であるものと考えられる．

また2より，問題とは「いつでも使えるようになっている手法をまだもってない．」とある．学習者が解を見出すために，問題状況は，未知の解法を問う状況であるといえる．つまり，既習の事柄をもとに未だ解法の手法をもっていない問題をつくりあげる過程である．

「問題」はそれに対する「解答」がある．そのため，3で述べているように，解を見出すために試行錯誤することが生じる．学習者が問題の解を見出すために試行錯誤するように，問題状況には，その問題に対する数量的な要素や，数学的な概念を含んでいるものと考えられる．それらをもとにすることで，学習者の多様な思考が生まれ，条件付けなどが可能になる．

以上のことを踏まえて，問題状況とは次のように定義できるのではないか．

「問題を構成する数量的な要素に着目して，一つの解を欲したくなり，また必要とする問題を作り上げる過程であり，かつ，その解法においては未知の手法が活動を通して生み出される状況．あるいは問いを作る過程．」

これらを元に問題状況から問題が作られ，そして問題解決へといたる過程を「オープンプロブレム」とした上で開発を行い，教科書の事例を元に，次章分析を行う．

第 3 章のまとめ

本章では，研究課題 3 であるオープンエンドの問題づくりについての考察をしてきた．

3-1 では，オープンエンドな問題作りをする過程で，島田氏の述べる「具体的な場面」に対し，どのような場面が学習者にとって「具体的な場面」かということに関しての考察をした．

3-2 では，上記にあげた「具体的な場面」への理解のために，学習者にとっての「問題」とはどのようなものかを R・チャールズ/F・レスター氏，S・クルーリック/J・A ルドニック氏らの「問題」の定義から，問題とは「学習者にとって解きたくなるようなものであり，かつ，解を見出すための有効な手段をもっていない状況で，既習の内容を生かし未知なるものへの試行錯誤することを含む」との定義づけを行った．

3-3 では，教師が提示する「問題」を解くことだけでなく，その「問題」自体を学習者が構成し条件付けによる多様性を得ることを提案し，問題を構成するための要素を「問題状況」とした上で，その定義づけをした． そして問題状況から問題が作られ，そして問題解決へといたる過程を「オープンプロブレム」とした上で開発を行い，教科書の事例を元に，次章分析を行う．

第 4 章　オープンプロブレムの教材開発

本章では，課題 4 である教材開発の試行的展開を行うものであり，これまでの問題を総合的に考察した上で実際の教材開発のためのモデルを考察していく．

4-1 では，具体的に教科書の問題の分析を行い，どのような関係であるかを考察していくものである．

4-2 では，その考察からモデル化を行う．

4-3 では，オープンプロブレムの機能と役割についての考察をする．

4-1　　教材の分析

従来のオープンエンドの問題では学習者の条件付けにより正答がいく通りにも可能になった．それに対しここで提案するモデルは，与えられた問題状況から問題を作りだすことを通して，多様な解決を奨励しつつも，問題の価値の吟味をすることが可能という点でよりよいものと考える．教科書にある具体的な事例を元に考察をする．

以下，　Ps: 問題状況（problem situation）　P:問題　（problem）　S:解決（solution）　C:解答（conclusion）とする．

【問題 1】

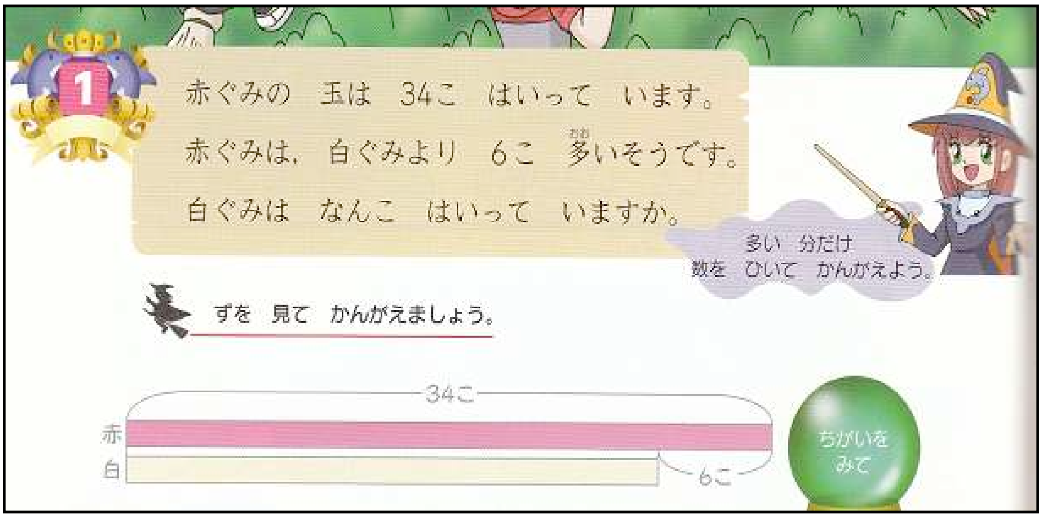


図 2

【本時のねらい】　・テープ図を見て 2 つの数量の違いに着目し，一方が多いということは他方が差の分だけ少ないと考えて，問題をとく．[9)]

Ps…赤組の玉は 34 こ　赤組は白組より 6 こおおい

P…白組はなんこ入っていますか？

P1…赤組，白組の玉はあわせて何個でしょう．

P2…赤組，白組の玉が同点になるとき，それぞれ何個になるでしょう．

P3…赤組，白組の玉を全部戻して，半分ずつ分ける場合，それぞれ何個になるでしょう．

この問題は，問題状況（PS）を「赤組の玉は 34 こ　赤組は白組より 6 こおおい」とした上で，そこから考える問題を上のように P～P3 とする．これら問題の解決は以下のようになる．

P の解答
S…34－6＝28

P1 の解答
S…34－6＝28
34＋28＝62

P2 の解答
S1…34－6＝28
34＋28＝62
62÷2＝31
S2…34－6＝28
28÷2＝14
34÷2＝17
14＋17＝31

P3 の解答
S1…34－6＝28
28＋28＝56
S2…34＋34＝68
68－（6＋6）＝56

問題状況から作られたこれらの複数の問題を見たとき，P の問題を解決しなければ P1，P2，P3 の解は得られない．つまり， P⊂P1，P⊂P2，P⊂P3 の包摂関係であらわすことができる．このとき，P1，P2，P3 どれも本時の問題になりうる．このように学習者により問題状況から作られた問題のうち，本時の問題がある一つの問題を包含しているものを PA（PatternA）とする．

【PA】　P ⊂P1，　P ⊂P2，　P ⊂P3

【問題 2】

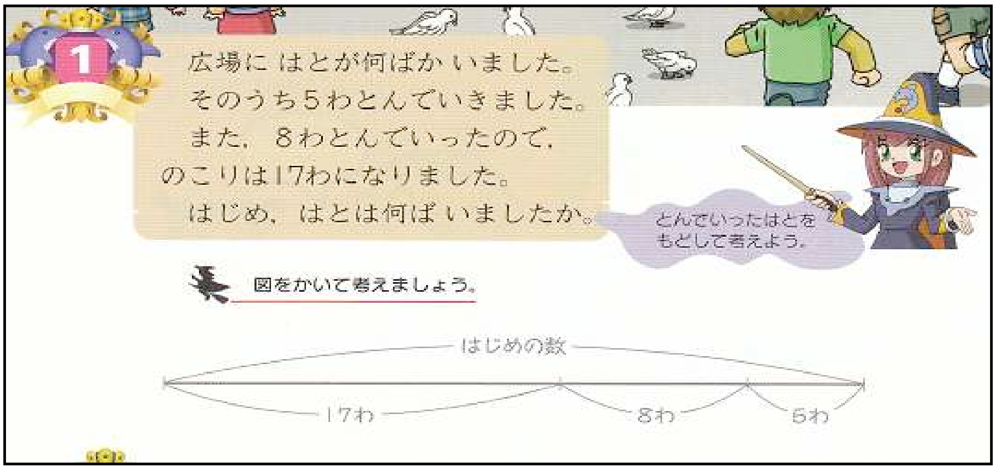


図 3

【本時のねらい】・数量の関係を線分図に使って表すことができる．

・へる前の数を求める逆思考の問題を，図をもとにして考え，解くことができる [10)]

PS…広場にはとが何羽かいた．5 羽とんでいった．さらに 8 羽とんでいった．のこり 17 羽になった．

P…はじめ，はとは何羽いたでしょうか．

P1…5 羽とんでいってから広場には何羽残っていたでしょう．

P2…全部で何羽とんでいったでしょう．

P3…この後広場に 3 羽戻ってきたら，全部で残ったはとは何羽いるでしょう．

この問題は，問題状況（PS）を「広場にはとが何羽かいた．5 羽とんでいった．さらに 8 羽とんでいった．のこり 17 羽になった．」とした上で，そこから考える問題を上のように P～P3 とする．これら問題の解決は以下のようになる．

P の解答

S1…17＋8＝25

25＋5＝30

S2…8＋5=13

17＋13＝30

P1 の解答

S…17＋8＝25

P2 の解答

S…8＋5＝13

P3 の解答

S…17＋3＝20

この問題の場合，本時の問題を P としたとき，P1，P2 の問題共に，P の問題の解答の過程に含まれている．つまり，本時の問題の中に，学習者が考えた問題のうち複数含まれていることになる．ただし，P3 の問題は，P の問題とは関係のないものに位置づけられる．このように本時の問題に複数の問題がかかわっているものを PB（PatternB）とする．

【PB】　P1，P2，⊂P　（P3）

【問題 3】

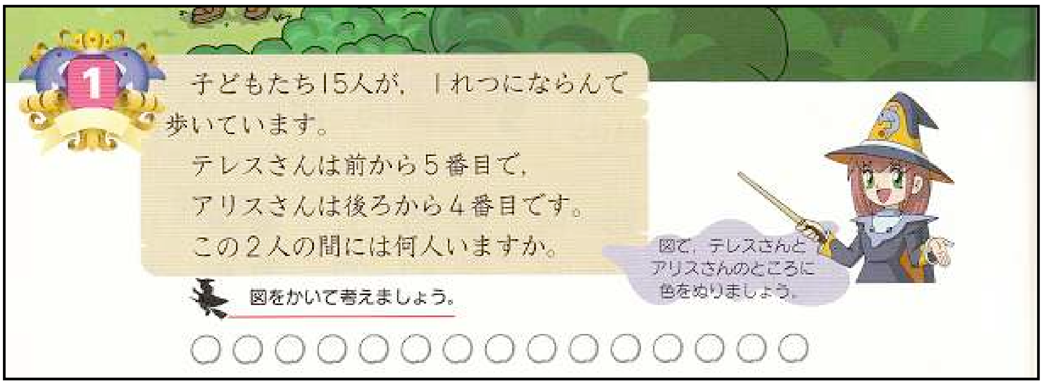


図 4

【本時のねらい】・集合数で与えられた問題を順序数の問題としてとらえ，図に書いて考え解くことができる [11)]

PS…こどもたちが 15 人一列に並んでいる．テレスさんは前から 5 番目．アリスさんは後ろから 4 番目．

P…この 2 人の間には何人いますか.

P1…テレスさんより後ろは何人いますか.

P2…アリスさんより前には何人いますか.

P3…テレスさんとアリスさんの間が 6 人いるとき，それぞれ二人は何番目にいますか.

P4…テレスさんは後ろから何番目ですか．またアリスさんは前から何番目ですか.

P の解答

S1…15－5＝10
　10－4＝6

S2…5＋4＝9
　15－9＝6

S3…15－4＝11
　11－5＝6

P1 の解答

S…15－5＝10

P2 の解答

S…15－4＝11

P3 の解答

S1…1＋6＋1＝8　C1…1 番前と前から 8 番目

S2…2＋6＋1＝9　C2…前から 2 番目と 9 番目

S3…3＋6＋1＝10　C3…前から 3 番目と 10 番目

S4…4＋6＋1＝11　C4…前から 4 番目と 11 番目

S5…5＋6＋1＝12　C5…前から 5 番目と 12 番目

S6…6＋6＋1＝13　C6…前から 6 番目と 13 番目

S7…7＋6＋1＝14　C7…前から 7 番目と 14 番目

S8…8＋6＋1＝15　C8…前から 8 番目と 15 番目

P4 の解答

テレスさん　S…15－4＝11

アリスさん　S…15－3＝12

この問題も P を本時の問題としたときに，P1，P2 とも P の問題の過程に含まれていることになる．このとき P3，P4 は本時の問題とはまた別のものと位置づけることができる．そのため PB であるといえる.

【PB】　P1，　P2，⊂P　　　（P3，P4）

【問題 4】

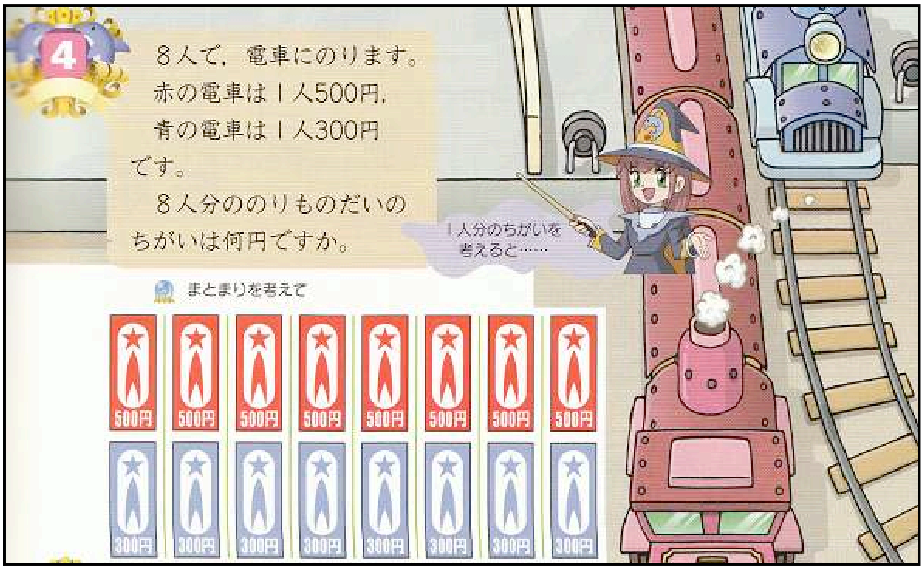


図 5

【本時のねらい】・減法と乗法を組み合わせた問題を「まとまりを考えて」解くことができる．[12]

PS…8 人で電車に乗る．赤の電車は一人 500 円．青の電車は一人 300 円．

P…8 人分の乗り物代のねだんの違いはなんですか．

P1…赤と青の電車の乗り物代のねだんの違いはいくらですか．

P2…赤の電車の 8 人分の乗り物代はいくらでしょう．

P3…青の電車の 8 人分の乗り物代はいくらでしょう．

P4…8 人が赤と青に分かれて乗った合計の値段は 3200 円でした．それぞれに赤と青に何人ずつ乗ったのでしょう．

P の解答

S1…500－300＝200

200×8＝1600

S2…500×8＝4000

300×8＝2400

4000－2400＝1600

P1 の解答

S…500－300＝200

P2 の解答

S…500×8＝4000

P3 の解答

S…300×8＝2400

P4 の解答　（5 で割り切れるか）

S…全員青	300×8＝2400		
青 1 赤 7	300×7＝2100	3200－2100＝1100	×
青 2 赤 6	300×6＝1800	3200－1800＝1400	×
青 3 赤 5	300×5＝1500	3200－1500＝1700	×
青 4 赤 4	300×4＝1200	3200－1200＝2000	○
青 5 赤 3	300×3＝900	3200－900＝2300	×
青 6 赤 2	300×2＝600	3200－600＝2600	×
青 7 赤 1	300×1＝300	3200－300＝2900	×
全員赤	500×8＝4000		×

この問題においても，「8 人で電車に乗る．赤の電車は一人 500 円．青の電車は一人 300 円.」という問題状況から作られた問題のうち，P の 8 人分の乗り物のねだんの違いを求める解決に，P1 の「赤と青の電車の乗り物代のねだんの違い」，P2 の「赤の電車の 8 人分の乗り物代」，P3 の「青の電車の 8 人分の乗り物代」複数の問題群が含まれている．この P の問題を本時の問題にしたとき，P1，P2，P3 は P の問題の過程に含まれているといえる．そのため PB であるといえる．

【PB】　P1，P2，P3⊂P　（P4）

【問題 5】

図 6

【本時のねらい】・□×a×b＝c の関係にある問題を 2 通りの考え方で解くことを通して，「何倍になるかを考えて」解く方法のよさを理解する．

・問題を関係図に整理し，何倍になるか考えて解くことができる．[13]

PS…時計とうの高さは 90m．時計とうは役所の高さの 3 倍．役所の高さは学校の高さの 2 倍．

P…学校の高さは何 m ですか．

P1…時計とうは学校の何倍ですか．

P2…役所の高さは何 m ですか．

P3…学校は時計とうの何倍ですか．

P の解答

S1…90÷3＝30

30÷2＝15

S2…2×3＝6

90÷6＝15

P1 の解答

S…2×3＝6

P2 の解答

S…90÷3＝3

P3 の解答

S1…$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

S2…90÷3＝30

30÷2＝15

15÷90＝$\frac{1}{6}$

この問題では,「時計とうの高さは 90m. 時計とうは役所の高さの 3 倍. 役所の高さは学校の高さの 2 倍」という問題状況から, P, P1, P2, P3 の問題が作成されると考えられる. このとき, P の問題「学校の長さは何 m でしょう.」を求める解決の中に, P1 の「時計とうは学校の何倍ですか」, P2 の「役所の高さは何 m ですか」の解決が含まれている. またこのとき, P3 の問題は P (本時の問題) にとっての解答を経ることで求めることができる. そのため, P の問題を本時の問題にしたとき, P1, P2, P3 の問題群は P の問題解決の過程に複数含まれていると考えられるために, PB である.

【PB】 P1, P2, ⊂P (P3)

【問題 6】

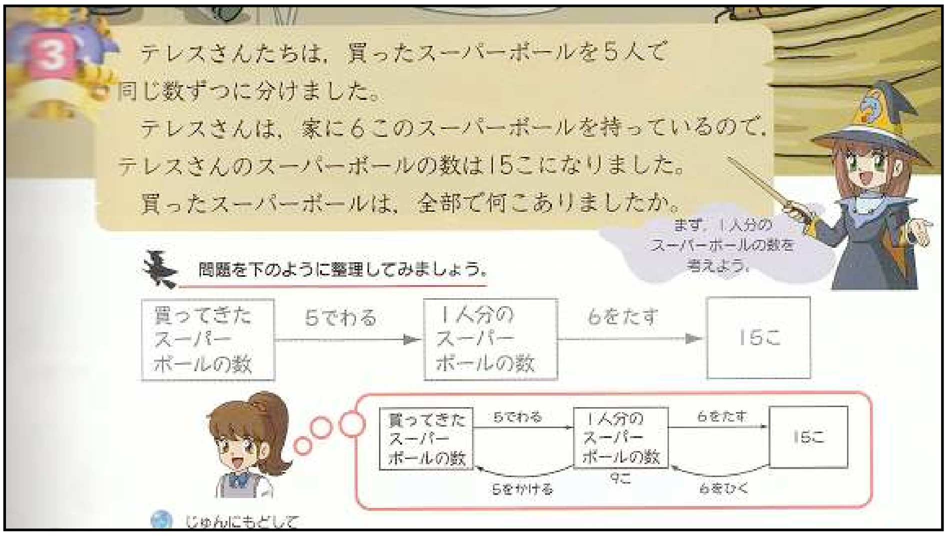


図 7

【本時のねらい】・数量の関係を関係図に表し，「じゅんにもどして」考えていく方法で問題を解決することができる．14)

PS…5 人で同じ数ずつ分けた．家に 6 個のスーパーボールがある．全部で 15 個になった．

P…買ったスーパーボールは，全部で何個になったでしょう．

P1…一人分のスーパーボールの数はいくつでしょう．

P2…買ってきたボールの数は，テレスさんが持っている全部のスーパーボールの数の何倍ですか．

P3…買ってきたスーパーボールの数を 9 人でわるとき，テレスさんの数は全部で何個でしょう．

P の解答

S…15－6＝9

9×5＝45

P1 の解答

S…15－6＝9

P2 の解答

S…15－6＝9

9×5＝45

45÷15＝3

P3 の解答

S…15－6＝9

9×5＝45

45÷9＝5

5＋6＝11

この問題においては「5 人で同じ数ずつ分けた．家に 6 個のスーパーボールがある．全部で 15 個になった.」という問題状況から上のような問題が作られる．このとき P の問題を本時の問題としたとき，P1 の「一人分のスーパーボールの数はいくつでしょう.」は，P の問題の解決の過程に含まれている．このとき，P の問題に P1 の問題のみが含まれているといえるために，PA であると考えられる．

【PA】　P1⊂P　（ P2，P3）

【問題 7】

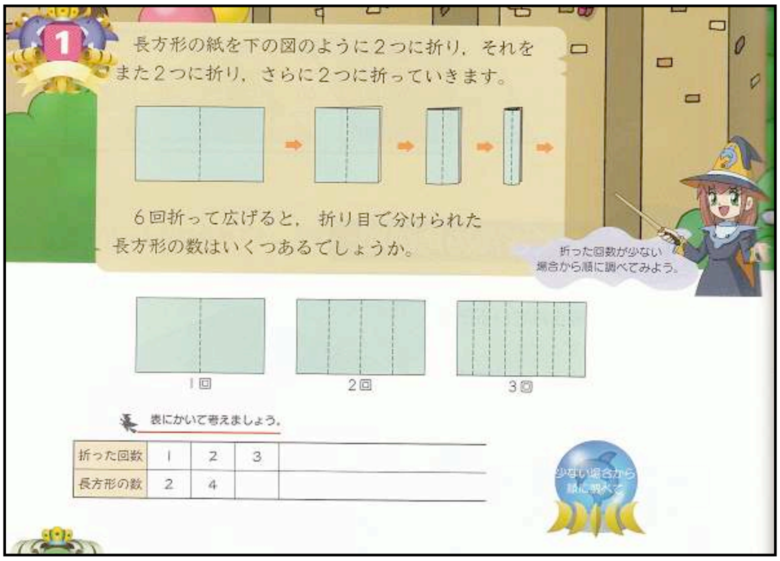


図 8

【本時のねらい】・数の少ない場合から順に調べ，数量の間の規則性を見つけて問題解決ができることがわかる．[15)]

PS…長方形の紙を 2 つに折っていく．それをさらに 2 つに折っていく．6 回折って広げる．

P…6 回折って広げると折り目で分けられた長方形の数はいくつあるでしょう．

P1…6 回折って広げると折り目の数はいくつあるでしょう．

P2…6 回折って広げると折り目でわけられた直角になっている数はいくつでしょう．

P3…長方形の紙を 2 つにおっていくといろいろと数が変化していきます．変化するものと折った回数を表に書いて，きまりをできるだけたくさん見つけましょう．

P4…三角形の紙を 2 つにおっていくといろいろと数が変化していきます．変化するものと折った回数を表に書いて，きまりをできるだけたくさん見つけましょう．

P の解答

折った回数	1	2	3	4	5	6
長方形の数	2	4	8	16	32	64

P2 の解答

折った回数	1	2	3	4	5	6
直角の数	8	16	32	64	128	256

P1 の解答

折った回数	1	2	3	4	5	6
折り目の数	1	3	7	15	31	63

P3 の解答

C1…出来上がった長方形の数（P）

C2…折り目の数（P1）

C3…直角の数（P2 ）

P4の解答

C1…三角形の数

折った回数	1	2	3	4	5	6
三角形の数	2	4	8	16	32	64

C3…できる三角形の角の数

折った回数	1	2	3	4	5	6
角の数	6	12	24	48	96	192

C2…折り目の数

折った回数	1	2	3	4	5	6
折り目の数	1	3	7	15	31	63

この問題の場合，「長方形の紙を 2 つに折っていく．それをさらに 2 つに折っていく．6 回折って広げる.」という問題状況から，上のように，折り目の数，長方形の数，直角の数などの着眼点により様々な問題ができる．このとき，本時の問題を仮に P1 としたとき，学習者によって作られた複数の問題（P，P2，P3，P4）と本時の問題との間には包含関係は成立しない．このように問題状況から作り上げられた本時の問題が，それぞれの問題と包含関係が成り立たないものを PC（Pattern C）とする．

【PC】　P1，P2，P3，P4

【問題 8】

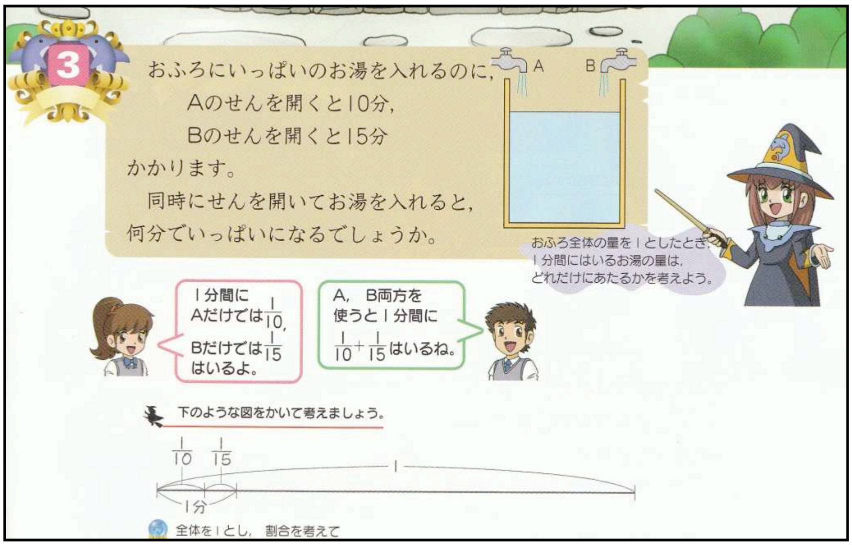


図 9

【本時のねらい】・全体を 1 として，部分と部分の割合の和を考えて，問題の解決ができる．

16)

PS…A のせんでは 10 分，B のせんでは 15 分でいっぱいになる．

P…両方のせんを一緒に使って水を入れると，何分でいっぱいになるでしょう．

P1…A のせんで 1 分間に入る水の量は，どれだけでしょう．

P2…B のせんで 1 分間に入る水の量は，どれだけでしょう．

P3…両方のせんでは 1 分間に入る水の量は，どれだけでしょう．

P4…A のせんではじめ 5 分間水をだし，その後 B のせんもあけました．何分間でいっぱいになるでしょう．

P の解答

S1…水槽の全体の量を 1 とする．

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6} \qquad 1\div\frac{1}{6}=6$$

S2…水槽の全体の量を 10 とする．

$$10\div10=1$$

$$10\div15=\frac{2}{3}$$

$$1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

$$10\div\frac{5}{3}=6$$

S3…水槽の全体の量を 30 とする．

$$\frac{30}{10}+\frac{30}{15}=5 \qquad 30\div5=6$$

P1 の解答

水槽の全体の量を 1 としたとき

$$\frac{1}{10}$$

P2 の解答

水槽の全体の量を 1 としたとき

$\frac{1}{15}$

P3 の解答

水槽の全体の量を 1 としたとき

$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6}$

P4 の解答

$\frac{1}{10}\times 5=\frac{1}{2}$　　　$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6}$

$\frac{1}{2}\div\frac{1}{6}=3$　　　3 分

この問題では，「A のせんでは 10 分，B のせんでは 15 分でいっぱいになる」という問題状況から，上のように P から P4 の問題が作られると考えられる．このとき，P の「両方のせんを一緒に使って水を入れると，何分でいっぱいになるでしょう」という問題を本時の問題としたとき，P1 の「A のせんで，1 分間に入る水の量は，どれだけでしょう．」，　P2 の「B のせんで，1 分間に入る水の量は，どれだけでしょう.」，　P3 の「両方のせんでは 1 分間に入る水の量は，どれだけでしょう」は，P の問題の解決の過程に含まれている．このとき，P の問題に P1，P2，P3 の問題が含まれており，P の問題に複数の問題が含まれているために，PB であると考えられる．

【PB】　　P1，　P2，　P3⊂P　　（P4）

4-2　オープンプロブレムのモデル化

4-2-1　問題の再設定

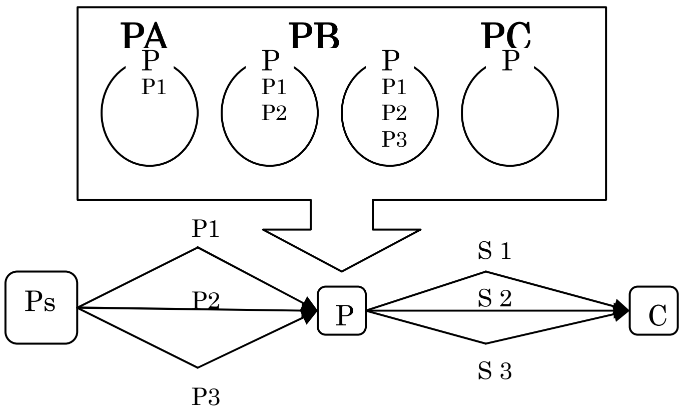
以上，8 つの問題をもとに問題状況から問題が構成されるパターン分けをおこなった．ここでオープンエンドアプローチとは異なる，この新しいモデルについての考察をしていきたい．まず，本時の問題を中心に，その他の問題がどのような関係にあるか，主に包含関係という点でみてきた．そして 3 つのタイプに分けることができた．

PA : 学習者により問題状況から作られた問題のうち，本時の問題がある一つの問題を包含しているもの

PB : 学習者により問題状況から作られた問題のうち，本時の問題に複数の問題が含まれているもの

PC : 学習者によって作られた複数の問題と本時の問題との間には包含関係は成立しないもの

これら 3 つをモデル化したものが，下のような形である．



しかし，ここで一つの疑問が浮かんだ．それは，問題状況から学習者により作られた問題はいかにして本時の問題になりうるのかということである．問題状況から問題を作り，そしてさらにそこから本時の問題を決定すること，つまり「問題の再設定」についてである．

まず，考えるのが何を基準にして行うのかということである．これまでの具体的な問題をみてきたように，ある問題状況（PS）に対し，学習者それぞれがつくりだした問題（P1，P2，P3）は教師がねらいにそって本時の問題へと再設定する．しかし，あくまで学習者が主体となるべきである．このとき最も学習者にとってわかりやすい判断基準は，学習者にとって既習の内容のものであるか，まったく新しい学習，つまり未知のものであるかということである．

学習者にとって問題が未知であるものでなければ，もっといえば既習の内容を生かし未知なるものへの試行錯誤するものでなければ，よりよい問題といえない．その問題の再設定を考えた上で，問題状況から問題を構成するモデルをもう一度再検討してみる．

4-2-2　モデルの修正

Ps: 問題状況（problem situation）　P:問題　（problem）　S:解決（solution）
C:解答（conclusion）とする.

【問題 1】

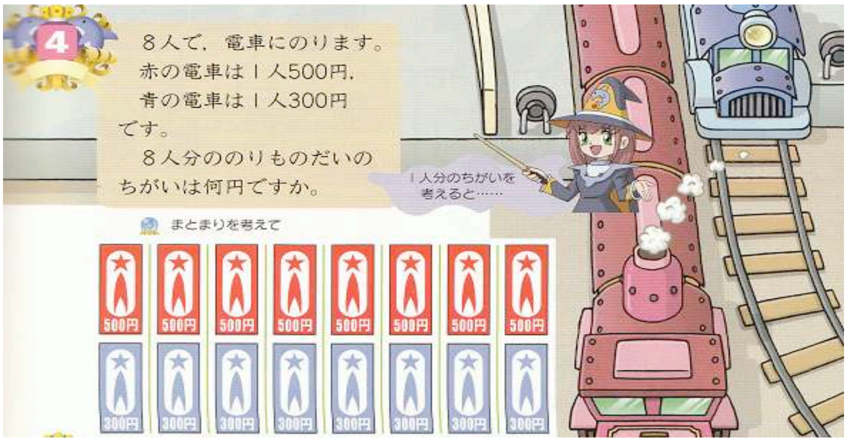


図 5

【本時のねらい】・減法と乗法を組み合わせた問題を「まとまりを考えて」解くことができる．12)

まず問題状況（PS : 8 人で電車に乗る．赤の電車は一人 500 円．青の電車は一人 300 円）から児童は，それぞれ問題を構成する．

P…8 人分の乗り物代のねだんの違いはなんですか.

P1…赤と青の電車の乗り物代のねだんの違いはいくらですか.

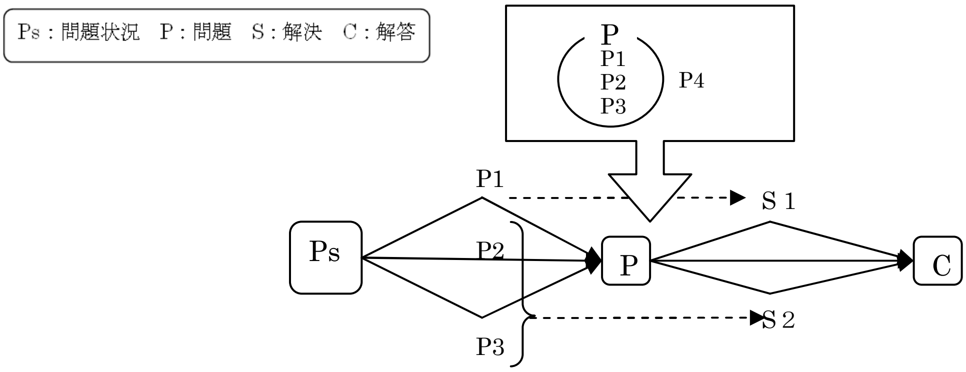
P2…赤の電車の 8 人分の乗り物代はいくらでしょう．

P3…青の電車の 8 人分の乗り物代はいくらでしょう．

P4…8 人が赤と青に分かれて乗った合計の値段は 3200 円でした．それぞれに赤と青に何人ずつ乗ったのでしょう．

以上が考えられる問題である．

このとき，P の問題「8 人分の乗り物代のねだんの違いはなんですか.」を解く過程に，P1 の「赤と青の電車の乗り物代のねだんの違い」，P2 の「赤の電車の 8 人分の乗り物代」，P3 の「青の電車の 8 人分の乗り物代」の問題解決が含まれる．一方で P4「8 人が赤と青に分かれて乗った合計の値段は 3200 円でした．それぞれに赤と青に何人ずつ乗ったのでしょう.」は P の問題を主とするとき，P を解く過程においては関係のないものとなる．
また，P1 は P の問題における S1 に，P2，P3 は P の問題における S2 に含まれるため以下のような図式ができる．



　このように，問題状況から学習者により作られた問題のうち，ある問題を主とし，その他の問題が，その主問題の解決の過程に含まれ小問題になるタイプを【既知と未知の混合状態】とする．これは既習の学習を元に，学習者にとって未知なる問題が生まれたものである．つまり既知と未知の問題群によって構成が期待される問題状況である．

【問題 2】

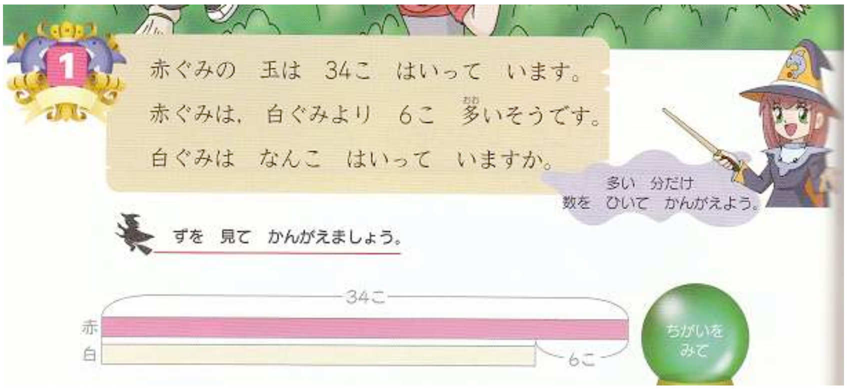


図 2

【本時のねらい】　・数量の関係をテープ図に使って表すことができる.
・　へる前の数を求める逆思考の問題を，図をもとにして考え，解くことができる　9）

Ｐｓ…赤組の玉は 34 こ　赤組は白組より 6 こおおい

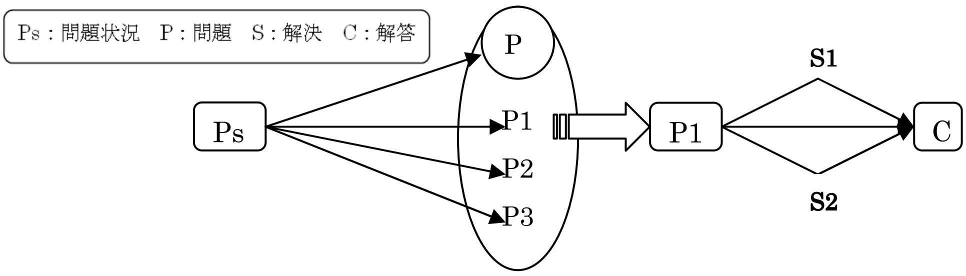
P…白組はなんこ入っていますか？

P1…赤組，白組の玉はあわせて何個でしょう.

P2…赤組，白組の玉が同点になるとき，それぞれ何個になるでしょう.

P3…同じ時間もう一度玉入れをしたとき，白組の玉の数は全部で何個でしょう.（ただし，入る玉の数は同じとします.）

この問題は，学習者よって問題状況から作られた問題のうち，P1，P2，P3 の問題は，P の問題（白組の玉の数）を解くことによって，はじめて解答が導き出される．つまり，学習者によって作られた問題群は，問題 P をいつも内包しながら発展しているような形で数学的活動が行われる．このように，問題状況から作られた問題のうち，ある一つの問題を内包しながら発展する型を下のようなモデルであらわす．このとき学習者にとって，P の問題はもちろん，P1，P2，P3 の問題も未知なるものといえる．つまり，未知の問題群によって構成が期待される問題状況である.



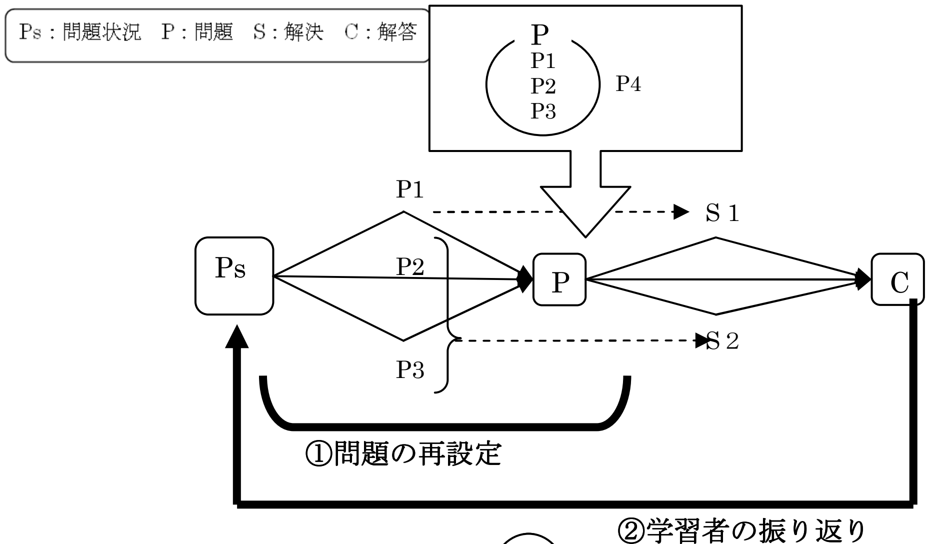
以上大別して 2 つのモデルを提示した. この提案するモデルを, 明確に 2 つに分けたが, 問題状況からつくられ問題，つまり学習者である児童の経験や実態，教師の知識によってこのモデルは依存する.

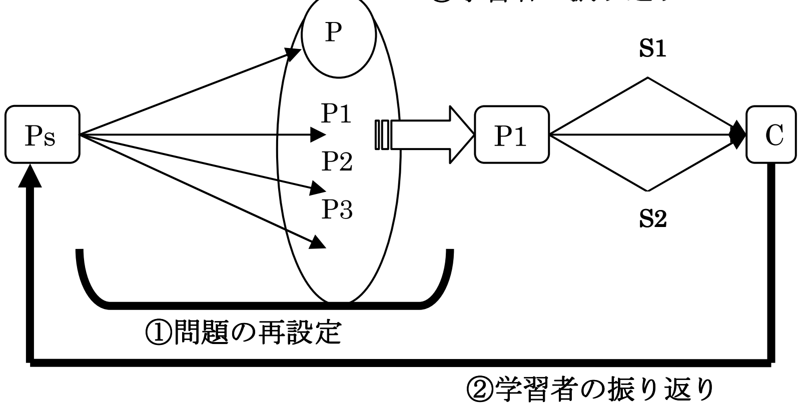
4-3　　オープンプロブレム

従来のクローズドな問題，オープンエンドアプローチの問題共に，教師が提示された問題の解決が学習者の課題となっていた．このとき学習者にとっての「問題」は単に目の前にある課題の一つに過ぎず，本来学習者にとって「問題」とは，定義した「学習者にとって解きたくなるようなもの」であることが望ましい．問題状況から問題を構成すること，これらの活動を通して，多様な解決を奨励しつつも，学習者自身が問題を作ることで，問題の価値の吟味をすることが可能であり，さらにどのような問題が数学的によい，価値のあるものかを検討することができる．その点でクローズドな問題，従来のオープンエンドの問題よりも，よりよいものと考える．

加えて，問題が解決したら終わりでなく，学習者にとって「問題」とは，そこからさらに発展・応用が可能な問題でなければならないと考える．問題状況から問題を構成していくのは学習者であるが，主として教師の役割も大きく，さらに解決したあとの学習者の問題の価値の吟味も重要になってくるのではないだろうか．そこで行われるのが学習者の振り返りである．本時の問題を解決することにより，問題状況からつくられた問題と比較し，吟味することができる．本時の問題の解決の過程に含まれるもの，本時の問題を元に発展していくもの，それらを学習者自身で考えることによってよりよい活動が期待できる．

先に触れた「問題の再設定」，そして「学習者の振り返り」この過程を経て，はじめてオープンプロブレムの真価を発揮できると考える．





第 4 章のまとめ

本章では，研究課題 4 である教材開発の試行的展開による考察を行った．

4-1 では，教科書の問題を元に教材分析を行い，問題状況から作られる問題と本時の問題との関係をみてきた．それらの関係が包括関係にあることにより分類を行った．

4-2 では，オープンプロブレムのモデル化を行い，本時の問題へと再設定する際の基準として，学習者にとって既習であるか否か，つまり「既知」と「未知」を基準にすることを考えモデルの修正を行った．

4-3 では，オープンプロブレムの考察を行った．本来学習者にとって「問題」とは，定義した「学習者にとって解きたくなるようなもの」であることが望ましく，問題状況から問題を構成すること，これらの活動を通して，多様な解決を奨励しつつも，学習者自身が問題を作ることで，問題の価値の吟味をすることが可能であり，さらにどのような問題が数学的によい，価値のあるものかを検討することができる点でクローズドな問題，従来のオープンエンドの問題よりも，よりよいものと考えた．

第 5 章　　本研究のまとめ

本章では，研究から得られた結論，さらに本研究を考える中で明らかとなった今後の考察について述べる．

5-1　本研究のまとめ

本研究の目的は，オープンエンドアプローチの考察を通して，クローズドな問題からオープンエンドの問題を作成し，より児童の積極的な活動を支援していくことにある．これを達成するために，まずオープンエンドの問題についての定義を明確にし，理解をより深めなければならないために，以下のような課題を設定した．

課題 1　「未完結」「結果がオープン」「オープンエンド」とはどういうことか.

課題 2　「正答がいく通りにも可能になる条件づけ」とはなにか.

課題 3　オープンエンドの問題づくり

課題 4　教材開発の試行的展開

第1，第2の課題においては，以下のような結論を得た．

2-1において，島田氏のオープンエンドアプローチの具体的な事例を基に考察をした．

オープンエンドな問題は，多様な解決の過程が得られ，結果がオープンとなった．これは従来の問題のように答えを見出すことを直接の課題とするのでなく，答えを得るための方法を授業の課題としているためであると考えられた．一方従来の問題は答えを見出すことで「完結」となるが，問題解決の多様性から発展の要素を含むため，オープンエンドな問題は「未完結」となるという結論にいたった．

さらに 2-2 において，オープンエンドな問題は，なぜ多様な解が得られるのかという疑問から始まり，問題自体が学習者に開かれ，未完結な問題に学習者自身が条件付けをすることにより，思考や数学的な活動が多様になり，正答がいく通りにも可能になると結論することができた．つまり問題自体が，問題を解く児童に対し開かれている（=open）か否かということが重要なのである．

2-3 では，従来の問題と，このオープンエンドな問題の整理をした上で，両者が共通するのは，多様な解決の過程が生じるという点であることがわかった．オープンエンドな問題では，問題を解く中で学習者が自由に条件付けをおこなった結果であると考えられる．そして問題を解く上で学習者が自由に条件付けをすることにより，多様な解決が得られることを奨励すべきと考えた．

次に，第3の課題「オープンエンドの問題づくり」においては以下のような結論を得た．

3章において，従来の問題と，このオープンエンドな問題が共通する，教師が提示した問題を学習者が解くということに関して，教師が提示する「問題」を解くことだけでなく，その「問題」自体を学習者が構成し，条件付けによる多様性を得ることを提案した．問題を構成することを通して，問題がいかにして作り上げられるのか，どのような問題が数学的によい（価値のあるもの）かという力をつけていき，また学習者にとっての「具体的な場面」は「問題状況」から「問題」を構成する過程を経ることでより望ましい活動が期待できるのではないかと結論付けた．

最後に第 4 の課題「教材開発の試行的展開」については，以下の結論を得た．

4 章において，問題状況から問題が作られ，そして問題解決へといたる過程を「オープン

プロブレム」とした上で開発を行い，教科書の事例を元に，分析を行った．そこで，モデルの修正を行い，既知と未知の問題群によって構成が期待される問題状況，つまり【既知と未知の混合状態】，未知の問題群によって構成が期待される問題状況，【未知の混合状態】の大きくわけて 2 つのモデルを示した．ただし，問題状況からつくられ問題，つまり学習者である児童の経験や実態，教師の知識によって，このモデルは依存するものである．この両者のモデルの「問題の再設定」，そして「学習者の振り返り」過程を経ることで，これまでの多様な解決を奨励しながらも，学習者による問題の価値付けを行うことができると考える．さらに，本時の問題の解決の過程に含まれるもの，本時の問題を元に発展していくもの，それらを学習者自身で考えることによって，学習者の問題に対するよりよい活動が期待できるものと結論づけた．

5-2　今後の課題

島田氏の述べるオープンエンドな問題の事例を元に，オープンプロブレムの提案とそのモデル化をおこなった．しかし実際のモデルの検証はおこなっていないものである．また主にとりあげた事例の領域は，「数と計算」であった．さらに小学校段階では，未知の問題群によって構成が期待される問題状況の事例が特に少なかった．そのため未知から未知への発展という点でのより詳しい考察はしていないものである．よって

（1）　モデルの実証
（2）　領域における違い
（3）　発達段階における考察（中学校でのオープンプロブレムの開発）

これが必要であり，今後も具体的にオープンプロブレムの実践における課題についての検討も進めていく必要がある．

以上のことが残された課題である．

引用・参考文献

1) 島田茂「算数・数学科のオープンエンドアプローチ　～授業改善への新しい提案～」みずうみ書房 1977　　p9

2)　同　上　p9

3)　同　上　p22

4)　同　上　p52

5)　同　上　p10

6)　同　上　p10

7) R・チャールズ/F・レスター著　「算数の問題解決の指導　中島健三訳」金子書房　1983

8) S・クルーリック/J・Aルドニック著「算数・数学学科問題解決指導ハンドブック」明治図書出版　1985

9) 細川藤次・熊田信彦・清水静海　「新版　算数　2年下指導書　第二部詳説 - 朱註と解説 - 」　啓林館　p50

10) 細川藤次・熊田信彦・清水静海　「新版　算数　2年上指導書　第二部詳説 - 朱註と解説 - 」　啓林館　p70

11) 細川藤次・熊田信彦・清水静海　「新版　算数　2年下指導書　第二部詳説 - 朱註と解説 - 」　啓林館　p38

12) 細川藤次・熊田信彦・清水静海　「新版　算数　4年上指導書　第二部詳説 - 朱註と解説 - 」　啓林館　p37

13) 細川藤次・熊田信彦・清水静海　「新版　算数　4年上指導書　第二部詳説 - 朱註と解説 - 」　啓林館　p56

14) 細川藤次・熊田信彦・清水静海　「新版　算数　4年下指導書　第二部詳説 - 朱註と解説 - 」　啓林館　p31

15) 細川藤次・熊田信彦・清水静海　「新版　算数　5年下指導書　第二部詳説 - 朱註と解説 - 」　啓林館　p16

16) 細川藤次・熊田信彦・清水静海　「新版　算数　6年下指導書　第二部詳説 - 朱註と解説 - 」　啓林館　p59

図1　清水静海・船越俊介　ほか41名「わくわく算数3下」啓林館　2004　p5

図2　清水静海・船越俊介　ほか41名「わくわく算数2上」啓林館　2004　p61

図3　清水静海・船越俊介　ほか41名「わくわく算数3上」啓林館　2004　p40

図4　清水静海・船越俊介　ほか41名「わくわく算数3 上」啓林館　2004　p78

図5　清水静海・船越俊介　ほか41名「わくわく算数3下」啓林館　2004　p43

図6　清水静海・船越俊介　ほか41名「わくわく算数4上」啓林館　2004　p80

図7　清水静海・船越俊介　ほか41名「わくわく算数4下」啓林館　2004　p31

図8　清水静海・船越俊介　ほか41名「わくわく算数5上」啓林館　2004　p64

図9　清水静海・船越俊介　ほか41名「わくわく算数6下」啓林館　2004　p55

鳥取大学数学教育研究　ISSN 1881! 6134

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/journal.html

編集委員

（投稿原稿の内容に応じて，外部編集委員を招聘することがあります）

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。
- 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
- 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
- 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
- その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/